Übungsblatt 9

Julius Auer, Alexa Schlegel

Aufgabe 1 (Platonische Körper):

Platonische Körper sind volkommen regelmäßige konvexe Polyeder. Polyeder sind dreidimensionale Körper, die von Polygonen (Vielecken) als Seitenflächen begrenzt sind.

a) Die Summe aller zusammentreffender Innenwinkel muss $< 360°$ sein. Ist die Summe genau $360°$ so entsteht eine Fläche in der Ebene, bei $> 360°$ ist die Ecke nicht mehr konvex.

Ein regelmäßiges Dreieck hat einen Innenwinkel von $60°$, ein Viereck von $90°$, ein Fünfeck von $108°$, ein Sechseck von $120°$. Ein Sechseck als Facette kann es damit nicht geben ($3 \cdot 120° = 360°$).

Somit kann es nur regelmäßige m-Ecke mit $m \in \{3, 4, 5\}$ geben.

An einer Ecke müssen ≥ 3 Facetten zusammentreffen damit eine Ecke entsteht. So können höchstens 5 regelmäßige Dreiecke an einer Ecke zusammenstoßen ($360°/60° = 6$), höchstens 3 regelmäßige Vierecke ($360°/90° = 4$) und höchstens 3 regelmäßige Fünfecke ($360°/108° = 3.3$). Damit ergibt sich für $k = \{3, 4, 5\}$, und die folgenden Kombinationen für k und m:

$$m = 3, k = 3$$
$$m = 3, k = 4$$
$$m = 3, k = 5$$
$$m = 4, k = 3$$
$$m = 5, k = 3$$

b) Ikosaeder und Dodekaeder als geometrische Graphen

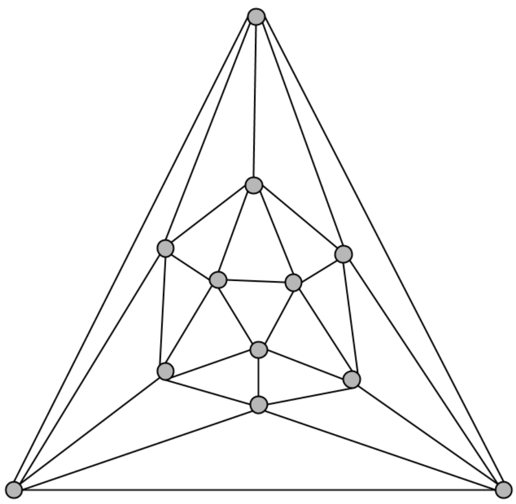

Abbildung 1: Der Ikosaeder hat 20 Facetten (gleichseitige Dreiecken), 30 Kanten und 12 Ecken.

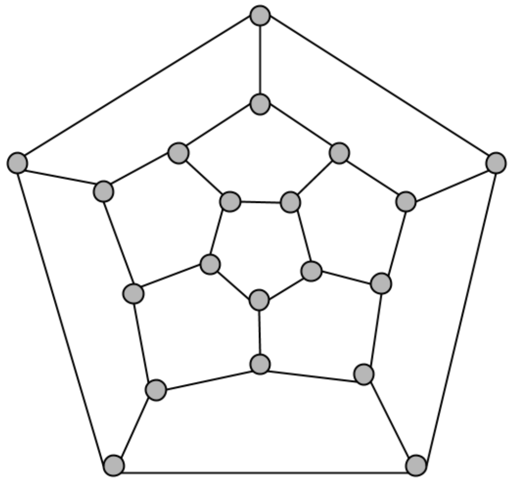

Abbildung 2: Der Dodekaeder hat 12 Facetten (regelmäßiges Fünfeck), 30 Kanten und 20 Ecken.

Aufgabe 2 (d-dimensionale Polytope):

a) Seien V_d die Ecken des Einheitswürfels in d Dimensionen. Dann gibt es für jede Ecke $(x_1, ..., x_d)$ dieses Würfels in $d+1$ Dimensionen genau die zwei Ecken $(x_1, ..., x_d, 0)$ und $(x_1, ..., x_d, 1)$. Es gilt also:

$$|V_{d+1}| = 2 \cdot |V_d|$$

Dass $|V_1| = 2$ ist klar, womit sich die Anzahl Ecken im Allgemeinen ergibt, zu:

$$|V_d| = 2^d$$

Für den Einheitswürfel liegt eine Facette f stets parallel zu einer Achse des Koordinatensystems. Für jede Dimension gibt es zwei solcher paraller Facetten und folglich ist für die Menge aller Facetten F_d somit

$$|F_d| = 2 \cdot d$$

Die jeweiligen Facetten $f_1, ..., f_{2 \cdot d} \in F_d$ seien dabei durch die sie begrenzenden Ecken definiert:

$$f_i = \begin{cases} \{(x_1, ..., x_{i \bmod d}, ..., x_d) \in V_d : x_i = 0\} & \text{, falls } i \leq d \\ \{(x_1, ..., x_{i \bmod d}, ..., x_d) \in V_d : x_i = 1\} & \text{, sonst} \end{cases}$$

b) Siehe Abb. 3: Ecken mit $x_4 = 1$ sind mit dem Faktor $\frac{1}{3}$ skaliert, um $(0.4, 0.3, 0, 0)$ verschoben und haben eine andere Farbe. Kanten, deren Eckpunkte unterschiedliche Werte in dieser Dimension haben, sind Wellenförmig dargestellt (durch eine gerade Kante zu implizieren es gäbe einen anschaulichen geometrischen Zusammenhang in einer derartigen dreidimensionalen Darstellung des W_4, wäre doch Humbug !?)

c) Alle Punkte mit einer Koordinate < 0 liegen außerhalb des Simplex. Im positiven Sektor wird das Simplex begrenzt durch eine Hyperebene. Der Bereich der von den Koordinatenachsen und dieser Hyperebene eingeschlossen wird ist genau das Simplex. Die Ecken des Simplex sind somit stets 0^d und die d vielen Ecken die benötigt werden, um die Hyperebene zu definieren (das sind genau die Ecken $(1, 0, ..., 0), ..., (0, ...0, 1)$). Es gibt also $d+1$ viele Ecken.

Offenbar entstehen so stets $d+1$ viele Facetten (der "Boden" und d viele, die inzident zu 0^d sind). Die Ecken, welche die Hyperebene beschreiben, sind zwar paarweise adjazent, liegen jedoch alle auf besagter Hyperebene, weshalb keine zusätzlichen Facetten entstehen. Für S_4 (siehe auch Abb. 4) liegt beispielsweise p_4 auf der selben Facette wie $p_1, ..., p_3$.

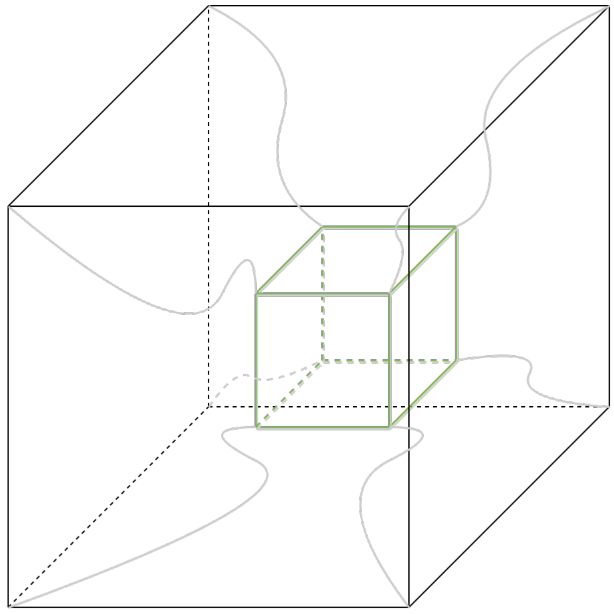

Abbildung 3: W_4

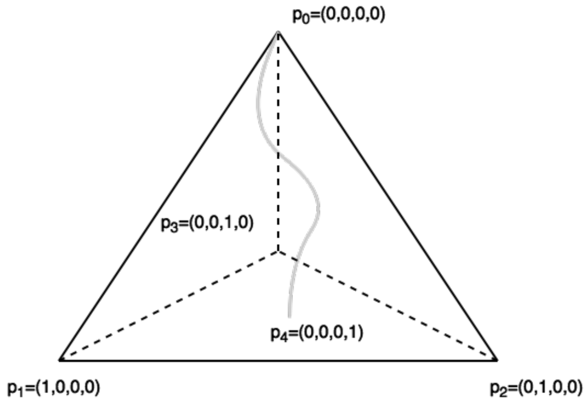

Abbildung 4: S_4 - man sieht deutlich 5 Facetten :)

Aufgabe 3 (Konvexe Hülle):

Wir gehen davon aus, dass keine 4 Punkte auf einer Ebene liegen. Die Punkte $p_1, \ldots, p_n$ werden nacheinader hinzugefügt. In jedem Schritt wird die konvexe Hülle aktualisiert. Wir nehmen nun an, dass die konvexte Hülle der ersten k Punkte bekannt ist. p_{k+1} kann nun entweder (1) Teil der konvexen Hülle sein, $p_{k+1} \in CH(p_1, \ldots, p_n)$ oder (2) außerhalb der konvexen Hülle liegen, $p_{k+1} \notin CH(p_1, \ldots, p_n)$.

Von Punkt p_{k+1} aus gesehen wird $CH(p_1, \ldots, p_k)$ in die Ebene projiziert. Es werden Flächen einfügen zwischen allen Kanten die auf dem entstanden Rand R liegen und p_{k+1}. Es werden Kanten zwischen allen Knoten auf dem Rand und p_{k+1} hinzufügen. Alle von p_{k+1} sichbaren Flächen werden entfernt.

Algorithm 1 $CH3D(P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\})$

$C \leftarrow CH(p_1, p_2, p_3, p_4)$
for $i = 5$ **to** n **do**
  if p_i liegt außerhalb von C **then**
    $R \rightarrow$ Rand durch Projiktion in die Ebene von p_i aus.
    for alle Kanten $e \in R$ **do**
      erzeuge eine neue Facette(e, p_i)
      erzeuge eine neue Kante(Startpunkt von e, p_i)
    end for
  end if
end for

Für diesen Ansatz muss man allerdings:

- Projizieren können
- Das Sichtbarkeitsproblem lösen können

was vermutlich nicht als Brute-Force-Ansatz durchgeht ...

Zweiter Versuch - naiv, einfach zu beschreiben, Brute-Force:

(1) Für jedes Tupel (p_1, p_2, p_3) paarweise ungleicher $p_1, p_2, p_3 \in S$:
(2) Prüfe ob alle Punkte $p \in S$ auf der selben Seite der Ebene liegen, die von (p_1, p_2, p_3) aufgespannt wird. Wenn dem so ist gehören (p_1, p_2, p_3) zur konvexen Hülle (wenn keine 4 Punkte auf einer Ebene liegen definieren sie außerdem eine Facette).

Es gibt $|S|^3$ Tupel die in (1) betrachtet werden müssen. Für (2) müssen wiederum alle $|S|$ Elemente geprüft werden. Insgesamt ist folglich $O(|S|^4)$ Zeit erforderlich.