Übungsblatt 12

Julius Auer, Thomas Tegethoff

Aufgabe 1 ():

a) Gesucht sind die Parameter a, b, c, d, h, i, j, k für zwei Splines $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, g : [1, 2] \to \mathbb{R}$. Die gesuchten Funktionen mit ihren Ableitungen sind:

$$\begin{aligned}
f(x) &= a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \\
f'(x) &= 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c \\
f''(x) &= 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b \\
g(x) &= h \cdot x^3 + i \cdot x^2 + j \cdot x + k \\
g'(x) &= 3 \cdot h \cdot x^2 + 2 \cdot i \cdot x + j \\
g''(x) &= 6 \cdot h \cdot x + 2 \cdot i
\end{aligned}$$

Aus der Beschreibung sind direkt die folgenden Eigenschaften abzulesen:

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0 \\
f'(0) &= 0 \\
g(2) &= 8 \\
g'(2) &= 8 \\
f''(1) &= 0 \\
g''(1) &= 0
\end{aligned}$$

Um das soweit unterbestimmte Gleichungssystem lösen zu können, verwenden wir als zusätzliche Eigenschaft die Tatsache, dass sich f und g an der Grenze ihrer Definitionsbereiche bei $x = 1$ schneiden müssen. Es gilt also zusätzlich:

$$\begin{aligned}
f(1) &= g(1) \\
f'(1) &= g'(1)
\end{aligned}$$

Ausformuliert erhält man somit ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
d &= 0 \\
k &= 0 \\
8 \cdot h + 4 \cdot i + 2 \cdot j &= 8 \\
12 \cdot h + 4 \cdot i + j &= 8 \\
6 \cdot a + 2 \cdot b &= 0 \\
6 \cdot h + 2 \cdot i &= 0 \\
a + b + c &= h + i + j \\
3 \cdot a + 2 \cdot b + c &= 3 \cdot h + 2 \cdot i + j
\end{aligned}$$

d, k sind also an dieser Stelle bereits bekannt. Für die übrigen Parameter lösen wir mittels Gaussschem Eliminierungsverfahren (*stöhn*):

a	b	c	h	i	j	$=$
0	0	0	8	4	2	8
0	0	0	12	4	1	8
6	2	0	0	0	0	0
0	0	0	6	2	0	0
1	1	1	-1	-1	-1	0
3	2	1	-3	-2	-1	0

Zuerst etwas umsortieren:

a	b	c	h	i	j	$=$
1	1	1	-1	-1	-1	0
3	2	1	-3	-2	-1	0
6	2	0	0	0	0	0
0	0	0	6	2	0	0
0	0	0	8	4	2	8
0	0	0	12	4	1	8

a-Spalte eliminieren:

a	b	c	h	i	j	$=$
1	1	1	-1	-1	-1	0
0	-1	-2	0	1	2	0
0	-4	-6	6	6	6	0
0	0	0	6	2	0	0
0	0	0	8	4	2	8
0	0	0	12	4	1	8

b-Spalte eliminieren:

a	b	c	h	i	j	$=$
1	1	1	-1	-1	-1	0
0	1	2	0	-1	-2	0
0	0	2	6	2	-2	0
0	0	0	6	2	0	0
0	0	0	8	4	2	8
0	0	0	12	4	1	8

c-Spalte sieht schon gut aus, deshalb weiter mit h:

a	b	c	h	i	j	$=$
1	1	1	-1	-1	-1	0
0	1	2	0	-1	-2	0
0	0	1	3	1	-1	0
0	0	0	6	2	0	0
0	0	0	0	4	6	24
0	0	0	0	0	1	8

So ein Glück: i, j ergeben sich direkt! Von unten nach oben können nun alle Parameter ausgerechnet werden, zu:

$$a = 2, b = -6, c = 8,$$
$$h = 2, i = -6, j = 8$$

Eine partielle Interpolation war hier also gar nicht nötig - ein einziges Polynom $e : [0,2] \to \mathbb{R}$ genügt, um alle Eigenschaften zu erfüllen. Ergebnis:

$$e(x) = 2 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 2 \cdot x$$

b) Auch wenn $f = g = e$ sind hier unabhängig von einander f in blau und g in rot geplottet (Abbildung 1).

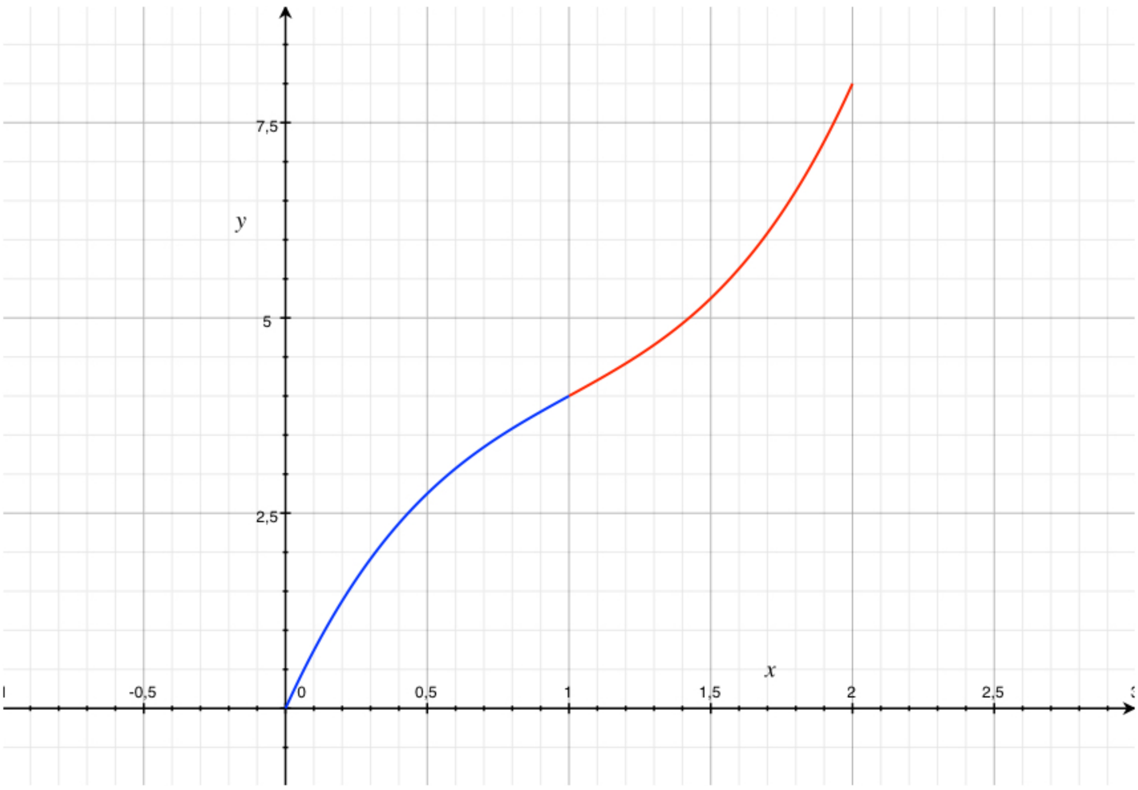


Abbildung 1: Spline

c) Der Schnittpunkt (x_s, y_s) ist vorgegeben bei $x_s = 1$ mit:

$$y_s = e(1) = a + b + c = 4$$

Die Geschwindigkeit v ist dort:

$$v = e'(1) = 3 \cdot a + 2 \cdot b + c = 2$$

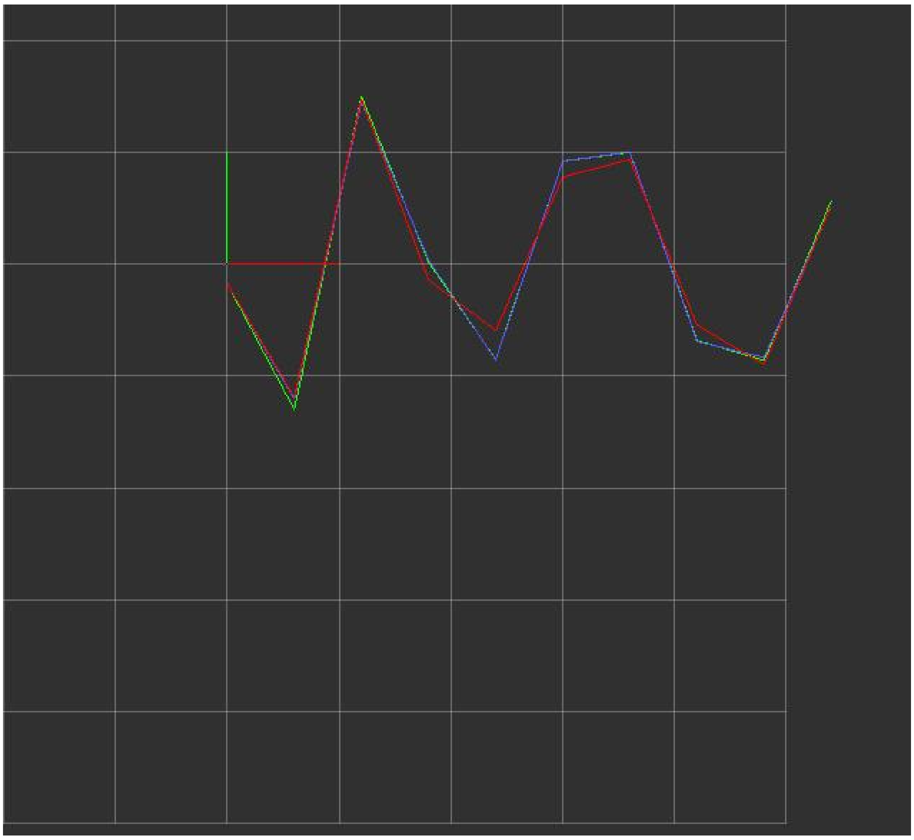
Aufgabe 2 ():

Es muss nur ein klitzekleines Stückchen Code geändert werden, um die zufälligen Punkte zu erzeugen:

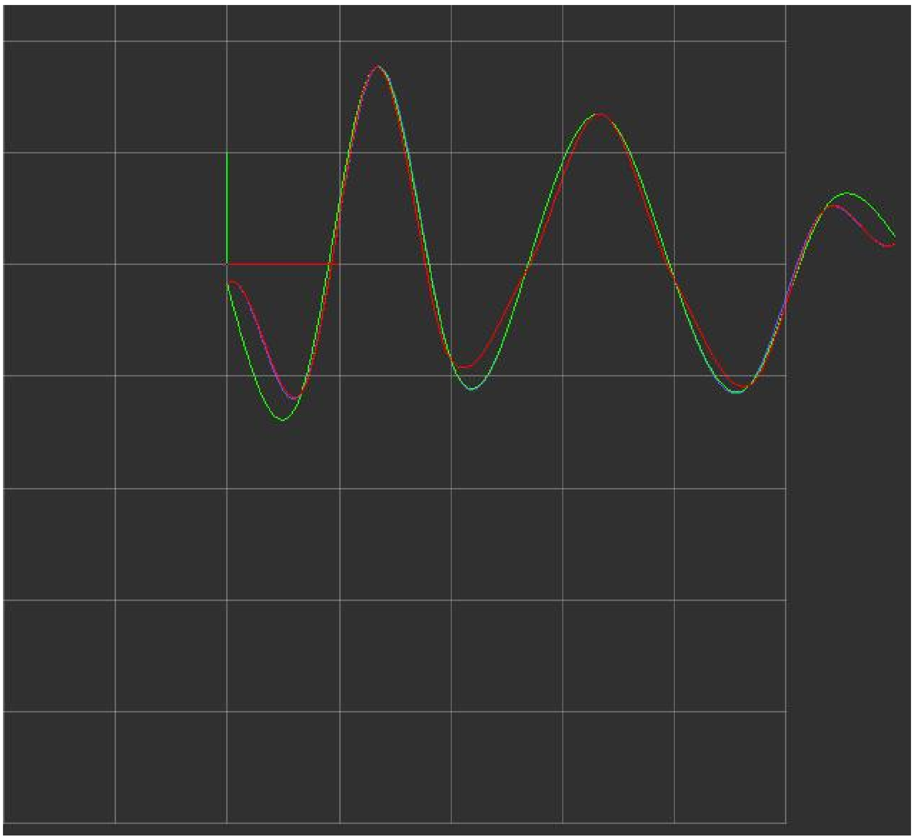
```
    Array<double> x_set(10);
    Array<double> y_set(10);
// x_set << 0.688792, 1.15454, 1.67894, 2.1, 2.7, 3.1, 3.6, 4, 5, 6;
// y_set << -0.75, -1.2, -0.50, -1.4, -1, 0, 0.1, 1.3, 0.3, 1.0;

    for(int i=0; i<10; ++i) {
        double x = 6.0f * i / 9.0f;
        double y = (rand()%400) / 100.0f - 2.0f;
        x_set[i] = x;
        y_set[i] = y;
    }
```

Davon abgesehen müssen nur ein paar Grenzen angepasst werden und man erhält Abbildung 2. Wie genau die Ableitungen am Anfang und am Ende gewählt werden ist letztlich egal (bei uns: $= 1$). Code verstanden: check!



(a) $sampling\_num = 10$



(b) $sampling\_num = 200$

Abbildung 2: Splines

Aufgabe 3 ():

a) Wir definieren Ereigniss E als "Enten sind zu sehen" und Ereigniss K als "Krokodile sind zu sehen".

Wir wissen aus der Problembeschreibung:

$$\begin{aligned} p(E|K) &= 0.1 \\ p(E|\neg K) &= 0.5 \\ p(K) &= 0.2 \end{aligned}$$

Um $p(K|\neg E)$ auszurechnen benötigt man den Satz von Bayes $p(K|\neg E) = \frac{p(E|\neg K)\cdot p(K)}{p(\neg E)}$ und somit noch $p(\neg E)$. Dieses wiederum ergibt sich aus:

$$\begin{aligned} p(\neg E) &= 1 - p(E) \\ &= 1 - (p(E|K) + p(E|\neg K)) \\ &= 1 - 0.1 - 0.5 \\ &= 0.4 \end{aligned}$$

Eingesetzt in Bayes Satz erhält man so:

$$\begin{aligned} p(K|\neg E) &= \frac{p(E|\neg K) \cdot p(K)}{p(\neg E)} \\ &= \frac{0.5 \cdot 0.2}{0.4} \\ &= 0.25 \end{aligned}$$

b) Die Ereignisse E und K sind abhängig. Beweis durch Widerspruch: Angenommen A und K sind unabhängig, dann gilt $P(E|K) = P(E)$. Aber: $0.1 \neq 0.6$.

$\square$