Übungsblatt 8

Julius Auer, Alexa Schlegel

Aufgabe 1 (Vorverarbeitungszeit für Bereichsbäume):

Der Algorithmus zur Konstruktion - der $T(n)$ Zeit benötigt - ist straight-forward:

(1) Lege Knoten an und konstruiere sekundäre Struktur - im 2D-Fall ist die sekundäre Struktur ein "einfacher" binärer Baum mit n Knoten, der in $O(n \cdot \log n)$ Zeit konstruiert werden kann.
(2) Finde Median der Punkte und teile deren Menge in zwei möglichst gleich große Teile. Mit geeignetem Median-Algorithmus (z.B. BFPRT) ist das in $O(n)$ möglich.
(3) Konstruiere die beiden resultierenden Teilbäume rekursiv in $O(T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil))$.

Der Einfachheit halber sei n im Folgenden eine 2er-Potenz. Dass

$$T(1) = 1$$

ist klar. Somit ergibt sich für die Laufzeit:

$$\begin{aligned}
T(n) &= \overbrace{2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right)}^{(3)} + \overbrace{n \cdot \log n}^{(1)} + \overbrace{n}^{(2)} \\
&= 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n \cdot (\log n + 1) \\
&= 2 \cdot \left(2 \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{n}{2} \cdot \left(\log \frac{n}{2} + 1\right)\right) + n \cdot (\log n + 1) \\
&= 2 \cdot \left(2 \cdot \left(2 \cdot T\left(\frac{n}{8}\right) + \frac{n}{4} \cdot \left(\log \frac{n}{4} + 1\right)\right) + \frac{n}{2} \cdot \left(\log \frac{n}{2} + 1\right)\right) + n \cdot (\log n + 1) \\
&\dots \\
&= 2^k \cdot T\left(\frac{n}{2^k}\right) + n \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \left(\log \frac{n}{2^i} + 1\right)
\end{aligned}$$

Die Primärstruktur hat natürlich eine Höhe von maximal $\log n$:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2^{\log n} \cdot T\left(\frac{n}{2^{\log n}}\right) + n \cdot \sum_{i=0}^{\log n - 1} \left(\log \frac{n}{2^i} + 1\right) \\
&= n + n \cdot \left(\log \frac{n}{n-1} + \log n - 1\right) \\
&= n \cdot \log \frac{n}{n-1} + n \cdot \log n \\
&\in n \cdot O(1) + n \cdot \log n \\
&\in O(n \cdot \log n)
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2 (dynamische Segmentsbäume):

Aufgabe 3 (Punkt-Rechteck-Anfragen):