

## Algorithmische Geometrie

Helmut Alt, Ludmila Scharf, Matthias Henze

Abgabe 27.4.2015

### Aufgabe 1 Geradendarstellung

6 Punkte

- (a) Eine Gerade  $g$  in der Ebene kann man auf verschiedene Art und Weise darstellen:

- (a) Als affine Hülle von zwei Punkten  $p$  und  $q$ :

$$g = \{\vec{p} + \lambda(\vec{q} - \vec{p}) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- (b) Als Nullstellenmenge einer linearen Gleichung:

$$g = \{\vec{x} = (x, y) \mid ax + by + c = 0\}.$$

- (c) In Hessescher Normalform (HNF):

$$g = \{\vec{x} \mid \vec{n}\vec{x} + c = 0\} \text{ wobei } \|\vec{n}\| = 1.$$

Geben Sie an, wie man zwischen den verschiedenen Darstellungen umrechnen kann, und beschreiben Sie die arithmetischen Operationen, die dafür benötigt werden.

- (b) Sei eine Gerade  $g$  in HNF gegeben,  $g = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{n}\vec{x} + c = 0\}$ . Zeigen Sie, daß für jeden Punkt  $p \in \mathbb{R}^2$  der Abstand von  $p$  zu  $g$ ,  $d(p, g) := \min\{\|p - q\|, q \in g\}$  gegeben ist durch  $|\vec{n}\vec{p} + c|$ .

### Aufgabe 2 Implementierung

7 Punkte

Implementieren Sie in Java die Datentypen *Punkt* (im  $\mathbb{R}^2$ ), *Strecke* und *orientierte Gerade* (unter Benutzung der Hesseschen Normalform, wobei  $\vec{n}\vec{x} + c > 0$  links und  $\vec{n}\vec{x} + c < 0$  rechts bedeuten soll) und implementieren Sie Algorithmen für die folgenden Probleme.

- (a) Gegeben zwei Punkte  $p, q \in \mathbb{R}^2$ . Berechne die von  $p$  nach  $q$  orientierte Gerade.
- (b) Gegeben zwei Geraden, berechne den Schnittpunkt, falls er existiert.
- (c) Gegeben eine orientierte Geraden  $g$  und ein Punkt  $p$ , entscheide ob  $p$  links von, rechts von oder auf  $g$  liegt.
- (d) Gegeben zwei Strecken, entscheide, ob sie sich schneiden. Wenn ja, berechne den Schnittpunkt.

*Diese Datentypen und Prozeduren sollen im Laufe des Semesters als "Bausteine" innerhalb komplexerer Algorithmen benutzt werden können.*

### Aufgabe 3 BHD

7 Punkte

Gegeben sei ein konvexes  $n$ -Eck  $P$  in BHD. Arbeiten Sie die Algorithmen der Laufzeit  $O(\log(n))$  zur Entscheidung, ob ein Punkt  $p$  in  $P$  liegt und zur Berechnung des Durchschnitts  $P \cap g$  für eine beliebige Gerade  $g$  in allen Einzelheiten aus (Pseudocode oder verbale Beschreibung).