Übungsblatt 6

Julius Auer, Alexa Schlegel

Aufgabe 1 (Voronoi-Diagramme von Strecken):

Wir betrachten als erstes Voronoi Kanten zwischen Punkt P und Strecke S, diese bestehen Grundsätzlich aus 3 Abschnitten. (i) und (iii) sind Strecken bzw. Strahlen. Es ist die Voronoi Kante zwischen dem Punkt P und dem linken A bzw. rechten Streckenende B. (ii) ist eine Parabel, deren Form ist abhängig vom Abstand zwischen P und s. In welchem Abschnitt P liegt ist egal die Zusammensetzung der Voronoi Kante bleibt gleich.

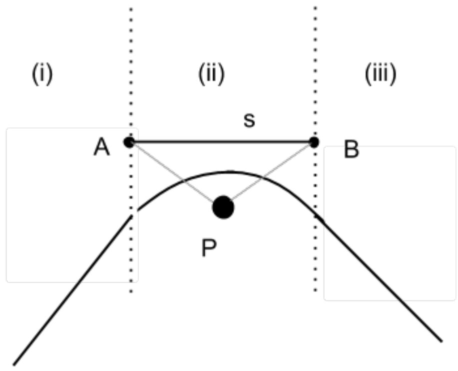

Abbildung 1: Bisektor Punkt und Strecke

Betrachten wir nun die Bisektoren von zwei Strecken s und t, dabei unterscheiden wir in (a) parallele Strecken und (b) nicht paralle Strecken.

zu (a): parallele Strecken:

(1) Strecken liegen auf einer Geraden
(2) überschneiden sich nicht
(3) überschneiden sich zum teil oder ganz

Hier entstehen jeweils 5 Bereiche: (i) Gerade: Bisektor von den linkesten Punkten C und D, (ii) Parabel: s und C (iii)

* Wie sehen die Voronoi-Kanten aus → Bilder von allen Fällen
* Aus wie vielen Ecken, Kanten und Zellen kann $VD(S)$ höchstens bestehen?
* Zeigen Sie dazu, dass die Voronoi-Regionen zusammenhängend sind.

Aufgabe 2 (Fortune-Sweep):

Die Sweepline sweept von links nach rechts, also entlang er x-Achse.

site ist ein Punkt in der Ebene.

beach line teilt die Ebene in zwei Bereiche. Oberhalb der beach line sind alle Bereiche die potentiell zu den Voronoi Regionen der jeweiligen Punkte gehören werden. Unterhalb der beach line alle Punkte zu denen noch keine Aussage getroffen werden kann. Die Punkte auf der beach line sind equidistant zum zugehörigen Punkt und zur sweep line.

spikes zukünftige Voronoi Kanten. An Schnittpunkten von Spikes entstehen zukünftige Voronoi Knoten.

breakpoint sind die Schnittpunkte der Parabeln, dort befinden sich auch die Spikes, also durch die zwei Schnittpunkte verläuft genau ein Spike.

site Event tritt auf, wenn die Sweepline einen Punkt („site“) trifft.

circle Event tritt auf, wenn Kreisbögen verschwinden. D.h. ein circle event entsteht aus einem site event. Wenn sich zwei Spikes schneien, der Kreis durch die zugehörigen Punkte und dann ganz unten auf dem Kreis ist eine neues circle event.

sweep line status (SLS) enthält die Topologie der Beachline in Form einer Liste, sozusagen die Kreisbögen und die dazugehörigen Punkte und eine Information darüber, durch welches Event ein Kreisbogen verschwindet.

event point schedule (EPS) enthält site events und circle events. Die Priorität ist durch die x-Koordinate gegeben, d.h. tritt das Event weiter links auf, so ist die Priorität höher. Initialisiert wird die priority queue mit allen zu Beginn gegebenen Punkten.

Die Idee mit dem Binärensuchbaum leuchtet mir zwar ein, habe es aber nicht so doll verstanden, als dass ich es hier umsetzen könnte.

Initialisierung

EPS $(0,0)$[se1], $(1,2)$[se2], $(2,3)$[se3], $(4,3)$[se4]

beachline $\emptyset$

EVENT 1 - site event $(0,0)$

EPS $(1,2)$[se2], $(2,3)$[se3], $(4,3)$[se4]

beachline $a_1 \rightarrow (0,0)$

Keine circle event und keine neuen Kanten.

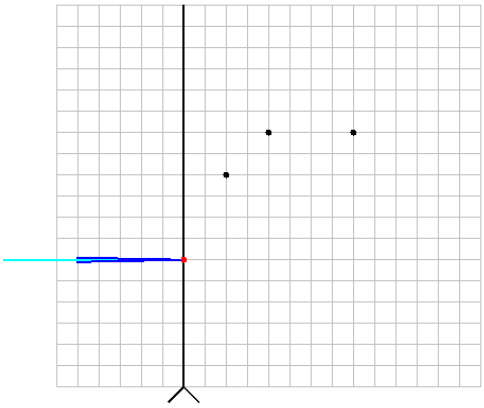

Abbildung 2: Schritt 1

EVENT 2 - site event $(1,2)$

EPS $(2,3)$[se3], $(4,3)$[se4]

beachline $a_{1.1} \rightarrow (0,0)$,
$a_2 \rightarrow (1,2)$,
$a_{1.2} \rightarrow (0,0)$

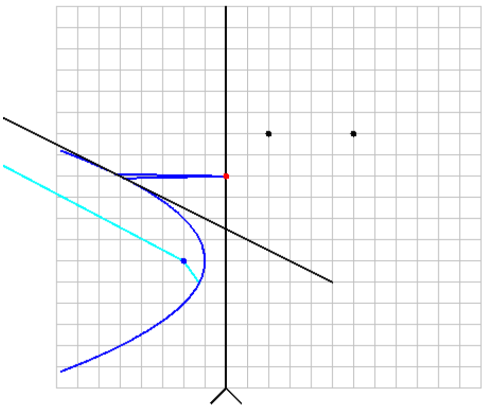

Abbildung 3: Schritt 2

Keine circle event, zwei Spikes, werden noch zu Kanten, wenn die Position der Knoten bekannt ist.

EVENT 3 - site event $(2, 3)$

EPS $(4, 3)[\mathrm{se4}], (11 + \sqrt{130}, -3)[\mathrm{ce1}]$

beachline $a_{1.1} \to (0, 0)$
$a_{2.1} \to (1, 2)$
$a_3 \to (2, 3)[\text{delete at ce1}]$
$a_{2.2} \to (1, 2)$
$a_{1.2} \to (0, 0)$

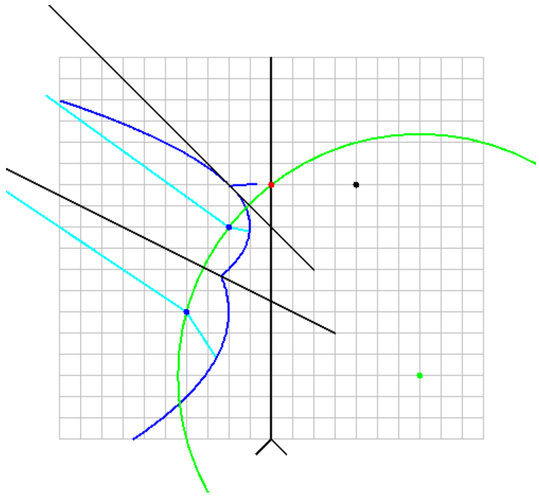

Abbildung 4: Schritt 3

Der Schnittpunkt $(11, -3)$ der beiden Spikes ist ein evtl. zukünftiger Voronoi Knoten. Der Fußpunkt des grünen Kreises wird als neues circle event $(11 + \sqrt{130}, -3)[ce1]$ der EPS hinzugefügt.

EVENT 4 - site event $(4, 3)$

EPS $(6 + \sqrt{20}, 2)[\text{ce2}], (7 + \sqrt{50}, -1)[\text{ce3}]$

beachline $a_{1.1} \to (0, 0)$
$a_{2.1} \to (1, 2)$
$a_{3.1} \to (2, 3)$
$a_4 \to (4, 3)[\text{delete at ce2}(7 + \sqrt{50}, -1)]$
$a_{3.2} \to (2, 3)$
$a_{2.2} \to (1, 2)$
$a_{1.2} \to (0, 0)$

Der Schnittpunkt der beiden letzen Spikes $(6, 2)$ ist ein evtl. zukünftiger Voronoi Knoten. Der Fußpunkt dieses Kreises wird als neues circle event $(6 + \sqrt{20}, 2)[\text{ce2}]$ der EPS hinzugefügt und rutsch in der priority queue ganz nach vorne.

Das alte circle event $(11 + \sqrt{130}, -3)$ wird aus der EPS gelöscht.

Der Schnittpunkt $(7, -1)$ des neuen Spikes und des Nachbarspike ist wieder in potentieller neuer Knoten im Voronoi Diagramm. Ein neues circle event kommt also hinzu $(7 + \sqrt{50}, -1)[\text{ce3}]$.

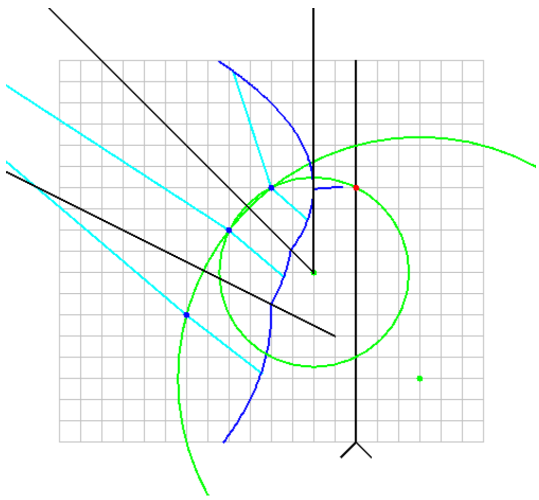

Abbildung 5: Schritt 4

EVENT 5 - circle event $(6+\sqrt{20}, 2)$

EPS $(7+\sqrt{50}, -1)$[ce3]

beachline $a_{1.1} \to (0,0)$
$a_{2.1} \to (1,2)$
$a_{3.1} \to (2,3)$
$a_4 \to (4,3)$[delete at ce3$(7+\sqrt{50}, -1)$]
$a_{3.2} \to (2,3)$
$a_{2.2} \to (1,2)$
$a_{1.2} \to (0,0)$

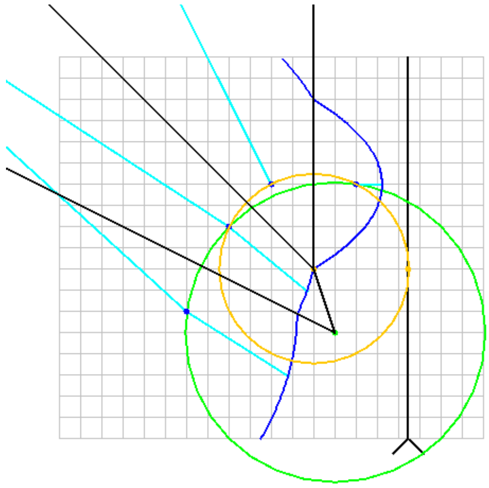

Abbildung 6: Schritt 5

Ein Parabelbogen verschwindet, der Voronoi Knoten ist nun fest, sowie die beiden Voronoi-Kanten.

EVENT 6 - circle event $(7+\sqrt{50},-1)$

EPS $\emptyset$

beachline $a_{1.1} \rightarrow (0,0)$
$a_{2.1} \rightarrow (1,2)$
$a_{3.1} \rightarrow (2,3)$
$a_{3.2} \rightarrow (2,3)$
$a_{2.2} \rightarrow (1,2)$
$a_{1.2} \rightarrow (0,0)$

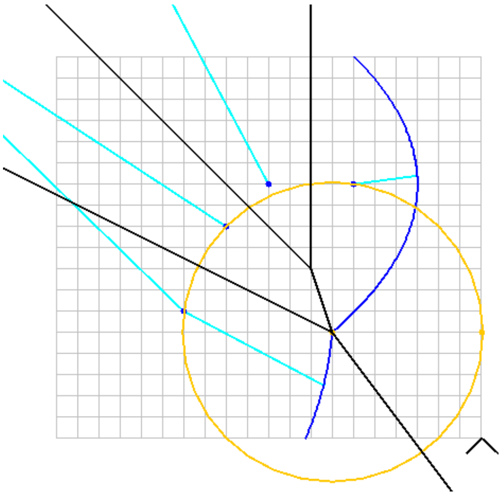

Abbildung 7: Schritt 6

Ein Parabelbogen verschwindet, der Voronoi Knoten ist nun fest, sowie die beiden Voronoi-Kanten.

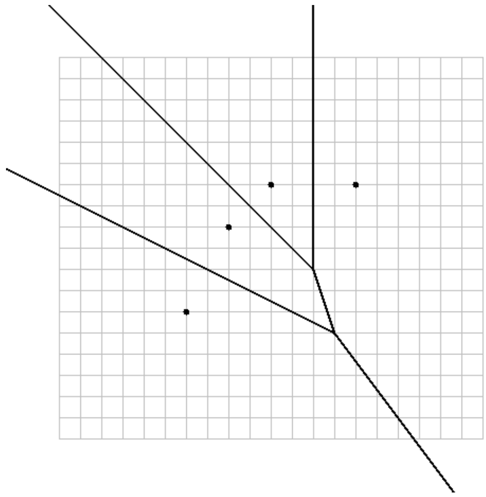

Abbildung 8: Schritt 7

Am Ende muss erklärt werden, wie in einem Postprocessing mit Kanten verfahren wird, die nur an einem oder gar keinem Knoten hängen

Aufgabe 3 (Durchschnitt einfacher Polygone):

* Sweep-Line-Algorithmus für Durchschnitt zweier einfacher Polygone P und Q
* Laufzeit (Gesamtzahl n der Ecken von P und Q und der Anzahl k der Ecken des Durchschnitts)