Übungsblatt 4

Julius Auer, Alexa Schlegel

Aufgabe 1 (Bewegungsplanung in der Ebene):

Idee: Aus H Voronoi-Diagramm basteln. Aus dem Graph die Kanten entfernen, wo der Roboter nicht durchpasst. **Auf** den verbliebenen Voronoi-Kanten kann sich der Roboter dann bewegen.

- VD basteln
- prüfen, ob s und z nicht bereits kollidieren
- Kanten rausschmeissen, wo der Abstand zwischen den Punkten der VRs kleiner ist als Rs Durchmesser
- VRs suchen, in denen s und z liegen
- Kante suchen die von s aus erreichbar ist, ohne mit dem Hindernis in dieser VR zu kollidieren (Lot fällen?)
- Weg suchen über Knoten entlang Kanten (Dijkstra)

Aufgabe 2 (Geometriche Graphen):

a) Induktion über $|V|$:

I.A.: Für $G_0 = (V, E, F)$ zusammenhängend und planar mit $|V| = 1$ folgt offensichtlich $|E| = 0$ und $|F| = 1$.

I.V.: Für $G_n = (V, E, F)$ zusammenhängend und planar mit $|V| = n$ gilt: $|E| = |V| + |F| - 2$

$n \to n + 1$: Aus $G_{n+1} = (V', E', F')$ zusammenhängend und planar mit $|V'| = n + 1$ werden ein Knoten v und alle zu v inzidenten Kanten entfernt.

Fall 1: Der entstehende Graph ist zusammenhängend:
Für den entstehenden Graphen $G_n = (V, E, F)$ gilt $|V| = n$ und $|E| = |E'| - deg(v)$ sowie die I.V.. Nun muss v in einer Facette f von G_n liegen und somit jede zu v inzidente Kante in G_{n+1} zu einem Knoten auf dem Rand von f führen (sonst wäre Planarität verletzt). Die zu v inzidenten Kanten unterteilen f offensichtlich in $deg(v) - 1$ zusätzliche Facetten. Somit gilt für G_{n+1}:

$$\begin{aligned} F' &= F + deg(v) - 1 \\ &= |E| - |V| + 2 + deg(v) - 1 \\ &= |E'| - deg(v) - |V'| + 1 + 2 + deg(v) - 1 \\ &= |E'| - |V'| + 2 \end{aligned}$$

Fall 2: Der entstehende Graph ist nicht zusammenhängend:
1 Dann entstehen $k \leq deg(v)$ planare Zusammenhangskomponenten $G^1, ..., G^k$. Für jede gilt die I.V..
2 Für das Verbinden dieser ZHK waren zuvor k Kanten erforderlich, die keine Facetten begrenzten (sonst hätte es einen Kreis und nicht mehrere ZHK gegeben). Die anderen $deg(v) - k$ Kanten bildeten $deg(v) - k$ Facetten (analog zur Argumentation in Fall 1).
3 Ferner ist klar, dass sich die k ZHK eine Facette (die "Äußere") teilen - also $k - 1$ Facetten

zuviel gezählt werden.
Somit ergibt sich insgesamt für $|F'|$:

$$
\begin{aligned}
F' &= \overbrace{\sum_{i=0}^{k} |F^i|}^{1} + \overbrace{(deg(v) - k)}^{2} - \overbrace{(k-1)}^{3} \\
&= \sum_{i=0}^{k} (|E^i| - |V^i| + 2) + deg(v) - 2 \cdot k + 1 \\
&= |E'| - deg(v) - (|V'| - 1) + 2 \cdot k + deg(v) - 2 \cdot k + 1 \\
&= |E'| - |V'| + 2
\end{aligned}
$$

□

b) Sei D die Menge der Dreiecke des triangulierten Graphen $G = (V, E)$. r Knoten liegen auf dem Rand der konvexen Hülle der Punkte aus G und beschreiben einen geschlossenen Polygonzug, der folglich aus ebenfalls r Kanten E_r besteht. Jede dieser Kanten grenzt an genau ein Dreieck. Die $|E| - |E_r|$ Kanten, die im Inneren des Graphen liegen, begrenzen jeweils zwei Dreiecke. Jedes Dreieck wiederum wird von drei Kanten begrenzt. Somit gilt:

$$
\begin{aligned}
|E_r| + 2 \cdot (|E| - |E_r|) &= 3 \cdot |D| \\
\Leftrightarrow |E| &= \frac{3 \cdot |D| + r}{2}
\end{aligned}
$$

In (a) wurde gezeigt, dass:

$$|F| = |E| - |V| + 2$$

Wobei hier offensichtlich $|D| = |F| - 1$ (die "äußere" Facette ist kein Dreieck). Das sollte ausreichen, etwas Aussagekräftiges auszurechnen :)

$$
\begin{aligned}
|F| &= |E| - |V| + 2 \\
\Leftrightarrow |D| + 1 &= \frac{3 \cdot |D| + r}{2} - n + 2 \\
\Leftrightarrow |D| &= 2 \cdot n - r - 2 \\
&= 2 \cdot (n-1) - r
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 3 (Voronoi-Diagramm):

Delaunay basteln und Rand entlang laufen.

Schneller als nlogn geht nicht, sonst auch CH schneller und somit auch - wie in U3 gezeigt - Sortieren schneller. Für Sortieren ist aber nlogn optimal.