Das war schon:

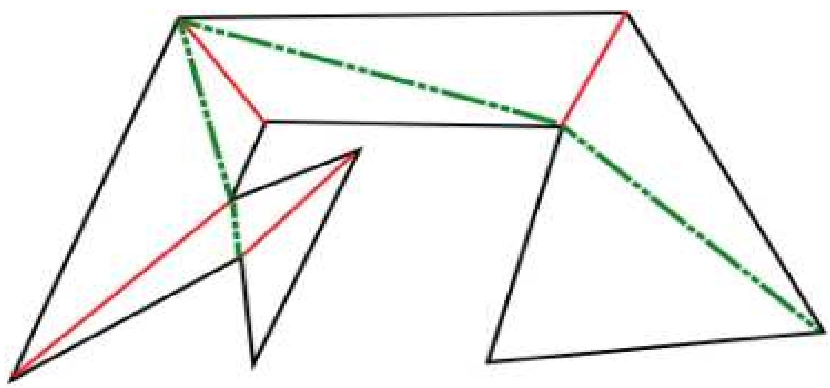
In der letzten Vorlesung hatten wir die Triangulierung einfacher Polygone in $O(n \log n)$ Zeit mit einem Sweep-Line-Verfahren behandelt. Nun betrachten wir eine Anwendung:

Zerlegung in möglichst wenige konvexe Teile

Wir behaupten, dass der von uns betrachtete Greedy-Algorithmus, der zufällig Kanten streicht, gilt:

$$n_{app} \leq 4 \cdot n_{opt} - 3$$

wobei n jeweils die Anzahl der entstandenen Teile bezeichnet.



Argumentation: Sei c die Anzahl der Reflexecken (nicht-konvexe Ecken). Wir ordnen nun jede verbleibenden Triangulierungkante einer Reflexecke zu, und zwar der, die Schuld war, dass e geblieben ist. Jeder verbliebenen Reflexecke werden also ≤ 2 Kanten zugeordnet. Also ist das ganze Polygon zerlegt worden in höchstens $2c - 1$ Teile. Wir wissen außerdem, dass

$$n_{opt} \geq \frac{c}{2} + 1$$

und damit

$$n_{app} \leq 4 \cdot n_{opt} - 4 + 1$$

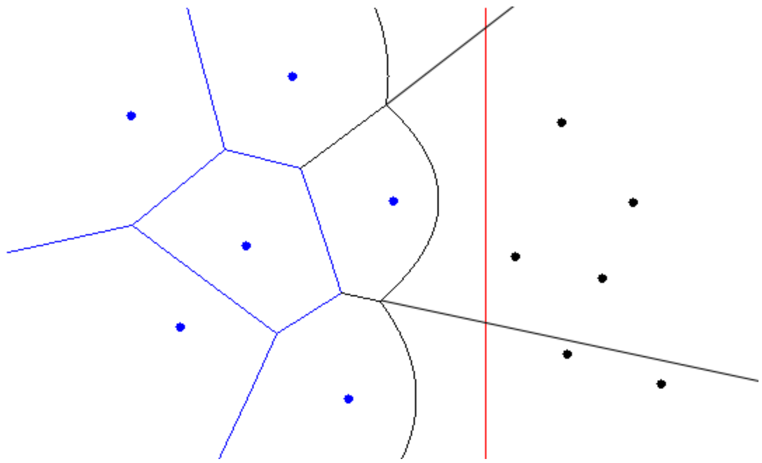
□

Ein Sweep-Line-Verfahren zur Konstruktion eines VDs[1]

Problemstellung: Gegeben sei eine Menge $S \subset \mathbb{R}^2$, $|S| = n$. Berechne $VD(S)$.
Idee: Überstreiche die Punkte von S v.l.n.r. mit einer vertikalen Sweep-Line. Zu jedem Zeitpunkt soll dabei folgendes erfüllt sein: Für die Punkte $L \subset S$ links von der Sweep-Line l haben wir bereits folgendes konstruiert

[1]Fortune 1987

- Alle Teile von Voronoi-Kanten zu Punkten p, q aus L, die näher an p, q liegen als an l.
- Alle Bisektorenstücke zwischen l und den nächstgelegen Punkten aus L (Bem: Diese sind Parabeln).



Bemerkungen:

a) W ist zusammenhängend, y-monoton und besteht aus endlich vielen Prabelstücken.

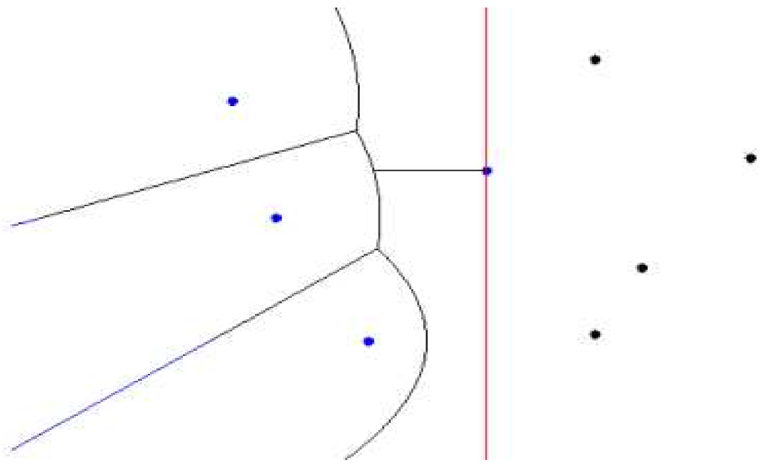
b) Jeder Punkt links von W liegt in $V_l := VD(S \cup \{l\})$ bereits in der Voronoi-Region zum gleichen Punkt wie im fertigen $VD(S)$, auf der Voroinoi-Kante zum gleichen Punktepaar oder ist ein Voronoi-Knoten zum gleichen Punktetripel (man beachte die allgemeine Lage).

zu a) Ein Bisektor $B(p, l)$ zwischen $p \in L$ und l ist eine Parabel mit horizontaler Achse, also ist ein Parabelstück y-monoton.

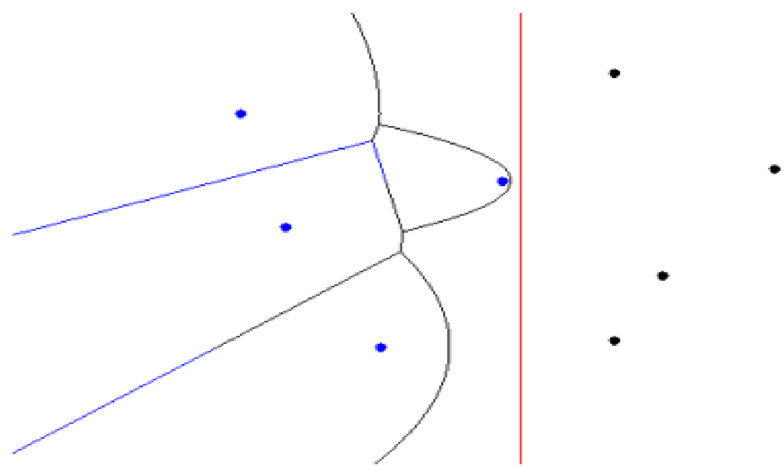
zu b) Sei q ein Punkt links von W und p der Punkt mit $q \in VR'(p)$, wobei $VR'(p)$ die entsprechende Voronoi-Region in V_l bezeichnet. Dann liegt q zum einen näher an p als an jedem Punkt $p' \in L$ und zum anderen näher an p als an l. Daraus folgt aber sofort, dass q näher an jedem Punkt aus $S \setminus L$, da er von jedem solchen weiter entfernt ist als von l. Damit ist q also näher an p als an allen anderen Punkten aus S, d.h. $q \in VR(p)$. Analog zeigt man das für Punkte auf Knoten und Kanten.

Also: Die links von l entstandenen Voronoi-Kanten und -Knoten sind bereits richtig berechnet. Wird l weiter nach rechts bewegt, so folgt W mit „halber Geschwindigkeit“.
Es gibt folgende Events, also x-Werte von l, wo sich W kombinatorisch ändert, d.h. die Zusammensetzung aus Wellen ($\hat{=}$ Parabelstücken) ändert sich:

Fall a: Falls l einen Punkt p überstreicht entsteht eine neue Welle β, die zu p gehört und zunächst nur ein von p nach links ausgehender Strahl ist.



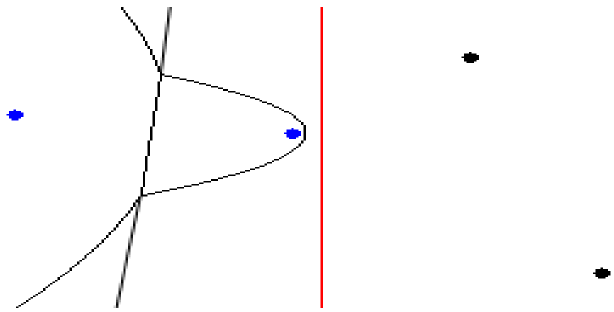
β trifft dann eine Welle α und spaltet sie auf in α_1 und α_2. β liegt nun dazwischen in der Wellenfront. Es kann auch sein, dass der Strahl auf den Grenzpunkt zwischen zwei bisherigen Wellen γ_1, γ_2 trifft, β wird dann dazwischen eingefügt.



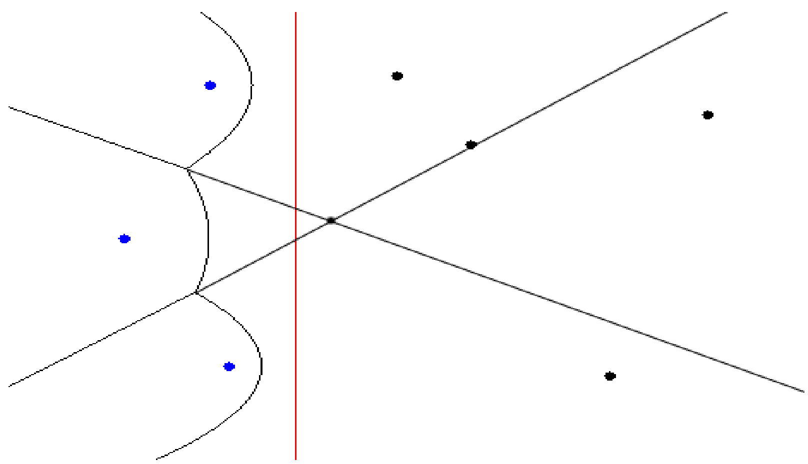
Eine geeignete Datenstruktur ist ein Wörterbuch, das die Wellen der Wellenfront von oben nach unten geordnet enthält. Für einen neuen Punkt p kostet das Einfügen der entsprechenden Welle β

- α finden: $O(\log n)$, wobei ein Suchschritt für eine gegebene Welle γ feststellen muss, ob die y-Koordinate von p oberhalb oder unterhalb oder auf gleicher Höhe mit γ liegt. Die y-Koordinate von p wird dabei mit denen der Schnittpunkte von γ mit seinen Nachbarwellen γ' und γ'' verglichen.
- Das Einfügen dauert ebenfalls $O(\log n)$ Zeit
- Das Spalten von α auch, denn wir müssen α streichen und die drei neuen Wellen $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ einfügen

Außerdem müssen wir eine neue Voronoi-Kante erzeugen und 2 neue Spikes.



Fall b: Der Event-Punkt ist ein Schnittpunkt zwischen Spikes. Wenn wir Fall a behandeln und eine neue Welle einfügen, müssen wir diese berechnen und im EPS einfügen.



An dieser Stelle verschwindet dann die Welle zwischen den Spikes. Ereignispunkte dieser Art könenn auch wieder ungültig werden, und zwar, wenn neue Parabelstücke (Wellen) dazwischenkommen.