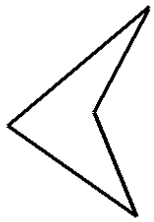

Abbildung 1: Viereck

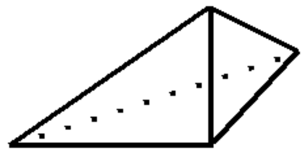

Abbildung 2: Tetraeder

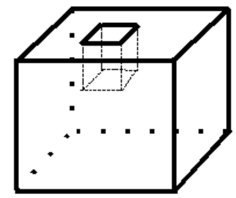

Abbildung 3: ausgehölter Würfel

1 Widerholung

Themen der Letzten Vorlesung waren unter anderem:

- Punkte
- Strecken
- Polygonzüge
- Polygone
- Einfachheit

2 Konvexe Mengen

Man kann zeigen:
Ist $P \subset \mathbb{R}^2$ ein einfaches Polygon, so besteht $\mathbb{R}^2 \setminus \{x|x$ liegt auf einer Strecke von $P\}$ aus zwei Zusammenhangskomponenten, eine beschränkt, gennant das “Innere” von P, eine unbeschränkt, das “Äussere” von P.
Für Polygonzüge lässt sich keine sinnvolle Definition von “Innen” und “Aussen” finden. Im Falle von nicht-einfachen Polygonen lässt sich dieser Zusammenhang nicht auf diese Weise beschreiben.

Definition:
$A \subset \mathbb{R}^d$ heißt **konvex** $\Leftrightarrow \forall p, q \in A$ gilt: $\overline{pq} \subset A$

Beispiel:

- Dreiecke sind immer konvex.
- Eine Punktmenge im 2-dimensionalen Raum ist i.d.R. nicht konvex.
- Ein Viereck muss nicht konvex sein. (Abb. 1)
- Im 3-dimensionalen Raum ist ein Tetraeder, als Simplex, immer konvex. (Abb. 2) (Anm.: Simplex ist der kleinste konstruierbare Körper mit Ausdehnungen in allen Dimensionen)
- Ein Würfel ist konvex, es sei denn er ist ausgehöhlt. (Abb. 3)

Bemerkung:
Der Durchschnitt beliebig vieler konvexer Mengen ist konvex.
Folgt aus der Definition konvexer Mengen, da Strecken im Schnitt auch Strecken in allen Urspungsmengen sind.

Definition:
Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ eine Punktmenge aus dem d-dimensionalen Raum. Dann ist die konvexe Hülle von A (engl. “convex hull”):
$CH(A) := \bigcap_{B \text{ konvex und } A \subset B} B$

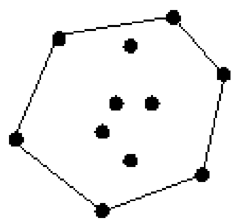

Abbildung 4: konv. H. Punktmenge

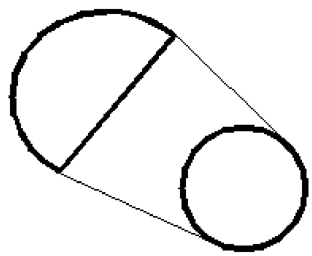

Abbildung 5: konv. H. Flächen

Abbildung 6: konv. Polygon

Beispiel:

- konvexe Hülle einer endlichen Punktmenge (Abb. 4)
- konvexe Hülle zweier Flächen, ergibt sich mit der, durch die Tangenten zusätzlich eingeschlossene Fläche (Abb. 5)
- konvexe Hülle der Punkte aus $\mathbb{R}^2$ mit ganzzahligen Koordinaten entspricht der gesamten Ebene, denn alle Punkte mit nicht-ganzzahligen Koordinaten liegen zwischen solchen mit ganzzahligen Koordinaten.

Bemerkung:
$CH(A)$ ist die kleinste konvexe Menge, die A enthält, im Bezug auf "$\subset$", d.h. ist $B \subset \mathbb{R}^d$ konvex mit $A \subset B$, so ist auch $CH(A) \subset B$.

3 Konvexe Polygone

Definition:
Ein einfaches Polygon P heißt **konvex** gdw. sein Inneres eine konvexe Menge ist.

Bemerkung:
Nicht einfache Polygone sind nicht konvex.

Beispiel:

- konvexes Polygon (Abb. 6)
- nicht konvexes Polygon (Abb. 1)

Wozu das ganze?
Viele algorithmische Probleme lassen sich wesentlich leichter für konvexe als für nicht konvexe Mengen lösen.

Beispiel:
Durchschnitte berechnen (Erkennung verdeckter Kanten und Flächen bei der Computergraphik), Flächen berechnen

Deswegen:
Zerlegung komplizierter Objekte in konvexe Teile. Gegeben z.B. ein nicht konvexes Polygon über die Kartesischen Koordinaten seiner Ecken und gesucht der Flächeninhalt. Zerlege das Polygon in konvexe Teilpolygone (z.B. Dreiecke) und berechne über diese den Flächeninhalt (Abb 7).

Hier annehmen:
Keine drei Ecken eines konvexen Polygons liegen auf einer Geraden. Dies stellt keine wesentliche Einschränkung dar, denn ist dies der Fall, so lässt sich einer der Punkte entfernen ohne, dass sich die konvexe Hülle des Polygons ändert. Allgemein sind so vereinfachte Polygone jedoch nicht mathematisch äquivalent zum Ursprungspolygon (Abb. 8).

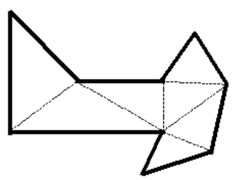

Abbildung 7: Zerlegung eines Polygons

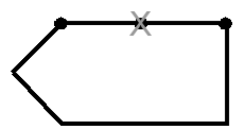

Abbildung 8: Vereinfachung

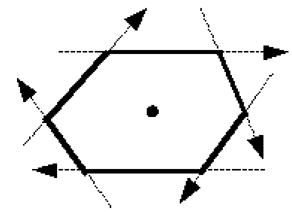

Abbildung 9: Algorithmus 2)

Einfache algorithmische Fragen: (in 2 Dimensionen)

1. gegeben ein konvexes Polygon P sowie ein Punkt $p \in \mathbb{R}^2$
   Frage: liegt p innerhalb von P (oder ausserhalb, oder auf dem Rand)?
2. gegeben ein konvexes Polygon P und eine Gerade g
   bestimme: Schnittmenge $g \cap P$ (mit P= Menge aller auf dem Rand von P liegenden Punkte)
   Mächtigkeit der Schnittmenge: $|g \cap P| \in \{\infty, 0, 1, 2\}$
   zu betrachtende Fälle:
   - g verläuft direkt auf einer der Teilstrecken von P, es gibt unendlich viele Schnittpunkte
   - g schneidet P überhaupt nicht, es gibt keinen Schnittpunkt
   - g schneidet P genau in einem Eckpunkt, es gibt einen Schnittpunkt
   - g schneidet den Inhalt von P , es gibt zwei Schnittpunkte

Bemerkung:
Ist P gegeben als Folge seiner Kanten und hat n Ecken, so sind beide Probleme in Zeit $O(n)$ lösbar.

1. Liegt Punkt p in Polygon P? (Abb. 9)
   - Erweitere die Kanten des Polygons zu orientierten Geraden, eine Orientierung kann hierbei durch die Reihenfolge in der Eingabe, z.B. im Uhrzeigersinn, gebildet werden.
   - p liegt im "Inneren" von $P \Leftrightarrow p$ rechts von jeder dieser Geraden liegt
     Unabhängig von der Orientierung im Uhrzeigersinn oder entgegen dem Uhrzeigersinn gilt, liegt Punkt p immer auf der gleichen Seite aller dieser Geraden, so liegt p in P.

   Definition:
   Das Innere eines Polygons entspricht dem Schnitt der offenen Halbräume rechts von diesen Geraden. *(Alternative Definition von "konvexem" Polygon, hierbei dann mit Schnitt der abgeschlossenen Halbräume)*
2. Bestimmung der Schnittmenge von Polygon P mit der Geraden g
   $g \cap P = \bigcup_{i=1}^{n} g \cap e_i$ ($e_1, ..., e_n$ sind die Kanten von P)
   Für jede einzelne Kante e_i ist der Schnitt $g \cap e_i$ in konstanter Zeit bestimmbar.

4 Balancierte hierarchische Darstellung eines Polynoms

Sind für ein festes Polygon P die Operationen 1) und 2) mit unterschiedlichen Punkten bzw. Geraden mehrfach auszuführen, so kann diese Aufgabe durch **vorverarbeiten** von P in eine **Datenstruktur**, die diese Operationen unterstützt, je Anfrage in logarithmischer Zeit gelöst werden.

Definition:
Eine Folge von konvexen Polygonen $P_0, P_1, ..., P_k$ heißt Balancierte Hierarchische Darstellung von P gdw.

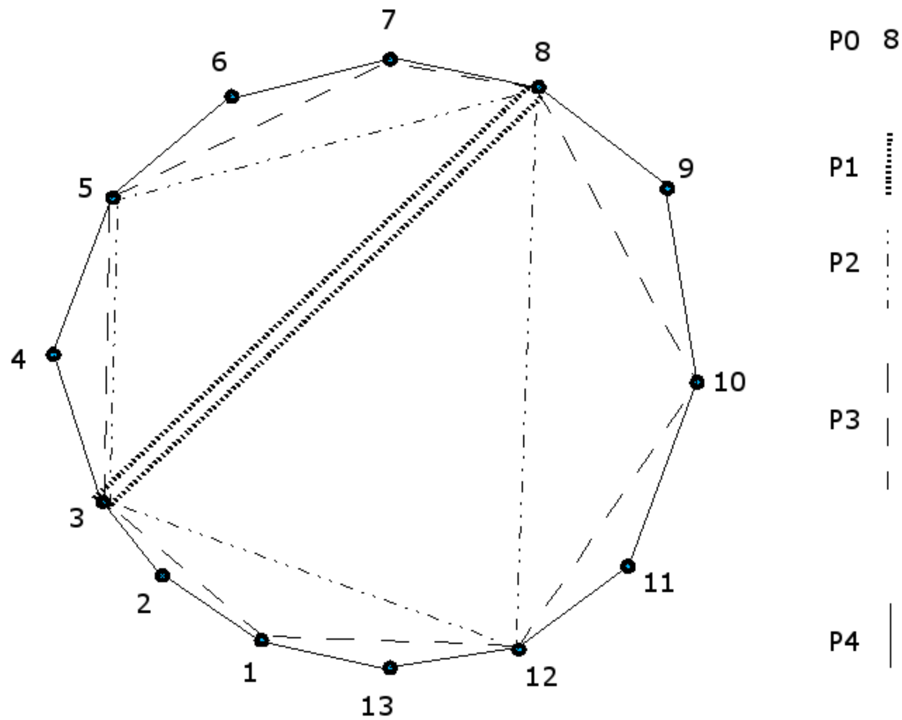

Abbildung 10: B.H.D. Zerlegung

- P_0 besteht aus einem Punkt. ("Eineck", per Definition konvex)
- P_{i-1} entsteht aus P_i durch das Streichen von Ecken, wobei keine zwei hintereinander liegenden Ecken gestrichen werden dürfen und mindestens die Hälfte (abgerundet) gestrichen wird. (Es verbleibt also im wesentlichen jede zweite Ecke)
- $P_k = P$

Beispiel:

- Anwendung auf ein einfaches Polygon (Abb. 10).
- Darstellung in Baumform (Abb. 11). Hierbei entsprechen die Ebenen des Baumes den Verfeinerungsstufen $P_0, ..., P_k$ und die Höhe des Baumes beträgt $O(\log n)$.

Satz 1:
Gegeben sei ein konvexes Polygon P mit n Ecken als BHD-Baum. Dann lässt sich in Zeit $O(\log n)$:

1. feststellen, ob ein gegebener Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ in P liegt.
2. für eine gegebene Gerade g, $g \cap P$ berechnen.

Beweis für 1):
Betrachte die Kegel, die vom Punkt P_0 und den Kanten des Polygons P_i gebildet werden mit $i = 1, ..., k$ und bestimme den Kegel K_i, der p enthält. K_{i+1} entsteht aus K_i durch Unterteilung mit einem Strahl (Abb. 12). Es wird also konstante Zeit benötigt, um K_{i+1} aus K_i zu bestimmen. Das entspricht einem Schritt im Baum von einem Knoten zu seinem Kind und damit insgesamt $O(\text{Höhe des Baumes}) = O(\log n)$.
Am Schluss resultiert ein Kegel, der eine Kante e von $P_k = P$ einschließt (Abb. 13). Entscheide, ob p in P liegt durch Vergleich mit e.

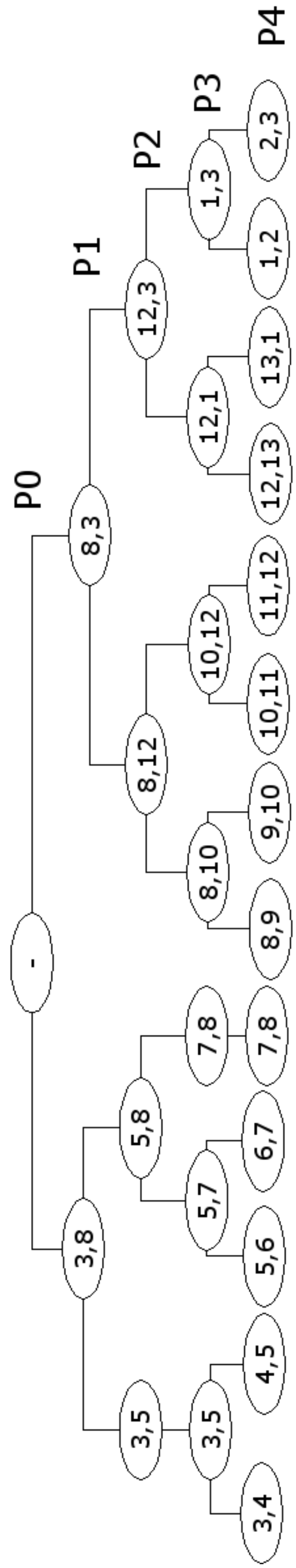

Abbildung 11: B.H.D. Baum

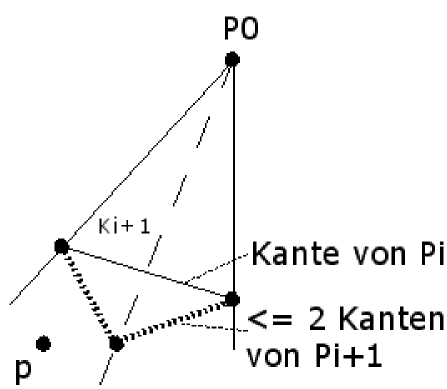

Abbildung 12: Zwischenschritt

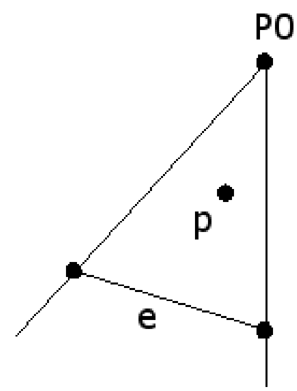

Abbildung 13: Endschritt