Übungsblatt 10

Julius Auer, Alexa Schlegel

Aufgabe 1 ():

- Eingabe: Menge von n Punkten $P = \{(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)\}$
- Für jedes Paar von Punkten $((x_i, y_i), (x_j, y_j))$ mit $i < j$ interpretiere die Punkte als Geraden $g_1 = x_i \cdot x - y_i$ und $g_2 = x_j \cdot x - y_j$ und finde den Schnittpunkt s zwischen g_1 und g_2. Die duale Gerade zu s ist nun genau die Gerade auf der (x_i, y_i) und (x_j, y_j) liegen.
- Speichere in einer geeigneten Datenstruktur, wie oft ein und derselbe Schnittpunkt bei unterschiedlichen Punkt-Paaren gefunden wurde - der größte Wert repräsentiert schlußendlich die Gerade (im Dualen) auf der die meisten Punkte liegen.

Als einfache Datenstruktur zum Ablegen der Schnittpunkte können binäre Suchbäume o.ä. verwendet werden - bei n^2 vielen Punkten-Paaren benötigt man für das Einfügen der Schnittpunkte in die Datenstruktur insgesamt $O(n^2 \cdot \log n)$ Zeit.

Der $\log n$-Faktor lässt sich einsparen, wenn in konstanter Zeit verwaltet werden kann, wie oft ein Schnittpunkt errechnet wurde. Da die maximale Anzahl an Schnittpunkten bekannt ist (n^2) kann hier bei Verwendung einer Hashtabelle - die $O(n^2)$ Platz benötigt - perfektes Hashing garantiert werden. Schließlich wird für jeden Key nur ein Zähler inkrementiert (es sind also keine Listen erforderlich) und die maximale Anzahl Keys steht vorher fest.

Zum Einfügen wird so nur $O(1)$ Zeit benötigt und der $\log n$-Faktor entfällt. Als Hashfunktion können die x- und y-Koordinaten der Punkte z.B. als String interpretiert und konkateniert werden. Ggf. sollte allerdings ein gewisser Aufwand betrieben werden um Rundungsfehler sinnvoll zu behandeln M

Aufgabe 2 ():

Die größtmögliche Anzahl an Ecken und Facetten der konvexen Hülle einer Punktmenge P mit $|P| = n$ findet man bei zyklischen Polytopen. Ein passendes Polytop kann z.B. die Form:

$$P = \{m(1), ..., m(n)\}$$

haben, wobei $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ eine Momentfunktion ist:

$$m(x) = (x, x^2, x^3, x^4)$$

Keine $d + 1$ Punkte aus P sind affin abhängig und alle Facetten somit Simplices. Jede 2-Teilmenge aus P bestimmt ein solches Simplex. Es lassen sich $\binom{n}{2} \in \Omega(n^2)$ solcher Teilmengen bilden.

Aufgabe 3 (inkementelle Kontruktion):

Eingaben, Einfügereihenfolgen, sodass Laufzeit $\Omega(n^2)$

a) konvexe Hülle einer Punktmenge in $\mathbb{R}^3$

TODO

b) Trapezzerlegung eines Arrangements von Strecken im $\mathbb{R}^2$

TODO