

Übungsblatt 6

Julius Auer, Alexa Schlegel

Aufgabe 1 (Voronoi-Diagramme von Strecken):

Wir betrachten als erstes Voronoi Kanten zwischen Punkt P und Strecke s , diese bestehen grundsätzlich aus 3 Abschnitten. (i) und (iii) sind Strecken bzw. Strahlen. Es ist die Voronoi Kante zwischen dem Punkt P und dem linken A bzw. rechten Streckenende B . (ii) ist eine Parabel, deren Form ist abhängig vom Abstand zwischen P und s . In welchem Abschnitt P liegt ist egal, denn die Zusammensetzung der Voronoi Kante bleibt gleich.

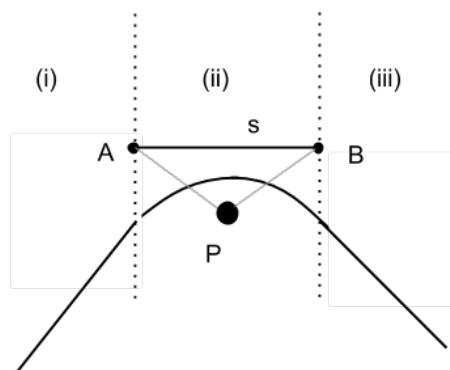


Abbildung 1: Bisektor Punkt und Strecke

Betrachten wir nun die Bisektoren von zwei Strecken s und t , dabei unterscheiden wir in (a) parallele Strecken und (b) nicht parallele Strecken.

(a): parallele Strecken:

- (1) s und t liegen auf einer Geraden (Spezialfall)
- (2) überschneiden sich nicht
- (3) überschneiden sich zum Teil oder ganz

Im Fall (2) und (3) entstehen 5 Bereiche:

- (i) Gerade: Bisektor von den linkesten Punkten A und C
- (ii) Parabel: s und C
- (iii) Gerade: Gerade dazwischen
- (iv) Parabel: t und B
- (v) Gerade: Bisektor von den rechtesten Punkten B und D

(b): nicht parallele Strecken

- (1) überschneiden sich nicht

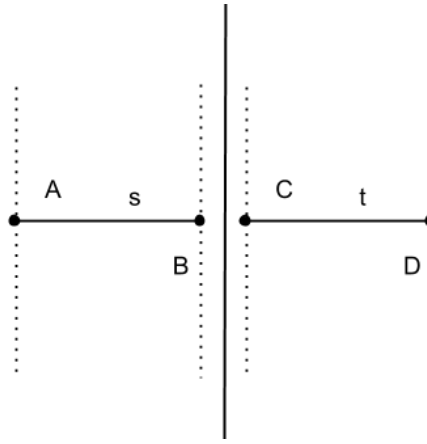


Abbildung 2: (1) Bisektor von zwei parallelen Geraden, auf einer Geraden.

- (2) überschneiden sich zum Teil oder ganz

Hier entstehen im Fall (1) 4 Bereiche, im Falls (2) 7 Bereiche:

Erster Fall: wenn sie sich nicht überschneiden:

- (i) Gerade
- (ii) Winkelhalbierende
- (iii) Parabel
- (iv) Gerade

Zweiter Fall: wenn sie sich überschneiden:

- (i) Gerade
- (ii) Parabel
- (iii) Winkelhalbierende
- (iv) Parabel
- (v) Winkelhalbierende
- (vi) Parabel
- (vii) Gerade

Anzahl der Ecken: vielleicht wenn ich die Ecken weiß dann kommt man auch auf die Kanten.

Anzahl der Kanten: hm das weiß ich nicht. Anzahl der Zellen: ist gleich Anzahl der Strecken.

- * Wie sehen die Voronoi-Kanten aus \rightarrow Bilder von allen Fällen
- * Aus wie vielen Ecken, Kanten und Zellen kann $VD(S)$ höchstens bestehen?
- * Zeigen Sie dazu, dass die Voronoi-Regionen zusammenhängend sind.

Aufgabe 2 (Fortune-Sweep):

Die Sweepline swept von links nach rechts, also entlang der x -Achse.

site ist ein Punkt in der Ebene.

beach line teilt die Ebene in zwei Bereiche. Oberhalb der beach line sind alle Bereiche die potentiell zu den Voronoi Regionen der jeweiligen Punkte gehören werden. Unterhalb der beach line alle Punkte zu denen noch keine Aussage getroffen werden kann. Die

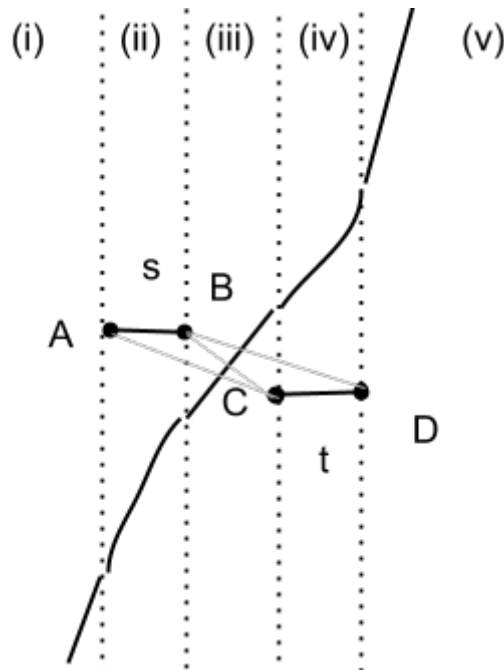


Abbildung 3: (2) Bisektor von zwei parallelen Geraden, keine Überschneidung.

Punkte auf der beach line sind equidistant zum zugehörigen Punkt und zur sweep line.

spikes zukünftige Voronoi Kanten. An Schnittpunkten von Spikes entstehen zukünftige Voronoi Knoten.

breakpoint sind die Schnittpunkte der Parabeln, dort befinden sich auch die Spikes, also durch die zwei Schnittpunkte verläuft genau ein Spike.

site Event tritt auf, wenn die Sweepline einen Punkt („site“) trifft.

circle Event tritt auf, wenn Kreisbögen verschwinden. D.h. ein circle event entsteht aus einem site event. Wenn sich zwei Spikes schneiden, der Kreis durch die zugehörigen Punkte und dann ganz unten auf dem Kreis ist eine neues circle event.

sweep line status (SLS) enthält die Topologie der Beachline in Form einer Liste, sozusagen die Kreisbögen und die dazugehörigen Punkte und eine Information darüber, durch welches Event ein Kreisbogen verschwindet.

event point schedule (EPS) enthält site events und circle events. Die Priorität ist durch die x -Koordinate gegeben, d.h. tritt das Event weiter links auf, so ist die Priorität höher. Initialisiert wird die priority queue mit allen zu Beginn gegebenen Punkten.

Die Idee mit dem Binärensuchbaum leuchtet mir zwar ein, habe es aber nicht so doll verstanden, als dass ich es hier umsetzen könnte.

Initialisierung

EPS $(0, 0)[se1], (1, 2)[se2], (2, 3)[se3], (4, 3)[se4]$

beachline \emptyset

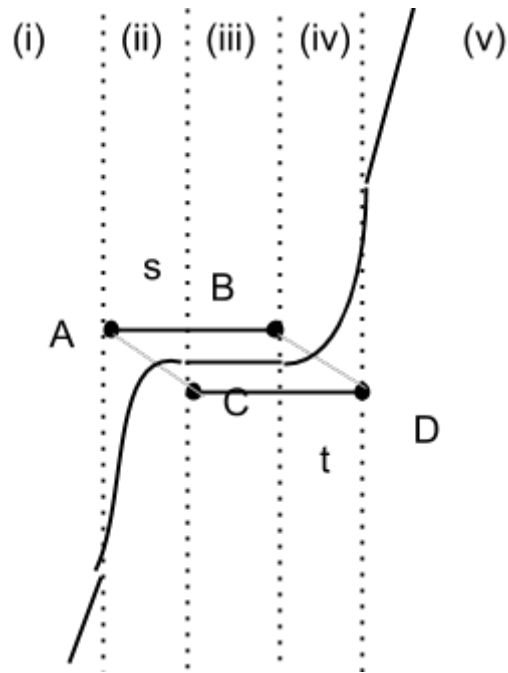


Abbildung 4: (3) Bisektor von zwei parallelen Geraden, Überschneidung.

EVENT 1 - site event $(0, 0)$

EPS $(1, 2)[se2], (2, 3)[se3], (4, 3)[se4]$

beachline $a_1 \rightarrow (0, 0)$

Keine circle event und keine neuen Kanten.

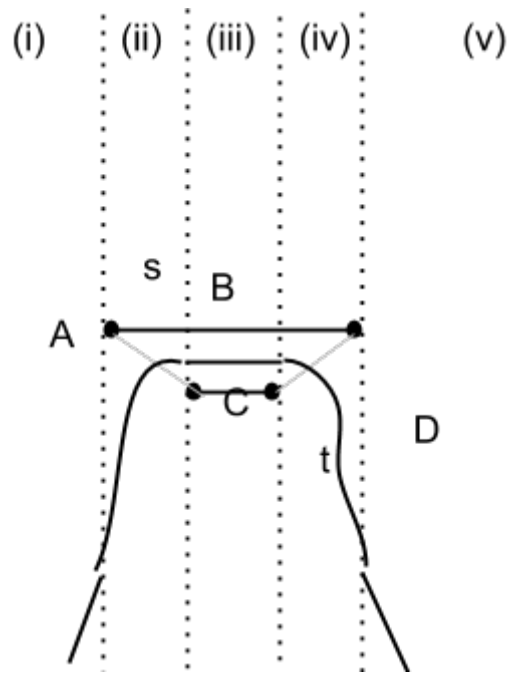


Abbildung 5: (3) Bisektor von zwei parallelen Geraden, komplett innerhalb.

EVENT 2 - site event (1, 2)

EPS (2, 3)[se3], (4, 3)[se4]

beachline $a_{1.1} \rightarrow (0, 0)$,
 $a_2 \rightarrow (1, 2)$,
 $a_{1.2} \rightarrow (0, 0)$

Keine circle event, zwei Spikes, werden noch zu Kanten, wenn die Position der Knoten bekannt ist.

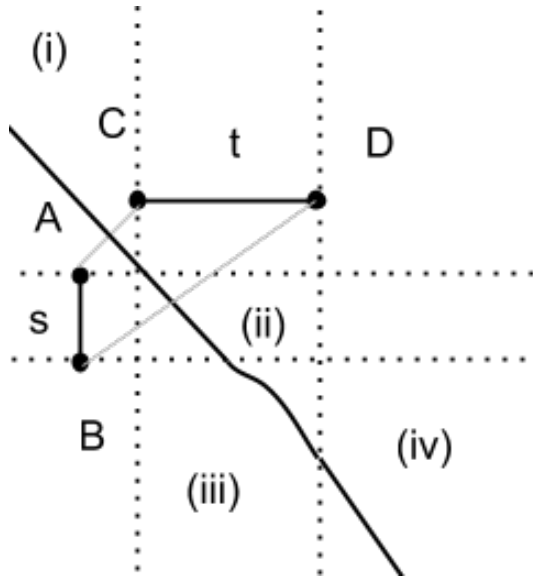


Abbildung 6: (3) Bisektor von zwei nicht parallelen Geraden, keine Überschneidung.

EVENT 3 - site event $(2, 3)$

EPS $(4, 3)[se4], (11 + \sqrt{130}, -3)[ce1]$

beachline $a_{1.1} \rightarrow (0, 0)$

$a_{2.1} \rightarrow (1, 2)$

$a_3 \rightarrow (2, 3)[\text{delete at } ce1]$

$a_{2.2} \rightarrow (1, 2)$

$a_{1.2} \rightarrow (0, 0)$

Der Schnittpunkt $(11, -3)$ der beiden Spikes ist ein evtl. zukünftiger Voronoi Knoten. Der Fußpunkt des grünen Kreises wird als neues circle event $(11 + \sqrt{130}, -3)[ce1]$ der EPS hinzugefügt.

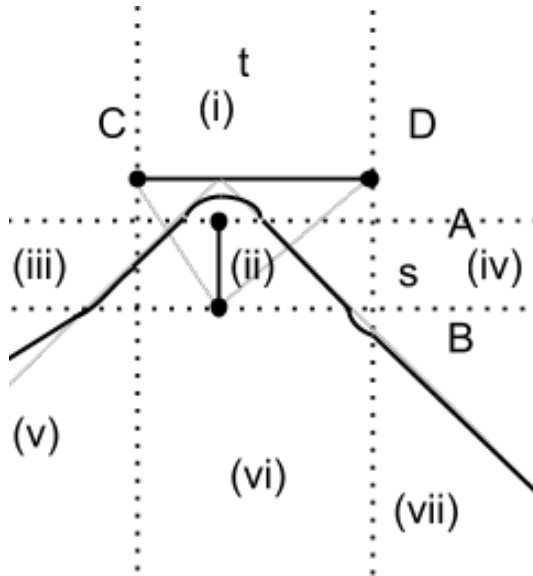


Abbildung 7: (3) Bisektor von zwei nicht parallelen Geraden, mit Überschneidung.

EVENT 4 - site event (4, 3)

EPS $(6 + \sqrt{20}, 2)[\text{ce2}], (7 + \sqrt{50}, -1)[\text{ce3}]$

beachline $a_{1.1} \rightarrow (0, 0)$

$a_{2.1} \rightarrow (1, 2)$

$a_{3.1} \rightarrow (2, 3)$

$a_4 \rightarrow (4, 3)[\text{delete at ce2}(7 + \sqrt{50}, -1)]$

$a_{3.2} \rightarrow (2, 3)$

$a_{2.2} \rightarrow (1, 2)$

$a_{1.2} \rightarrow (0, 0)$

Der Schnittpunkt der beiden letzten Spikes $(6, 2)$ ist ein evtl. zukünftiger Voronoi Knoten. Der Fußpunkt dieses Kreises wird als neues circle event $(6 + \sqrt{20}, 2)[\text{ce2}]$ der EPS hinzugefügt und rutscht in der priority queue ganz nach vorne.

Das alte circle event $(11 + \sqrt{130}, -3)$ wird aus der EPS gelöscht.

Der Schnittpunkt $(7, -1)$ des neuen Spikes und des Nachbarspike ist wieder in potentieller neuer Knoten im Voronoi Diagramm. Ein neues circle event kommt also hinzu $(7 + \sqrt{50}, -1)[\text{ce3}]$.

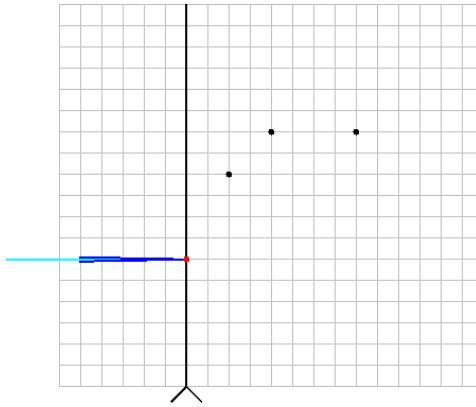


Abbildung 8: Schritt 1

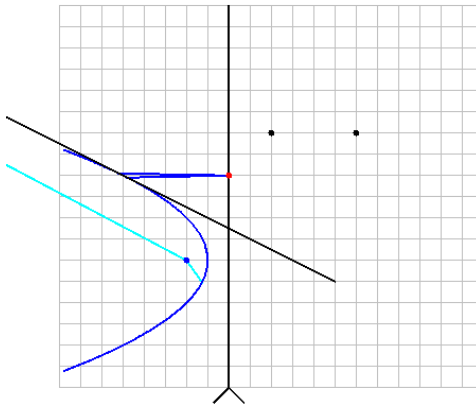


Abbildung 9: Schritt 2

EVENT 5 - circle event $(6 + \sqrt{20}, 2)$

EPS $(7 + \sqrt{50}, -1)[\text{ce3}]$

beachline $a_{1.1} \rightarrow (0, 0)$

$a_{2.1} \rightarrow (1, 2)$

$a_{3.1} \rightarrow (2, 3)$

$a_4 \rightarrow (4, 3)[\text{delete at ce3}(7 + \sqrt{50}, -1)]$

$a_{3.2} \rightarrow (2, 3)$

$a_{2.2} \rightarrow (1, 2)$

$a_{1.2} \rightarrow (0, 0)$

Ein Parabelbogen verschwindet, der Voronoi Knoten ist nun fest, sowie die beiden Voronoi-Kanten.

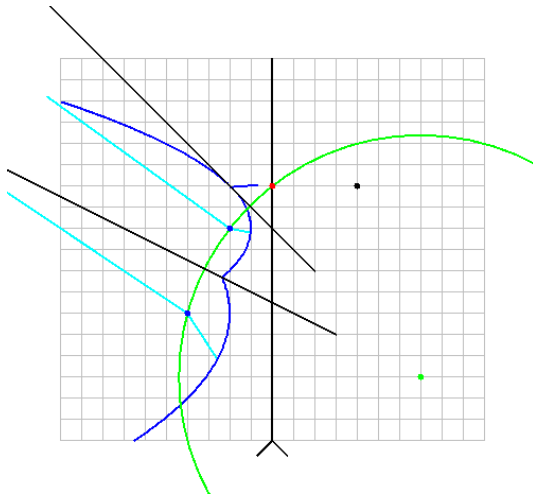


Abbildung 10: Schritt 3

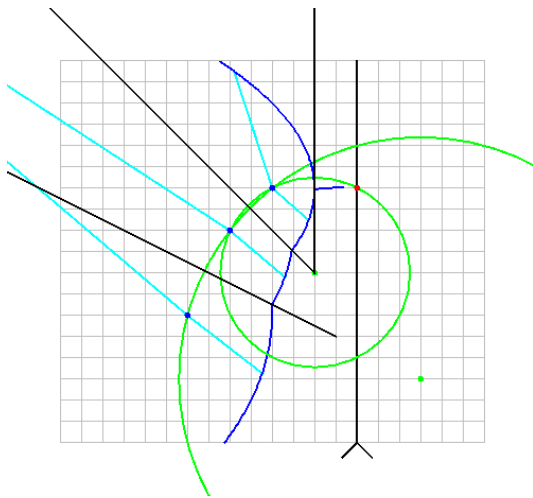


Abbildung 11: Schritt 4

EVENT 6 - circle event $(7 + \sqrt{50}, -1)$

EPS \emptyset

beachline $a_{1,1} \rightarrow (0, 0)$

$a_{2,1} \rightarrow (1, 2)$

$a_{3,1} \rightarrow (2, 3)$

$a_{3,2} \rightarrow (2, 3)$

$a_{2,2} \rightarrow (1, 2)$

$a_{1,2} \rightarrow (0, 0)$

Ein Parabelbogen verschwindet, der Voronoi Knoten ist nun fest, sowie die beiden Voronoi-Kanten.

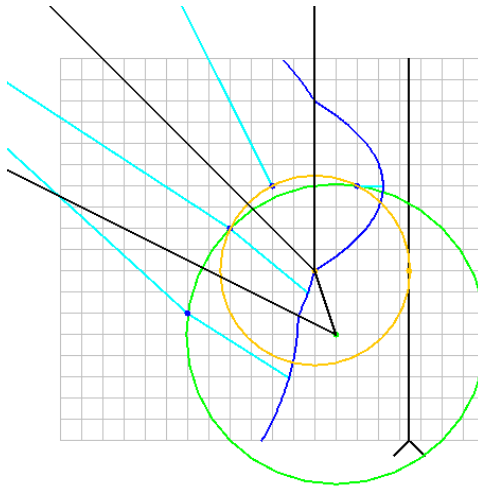


Abbildung 12: Schritt 5

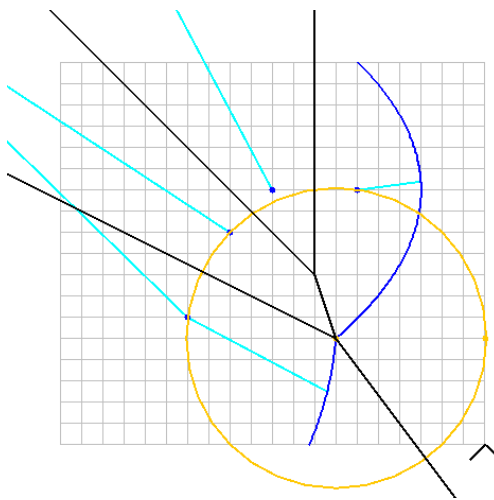


Abbildung 13: Schritt 6

Am Ende muss erklärt werden, wie in einem Postprocessing mit Kanten verfahren wird, die nur an einem oder gar keinem Knoten hängen

Aufgabe 3 (Durchschnitt einfacher Polygone):

- * Sweep-Line-Algorithmus für Durchschnitt zweier einfacher Polygone P und Q
- * Laufzeit (Gesamtzahl n der Ecken von P und Q und der Anzahl k der Ecken des Durchschnitts)

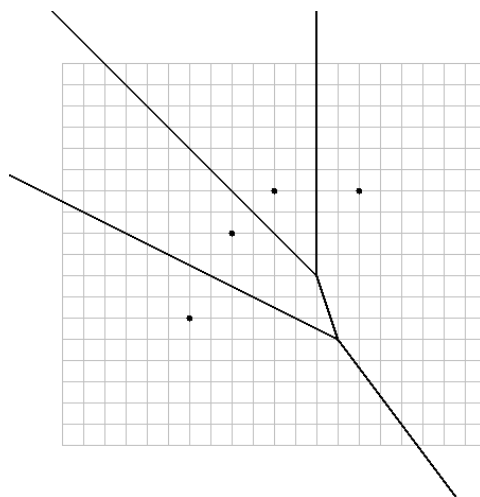


Abbildung 14: Schritt 7