Übungsblatt 12

Julius Auer, Thomas Tegethoff

Aufgabe 1 ():

a) Gesucht sind die Parameter a, b, c, d, h, i, j, k für zwei Splines $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, g : [1, 2] \to \mathbb{R}$. Die gesuchten Funktionen mit ihren Ableitungen sind:

$$\begin{aligned}
f(x) &= a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \\
f'(x) &= 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c \\
f''(x) &= 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b \\
g(x) &= h \cdot x^3 + i \cdot x^2 + j \cdot x + k \\
g'(x) &= 3 \cdot h \cdot x^2 + 2 \cdot i \cdot x + j \\
g''(x) &= 6 \cdot h \cdot x + 2 \cdot i
\end{aligned}$$

Aus der Beschreibung sind direkt die folgenden Eigenschaften abzulesen:

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0 \\
f'(0) &= 0 \\
g(2) &= 8 \\
g'(2) &= 8 \\
f''(1) &= 0 \\
g''(1) &= 0
\end{aligned}$$

Um das soweit unterbestimmte Gleichungssystem lösen zu können, verwenden wir als zusätzliche Eigenschaft die Tatsache, dass sich f und g an der Grenze ihrer Definitionsbereiche bei $x = 1$ schneiden müssen. Es gilt also zusätzlich:

$$\begin{aligned}
f(1) &= g(1) \\
f'(1) &= g'(1)
\end{aligned}$$

Ausformuliert erhält man somit ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
d &= 0 \\
k &= 0 \\
8 \cdot h + 4 \cdot i + 2 \cdot j &= 8 \\
12 \cdot h + 4 \cdot i + j &= 8 \\
6 \cdot a + 2 \cdot b &= 0 \\
6 \cdot h + 2 \cdot i &= 0 \\
a + b + c &= h + i + j \\
3 \cdot a + 2 \cdot b + c &= 3 \cdot h + 2 \cdot i + j
\end{aligned}$$

d, k sind also an dieser Stelle bereits bekannt. Für die übrigen Parameter lösen wir mittels Gaussschem Eliminierungsverfahren (*stöhn*):

a	b	c	h	i	j	$=$
0	0	0	8	4	2	8
0	0	0	12	4	1	8
6	2	0	0	0	0	0
0	0	0	6	2	0	0
1	1	1	-1	-1	-1	0
3	2	1	-3	-2	-1	0

Zuerst etwas umsortieren:

a	b	c	h	i	j	$=$
1	1	1	-1	-1	-1	0
3	2	1	-3	-2	-1	0
6	2	0	0	0	0	0
0	0	0	6	2	0	0
0	0	0	8	4	2	8
0	0	0	12	4	1	8

a-Spalte eliminieren:

a	b	c	h	i	j	$=$
1	1	1	-1	-1	-1	0
0	-1	-2	0	1	2	0
0	-4	-6	6	6	6	0
0	0	0	6	2	0	0
0	0	0	8	4	2	8
0	0	0	12	4	1	8

b-Spalte eliminieren:

a	b	c	h	i	j	$=$
1	1	1	-1	-1	-1	0
0	1	2	0	-1	-2	0
0	0	2	6	2	-2	0
0	0	0	6	2	0	0
0	0	0	8	4	2	8
0	0	0	12	4	1	8

c-Spalte sieht schon gut aus, deshalb weiter mit h:

a	b	c	h	i	j	$=$
1	1	1	-1	-1	-1	0
0	1	2	0	-1	-2	0
0	0	1	3	1	-1	0
0	0	0	6	2	0	0
0	0	0	0	4	6	24
0	0	0	0	0	1	8

So ein Glück: i, j ergeben sich direkt! Von unten nach oben können nun alle Parameter ausgerechnet werden, zu:

$$a = 2, b = -6, c = 8,$$
$$h = 2, i = -6, j = 8$$

Eine partielle Interpolation war hier also gar nicht nötig - ein einziges Polynom $e : [0, 2] \to \mathbb{R}$ genügt, um alle Eigenschaften zu erfüllen. Ergebnis:

$$e(x) = 2 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 2 \cdot x$$

b) Auch wenn $f = g = e$ sind hier unabhängig von einander f in blau und g in rot geplottet (Abbildung 1).

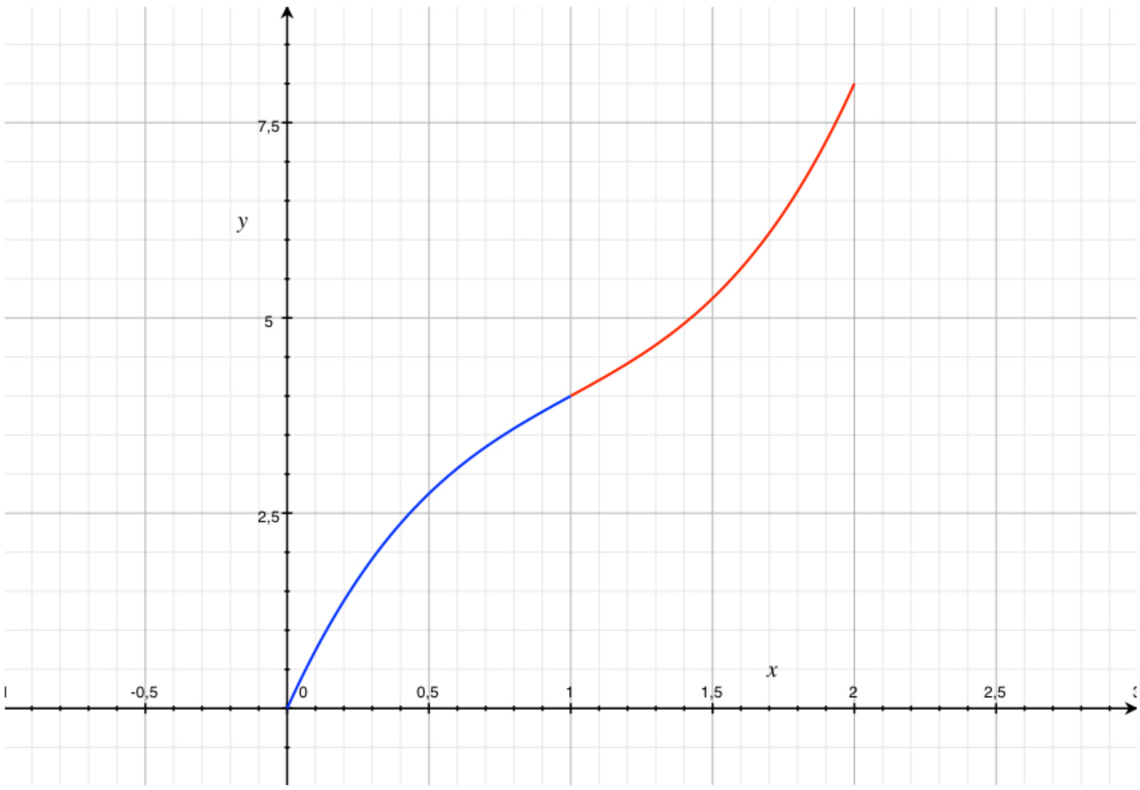

Abbildung 1: Spline

c) Der Schnittpunkt (x_s, y_s) ist vorgegeben bei $x_s = 1$ mit:

$$y_s = e(1) = a + b + c = 4$$

Die Geschwindigkeit v ist dort:

$$v = e'(1) = 3 \cdot a + 2 \cdot b + c = 2$$

Aufgabe 2 ():

Aufgabe 3 ():

a) Wir definieren Ereignis A als "keine Enten sind zu sehen" und Ereignis B als "Krokodile sind zu sehen".
Wir wissen: $P(\neg A) = (P(\neg A|B) + P(\neg A|\neg B)) = (0.1 + 0.5) = 0.6$. Daraus folgt $P(A) = 1 - P(\neg A) = 0.4$
Außerdem wissen wir: $P(B) = P(\neg A|B) + P(A|B)$. Das stellen wir um nach $P(A|B) = P(B) - P(\neg A|B)$ und rechnen aus: $0.2 = 0.4 * x + 0.6 * 0.5 \leftrightarrow x = \frac{0.2-(0.6*0.5)}{0.4} = 0.425$ daraus ergibt sich $P(A|B) = 0.4 * 0.425 = 0.17$
Weil wir alle benötigten Variablen haben, setzen wir in den Satz von Bayes ein: Es gilt der Satz von Bayes: $P(B|A) = \frac{P(A|B)*P(B)}{P(A)} = \frac{0.17*0.2}{0.4} = 0.085$.

b) Die Variablen $\neg A$ und B sind abhängig.
Beweis durch Widerspruch: Angenommen $\neg A$ und B sind unabhängig, dann gilt $P(\neg A|B) = P(\neg A)$. Widerspruch: $0.1 \neq 0.6$.
q.e.d.