Algorithmische Geometrie, SoSe 2005

Skriptmitschrift vom 04. Mai 2005

David Diestel

Alexander Tobis

Wiederholung Voronoi-Diagramme

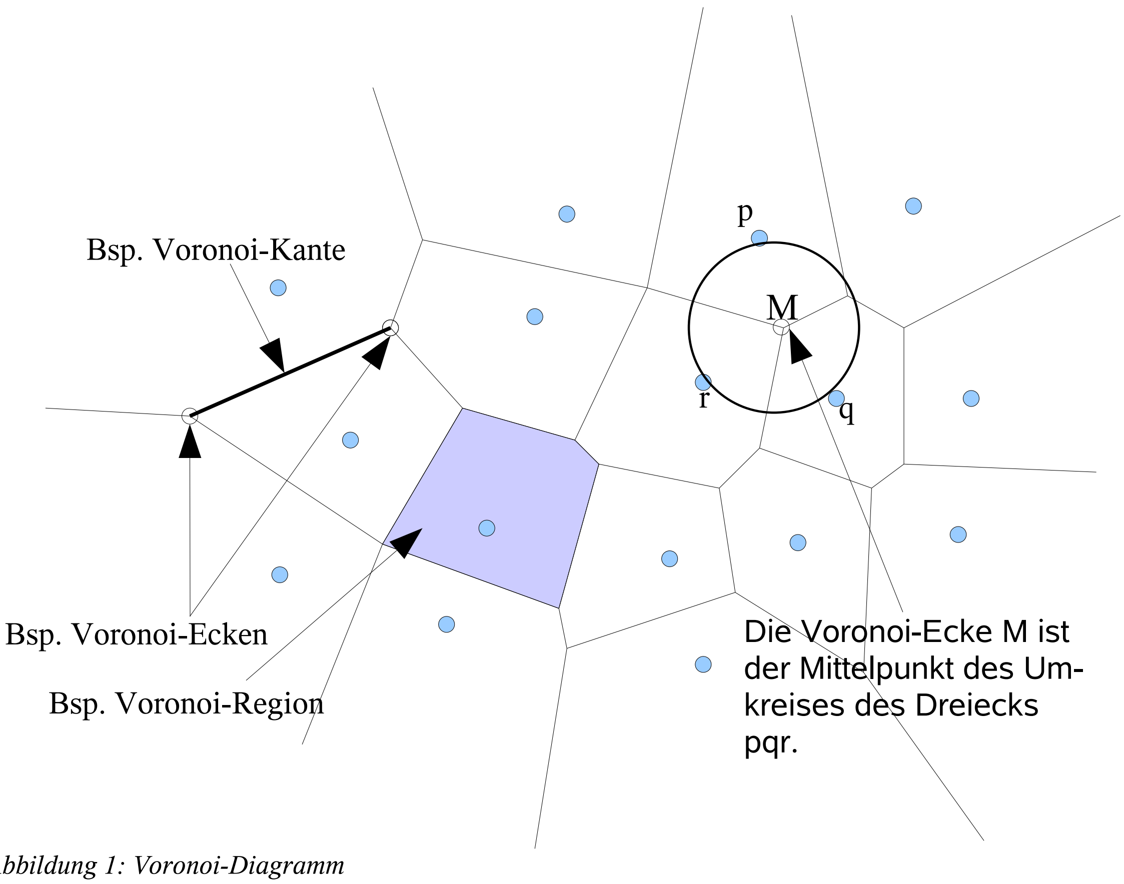

Abbildung 1: Voronoi-Diagramm

Zu einer Voronoi-Region gehört ein 1 Punkt aus einer endlichen Menge S von Punkten,
zu einer Voronoi-Kante gehören 2 Punkten aus S und
zu einer Voronoi-Ecke gehören 3 oder mehr Punkte aus S.

Definition: Planare Graphen

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt planar (plättbar), wenn er eine ebene Einbettung besitzt. Das heißt, die Abbildung $V \rightarrow \mathbb{R}^2$, $E \rightarrow$ einfache Kurven im $\mathbb{R}^2$ ist verträglich mit Endpunkten, so daß sich keine zwei Bilder von Kanten (im Inneren) schneiden.

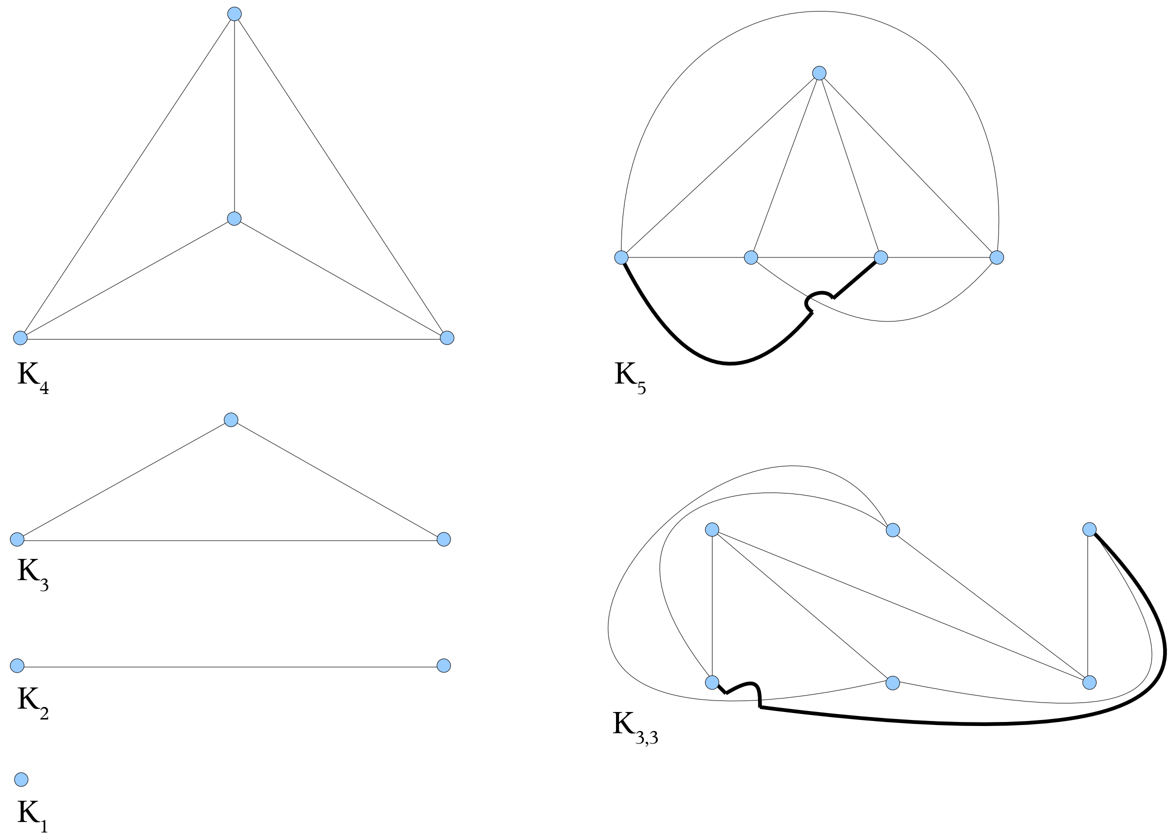

Abbildung 2: Planare und nicht planare Graphen

Wie man in Abbildung 2 sieht, lassen sich beim K_5 und beim $K_{3,3}$ jeweils eine Kante nicht überkreuzungsfrei darstellen.

Satz:

Jeder planare Graph läßt sich gradlinig überkreuzungsfrei einbetten (das heißt alle Kanten „sind“ Strecken). Ein solcher Graph wird „geometrischer Graph“ genannt.

Satz (Kuratowski):

Jeder nicht planare Graph G enthält eine Unterteilung (das heißt man kann Kanten durch Wege ersetzen) des K_5 oder des $K_{3,3}$ als Teilgraph. Und umgekehrt ist jeder Graph, der eine Unterteilung des K_5 oder des $K_{3,3}$ als Teilgraph enthält, nicht planar.

weitere Beispiele

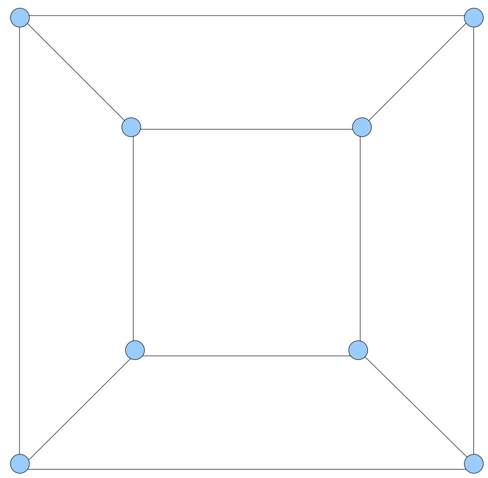

Abbildung 3: Einbettung eines Würfels in die Ebene

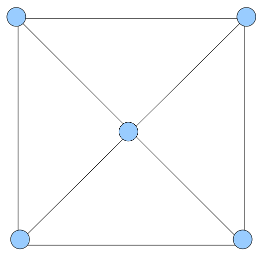

Abbildung 4: Einbettung einer Pyramide in die Ebene

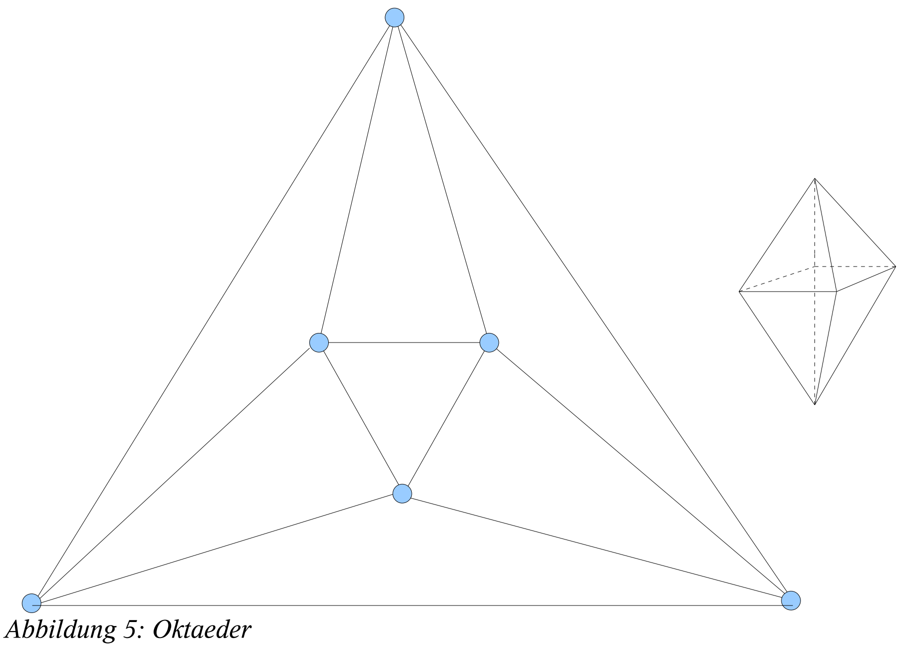

Abbildung 5: Oktaeder

Zu jedem planaren Graphen kann man den dazu gehörenden dualen Graphen definieren.

Definition: Facetten

Facetten sind zusammenhängende Gebiete, in welche die Ebene durch die Einbettung zerlegt wird. Zu den Facetten zählt auch das äußere (unbeschränkte) Gebiet.

Beispiel: Ein Würfel zerlegt die Ebene in 5 innere und 1 äußere Facette, also insgesamt in 6 Facetten.

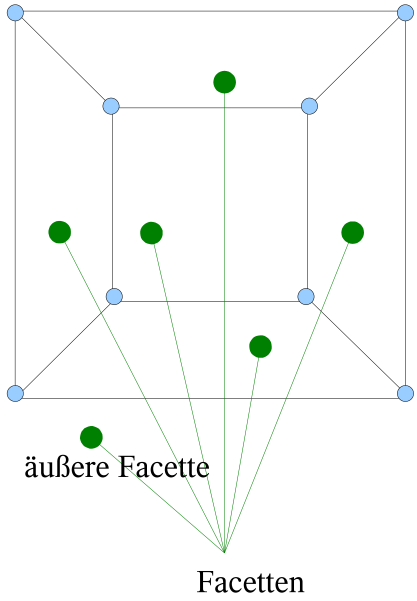

Abbildung 6: Facetten eines Würfels

Definition: Dualer Graph

Den dualen Graphen eines eingebetteten planaren Graphen G=(V, E) bezeichnen wir mit $G^*=(V^*, E^*)$.

V^*=Facetten von G

$(f_1, f_2) \in E^*$ gdw. die Facetten f_1 und f_2 benachbart sind. Als benachbart gelten zwei Facetten, wenn es eine Kante gibt, die beide Facetten von einander trennt.

Eventuell gibt es Mehrfachkanten, wenn mehrere Kanten in G f_1 und f_2 trennen.

Beispiele von planeren Graphen mit ihren jeweiligen dualen Graphen

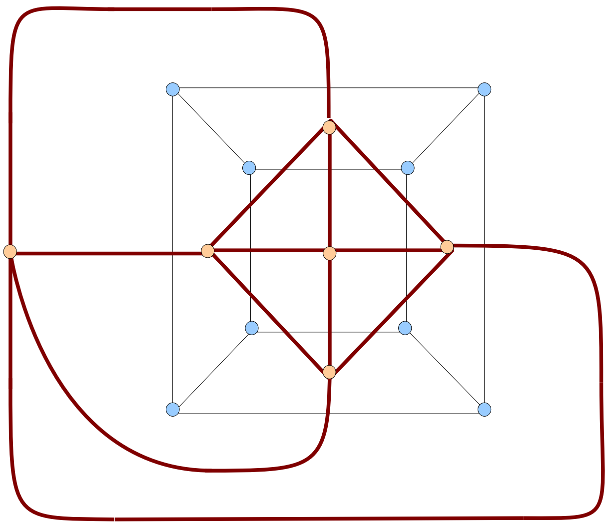

Abbildung 7: der Oktaeder ist dual zum Würfel

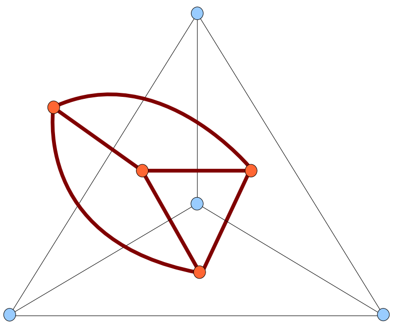

Abbildung 8: Der K_4 ist dual zu sich selbst

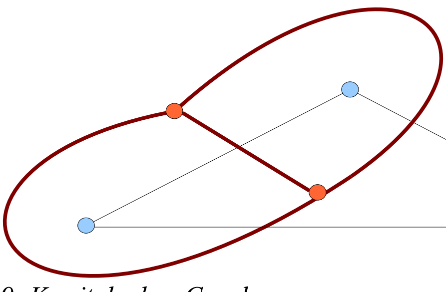

Abbildung 9: K_3 mit dualem Graphen

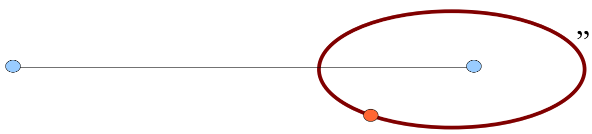

Abbildung 10: K_2 mit dualem Graphen

Abbildung 11: K_1 ist dual zum K_1

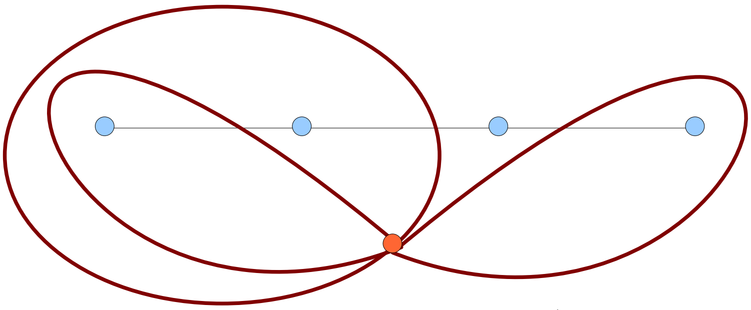

Abbildung 12: Jeder Kante in G entspricht eine Kante in G^*

Eigenschaften von planaren Graphen

Falls G planar (eingebettet) ist und zusammenhängend mit n Ecken, f Facetten und e Kanten, dann gelten folgende Eigenschaften:

a) G^* hat auch diese Eigenschaften

b) $n + f = e + 2$ „Eulersche Polyederformel"

Beispiel Würfel:

$$\text{Ecken} + \text{Facetten} = \text{Kanten} + 2$$
$$8 + 6 = 12 + 2$$

c) $e \leqslant 3n - 6$

d) $f \leqslant 2n - 4$

e) $n \leqslant 2f - 4$

Voraussetzung: planar und einfach (keine Mehrfachkanten)

Beweis der Eigenschaft c) aus b)

Zu zeigen: $e \leqslant 3n - 6$

Es gilt „=" bei triangulierten Graphen (das heißt jede Facette ist ein Dreieck)

Jede Facette ist begrenzt durch 3 Kanten, jede Kante liegt auf dem Rand von 2 Facetten.

$\rightarrow$ $3f = 2e$

$f = e + 2 - n$ (nach b))

$3e + 6 - 3n = 2e$

$e = 3n - 6$

Falls der Graph nicht trianguliert ist, triangulieren wir ihn durch das Einfügen neuer Kanten, somit ist die neue Kantenzahl $= 3n - 6 \geqslant$ alte Kantenzahl.

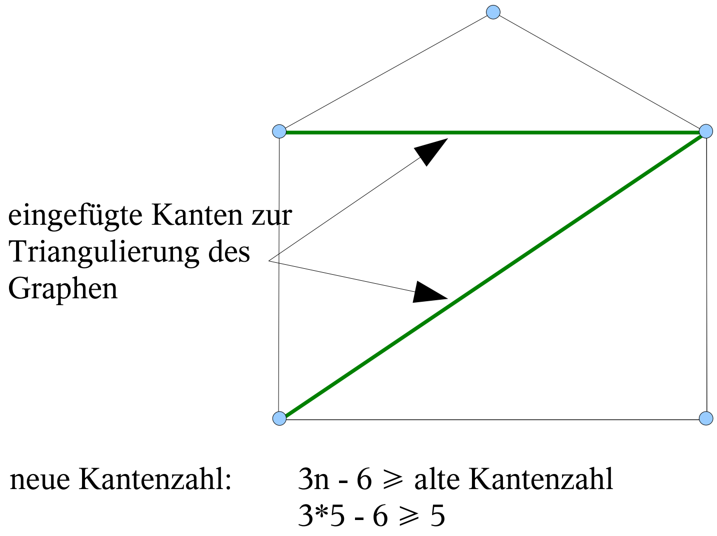

Abbildung 13: Beispiel Triangulierung eines Graphen

Anwendung auf Voronoi-Diagramm

Um die Eigenschaften von planaren Graphen auf Voronoi-Diagramme anzuwenden, muß man „unendlich weit entfernt“ noch einen künstlichen V-Knoten, bei dem alle unbeschränkten Kanten landen, einfügen.

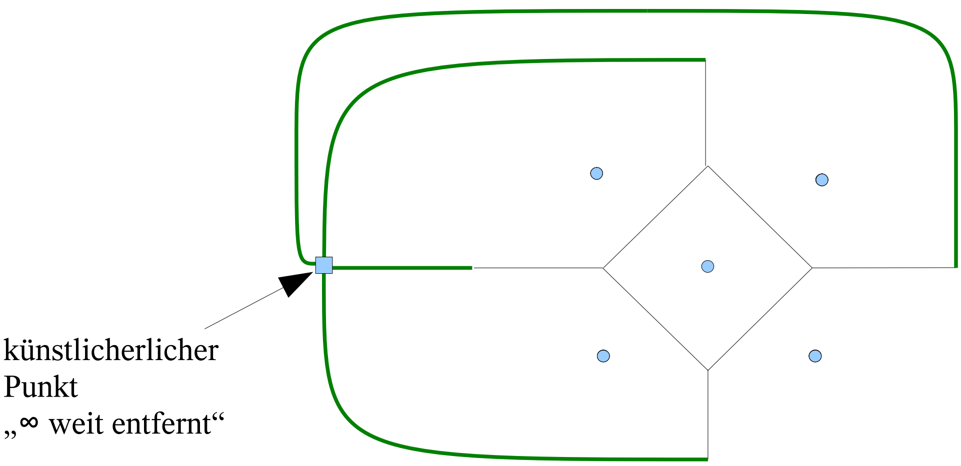

Abbildung 14: künstlicher Punkt

n Punkte (= Anzahl der Facetten)

e Kanten

v Knoten

Dann ist $e \leqslant 3n - 6$

$v \leqslant 2n - 5 = O(n)$

(das eigentliche f ist um 1 kleiner wegen des künstlichen Knotens)

Die „Größe“ des Voronoi-Diagramms ist linear in der Anzahl der Punkte (gilt in der Ebene, im Raum gilt dies nicht mehr).

Dualer Graph zum Voronoi-Diagramm von S (Delaunay-Triangulierung)

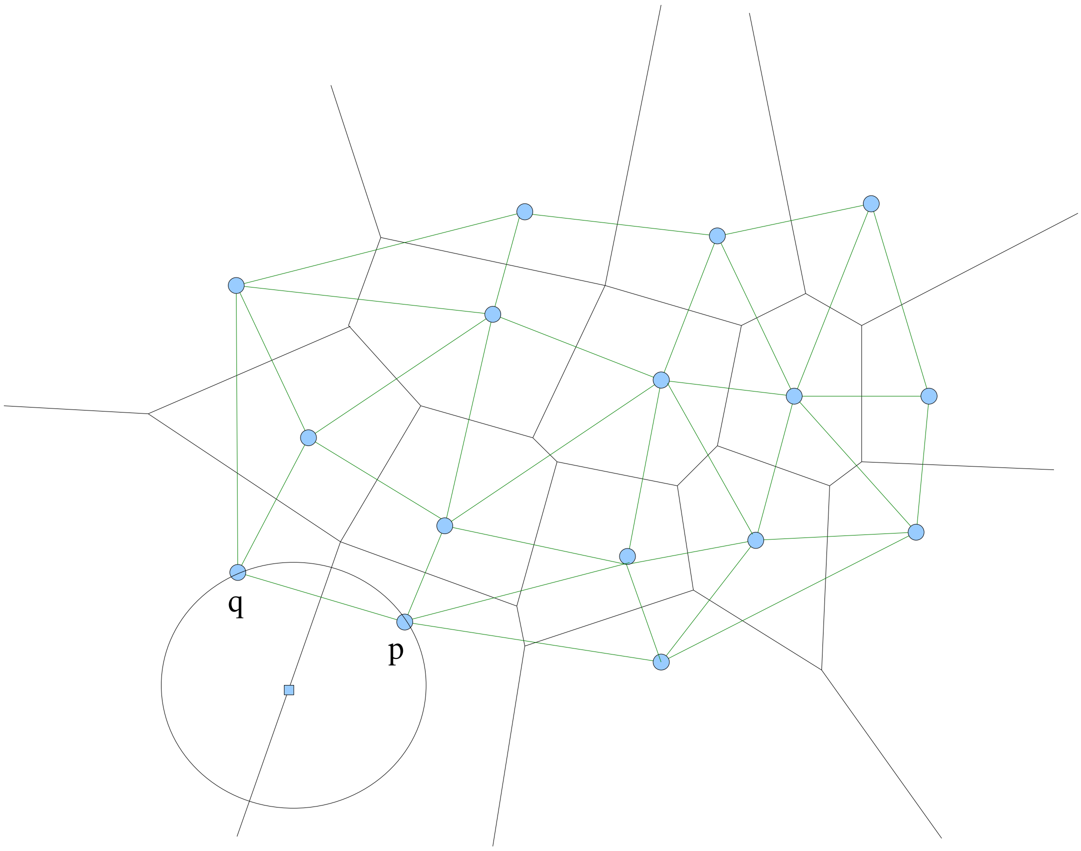

Abbildung 15: der duale Graph (Delaunay-Triangulierung) zum Voronoi-Diagramm

„Dualer Graph zum Voronoi-Diagramm von S“ heißt der Graph, bei dem jeder Punkt $p \in S$ mit den anderen Punkten, deren V-Regionen an die von p angrenzen, verbunden ist. Dieser Graph wird auch die Delaunay-Triangulierung genannt.

Bemerkung 1:

a) Bei allgemeiner Lage von S, das heißt keine 4 Punkte auf einen Kreis, sind alle beschränkten Facetten Dreiecke.

b) $p, q \in S$: $\overline{pq}$ Kante der Delaunay-Triangulierung <=> es gibt einen „leeren“ Kreis (keine Punkte $\in S$ im Inneren) auf dem p und q liegen.

c) Wenn p, q und $r \in S$, dann ist pqr ein Dreieck der Delaunay-Triangulierung <=> es gibt einen „leeren“ Umkreis von pqr.

Konstruktion des Voronoi-Diagramms

(gleichwertig dazu: Konstruktion der Delaunay-Triangulierung)

Eingabe: Menge $S \subset \mathbb{R}^2$ mit $|S| = n$

Ausgabe: Voronoi-Diagramm VD(S) in folgender Darstellung:

- Facetten (VR)
- Kanten
- Ecken (karthesische Koordinaten)
- Zeiger auf Nachbarkanten, so dass jede Facette als doppelt verkettete Liste dargestellt ist.

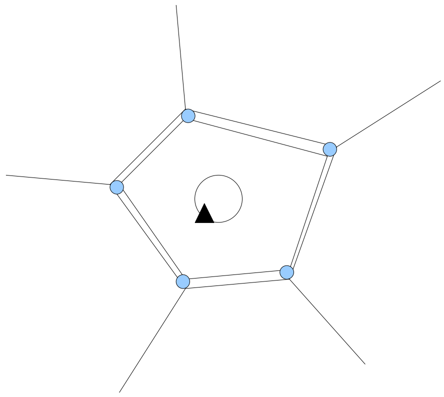

Abbildung 16: Facette als doppelt verkettete Liste ihrer angrenzenden Kanten

Divide und Conquer Ansatz:

1) Falls $|S| > 1$:

sortiere S lexikographisch,

teile in linke und rechte Hälfte S_L, S_R

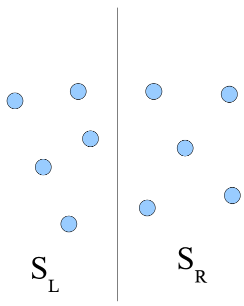

Abbildung 17: Aufteilung von S

2) berechne rekursiv $VD(S_L)$ und $VD(S_R)$

3) mische beide zu einem zusammen (Laufzeit für Schritt 3): O(n)).

Der Algorithmus benötigt insgesamt O(n log n) Zeit.