VL Algorithmische Geometrie

Skript zur Vorlesung vom 6. Mai 2005

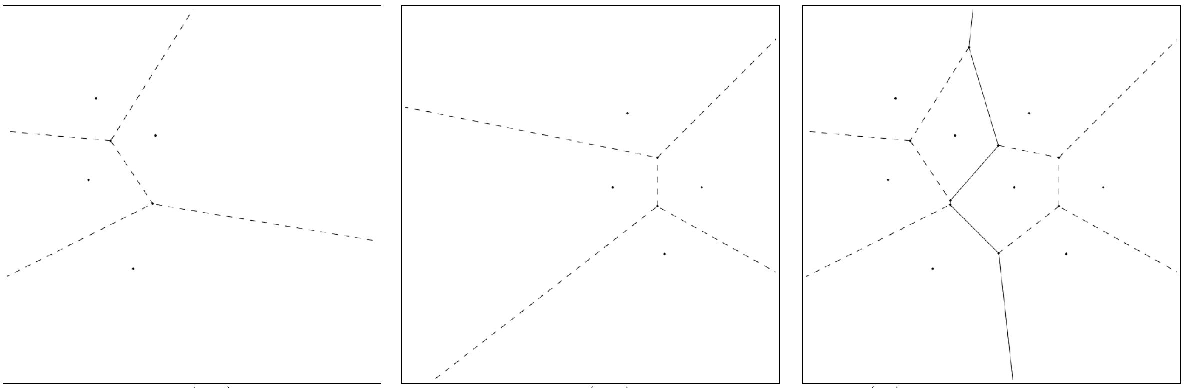
Tobias Opel
Ingo Planz

Berechnung des Voronoi-Diagrammes

Divide and Conquer

Wir wollen einen Divide-And-Conquer-Algorithmus zur Berechnung des Voronoi-Diagrammes $VD(S)$ zu einer endlichen Punktmenge $S \subset \mathbb{R}^2$ entwickeln. Entsprechend folgender Ansatz:

1. S lexikographisch sortieren (erst nach der x-, dann nach der y-Koordinate) um die Menge dann in eine linke Hälfte S_L und rechte Hälfte S_R zu zerlegen
2. rekursiv $VD(S_L)$ und $VD(S_R)$ berechnen
3. die Lösungen von 2. zusammenfügen
   Die Idee hierbei wird sein, eine „Trennlinie" P, dass heisst einen y-monotonen Kantenzug, zu konstruieren. Das Voronoi-Diagramm $VD(S)$ wird dann aus dem Teil von $VD(S_L)$, der links von P liegt und dem Teil von $VD(S_R)$, der rechts von P liegt, sowie aus P selbst bestehen (siehe Bild). Im Folgenden wird diese Idee präzisiert werden.



$VD(S_L)$ $VD(S_R)$ $VD(S)$ *mit* P *hervorgehoben*

Eigenschaften der „Trennlinie"

Definition: *Zu den Mengen* S_L *und* S_R *wie oben sei die „Trennlinie"* P:

$$P := \{x \in \mathbb{R}^2 ; d(x, S_L) = d(x, S_R)\}$$

wobei $d(x, A)$ *den kürzesten Abstand von* x *zur Menge* A *bezeichnet.*

Satz: P *hat folgende Eigenschaften:*

a) P *ist genau die Menge aller Punkte von* $VD(S)$, *die auf Kanten zwischen einer Zelle aus* $VD(S_L)$ *und einer aus* $VD(S_R)$ *liegen.*

b) P *ist ein y-monotoner Kantenzug, der aus zwei Strahlen und weiteren Strecken besteht. Die*

Strahlen sind Bisektoren zwischen Punkten, an denen Tangenten der konvexen Hüllen von S_L und S_R anliegen.

c) *Für die Gebiete L links von P und R rechts von P gilt:*

$$VD(S)=\left(VD(S_L)\cap L\right)\cup P\cup\left(VD(S_R)\cap R\right)$$

wobei hier mit $VD(\ldots)$ die Menge aller Punkte auf den Voronoi-Kanten gemeint ist.

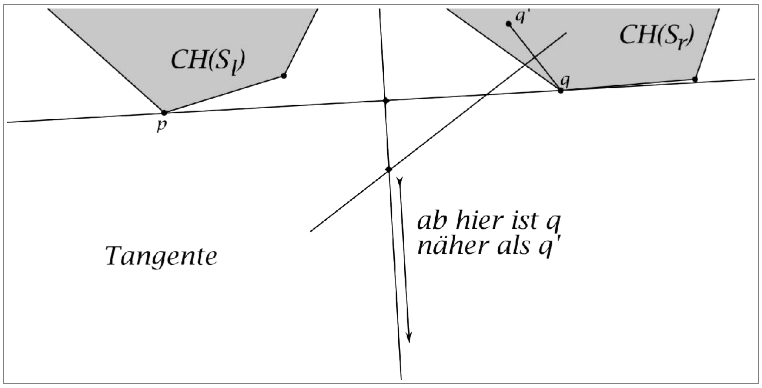
Beweis:

a) Sei zunächst $x\in P$. Betrachte dann $p\in S_L$ und $q\in S_R$ mit den kürzesten Abständen zu x. Nach der Definition von P liegen dann p und q auf einem Kreis um x, der keine weiteren Punkte von S_L oder S_R enthält. Dann ist $\overline{pq}$ Kante in der Delaunay-Triangulierung, also sind p und q benachbart und damit liegt x auf der Kante der zugehörigen Voronoi-Zellen.

Sei umgekehrt x auf der Voronoi-Kante zwischen einem Punkt $p\in S_L$ und einem Punkt $q\in S_R$. Dann ist $d(x,p)=d(x,q)$ und der Kreis um x, auf dem p und q liegen, ist leer. Damit ist aber $d(x,p)=d(x,S_L)=d(x,S_R)=d(x,q)$.

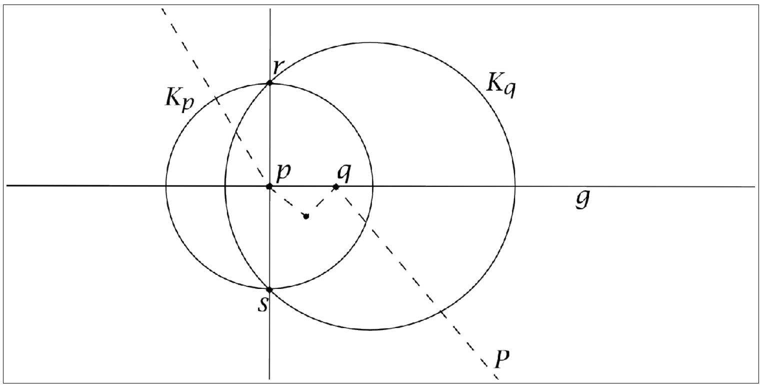
b) *an jedem Knoten von P stoßen höchstens zwei Kanten aneinander:*
Betrachte eine Kante von P. Nach a) ist sie Voronoi-Kante zu einem $p\in S_L$ und einem $q\in S_R$. Der obere Endpunkt dieser Kante ist dann Voronoi-Knoten für p, q und ein $r\in S$. Liegt $r\in S_R$ muss sich die Kante zu p und r anschließen, falls $r\in S_L$ muss sich die Kante zwischen q und r anschließen; da sich diese Fälle aber gegenseitig ausschließen, in jedem Fall nur eine weitere Kante.

die Strahlen sind Bisektoren zu Punkten, an denen Tangenten der konvexen Hüllen anliegen:
Betrachte z.B. die untere Tangente an die konvexen Hüllen (siehe Bild). Weit genug unten müssen p und q die nächsten Punkte aus S_L bzw. S_R sein, denn jede Mittelsenkrechte zu



z.B. q und $q'\in S_R$ ist nicht parallel zur Mittelsenkrechten zu p und q, schneidet diese also, und jenseits dieses Schnittes ist q der nähere Punkt in S_R.

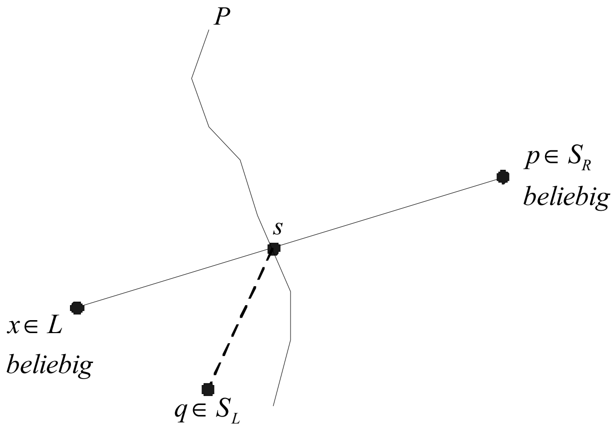
P ist y-monoton:
Angenommen, das wäre nicht der Fall. Dann existierte eine horizontale Gerade g, die P zweimal schneidet (in Punkten $p\neq q$), so dass die Strecke $\overline{pq}$ nicht komplett in P enthalten ist (siehe Bild). Zu q sei dann $r\in S_L$ mit kleinstem Abstand, analog, zu p sei $s\in S_R$ der nächste Punkt. Betrachte dann den Kreis K_p um p durch s sowie K_q um q durch r. Dann liegt s nicht nur in K_p, sondern auch ausserhalb des Inneren von K_q (da sonst näher an q als r) und rechts von r im Sinne der lexikographischen Ordnung. Damit bleibt für s nur die im Bild angedeutete Lage mit gleicher x-Koordinate wie r. Dann geht aber eine



ganze Voronoi-Kante durch p und q, insbesondere ist $\overline{pq}$ in P im Widerspruch zur Annahme.

c) Allgemein gilt: $L=\{x \mid d(x, S_L) \leq d(x, S_R)\}$
$R=\{x \mid d(x, S_L) \geq d(x, S_R)\}$

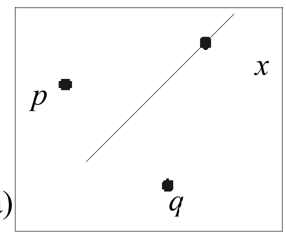
dann:



$\overline{xp}$ schneidet irgendwo P im Punkt s.
s hat den kürzesten Abstand zu einem Punkt in S_R und q in S_L.

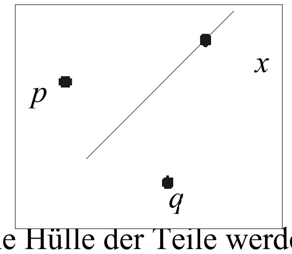
$$\|x-q\| \leq \|x-s\| + \|s-q\|$$
$$\leq \|x-s\| + \|s-p\| = \|x-p\|$$

$\subset$:
x auf Kante von $VD(S)$. p, q zugehörige Punkte von S.
a) falls $p, q \in S_L$, dann x auf Kante von $VD(S_L)$ und $x \in L \Rightarrow x \in VD(S_L) \cap L$
b) falls $p, q \in S_R$ - analog zu a)
c) falls $p \in S_L, q \in S_R$, dann x auf P nach der Eigenschaft a)



$\supset$:
Falls $x \in VD(S_L) \cap L$, zugehörige Punkte seien $p, q \in S_L$. Nach vorherigem gilt, es gibt kein $r \in S_R$, das näher liegt als p, q. Auch im Gesamtdiagramm sind p, q nächste Nachbarn $\Rightarrow x \in VD(S)$.

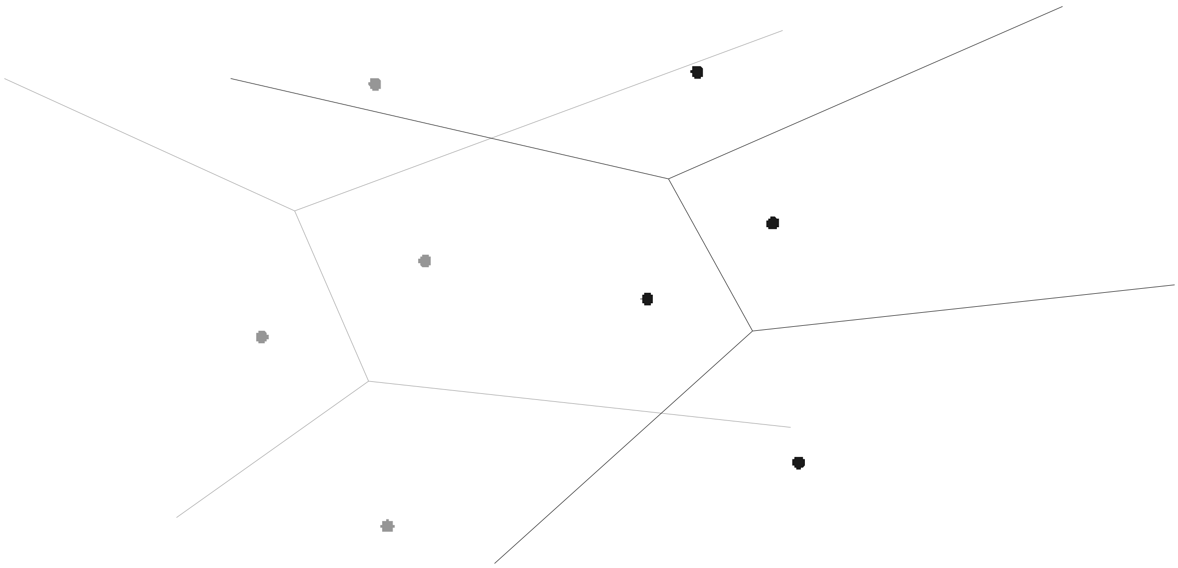
Falls $x \in VD(S_R) \cap R$ - gilt analog.
Falls $x \in P \Rightarrow x \in VD(S)$ nach der Eigenschaft a)

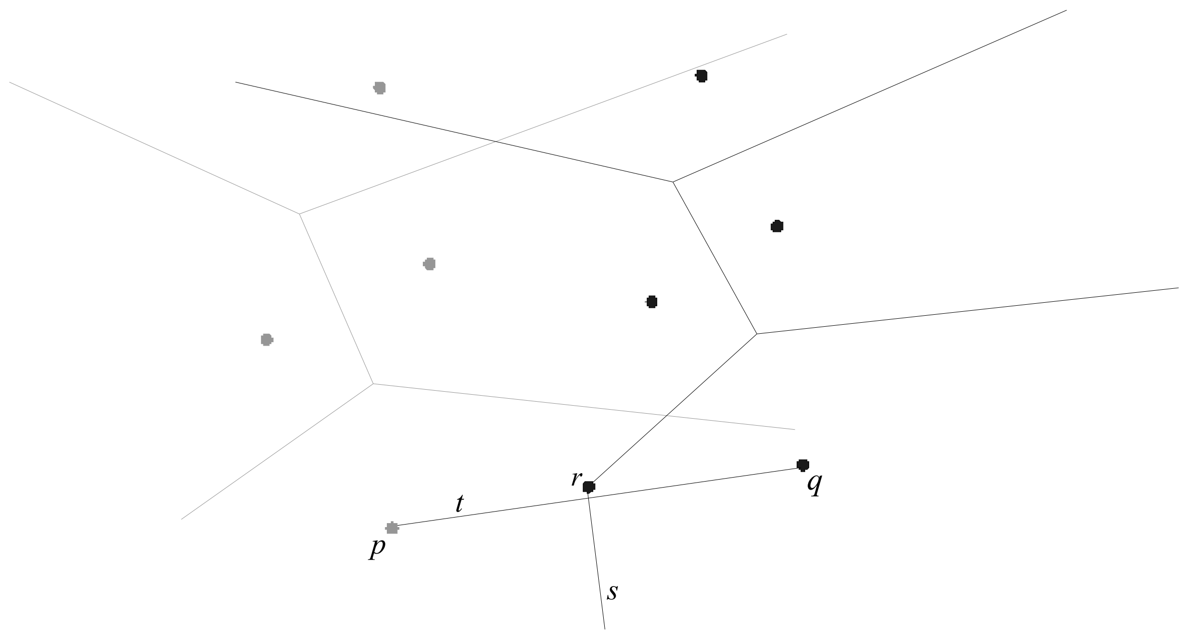


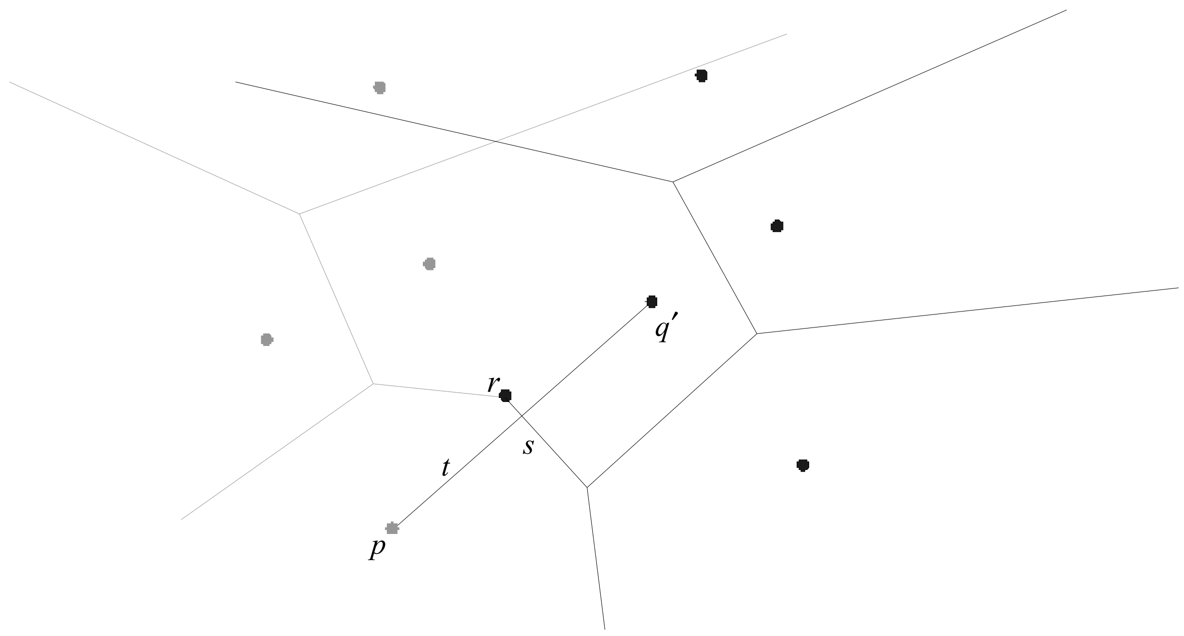
Schritt 3 des Algorithmus

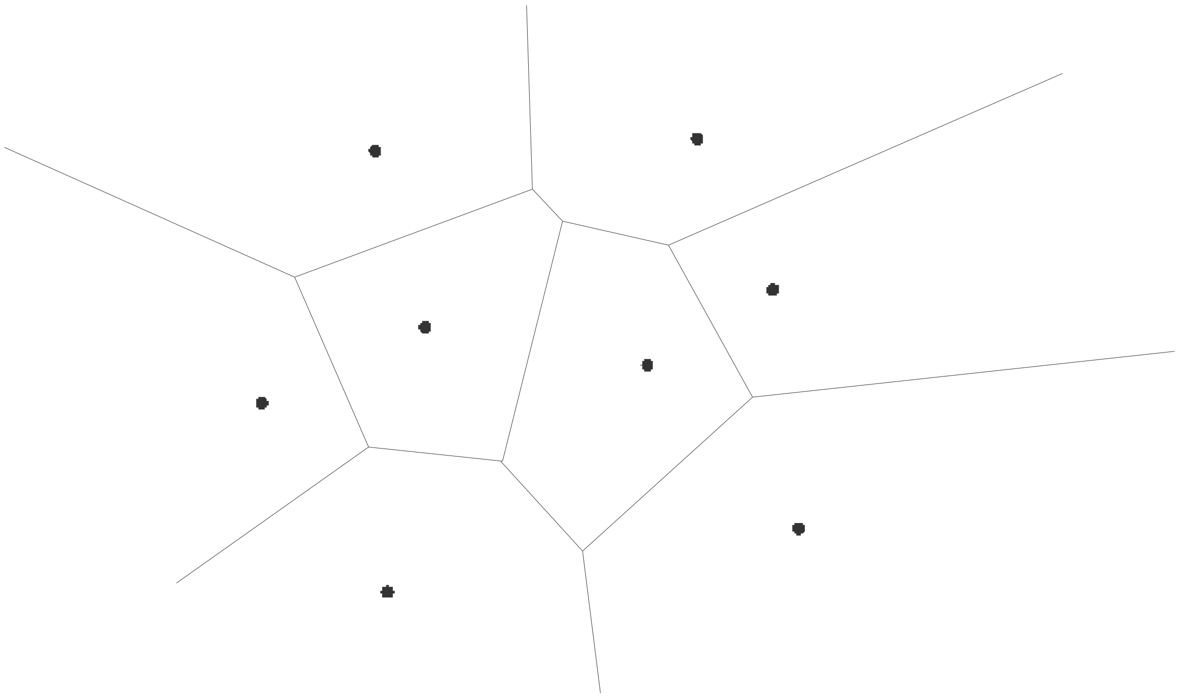
a) Finde die untere Tangente t an $CH(S_L), CH(S_R)$. [Konvexe Hülle der Teile werden simultan zum VD bestimmt]
Laufzeit: geht in $O(n)$ (sogar in $O(\log(n))$)
Konstruiere Mittelsenkrechte s zu beiden Punkten p, q an denen t anliegt.

b) Auf s von $-\infty$ her kommend, bestimme ersten Schnittpunkt r mit $VD(S_L)$ oder $VD(S_R)$.
Löse p (bzw. q) durch einen Punkt p' (q') ab, der mit p (q) zusammen dies Kante definiert.
s := Strahl von r aus entlang der Mittelsenkrechten von pq' ($p'q$) usw. bis der der obere Strahl gefunden wurde.



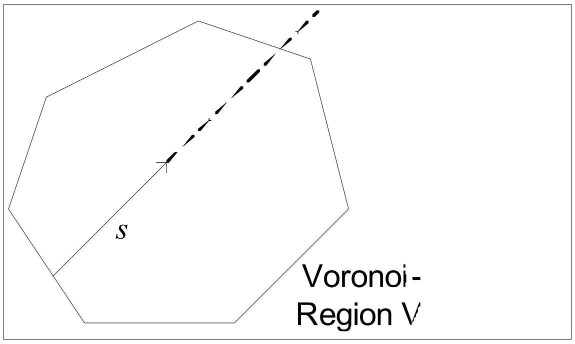

r
q
t
p
s


q′
r
s
t
p



Noch zu klären:

Bei welcher Kante wird s V verlassen?



Einfach den Rand nach beiden Seiten durchlaufen und Kante finden. In dem Prozess wird jede Kante des Voronoi-Diagramm einmal durchlaufen: $O(n)$

Zeit insgesamt: $T(n) = 2\,T\left(n/2\right) + O(n)$

Satz: *Ein Voronoi-Diagramm von Punkten in der Ebene kann in Zeit* $O(n \log(n))$ *berechnet werden.*

Korollar: *Gleiches gilt für die Delaunay-Triangulierung.*