3. Aufgabenblatt zur Vorlesung SS 2015

Algorithmische Geometrie

Helmut Alt, Ludmila Scharf, Matthias Henze

Abgabe 11.5.2015

Aufgabe 1 Graham-Scan *8 Punkte*

Implementieren Sie den Graham-Scan. Benutzen Sie dabei aus Gründen besserer Laufzeit und zur Vermeidung von Rundungsfehlern möglichst nur die Grundrechenarten $+, -, \times, \div$. Eine Umrechnung in Polarkoordinaten, wie in der Vorlesung beschrieben, ist nicht nötig, um die Strahlen nach Steigung zu sortieren.

Aufgabe 2 inkrementelle Konstruktion der konvexen Hülle *7 Punkte*

Arbeiten Sie den in der Vorlesung skizzierten Algorithmus zur inkrementellen Berechnung der konvexen Hülle einer endlichen Punktmenge $S \subseteq \mathbb{R}^2$ detailliert aus und analysieren Sie seine Laufzeit. Geben Sie die dabei benutzten Datenstrukturen an und wie die Vergleiche beim Suchen durchgeführt werden. Vermeiden Sie dabei möglichst Winkelfunktionen. Bitte schreiben Sie für einen menschlichen Leser gut verständlichen Pseudocode. Auch verbale Erklärungen sind angebracht, wenn daraus klar hervorgeht, wie der entsprechende Schritt durchgeführt wird.

Hinweis zur Analyse: Argumentieren Sie, dass die Gesamtheit aller während der Konstruktion getesteten möglichen Kanten einen planaren Graphen bildet. Dabei heißt ein Graph *planar* wenn er sich so in die Ebene einbetten ("zeichnen") lässt, dass sich keine Kanten überkreuzen. Es ist bekannt (und wird noch später in der Vorlesung gezeigt), dass ein planarer Graph mit n Knoten höchstens $3n - 6$ Kanten hat.

Aufgabe 3 untere Schranke *5 Punkte*

Es ist bekannt, dass das Sortieren von n reellen Zahlen auf einer Registermaschine ("real RAM"), die nur die arithmetischen Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division sowie Vergleiche mittels $\leq$ erlaubt, eine Laufzeit von $\Omega(n \log n)$ benötigt. Folgern Sie daraus, dass auch die Laufzeit für die Konstruktion der konvexen Hülle einer Menge $S \subseteq \mathbb{R}^2$ von n Punkten Zeit $\Omega(n \log n)$ erfordert.

Hinweis: Betrachten Sie für eine zu sortierende Folge $a_1, ..., a_n$ von reellen Zahlen die Punktmenge $\{(a_1, a_1^2), ..., (a_n, a_n^2)\} \subseteq \mathbb{R}^2$.