

## Übungsblatt 12

Julius Auer, Thomas Tegethoff

---

### Aufgabe 1 ( ):

- a) Gesucht sind die Parameter  $a, b, c, d, h, i, j, k$  für zwei Splines  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ . Die gesuchten Funktionen mit ihren Ableitungen sind:

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

$$f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$$

$$f''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$$

$$g(x) = h \cdot x^3 + i \cdot x^2 + j \cdot x + k$$

$$g'(x) = 3 \cdot h \cdot x^2 + 2 \cdot i \cdot x + j$$

$$g''(x) = 6 \cdot h \cdot x + 2 \cdot i$$

Aus der Beschreibung sind direkt die folgenden Eigenschaften abzulesen:

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 0$$

$$g(2) = 8$$

$$g'(2) = 8$$

$$f''(1) = 0$$

$$g''(1) = 0$$

Um das soweit unterbestimmte Gleichungssystem lösen zu können, verwenden wir als zusätzliche Eigenschaft die Tatsache, dass sich  $f$  und  $g$  an der Grenze ihrer Definitionsbereiche bei  $x = 1$  schneiden müssen. Es gilt also zusätzlich:

$$f(1) = g(1)$$

$$f'(1) = g'(1)$$

Ausformuliert erhält man somit ein lineares Gleichungssystem:

$$d = 0$$

$$k = 0$$

$$8 \cdot h + 4 \cdot i + 2 \cdot j = 8$$

$$12 \cdot h + 4 \cdot i + j = 8$$

$$6 \cdot a + 2 \cdot b = 0$$

$$6 \cdot h + 2 \cdot i = 0$$

$$a + b + c = h + i + j$$

$$3 \cdot a + 2 \cdot b + c = 3 \cdot h + 2 \cdot i + j$$

$d, k$  sind also an dieser Stelle bereits bekannt. Für die übrigen Parameter lösen wir mittels Gaußschem Eliminierungsverfahren (\*stöhn\*):

$a$	$b$	$c$	$h$	$i$	$j$	$=$
0	0	0	8	4	2	8
0	0	0	12	4	1	8
6	2	0	0	0	0	0
0	0	0	6	2	0	0
1	1	1	-1	-1	-1	0
3	2	1	-3	-2	-1	0

Zuerst etwas umsortieren:

$a$	$b$	$c$	$h$	$i$	$j$	$=$
1	1	1	-1	-1	-1	0
3	2	1	-3	-2	-1	0
6	2	0	0	0	0	0
0	0	0	6	2	0	0
0	0	0	8	4	2	8
0	0	0	12	4	1	8

$a$ -Spalte eliminieren:

$a$	$b$	$c$	$h$	$i$	$j$	$=$
1	1	1	-1	-1	-1	0
0	-1	-2	0	1	2	0
0	-4	-6	6	6	6	0
0	0	0	6	2	0	0
0	0	0	8	4	2	8
0	0	0	12	4	1	8

$b$ -Spalte eliminieren:

$a$	$b$	$c$	$h$	$i$	$j$	$=$
1	1	1	-1	-1	-1	0
0	1	2	0	-1	-2	0
0	0	2	6	2	-2	0
0	0	0	6	2	0	0
0	0	0	8	4	2	8
0	0	0	12	4	1	8

$c$ -Spalte sieht schon gut aus, deshalb weiter mit  $h$ :

$a$	$b$	$c$	$h$	$i$	$j$	$=$
1	1	1	-1	-1	-1	0
0	1	2	0	-1	-2	0
0	0	1	3	1	-1	0
0	0	0	6	2	0	0
0	0	0	0	4	6	24
0	0	0	0	0	1	8

So ein Glück:  $i, j$  ergeben sich direkt! Von unten nach oben können nun alle Parameter ausgerechnet werden, zu:

$$a = 2, b = -6, c = 8,$$

$$h = 2, i = -6, j = 8$$

Eine partielle Interpolation war hier also gar nicht nötig - ein einziges Polynom  $e : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  genügt, um alle Eigenschaften zu erfüllen. Ergebnis:

$$e(x) = 2 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 2 \cdot x$$

- b) Auch wenn  $f = g = e$  sind hier unabhängig von einander  $f$  in blau und  $g$  in rot geplottet (Abbildung 1).

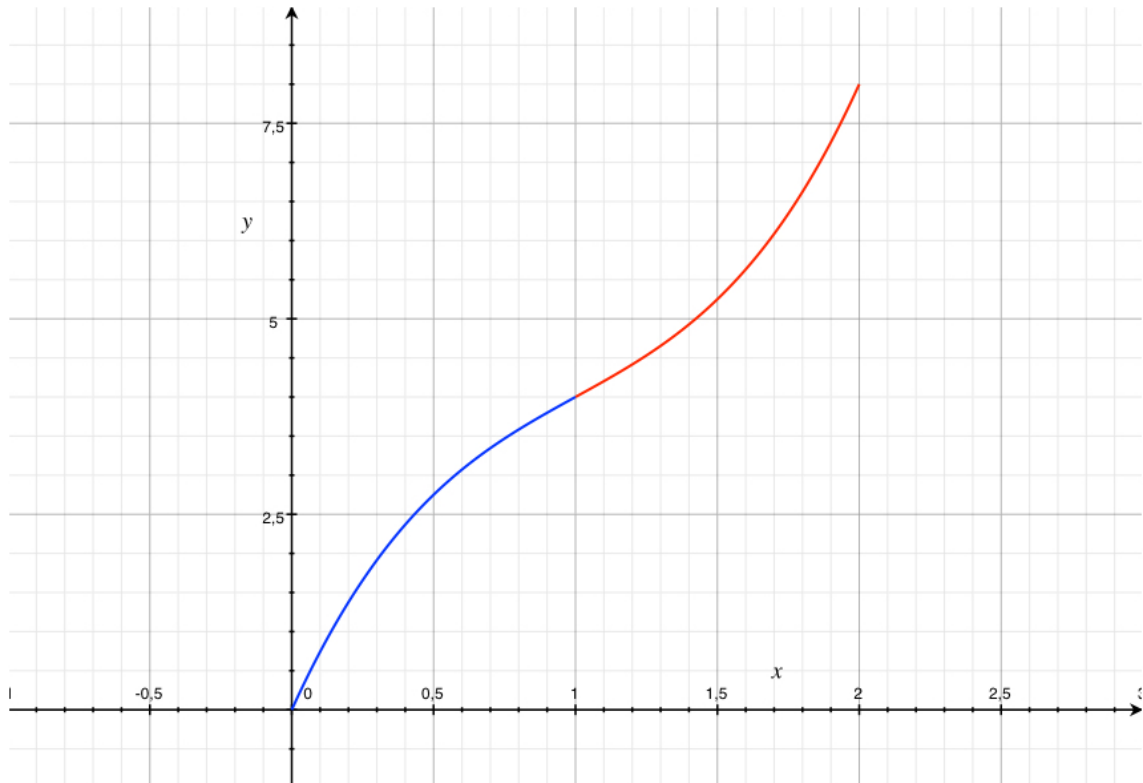


Abbildung 1: Spline

- c) Der Schnittpunkt  $(x_s, y_s)$  ist vorgegeben bei  $x_s = 1$  mit:

$$y_s = e(1) = a + b + c = 4$$

Die Geschwindigkeit  $v$  ist dort:

$$v = e'(1) = 3 \cdot a + 2 \cdot b + c = 2$$

**Aufgabe 2 ():**