Übungsblatt 6

Julius Auer, Thomas Tegethoff

Aufgabe 1 (Inverse Kinematik):

In der Vorlesung wurde die Jocobi-Matrix J bereits hergeleitet:

$$J = \begin{pmatrix} -y & -l_2 \cdot s_{12} \\ x & l_2 \cdot c_{12} \end{pmatrix}$$

Da die Jacobi-Matrix hier immer hübsch quadratisch ist, kann die Inverse direkt über die geschlossene Form berechnet werden:

$$J^{-1} = \frac{1}{x \cdot l_2 \cdot s_{12} - y \cdot l_2 \cdot c_{12}} \cdot \begin{pmatrix} l_2 \cdot c_{12} & l_2 \cdot s_{12} \\ -x & -y \end{pmatrix}$$

Der Roboter hat allerdings anders angeordnete Achsen, so dass die Matrix noch einmal angepasst werden muss, zu:

$$J^{-1} = \frac{1}{z \cdot l_2 \cdot s_{12} + y \cdot l_2 \cdot c_{12}} \cdot \begin{pmatrix} -l_2 \cdot s_{12} & l_2 \cdot c_{12} \\ -y & -z \end{pmatrix}$$

Es seien nun: l_1, l_2 fest, $tf(\Theta_1, \Theta_2) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Funktion um die aktuelle Pose $\overrightarrow{x}$ zu berechnen, $j(\Theta_1, \Theta_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine Funktion um wie gezeigt J^{-1} zu erzeugen und $I \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Iterationen. Dann lässt sich die inverse Kinematik folgenderweise berechnen:

(1) Initiale Winkel: $\Theta_1 := -\frac{1}{8} \cdot \pi, \Theta_2 := \frac{3}{4} \cdot \pi$

(2) End-Effektor-Position: $\overrightarrow{x} = tf(\Theta_1, \Theta_2)$

(3) Ziel-Position: $\overrightarrow{x_t}$

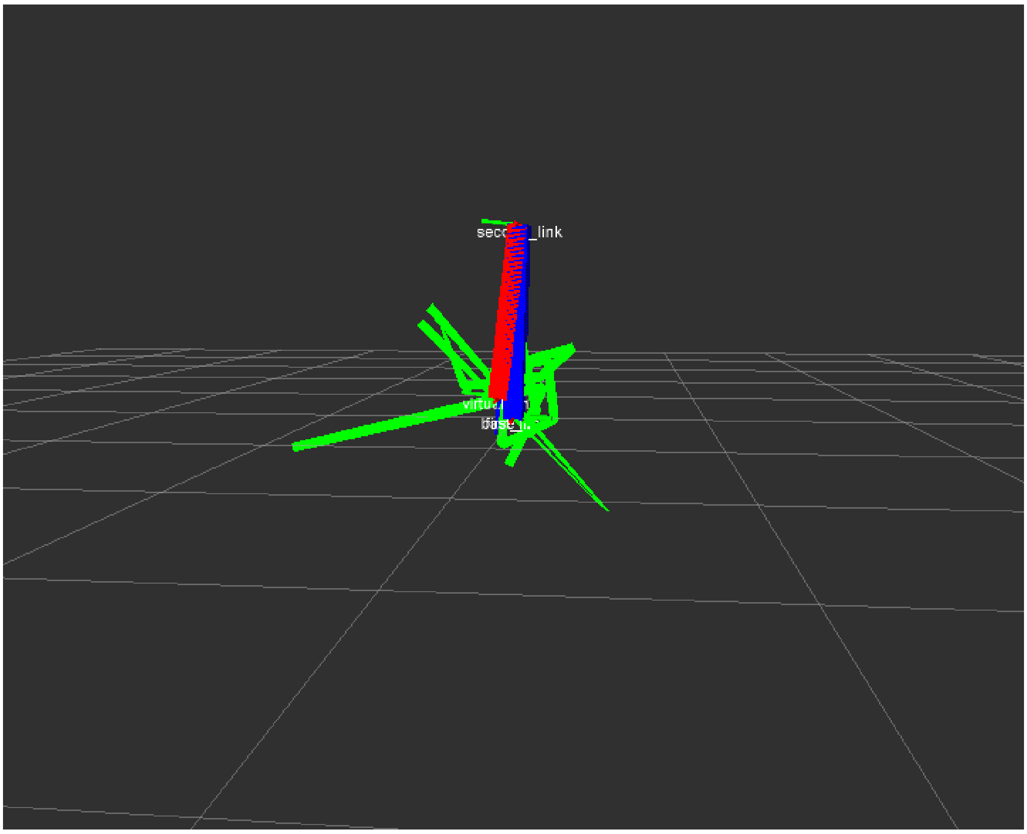
(4) Für alle $i \in I$:

  (5) Prüfe und behandle ggf. Singularität (tritt hier mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht auf, falls Anfangsposition günstig gewählt)

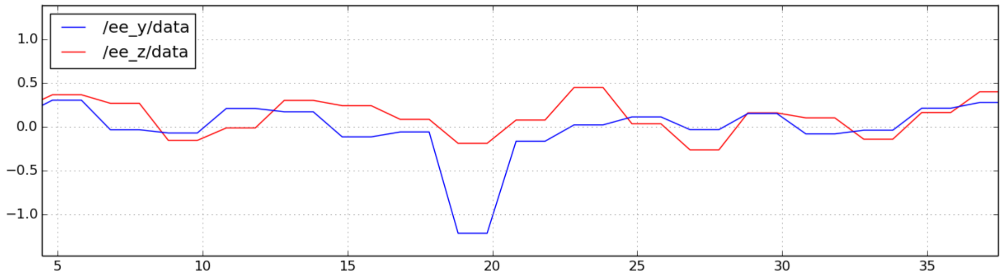
  (6) $\begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} += \frac{i}{|I|} \cdot j(\Theta_1, \Theta_2) \cdot (\overrightarrow{x_t} - \overrightarrow{x})$

  (7) $\overrightarrow{x} = tf(\Theta_1, \Theta_2)$

Genauso implementiert liefert das die folgenden Ergebnisse:



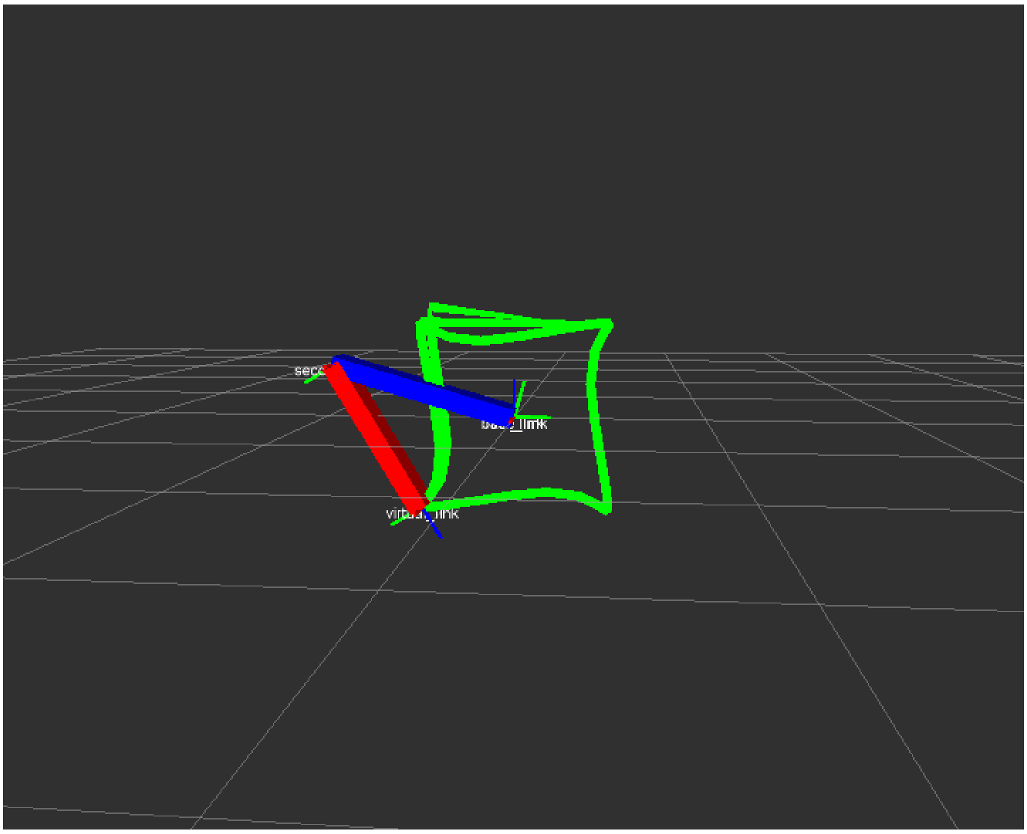
(a) Plot



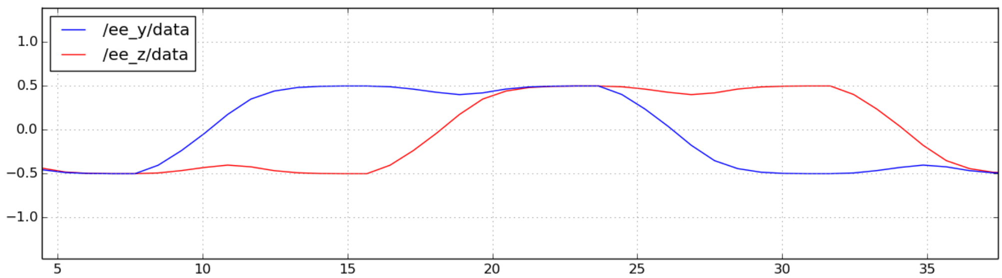
(b) Trajektorie

Abbildung 1: 1 Iteration

b)



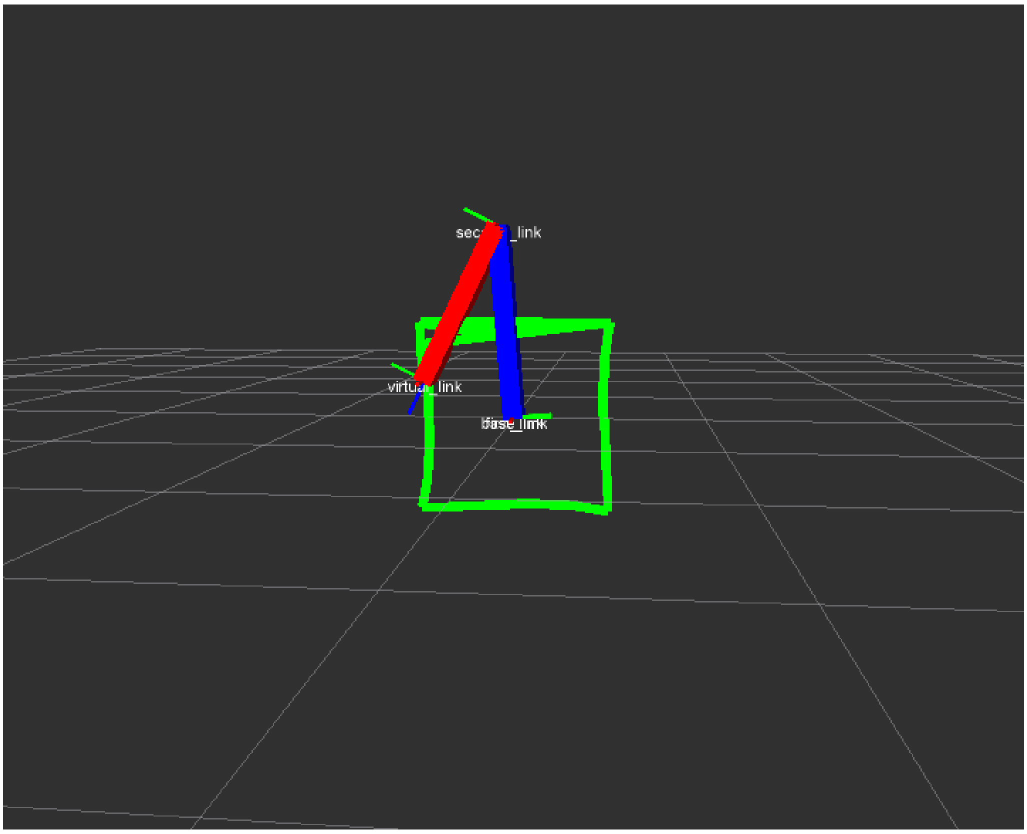
(a) Plot



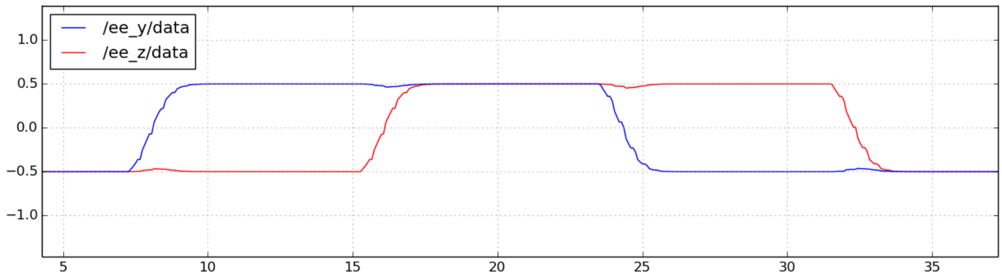
(b) Trajektorie

Abbildung 2: 10 Iteration

c)

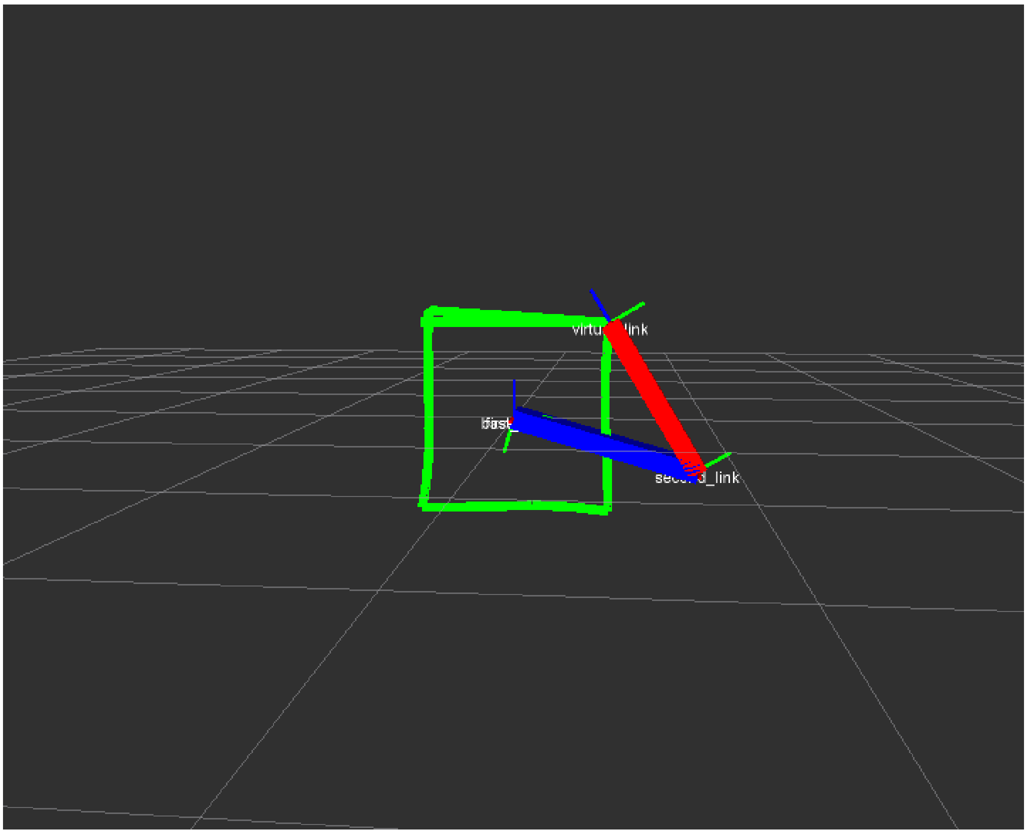


(a) Plot

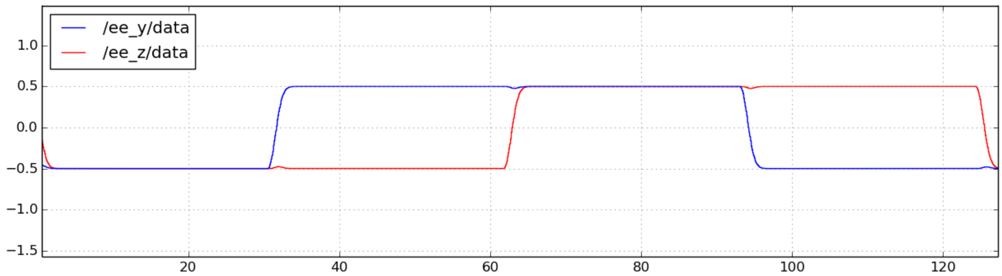


(b) Trajektorie

Abbildung 3: 100 Iteration

d) 

(a) Plot



(b) Trajektorie

Abbildung 4: 1000 Iteration

Aufgabe 2 (Null-Space):

Im Allgemeinen gilt hier:

$$\textbf{nullspace}\left(\begin{pmatrix} 0.5 \\ y \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} | 0.5 = c_1 + 0.9 \cdot c_{12} \right\}$$

Das lässt sich schlecht in eine geschlossene Form bringen - malt man ein großes Bild kommt man nach kurzer Überlegung allerdings auch auf den Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \textbf{nullspace}\left(\begin{pmatrix} 0.5 \\ y \end{pmatrix}\right) = \Bigg\{ \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} & | c^{-1}(0.1) - \pi \leq \Theta_1 \leq c^{-1}(0.1) \\ & \wedge \Theta_2 = -c^{-1}(0.1) \pm c^{-1}\left(\frac{0.5 + c(c^{-1}(0.1) + \pi)}{0.9}\right) \Bigg\} \end{aligned}$$

Erklärung (geht kaum ohne Zeichung) ist uns zu komplex zum TeXen.