Cálculo de la dimensión fractal en imágenes digitales

Juan Ramón Sánchez Arroyo

December 2024

Abstract

Desde la publicación del libro ”Fractals: Form, Chance and Dimension” por Mandelbrot en 1977, la geometría fractal y el estudio de sus aplicaciones ha captado la atención de muchos investigadores. En el campo de la teledetección, estas aplicaciones encuentran su lugar en la estimación de la dimensión fractal de las imágenes captadas. Esta dimensión fractal (D) es un término que en nuestro dominio se utiliza para estudiar la complejidad de las formas de la imagen a estudiar en cuestión. En este trabajo se presentan diversos métodos por los cuales se puede obtener una aproximación de esta, además de las aplicaciones que tiene su cálculo y los problemas que presentan estos métodos

1 Introducción

Aunque el estudio de fractales y su dimensión comenzó a finales del siglo XIX con el Conjunto de Cantor, la instauración de la geometría fractal como tal tuvo que esperar al estudio de Mandelbrot de parámetros de polinomios cuadrados, y la publicación de su libro. Desde entonces, el interés por sus aplicaciones en teledetección se disparó. Esto se puede explicar porque las imágenes obtenidas mediante esta disciplina, aparte de ser espectral y espacialmente complejas, muestran cierta auto semejanza, similar a la presente en fractales definidos matemáticamente. Por lo tanto, la aproximación de una dimensión fractal a la imagen puede proveernos de bastante información sobre esta, como veremos posteriormente.

2 Fractales y su dimensión

Como afirmó el propio Mandelbrot, la naturaleza presenta formas tan irregulares que se escapan de las capacidades de la geometría euclidiana. Muchas formas y patrones que se encuentran en la naturaleza son tan irregulares que es poco eficaz estudiarlas desde el punto de vista clásico. Debido a ello, Mandelbrot acuñó el término fractal para agrupar a todos estos objetos.

El origen etimológico de este término, de acuerdo a él, es el adjetivo latín fractus, raíz también de palabras como fracción o fragmento, que significa literalmente "fragmentado". Formalmente es un conjunto cuya dimensión fractal es superior a la topológica. Una característica fundamental de los objetos fractales es que sus propiedades métricas medidas, como la longitud o el área, se pueden expresar como una función de la escala de medición. Un ejemplo clásico para ilustrar esta propiedad es la longitud de una línea de costa (Richardson 1961, Mandelbrot 1967).

Cuando se mide a una determinada escala espacial δ, la longitud total de una línea de costa L(δ) se estima como un conjunto de N segmentos rectilíneos de longitud δ. Dado que los pequeños detalles de la línea de costa (por ejemplo, las penínsulas) no reconocidos a resoluciones espaciales más bajas se hacen evidentes a resoluciones espaciales más altas, la longitud medida L(δ) aumenta de forma inversamente proporcional a la escala de medición. Así, en la geometría fractal, la longitud se adecúa más a un , y se descubre que este proceso está controlado por un parámetro constante (Richardson 1961). Mandelbrot (1967, 1977) generalizó y amplió los resultados empíricos de Richardson (1961) y demostró que la relación entre la longitud y la escala de medida puede describirse mediante la ley de potencia:

$$L(\delta) = K\delta^{1-D} \tag{1}$$

Donde K es una constante y D representa la dimensión fractal. El uso de esta medida como extensión del concepto clásico de dimensión es utilizado para medir la irregularidad de un objeto. Al ser la dimensión, por ejemplo, de una línea recta equivalente a la de un segmento curvilíneo que abarque prácticamente un plano, esta nueva medida pretende cuantizar esa irregularidad. Es una forma de mostrar, dado un objeto contenido en un espacio de dimensión superior (una línea en un plano, una superficie en un espacio tridimensional...), como de cerca está de la dimensión topológica del espacio que lo contiene. Por ejemplo, el Conjunto de Cantor, al ser un conjunto infinito de puntos en una línea recta, tiene una dimensión de $\frac{log(2)}{log(3)}$ (entre 0 y 1) como se mostrará en el siguiente apartado. De este modo, D está asociada a la complejidad o rugosidad de la forma de un objeto.

La autosimilitud es también una propiedad muy importante de los fractales. Formalmente es definida como la equivalencia entre un conjunto y un subconjunto perteneciente a este al ser escalado. Es decir, cuando una parte de un objeto es equivalente a este en un menor tamaño. Por ejemplo, una recta es autosemejante, ya que un segmento de esta escalado adecuadamente es idéntico a la recta original.

Sin embargo, en contraste con los fractales matemáticos, los objetos naturales captados en imágenes no presentan exactamente esta auto similitud, solo se da aproximadamente o se conservan propiedades estadísticas en el cambio de escala.

3 Métodos de cálculo y aproximación de la dimensión fractal

Para objetos que presenten una autosimilitud estricta, el cálculo de la dimensión fractal viene dado por la siguiente fórmula:

$$D = \lim \epsilon \to 0(\frac{log(N(\epsilon))}{log(\frac{1}{\epsilon})})$$

Donde N(ϵ) representa las bolas de radio ϵ necesarias para abarcar totalmente el objeto fractal.

En el caso del Conjunto de Cantor, en la primera iteración se necesitan 2 bolas de radio $\frac{1}{3}$ para recubrir el conjunto, en la segunda 4 de radio $\frac{1}{9}$, y generalizando se deduce que para la iteración n se cumple que:

$$N(\frac{1}{3^n}) = 2^n$$

Aplicando la definición:

$$D(Cantor) = \lim n \to \infty \frac{log(2^n)}{log(\frac{1}{\frac{1}{3^n}})} = \frac{log(2^n)}{log(3^n)} = \frac{log(2)log(n)}{log(3)log(n)} = \frac{log(2)}{log(3)}$$

como vimos anteriormente.

Sin embargo, para objetos que no sean completamente autosimilares no podemos hacer este cálculo analíticamente, y debemos por tanto estimarlo empíricamente. Para ello, disponemos actualmente de x métodos numéricos que varían en la forma que aproximan la cantidad (es decir, N(ϵ)) del objeto, pero muestran siempre la misma estructura:

- Primero, medimos la cantidad del objeto (la imagen en este caso) para una serie de longitudes.
- Posteriormente, representamos en una gráfica el logaritmo de las cantidades medidas respecto a sus longitudes.
- Finalmente, se hace una regresión lineal, y con la pendiente de la recta obtenida se obtiene la dimensión fractal

En nuestro caso, las imágenes pueden verse como superficies con elevaciones dadas por el ND o el valor del pixel, y por lo tanto se pueden emplear para la extracción de características. Para ello, utilizaremos x métodos basados en dos enfoques distintos: calcular directamente la dimensión fractal iterando sobre la imagen o extrayendo características de la imagen en cuestión y calculando su dimensión fractal, para posteriormente añadirle 1 debido al cambio de dimensión euclídea.

3.1 Método del prisma triangular

El método del prisma triangular fue desarrollado principalmente para calcular la D de las superficies topográficas, pero se ha aplicado ampliamente a las imágenes obtenidas por teledetección. El interpreta los valores ND de las imágenes como valores de elevación, y separa la imagen en tantos cuadrados de lado δ como le sea posible, interpola un valor central (e en la figura 1(a)), divide el cuadrado en cuatro triángulos (abe, bce, cde y dae en la figura 1(b)) y, a continuación, calcula las superficies superiores de los prismas que resultan de elevar los triángulos a sus elevaciones dadas (A, B, C y D en la figura 1(a)). Repitiendo este cálculo para tamaños de cuadrados geométricamente crecientes (aumentando δ), puede establecerse la relación entre la superficie superior total de los prismas (es decir, la suma de las áreas A, B, C y D en la figura 1(a)) y el espaciado de los cuadrados (es decir, el tamaño del escalón δ), y utilizarse para estimar D (tabla 1). El único parámetro de entrada que requiere este método es el número de tamaños de paso. Después de calcular el área de todas

3.2 El método del box-counting diferencial (DBC)

Este método es una variación del box-counting adaptada a superficies no autosemejantes. Para calcular N(ϵ) se sigue el siguiente método. Suponemos que estamos tratando con una matriz de M$\times$M pixeles. Para todo s tal que M/2 $\geq$ s $\geq$ 2 se separa la imagen en cuadrículas de s$\times$s, rellenándolas con 0 para conseguir que todas las cuadrículas dadas sean cuadradas. El radio ϵ de cada medida se obtiene por $\frac{s}{M}$ para cada s y n(ϵ) como el el número de cajas de altura h que se necesitan apilar para representar la variación de los niveles de gris, dada por $\frac{sG}{M}$, siendo G el número total de niveles posibles de gris de la imagen. Una vez calculados todos los niveles de gris de una cuadrícula, el resultado devuelto por la cuadrícula (i,j) viene dado por:

$$n(\epsilon)_{(i,j)} = \lceil \frac{g_{max}}{h} \rceil - \lceil \frac{g_{min}}{h} \rceil + 1$$

Donde gmax y gmin representan los valores de gris máximos y mínimos de la cuadrícula. Y con todas las cuadrículas ya iteradas, tenemos el resultado final dado por:

$$N(\epsilon) = \sum_{i,j} n(\epsilon)_{(i,j)}$$

Después de iterar sobre todos los valores posibles de s, representamos la gráfica log-log y devolvemos la pendiente cambiada de signo.

3.3 Variograma

El variograma nos permite el calculo de la disimilitud promedio entre pixeles en función de la distancia entre ellos. Matemáticamente se expresa como:

$$y(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i,j} (ND_{i,j} - ND'_{i,j})^2$$

donde y(h) es la disimilitud calculada, N(h) es el número total de píxeles a la distancia dada, y $ND_{i,j}$ y $ND'_{i,j}$ son dos pixeles a distancia h.

Para este caso consideramos cada ϵ como la distancia pasada como argumento y N(ϵ) como la disimilitud calculada. Procedemos como siempre haciendo la regresión de la gráfica log-log y devolvemos D = 3 - m, donde m es la pendiente de la recta.

4 Aplicaciones

Hay mucho escrito sobre las aplicaciones del calculo de la dimensión fractal de las imágenes obtenidas mediante teledetección. En este trabajo se trataran las 4 principales: (1) para caracterizar la complejidad espacial global de una imagen, (2) para proporcionar información textual a la clasificación de imágenes y (3) para describir la complejidad geométrica de la forma de las clases de características en una imagen clasificada.

4.1 Textura y complejidad

El uso de modelos fractales, especialmente la estimación de la dimensión fractal (D), es útil para caracterizar la complejidad textural de imágenes obtenidas por sensores remotos. Normalmente, se calcula un D global para toda la imagen, lo que permite comparar diferentes tipos de cobertura terrestre, sensores y bandas espectrales.

Estudios han demostrado que los valores de D pueden variar significativamente según el tipo de cobertura y la banda espectral analizada. Por ejemplo, los paisajes urbanos suelen tener valores de D más altos que las áreas rurales, y el contraste en D entre diferentes tipos de cobertura terrestre es más pronunciado en ciertas bandas visibles.

Las técnicas fractales también se han utilizado para analizar la variabilidad espacial de fenómenos ambientales en perfiles extraídos de imágenes, mostrando cómo los cambios en D se relacionan con tipos de cobertura terrestre y cambios temporales, como el efecto de isla de calor urbano.

La caracterización fractal de imágenes puede ser una herramienta útil para seleccionar datos adecuados para aplicaciones específicas, identificar bandas espectrales ruidosas, analizar el contenido de información, y realizar clasificaciones o análisis de textura sin necesidad de clasificar previamente las imágenes.

4.2 Segmentación y clasificación

El uso exclusivo de firmas espectrales para distinguir tipos de cobertura terrestre ha resultado insuficiente. Se ha demostrado que los resultados de clasificación mejoran al incorporar información sobre variaciones espaciales en los valores de los píxeles. Diversas técnicas han sido propuestas para extraer información de la textura de imágenes de los sensores remotos, incluyendo matrices de co-ocurrencia, varianza local, transformadas wavelet y estadísticas de autocorrelación espacial.

Las técnicas fractales son especialmente adecuadas para analizar características de la textura en imágenes de sensores remotos, ya que los elementos ambientales representados suelen ser complejos y fragmentados. Las variaciones locales en la dimensión fractal (D) pueden usarse como medidas de textura para segmentar imágenes, ya que diferentes tipos de cobertura terrestre pueden tener texturas o rugosidades características descritas por valores únicos de D. Esto permitiría considerar D como una "firma fractal" de cada tipo de cobertura terrestre, facilitando su extracción.

Un ejemplo destacado de la utilidad de estas técnicas es el llamado "algoritmo local de D", que utiliza un núcleo de 9x9 píxeles para calcular D por el metodo del prisma triangular. Este enfoque ha mostrado resultados mixtos: en imágenes Landsat TM, permitió diferenciar cinco de seis tipos de vegetación mediterránea, mientras que en imágenes GER con menor calidad no se lograron buenos resultados. Aunque los valores locales de D parecieron reflejar las diferencias entre tipos de cobertura en Landsat, no fueron suficientes por sí solos para la clasificación.

Estudios comparativos han señalado que las técnicas fractales pueden ser útiles, pero su eficacia depende del método de cálculo, la banda espectral y la calidad de la imagen. Además, presentan limitaciones como el "efecto de desenfoque," que omite variaciones texturales a escalas menores que el tamaño mínimo del paso analizado, y desafíos como la selección del tamaño adecuado de ventana y el manejo de efectos en los bordes. Estas cuestiones son cruciales para obtener resultados significativos en el análisis fractal local.

4.3 Análisis de características ya detectadas en imágenes

El análisis fractal ha demostrado ser valioso para describir la complejidad espacial de características clasificadas en imágenes. Un estudio mostró que es posible relacionar tipos de cobertura con valores de D. Por ejemplo, los bosques se caracterizan por valores altos de D y grandes regiones, mientras que las actividades agrícolas presentan regiones grandes con D inversamente relacionado con la intensidad de cultivo. Las áreas urbanas, en cambio, tienen regiones pequeñas con valores de D relativamente altos.

La descripción fractal de características clasificadas puede proporcionar estadísticas útiles para caracterizar clases agregadas de características. El conocimiento de los valores característicos de D para diferentes clases puede ayudar a entender los procesos que generan los fenómenos analizados. Además, estos datos pueden integrarse en sistemas de información geográfica (SIG), permitiendo investigar la ubicación y descripción de regiones individuales, así como verificar la fiabilidad de los procesos de clasificación y etiquetado.