Lógica Matemática - LMA 0001

Rogério Eduardo da Silva - *rogerio.silva@udesc.br*
Claudio Cesar de Sá - *claudio.sa@udesc.br*

Universidade do Estado de Santa Catarina
Departamento de Ciência da Computação

24 de março de 2018

Conteúdo Programático:

Método de Ensino

- Aulas expositivas em sala e em laboratório
- Listas de exercícios teóricos e práticos
- Atendimento presencial (sala do professor) e/ou através da lista de emails da disciplina `lma-l@joinville.udesc.br`

Avaliações

- 3 provas teóricas (30% da média semestral cada uma) [**?**, **?**]:
  1. Conceitos básicos: tabelas-verdade, formas normais, implicação e equivalências lógica
  2. Argumentação lógica: regras de inferência e de equivalência, demonstração condicional e por absurdo
  3. Lógica de Primeira Ordem: Predicados, quantificadores, particularização/generalização
- Projeto de Implementação Lógica em PROLOG (10% da média semestral)
- Exame Final (caso média semestral < 7.0)
  Data prevista: **06 de Julho de 2015 – 2a. Feira – Sala F-101 – 17:00 hrs**

Bibliografia Básica Sugerida

Introdução à Lógica Proposicional


PENGUINS ARE BLACK AND WHITE.
SOME OLD TV SHOWS ARE BLACK AND WHITE.
THEREFORE, SOME PENGUINS ARE OLD TV SHOWS.
GLASBERGEN

O que é Lógica?

O que é Lógica?

"*Conhecimento das formas gerais e regras gerais do pensamento correto e verdadeiro, independentemente dos conteúdos pensados; regras para demonstração científica verdadeira; regras para pensamentos não-científicos; regras sobre o modo de expor o conhecimento; regras para verificação da verdade ou falsidade de um pensamento etc.*"

[Marilena Chaui, "*Convite a Filosofia*", 2002]

Conceitos Introdutórios

- Proposição
  - conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento (fatos ou juízos) de sentido completo
  - Exemplos
    1. A Lua é o satélite da Terra
    2. Recife é a capital de Pernambuco
    3. $\pi > \sqrt{5}$
    4. $1 + 1 = 3$
- Princípios das Proposições

Não contradição: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo

Terceiro excluído: uma proposição é sempre ou verdadeira ou falsa, não existe terceira opção

- Proposições **Verdadeiras**
  1. $1 + 1 = 2$
  2. A Lua é o satélite natural da Terra
  3. Florianópolis e Recife são capitais de estados
- Proposições **Falsas**
  1. Vasco da Gama descobriu o Brasil
  2. $3 \times 4 < 100 \div 13$
  3. $3 \div 5$ é um número inteiro

Conceitos Introdutórios

Determine "V" ou "F" para as afirmações abaixo

1. O Brasil já ganhou 5 títulos mundiais

Conceitos Introdutórios

Determine “V” ou “F” para as afirmações abaixo

1. O Brasil já ganhou 5 títulos mundiais
2. $\pi = 3.14$

Conceitos Introdutórios

Determine “V” ou “F” para as afirmações abaixo

1. O Brasil já ganhou 5 títulos mundiais
2. $\pi = 3.14$
3. Eu sempre minto

Determine “V” ou “F” para as afirmações abaixo

1. O Brasil já ganhou 5 títulos mundiais
2. $\pi = 3.14$
3. Eu sempre minto

Cuidado com paradoxos!

Determine “V” ou “F” para as afirmações abaixo

1. O Brasil já ganhou 5 títulos mundiais
2. $\pi = 3.14$
3. Eu sempre minto

CUIDADO COM PARADOXOS!

I don’t speak English

Função de Avaliação ou Interpretação Lógica

Uma proposição: uma proposição p sempre assume V ou F. Nunca os dois valores simultaneamente, ou nenhum dos dois. Sempre é alguma coisa em V ou F, logo ...

Mapeamento Binário: $f(p) \rightarrow V$ ou $f(p) \rightarrow F$

Função de Avaliação: $f_{avalia}(p) = \{V, F\}$

Função de Avaliação $f(p)$ ou Interpretação Lógica $\Phi(p)$:

$$f_{avalia}(p) \equiv \Phi(p)$$

Resumindo $f(p)$ ou $\Phi(p)$: são utilizadas para especificar o valor final sobre o conjunto $\{V, F\}$, de uma fórmula lógica ou proposição composta

UDESC Joinville

Alfabeto

Símbolos Ortográficos: ( )

Constantes Lógicas: *True*, *False* (**V** e **F** neste curso)

Símbolos Proposicionais: $p, q, r, s, p_1, r_2, \ldots$

Conectores: $\sim (\neg), \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

Conceitos Introdutórios

Fórmulas bem formadas (*fbf*)

- Constantes lógicas são fórmulas
- Símbolos proposicionais são fórmulas
- Operação negação: $\sim p$
- Operação conjunção (“e”): $p \wedge q$
- Operação disjunção (“ou”): $p \vee q$
- Operação disjunção exclusiva (“x-ou”): $p \veebar q$
- Operação condicional: $p \rightarrow q$
- Operação bicondicional:$p \leftrightarrow q$

Tabelas-Verdade

- lista todos os possíveis valores lógicos de uma proposição composta, em função das combinações de todos os possíveis valores para cada proposição simples que a compõe
- Exemplo: $p \wedge q$
  - Valores possíveis para "p" = V ou F (1 ou 0)
  - Valores possíveis para "q" = V ou F (1 ou 0)

p	**q**
V	V
V	F
F	V
F	F

p	**q**
0	0
0	1
1	0
1	1

UDESC Joinville

Operações Lógicas: **negação** ($\sim$)

- inversão do valor lógico de uma proposição

p	$\sim$ **p**
V	F
F	V

Operações Lógicas: **negação** ($\sim$)

- Exemplos em Linguagem Natural:
  - p : O Sol é uma estrela
  - $\sim p$: O Sol não é uma estrela
  - p : Carlos é um mecânico
  - $\sim p$: Não é verdade que Carlos é um mecânico
  - $\sim p$: É falso que Carlos é um mecânico

Operações Lógicas: **conjunção** ($\wedge$)

- proposição composta que é verdadeira somente quando todas as proposições componentes forem verdadeiras

p	**q**	$\mathbf{p \wedge q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Operações Lógicas: **disjunção** ($\vee$)

- proposição composta que é verdadeira quando pelo menos uma das proposições componentes for verdadeira

p	**q**	**p $\vee$ q**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Operações Lógicas: **disjunção exclusiva** ($\veebar$)

- proposição composta que é verdadeira somente quando exatamente uma das proposições componentes for verdadeira

p	**q**	$\mathbf{p} \veebar \mathbf{q}$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Operações Lógicas: **condicional** ($\rightarrow$)

- proposição que representa uma relação do tipo: "**se p então q**"
- p é chamado **antecedente**
- q é chamado **consequente**
- $\rightarrow$ é chamado operador **implicação**

p	**q**	**p $\rightarrow$ q**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Operações Lógicas: **condicional** ($\rightarrow$)

- Exemplos em Linguagem Natural:
  - Se Maio tem 31 dias então a Terra é plana
  - Se π é um número real então o Brasil fica na América do Sul

Operações Lógicas: **bi-condicional** ($\leftrightarrow$)

- proposição que representa uma relação do tipo: "**p se e somente se q**"

p	**q**	**p $\leftrightarrow$ q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Sejam as proposições

$$\begin{aligned} \text{p: } & \text{Está frio} \\ \text{q: } & \text{Está chovendo} \end{aligned}$$

Traduzir para linguagem natural:

1. $\sim p$
2. $p \wedge q$
3. $p \vee q$
4. $p \rightarrow \sim q$
5. $p \leftrightarrow q$
6. $\sim p \wedge \sim q$

Conceitos Introdutórios – Exercícios

Traduzir para linguagem simbólica:

1. Marcos é alto e elegante
2. Marcos é alto mas não é elegante
3. Não é verdade que Marcos é baixo ou elegante
4. Marcos não é nem alto nem elegante
5. Marcos é alto ou é baixo e elegante

Determinar o valor lógico:

1. Roma é a capital da França ou $tg45° = 1$
2. Não é verdade que 12 é impar
3. $2 + 2 = 4 \wedge$ 11 é primo
4. Se Brasília é a capital do Brasil então $\pi = 0$
5. Se Brasília é a capital do Brasil então argentinos falam espanhol
6. $3 + 2 = 7 \ \wedge \ 5 + 5 = 10 \ \vee \ 10 > 3 \times 3$
7. $\frac{10}{2} = 5 \veebar \ \sim 1 + 1 = 3$

Construção de Tabelas-Verdade

Construção de Tabelas-Verdade

- Número de Linhas = 2^N, onde N = número de proposições
- Dois Métodos:
  1. uma coluna por operador
  2. uma coluna por símbolo

Método #1 - Uma coluna por operador.

Exemplo: $\sim (p \wedge \sim q)$

p	**q**
V	V
V	F
F	V
F	F

Construção de Tabelas-Verdade

Método #1 - Uma coluna por operador.

Exemplo: $\sim (p \wedge \sim q)$

p	**q**	$\sim$ **q**
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Construção de Tabelas-Verdade

Método #1 - Uma coluna por operador.

Exemplo: $\sim (p \wedge \sim q)$

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\sim \mathbf{q}$	$\mathbf{p} \wedge \sim \mathbf{q}$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

Construção de Tabelas-Verdade

Método #1 - Uma coluna por operador.

Exemplo: $\sim (p \wedge \sim q)$

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\sim \mathbf{q}$	$\mathbf{p} \wedge \sim \mathbf{q}$	$\sim (\mathbf{p} \wedge \sim \mathbf{q})$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Método #2 - Uma coluna por símbolo.

Exemplo: $\sim (p \wedge \sim q)$

	1			1
$\sim$	**p**	$\wedge$	$\sim$	**q**
	V			V
	V			F
	F			V
	F			F

Construção de Tabelas-Verdade

Método #2 - Uma coluna por símbolo.

Exemplo: $\sim (p \wedge \sim q)$

	1		2	1
$\sim$	**p**	$\wedge$	$\sim$	**q**
	V		F	V
	V		V	F
	F		F	V
	F		V	F

Método #2 - Uma coluna por símbolo.

Exemplo: $\sim (p \wedge \sim q)$

	1	3	2	1
$\sim$	**p**	$\wedge$	$\sim$	**q**
	V	F	F	V
	V	V	V	F
	F	F	F	V
	F	F	V	F

Construção de Tabelas-Verdade

Método #2 - Uma coluna por símbolo.

Exemplo: $\sim (p \wedge \sim q)$

4	1	3	2	1
$\sim$	**p**	$\wedge$	$\sim$	**q**
V	V	F	F	V
F	V	V	V	F
V	F	F	F	V
V	F	F	V	F

Concluindo:

Exemplo: $\sim (p \wedge \sim q)$

$$P_{pq}(VV, VF, FV, FF) = (V, F, V, V)$$

ou

$$P_{pq}(00, 01, 10, 11) = (1, 1, 0, 1)$$

Construção de Tabelas-Verdade - Exercícios

1. $\sim(p \wedge q) \vee \sim(q \leftrightarrow p)$
2. $p \vee \sim r \rightarrow q \wedge \sim r$
3. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$

Construção de Tabelas-Verdade - Exercícios

1. $\sim (p \land q) \lor \sim (q \leftrightarrow p)$
    - $P_{pq}(VV, VF, FV, VV) = (F, V, V, V)$
2. $p \lor \sim r \to q \land \sim r$
3. $(p \to q) \land (q \to r) \to (p \to r)$

1. $\sim (p \wedge q) \vee \sim (q \leftrightarrow p)$
   - $P_{pq}(VV, VF, FV, VV) = (F, V, V, V)$
2. $p \vee \sim r \rightarrow q \wedge \sim r$
   - $P_{pqr}(VVV, VVF, VFV, VFF, FVV, FVF, FFV, FFF) = (F, V, F, F, V, V, V, F)$
3. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$

Construção de Tabelas-Verdade - Exercícios

1. $\sim (p \wedge q) \vee \sim (q \leftrightarrow p)$
   - $P_{pq}(VV, VF, FV, VV) = (F, V, V, V)$
2. $p \vee \sim r \rightarrow q \wedge \sim r$
   - $P_{pqr}(VVV, VVF, VFV, VFF, FVV, FVF, FFV, FFF) = (F, V, F, F, V, V, V, F)$
3. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
   - $P_{pqr}(VVV, VVF, VFV, VFF, FVV, FVF, FFV, FFF) = (V, V, V, V, V, V, V, V)$

Valor Lógico de uma Proposição

- É obtido a partir da substituição das proposições componentes por seus respectivos valores lógicos.
- Exemplo:

$$\text{p: A Terra é um planeta}$$
$$\text{q: Maio tem 30 dias}$$

qual o valor lógico da proposição:

- $\sim (p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Valor Lógico de uma Proposição

- É obtido a partir da substituição das proposições componentes por seus respectivos valores lógicos.
- Exemplo:

p: A Terra é um planeta
q: Maio tem 30 dias

qual o valor lógico da proposição:

  - $\sim (p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

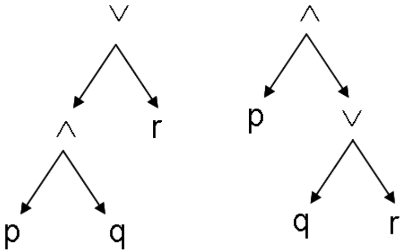
$$\begin{gathered}\sim (V \vee F) \leftrightarrow \sim V \wedge \sim F \\ \sim (V) \leftrightarrow F \wedge V \\ F \leftrightarrow F \\ V\end{gathered}$$

Valor Lógico de uma Proposição - Exercícios

1. Para p = *falso* e q = *falso*, determine $(p \to q) \to (p \to p \land q)$
2. Para p = *verdade* e q, r = *falso*, determine $(q \leftrightarrow (r \to \sim p)) \lor ((\sim q \to p) \leftrightarrow r)$
3. Para r = *verdade*, determine: $p \to \sim q \lor r$
4. Para q = *verdade*, determine: $(p \to q) \to (\sim q \to \sim p)$

Uso de Parênteses

- A expressão $p \wedge q \vee r$ pode ser interpretada de duas formas (com valores lógicos distintos):
  1. $(p \wedge q) \vee r$
  2. $p \wedge (q \vee r)$



Uso de Parênteses

- Ordem de Precedência dos conectivos:
  1. $\sim$
  2. $\wedge \ \vee \ \veebar$
  3. $\rightarrow$
  4. $\leftrightarrow$
- EXERCÍCIO: Monte a representação hierárquica para as expressões abaixo:
  1. $p \wedge \sim q$
  2. $p \wedge q \veebar r$
  3. $\sim (p \rightarrow q \vee \sim r)$
  4. $p \wedge q \rightarrow \sim p$
  5. $p \wedge (q \rightarrow \sim p)$
  6. $q \rightarrow p \leftrightarrow r \wedge s \vee \sim t$

Uso de Parênteses

- Ordem de Precedência dos conectivos:
  1. $\sim$
  2. $\wedge$ $\vee$ $\veebar$
  3. $\rightarrow$
  4. $\leftrightarrow$
  5. $(\ldots)$
- os símbolos de parênteses "( )" são então utilizados como modificadores da ordem de precedência.

Construção de Tabelas-Verdade - Exercícios

1. $\sim (p \vee \sim q)$
2. $\sim (p \rightarrow \sim q)$
3. $p \wedge q \rightarrow p \vee q$
4. $\sim p \rightarrow (q \rightarrow p)$
5. $(p \rightarrow q) \rightarrow p \wedge q$
6. $q \leftrightarrow \sim q \wedge p$
7. $(p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow \sim p \wedge q$

Suprimir o maior número de parênteses possível (de forma a não alterar a expressão):

1. $((q \leftrightarrow (r \vee q)) \leftrightarrow (p \wedge (\sim (\sim q))))$
2. $((p \wedge (\sim (\sim q))) \leftrightarrow (q \leftrightarrow (r \vee q)))$
3. $(((p \vee q) \rightarrow (\sim r)) \vee ((((\sim q) \wedge r) \wedge q)))$

Tautologia ($\blacksquare$):

- Toda proposição $P_{pqr\ldots}$ que, independente dos valores lógicos de suas proposições componentes, resulte sempre em **verdade**.
- Exemplo:

$$\sim (p \wedge \sim p)$$

$\mathbf{p}$	$\sim \mathbf{p}$	$\mathbf{p} \wedge \sim \mathbf{p}$	$\sim (\mathbf{p} \wedge \sim \mathbf{p})$
V	F	F	V
F	V	F	V

$$P_p(V, F) = (V, V) = \blacksquare$$

Tautologias, Contradições e Contingências

Outros exemplos:

- $p \vee \sim p$
- $p \vee \sim (p \wedge q)$
- $p \wedge q \rightarrow (p \leftrightarrow q)$
- $p \vee (q \wedge \sim q) \leftrightarrow p$
- $p \vee r \rightarrow \sim q \vee r$
- $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

Tautologia (■):

Princípio da Substituição

- Se $P_{pqr\ldots}$ é uma tautologia então $P_{p_0 q_0 r_0 \ldots}$ também será uma tautologia, independente dos valores de $p_0, q_0, r_0, \ldots$

Contradição ($\square$):

- Toda proposição $P_{pqr\ldots}$ que, <u>independente</u> dos valores lógicos de suas proposições componentes, resulte sempre em **falsidade**.
- Exemplo:

$$p \wedge \sim p$$

p	$\mathbf{\sim p}$	$\mathbf{p \wedge \sim p}$
V	F	F
F	V	F

$$P_p(V, F) = (F, F) = \square$$

Tautologias, Contradições e Contingências

Outros exemplos:

- $p \leftrightarrow \sim p$
- $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$
- $\sim p \wedge (p \wedge \sim q)$

Tautologias, Contradições e Contingências

Consistência (ou Contingência – livro texto):

- Toda proposição $P_{pqr\ldots}$ que não é nem uma tautologia nem uma contradição.
- Isto é: pelo menos um V e um F em suas interpretações
- Exemplo:

$$p \rightarrow \sim p$$

p	$\sim$ **p**	**p** $\rightarrow\sim$ **p**
V	F	F
F	V	V

$$P_p(V, F) = (F, V)$$

Tautologias, Contradições e Contingências - Exercícios

Classifique as proposições abaixo como tautológicas, contraditórias (ou insatisfatível ou inconsistente) ou consistentes (ou satisfatível ou contingente):

1. $(p \rightarrow p) \vee (p \rightarrow \sim p)$
2. $p \rightarrow (p \rightarrow q \wedge \sim q)$
3. $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee r)$

Resumindo a nomenclatura dos tipos de fórmulas

- Tautológica: sempre verdade ($\blacksquare$)
- Contraditórias ou insatisfatíveis ou inconsistentes ($\square$)
- Consistentes ou satisfatíveis ou contingentes (pelo menos um V e um F na TV)

Implicação Lógica

Implicação Lógica

Definições:

- Diz-se que uma fórmula $P_{pqr\ldots}$ *implica logicamente* uma outra fórmula $Q_{pqr\ldots}$, se simultaneamente estas nunca assumirem os valores lógicos "V" e "F", respectivamente, em suas tabelas verdades.
- Isto é uma definição: quando a fórmula $P_{pqr\ldots}$ assumir V, $Q_{pqr\ldots}$ nunca poderá ser F
- Representação:

$$P_{pqr\ldots} \Rightarrow Q_{pqr\ldots}$$

- Toda fórmula (ora fórmula atômica ou proposição) implica logicamente em uma tautologia: $P_{pqr\ldots} \Rightarrow \blacksquare$
- Só uma contradição implica logicamente em outra contradição: $\square \Rightarrow \square$

Implicação Lógica

Definições:

- Atenção: o símbolo "$\Rightarrow$" define uma **relação lógica** entre duas fórmulas $P_{pqr\ldots}$ e $Q_{pqr\ldots}$
- Por outro lado, o símbolo "$\rightarrow$" define uma **conectivo lógico** entre duas fórmulas $P_{pqr\ldots}$ e $Q_{pqr\ldots}$. Aqui tem tabela-verdade, no caso acima não
- Em resumo: o "$\Rightarrow$" é uma **relação matemática**, enquanto o "$\rightarrow$" é um **conectivo lógico** usado para construir fórmulas

Implicação Lógica

Sua definição operacional é dada por:

- Para verificar se duas fórmulas se relacionam logicamente entre si, isto é, $P_{pqr...} \Rightarrow Q_{pqr...}$, deve-se contruir as tabelas-verdade de $P_{pqr...}$ e $Q_{pqr...}$
- Em toda linha de avaliação de $P_{pqr...}$ for **Verdade**, então naquela linha em $Q_{pqr...}$ também deverá ser **Verdade**
- Em outras palavras, a definição da relação de implicação lógica ($\Rightarrow$), segue a tabela-verdade da operação ou conectivo lógico da implicação ($\rightarrow$)

Implicação Lógica

Propriedades:

- Propriedade Reflexiva: $P_{pqr\ldots} \Rightarrow P_{pqr\ldots}$
- Propriedade Transitiva: se $P_{pqr\ldots} \Rightarrow Q_{pqr\ldots}$ e $Q_{pqr\ldots} \Rightarrow R_{pqr\ldots}$ então $P_{pqr\ldots} \Rightarrow R_{pqr\ldots}$
- Exemplo 01: para $p \wedge q, p \vee q \; e \; p \leftrightarrow q$:
  - $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$
  - $p \wedge q \Rightarrow p \leftrightarrow q$
- Exemplo 02: para $p \leftrightarrow q, p \rightarrow q \; e \; q \rightarrow p$:
  - $p \leftrightarrow q \Rightarrow p \rightarrow q$
  - $p \leftrightarrow q \Rightarrow q \rightarrow p$
- Falta validar todos estes exemplos!

Regras de Inferência

Construindo TVs, construa e valide as Implicações Lógicas que se seguem:

Adição: $p \Rightarrow p \vee q$

$q \Rightarrow p \vee q$

Implicação Lógica

Regras de Inferência:

Adição:
$$p \Rightarrow p \vee q$$
$$q \Rightarrow p \vee q$$

Simplificação:
$$p \wedge q \Rightarrow p$$
$$p \wedge q \Rightarrow q$$

Implicação Lógica

Regras de Inferência:

Adição:
$$p \Rightarrow p \vee q$$
$$q \Rightarrow p \vee q$$

Simplificação:
$$p \wedge q \Rightarrow p$$
$$p \wedge q \Rightarrow q$$

Silogismo Disjuntivo:
$$(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$$
$$(p \vee q) \wedge \sim q \Rightarrow p$$

Implicação Lógica

Regras de Inferência:

Adição:
$$p \Rightarrow p \vee q$$
$$q \Rightarrow p \vee q$$

Simplificação:
$$p \wedge q \Rightarrow p$$
$$p \wedge q \Rightarrow q$$

Silogismo Disjuntivo:
$$(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$$
$$(p \vee q) \wedge \sim q \Rightarrow p$$

Modus Ponens: $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$

Implicação Lógica

Regras de Inferência:

Adição: $p \Rightarrow p \vee q$
$q \Rightarrow p \vee q$

Simplificação: $p \wedge q \Rightarrow p$
$p \wedge q \Rightarrow q$

Silogismo Disjuntivo: $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$
$(p \vee q) \wedge \sim q \Rightarrow p$

Modus Ponens: $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$

Modus Tollens: $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$

Implicação Lógica

Regras de Inferência:

Adição: $$p \Rightarrow p \vee q$$ $$q \Rightarrow p \vee q$$

Simplificação: $$p \wedge q \Rightarrow p$$ $$p \wedge q \Rightarrow q$$

Silogismo Disjuntivo: $$(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$$ $$(p \vee q) \wedge \sim q \Rightarrow p$$

Modus Ponens: $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$

Modus Tollens: $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$

Silogismo Hipotético: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$

Implicação Lógica

Regras de Inferência:

Adição: $p \Rightarrow p \wedge q$
$p \Rightarrow p \vee q$

Simplificação: $p \wedge q \Rightarrow p$
$p \wedge q \Rightarrow q$

Silogismo Disjuntivo: $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$
$(p \vee q) \wedge \sim q \Rightarrow p$

Modus Ponens: $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$

Modus Tollens: $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$

Silogismo Hipotético: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$

Princípio da Inconsistência: $\square \Rightarrow p$

- $p \wedge \sim p \Rightarrow \square$

Implicação Lógica - Exercicios

1. Mostre que:
   1. $q \Rightarrow p \rightarrow q$
   2. $q \Rightarrow p \wedge q \leftrightarrow p$
2. Mostre que $p \leftrightarrow \sim q$ não implica $p \rightarrow q$
3. Mostre que $(X \neq 0 \rightarrow X = Y) \wedge X \neq Y \Rightarrow X = 0$

Equivalência Lógica

- Diz-se que uma fórmula $P_{pqr\ldots}$ é logicamente equivalente a uma fórmula $Q_{pqr\ldots}$, se as tabelas-verdade dessas fórmulas forem idênticas.
- Tautologias são sempre equivalentes: $\blacksquare \Leftrightarrow \blacksquare$
- Contradições são sempre equivalentes: $\square \Leftrightarrow \square$

Equivalência Lógica

Propriedades da relação de equivalência:

Propriedade Reflexiva : $P_{pqr...} \Leftrightarrow P_{pqr...}$

Propriedade Simetria: se $P_{pqr...} \Leftrightarrow Q_{pqr...}$ então $Q_{pqr...} \Leftrightarrow P_{pqr...}$

Propriedade Transitiva : se $P_{pqr...} \Leftrightarrow Q_{pqr...}$ e $Q_{pqr...} \Leftrightarrow R_{pqr...}$ então $P_{pqr...} \Leftrightarrow R_{pqr...}$

Equivalência Lógica

Propriedades da relação de equivalência:

Propriedade Reflexiva : $P_{pqr\ldots} \Leftrightarrow P_{pqr\ldots}$

Propriedade Simetria: se $P_{pqr\ldots} \Leftrightarrow Q_{pqr\ldots}$ então $Q_{pqr\ldots} \Leftrightarrow P_{pqr\ldots}$

Propriedade Transitiva : se $P_{pqr\ldots} \Leftrightarrow Q_{pqr\ldots}$ e $Q_{pqr\ldots} \Leftrightarrow R_{pqr\ldots}$ então $P_{pqr\ldots} \Leftrightarrow R_{pqr\ldots}$

Observações e uso das propriedades:

- A propriedade da simetria **não é válida** para relação da "$\Rightarrow$"
- O uso dessas propriedades é para validar novas relações entre as fórmulas

Equivalência Lógica

Propriedades:

Dupla Negação: $p \Leftrightarrow \sim\sim p$

Equivalência Lógica

Propriedades:

Dupla Negação: $p \Leftrightarrow \sim\sim p$

Regra de CLAVIUS: $(\sim p \rightarrow p) \Leftrightarrow p$

Equivalência Lógica

Propriedades:

Dupla Negação: $p \Leftrightarrow \sim\sim p$

Regra de CLAVIUS: $(\sim p \rightarrow p) \Leftrightarrow p$

Regra da Absorção: $(p \rightarrow p \wedge q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q)$

Equivalência Lógica

Propriedades:

Dupla Negação: $p \Leftrightarrow \sim\sim p$

Regra de CLAVIUS: $(\sim p \rightarrow p) \Leftrightarrow p$

Regra da Absorção: $(p \rightarrow p \wedge q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q)$

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$$

Equivalência Lógica

Propriedades:

Dupla Negação: $p \Leftrightarrow \sim\sim p$

Regra de CLAVIUS: $(\sim p \rightarrow p) \Leftrightarrow p$

Regra da Absorção: $(p \rightarrow p \wedge q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q)$

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$$

$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

Equivalência Lógica

Propriedades:

Dupla Negação: $p \Leftrightarrow \sim\sim p$

Regra de CLAVIUS: $(\sim p \rightarrow p) \Leftrightarrow p$

Regra da Absorção: $(p \rightarrow p \wedge q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q)$

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$$

$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$$

Equivalência Lógica - Exercício

Prove que: $(p \wedge \sim q \rightarrow \Box) \Leftrightarrow (p \rightarrow q)$

Equivalência Lógica - Exercício

Prove que: $(p \wedge \sim q \rightarrow \square) \Leftrightarrow (p \rightarrow q)$

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\sim \mathbf{q}$	$\mathbf{p} \wedge \sim \mathbf{q}$	$\mathbf{p} \wedge \sim \mathbf{q} \rightarrow \square$	$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$	$\mathbf{p} \wedge \sim \mathbf{q} \rightarrow \square \Leftrightarrow \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$
V	V	F	F	V	V	Iguais
V	F	V	V	F	F	Iguais
F	V	F	F	V	V	Iguais
F	F	V	F	V	V	Iguais

Equivalência Lógica – Observação

Repetindo:

- Relembrando, embora $\Leftrightarrow$ esteja na TV (página anterior), ele não é um conectivo lógico, sim uma relação lógica;
- Relação de $\Leftrightarrow$ indica uma verdade entre os lados esquerdo e direito das fórmulas;
- Se $f_1 \Leftrightarrow f_2$ e estes são respeitados na definição desta relação, então é uma relação verdadeira (poético, não?).

Equivalência Lógica

Dada a fórmula $p \rightarrow q$ alguns definições:

Fórmula Recíproca: $q \rightarrow p$

Fórmula Contrária: $\sim p \rightarrow \sim q$

Fórmula Contrapositiva: $\sim q \rightarrow \sim p$

Equivalência Lógica

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{p \rightarrow q}$	$\mathbf{q \rightarrow p}$	$\mathbf{\sim p \rightarrow \sim q}$	$\mathbf{\sim q \rightarrow \sim p}$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

Logo:

- $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$
- $q \rightarrow p \Leftrightarrow \sim p \rightarrow \sim q$

Equivalência Lógica - Exercícios

1. Determine a proposição contrapositiva
   1. Se X é menor que zero então X não é positivo
   2. Se X^2 é ímpar então X é ímpar
2. Determine:
   1. A contrapositiva da contrapositiva de $p \rightarrow q$
   2. A contrapositiva da recíproca de $p \rightarrow q$
   3. A contrapositiva da contrária de $p \rightarrow q$
3. Determine:
   1. A contrapositiva de $p \rightarrow \sim q$
   2. A contrapositiva de $\sim p \rightarrow q$
   3. A contrapositiva da recíproca de $p \rightarrow \sim q$
   4. A recíproca da contrapositiva de $\sim p \rightarrow \sim q$

Equivalência Lógica - Conectivos de Scheffer

Negação conjunta $(\sim p \wedge \sim q)$ também indicada por $(p \downarrow q)$, portanto

$$(p \downarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$$

Negação disjunta $(\sim p \vee \sim q)$ também indicada por $(p \uparrow q)$, portanto

$$(p \uparrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

Negação conjunta $(\sim p \wedge \sim q)$ também indicada por $(p \downarrow q)$, portanto

$$(p \downarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$$

Negação disjunta $(\sim p \vee \sim q)$ também indicada por $(p \uparrow q)$, portanto

$$(p \uparrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

Mas ... há outras equivalências para este conectivo de Sheffer:

Conectivo de Sheffer: $p \uparrow q \Leftrightarrow \sim (p \wedge q)$
Conectivo de Sheffer: $p \downarrow q \Leftrightarrow \sim (p \vee q)$

Negação conjunta $(\sim p \wedge \sim q)$ também indicada por $(p \downarrow q)$, portanto

$$(p \downarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$$

Negação disjunta $(\sim p \vee \sim q)$ também indicada por $(p \uparrow q)$, portanto

$$(p \uparrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

Mas ... há outras equivalências para este conectivo de Sheffer:

Conectivo de Sheffer: $p \uparrow q \Leftrightarrow \sim (p \wedge q)$
Conectivo de Sheffer: $p \downarrow q \Leftrightarrow \sim (p \vee q)$

Logo, muitas equivalências estão por vir!

Equivalência Lógica - Exercícios

Demonstrar por tabelas-verdade as seguintes equivalências lógicas:

1. $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
2. $q \leftrightarrow p \vee q \Leftrightarrow p \rightarrow q$
3. $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow q \vee r$
4. $p \veebar q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$
5. $(p \downarrow q) \uparrow (q \downarrow p) \Leftrightarrow q \vee p$

Método Dedutivo

Álgebra das Proposições

Propriedades da Conjunção

Idempotente	$p \wedge p \Leftrightarrow p$
Comutativa	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
Associativa	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
Identidade	$p \wedge \text{true} \Leftrightarrow p$ $p \wedge \text{false} \Leftrightarrow \text{false}$

Álgebra das Proposições

Propriedades da Disjunção

Idempotente	$p \lor p \Leftrightarrow p$
Comutativa	$p \lor q \Leftrightarrow q \lor p$
Associativa	$(p \lor q) \lor r \Leftrightarrow p \lor (q \lor r)$
Identidade	$p \lor \text{true} \Leftrightarrow \text{true}$ $p \lor \text{false} \Leftrightarrow p$

Propriedades da Conjunção e da Disjunção

Distributiva

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Absorção

$$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$$
$$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$$

Regra de DE MORGAN

$$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$
$$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$$

Álgebra das Proposições - Exercício

Apresente a negação das proposições abaixo:

- É inteligente e estuda
- É médico ou professor

Apresente a negação das proposições abaixo:

- É inteligente e estuda
- É médico ou professor

Conclusões:

- $p \wedge q \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee \sim q)$
- $p \vee q \Leftrightarrow \sim (\sim p \wedge \sim q)$

Negação da Condicional:

- Se $p \to q \Leftrightarrow \sim p \vee q$ então sua negação é dada por

$$\sim (p \to q) \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee q)$$
$$\sim (\sim p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$$

CUIDADO!: Condicional não apresenta as propriedades idempotente, comutativa e associativa.

Negação da Bicondicional:

- Se $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ então sua negação é dada por

$$\sim (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow \sim ((\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p))$$
$$\sim ((\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

CUIDADO!: Bicondicional não é idempotente, mas é comutativa e associativa.

Álgebra das Proposições - Exercício

Prove:

1. $p \to q \vee r \Leftrightarrow (p \to q) \vee (p \to r)$
2. $p \to q \wedge r \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (p \to r)$

Método Dedutivo

- Seja `falso` $\rightarrow p$ podemos concluir que
- Atenção: no livro texto, a fórmula `falso` é equivalente a representação de *quadrado vazio* ou fórmula sempre falsa: $\square$
- Idem para `true` $\equiv \blacksquare$ (*quadrado cheio* ou fórmula sempre verdade)
- $\Phi^n(\blacksquare) = V$ (interpretação V nas n-linhas da TV)
- $\Phi^n(\square) = F$ (interpretação F nas n-linhas da TV)

Método Dedutivo

- Seja `falso` $\rightarrow p$ podemos concluir que

$$\sim (\texttt{falso}) \vee p$$
$$\texttt{verdade} \vee p$$
$$\texttt{verdade}$$

- Seja $\texttt{falso} \to p$ podemos concluir que

$$\sim (\texttt{falso}) \vee p$$
$$\texttt{verdade} \vee p$$
$$\texttt{verdade}$$

- Seja $p \to \texttt{verdade}$ então:

Método Dedutivo

- Seja $\texttt{falso} \to p$ podemos concluir que

$$\sim(\texttt{falso}) \vee p$$
$$\texttt{verdade} \vee p$$
$$\texttt{verdade}$$

- Seja $p \to \texttt{verdade}$ então:

$$\sim p \vee \texttt{verdade}$$
$$\texttt{verdade}$$

Método Dedutivo – Reflexões Parciais

- Lembrar que: `falso` $\equiv \square$
- `verdade` $\equiv \blacksquare$
- Logo, para que $P \Rightarrow Q$ seja uma relação de implicação (ou condicional) verdadeira (lembrar da definição desta relação via TV), podemos assumir como uma relação de equivalência (ou bi-condicional) também verdadeira
- Para isto, basta demonstrar que fórmula $P \rightarrow Q$ é uma fórmula tautológica, isto é: $P \rightarrow Q \equiv \blacksquare$
- Precisamente: $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \blacksquare$
- Há uma relação de equivalência verdadeira!

Método Dedutivo

Demonstre pelo método dedutivo que a implicação de simplificação

$$p \wedge q \Rightarrow p$$

Método Dedutivo

Demonstre pelo método dedutivo que a implicação de simplificação

$$p \land q \Rightarrow p$$

$$p \land q \rightarrow p \quad \text{(hipótese inicial)}$$

Método Dedutivo

Demonstre pelo método dedutivo que a implicação de simplificação

$$p \wedge q \Rightarrow p$$

$$\begin{array}{ll} p \wedge q \rightarrow p & \text{(hipótese inicial)} \\ \sim(p \wedge q) \vee p & \text{(equivalência condicional)} \end{array}$$

Método Dedutivo

Demonstre pelo método dedutivo que a implicação de simplificação

$$p \wedge q \Rightarrow p$$

$$\begin{array}{ll} p \wedge q \rightarrow p & \text{(hipótese inicial)} \\ \sim (p \wedge q) \vee p & \text{(equivalência condicional)} \\ (\sim p \vee \sim q) \vee p & \text{(regra de DE MORGAN)} \end{array}$$

Método Dedutivo

Demonstre pelo método dedutivo que a implicação de simplificação

$$p \wedge q \Rightarrow p$$

$$\begin{array}{ll} p \wedge q \rightarrow p & \text{(hipótese inicial)} \\ \sim (p \wedge q) \vee p & \text{(equivalência condicional)} \\ (\sim p \vee \sim q) \vee p & \text{(regra de DE MORGAN)} \\ \sim p \vee (\sim q \vee p) & \text{(associativa)} \end{array}$$

Método Dedutivo

Demonstre pelo método dedutivo que a implicação de simplificação

$$p \land q \Rightarrow p$$

$$\begin{array}{rl}
p \land q \rightarrow p & \text{(hipótese inicial)} \\
\sim (p \land q) \lor p & \text{(equivalência condicional)} \\
(\sim p \lor \sim q) \lor p & \text{(regra de DE MORGAN)} \\
\sim p \lor (\sim q \lor p) & \text{(associativa)} \\
\sim p \lor (p \lor \sim q) & \text{(comutativa)}
\end{array}$$

Método Dedutivo

Demonstre pelo método dedutivo que a implicação de simplificação

$$p \wedge q \Rightarrow p$$

$$\begin{array}{ll}
p \wedge q \rightarrow p & \text{(hipótese inicial)} \\
\sim (p \wedge q) \vee p & \text{(equivalência condicional)} \\
(\sim p \vee \sim q) \vee p & \text{(regra de DE MORGAN)} \\
\sim p \vee (\sim q \vee p) & \text{(associativa)} \\
\sim p \vee (p \vee \sim q) & \text{(comutativa)} \\
(\sim p \vee p) \vee \sim q & \text{(associativa)}
\end{array}$$

Método Dedutivo

Demonstre pelo método dedutivo que a implicação de simplificação

$$p \wedge q \Rightarrow p$$

$p \wedge q \rightarrow p$	(hipótese inicial)
$\sim (p \wedge q) \vee p$	(equivalência condicional)
$(\sim p \vee \sim q) \vee p$	(regra de DE MORGAN)
$\sim p \vee (\sim q \vee p)$	(associativa)
$\sim p \vee (p \vee \sim q)$	(comutativa)
$(\sim p \vee p) \vee \sim q$	(associativa)
$(\texttt{verdade}) \vee \sim q$	(tautologia)

Método Dedutivo

Demonstre pelo método dedutivo que a implicação de simplificação

$$p \wedge q \Rightarrow p$$

$p \wedge q \rightarrow p$	(hipótese inicial)
$\sim (p \wedge q) \vee p$	(equivalência condicional)
$(\sim p \vee \sim q) \vee p$	(regra de DE MORGAN)
$\sim p \vee (\sim q \vee p)$	(associativa)
$\sim p \vee (p \vee \sim q)$	(comutativa)
$(\sim p \vee p) \vee \sim q$	(associativa)
$(\texttt{verdade}) \vee \sim q$	(tautologia)
$\texttt{verdade}$	(identidade)

Lembrar que: `verdade` $\equiv \blacksquare$

Método Dedutivo

Demonstre pelo método dedutivo que a implicação de adição

$$p \Rightarrow p \vee q$$

$$p \rightarrow p \vee q \quad \text{(hipótese inicial)}$$

Método Dedutivo

Demonstre pelo método dedutivo que a implicação de adição

$$p \Rightarrow p \vee q$$

$$\begin{array}{cl} p \rightarrow p \vee q & \text{(hipótese inicial)} \\ \sim p \vee (p \vee q) & \text{(equivalência condicional)} \\ (\sim p \vee p) \vee q & \text{(associativa)} \\ (\texttt{verdade}) \vee q & \text{(tautologia)} \\ \texttt{verdade} & \text{(identidade)} \end{array}$$

Método Dedutivo

Demonstre pelo método dedutivo a regra *Modus Ponens*:

$$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$$

Método Dedutivo

Demonstre pelo método dedutivo a regra *Modus Ponens*:

$$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$$

$$\begin{array}{rl}
(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q & \text{(hipótese inicial)} \\
(\sim p \vee q) \wedge p \rightarrow q & \text{(equivalência condicional)} \\
p \wedge (\sim p \vee q) \rightarrow q & \text{(comutativa)} \\
(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q) \rightarrow q & \text{(distributiva)} \\
(\square) \vee (p \wedge q) \rightarrow q & \text{(contradição)} \\
(p \wedge q) \rightarrow q & \text{(identidade)} \\
\blacksquare &
\end{array}$$

Método Dedutivo

Demonstre pelo método dedutivo a regra *Modus Tollens*:

$$(p \to q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$$

Demonstre pelo método dedutivo a regra *Modus Tollens*:

$$(p \to q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$$

$$\begin{array}{cl}
(p \to q) \wedge \sim q \to \sim p & \text{(hipótese inicial)} \\
(\sim p \vee q) \wedge \sim q \to \sim p & \text{(equivalência condicional)} \\
(\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q) \to \sim p & \text{(distributiva)} \\
(\sim p \wedge \sim q) \vee \square \to \sim p & \text{(contradição)} \\
(\sim p \wedge \sim q) \to \sim p & \text{(identidade)} \\
\blacksquare &
\end{array}$$

Método Dedutivo

Demonstre pelo método dedutivo a regra *Silogismo Disjuntivo*:

$$(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$$

Método Dedutivo

Demonstre pelo método dedutivo a regra *Silogismo Disjuntivo*:

$$(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$$

$$\begin{array}{rl}
(p \vee q) \wedge \sim p \rightarrow q & \text{(hipótese inicial)} \\
(p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim p) \rightarrow q & \text{(distributiva)} \\
\square \vee (q \wedge \sim p) \rightarrow q & \text{(contradição)} \\
(q \wedge \sim p) \rightarrow q & \text{(identidade)} \\
\blacksquare &
\end{array}$$

Resumo até o momento:

- Se $F_{pqrs\ldots} \Leftrightarrow G_{pqrs\ldots}$ significa que :
  1. Que estas duas fórmulas apresentam uma relação de equivalência verdadeira entre si, a TV de F é igual a TV de G, logo:
  2. $F_{pqrs\ldots} \leftrightarrow G_{pqrs\ldots} \Leftrightarrow \blacksquare$
     Lembre que: $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
  3. E ainda, podemos transformar $F_{pqrs\ldots}$ em $G_{pqrs\ldots}$ usando outras regras de equivalência, e vice-versa $G_{pqrs\ldots}$ em $F_{pqrs\ldots}$, leia-se:
  4. $F_{pqrs\ldots} \xrightarrow{*} G_{pqrs\ldots}$ ou
  5. ou $G_{pqrs\ldots} \xrightarrow{*} F_{pqrs\ldots}$
  6. Além os uso das propriedades: simétrica, reflexividade e transitividade

Método Dedutivo

E ainda:

- Quanto $F_{pqrs...} \Rightarrow G_{pqrs...}$ significa:
    1. Significa que $F_{pqrs...}$ tem uma relação de implicação verdadeira para fórmula $G_{pqrs...}$
    2. Para mostrar que isto é verdadeiro, demonstra-se que a implicação é uma tautologia, isto é:
       $F_{pqrs...} \rightarrow G_{pqrs...}$ terá que levar a $\blacksquare$
    3. Ou $F_{pqrs...} \rightarrow G_{pqrs...} \Leftrightarrow \blacksquare$ usando outras regras de equivalências (verdades entre duas fórmulas)
    4. Aqui: $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$
    5. Além os uso das propriedades: reflexividade e transitividade

Método Dedutivo

Onde vamos usar esta formulação no curso?

1. Faz parte o conceito fundamental do que é um teorema lógico
2. Antecipando (mas não muito), um conjunto de fórmulas vai confirmar ou não uma conclusão (C), isto é:

$$\{F_1, F_2, F_3, ...F_n\} \vdash C$$

3. Essencialmente, isto é perguntar se:

$$\{F_1, F_2, F_3, ...F_n\} \Rightarrow C$$

4. Ou se:

$$\{F_1, F_2, F_3, ...F_n\} \rightarrow C \Leftrightarrow \blacksquare$$

5. Das notações acima, troque as vírgulas por conectivos $\wedge$ e reflita sobre esta fórmula canônica.

Método Dedutivo

- Mas para chegar lá, faltam alguns detalhes de como transformar fórmulas entre si
- Uma fórmula transformada em outra ... mantém-se equivalente!
- Então vamos reescrever fórmulas:

Método Dedutivo

Transformação de conectivos equivalentes, levando a redução do números de conectivos:

1. Transformar $\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ em termos de $\sim, \vee$:
   - $p \wedge q \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee \sim q)$
   - $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$
   - $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \sim (\sim (\sim p \vee q) \vee \sim (\sim q \vee p))$
2. Transformar $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ em termos de $\sim, \wedge$:
   - $p \vee q \Leftrightarrow \sim (\sim p \wedge \sim q)$
   - $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q)$
   - $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q) \wedge \sim (\sim p \wedge q)$
3. Transformar $\wedge, \vee, \leftrightarrow$ em termos de $\sim, \rightarrow$:
   - $p \vee q \Leftrightarrow \sim p \rightarrow q$
   - $p \wedge q \Leftrightarrow \sim (p \rightarrow \sim q)$
   - $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \sim ((p \rightarrow q) \rightarrow \sim (q \rightarrow p))$

Forma Normal das Proposições

São proposições que (no máximo) contém os conectivos $\sim, \wedge, \vee$.

Tipos:

- **FNC** Formal Normal Conjuntiva
- **FND** Formal Normal Disjuntiva

Forma Normal Conjuntiva - FNC

- contém (no máximo) os conectivos $\sim, \wedge, \vee$
- $\sim$ não aparece repetido ($\sim\sim$)
- $\sim$ não tem alcance sobre $\wedge, \vee$, ou seja, só afeta proposições simples
- $\vee$ não tem alcance sobre $\wedge$ como em $(p \vee (q \wedge r))$

Exemplos de FNC:

- p
- $\sim p \wedge \sim q$
- $\sim p \wedge q \wedge r$
- $\sim q \vee r$
- $(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r)$

UDESC Joinville

Forma Normal Conjuntiva - FNC

Como determinar a FNC equivalente?

1. Substituir os conectivos $\leftrightarrow$
2. Substituir os conectivos $\rightarrow$
3. Substituir dupla negações $(\sim\sim)$
4. Substituir negações de parênteses $\sim(X \wedge Y)$ e $\sim(X \vee Y)$
5. Aplicar a regra da distributiva onde $\vee$ tem alcance sobre $\wedge$
6. Simplificar as expressões equivalentes a $\square$ ou $\blacksquare$

Forma Normal Conjuntiva - FNC

Converter a expressão abaixo para sua forma normal conjuntiva

$$\sim (((p \vee q) \wedge \sim q) \vee (q \wedge r))$$

Forma Normal Conjuntiva - FNC

Converter a expressão abaixo para sua forma normal conjuntiva

$$\sim (((p \vee q) \wedge \sim q) \vee (q \wedge r))$$

1. $\sim ((p \vee q) \wedge \sim q) \wedge \sim (q \wedge r)$
2. $(\sim (p \vee q) \vee \sim\sim q) \wedge (\sim q \vee \sim r)$
3. $((\sim p \wedge \sim q) \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r)$
4. $(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r)$
5. $(\sim p \vee q) \wedge (\blacksquare) \wedge (\sim q \vee \sim r)$
6. $(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r)$

Forma Normal Conjuntiva - FNC

Converter a expressão abaixo para sua forma normal conjuntiva

$$(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$$

1. $(\sim p \vee q) \leftrightarrow (\sim\sim q \vee \sim p)$
2. $(\sim p \vee q) \leftrightarrow (q \vee \sim p)$
3. $(\sim (\sim p \vee q) \vee (q \vee \sim p)) \wedge (\sim (q \vee \sim p) \vee (\sim p \vee q))$
4. $((\sim\sim p \wedge \sim q) \vee (q \vee \sim p)) \wedge ((\sim q \wedge \sim\sim p) \vee (\sim p \vee q))$
5. $((p \wedge \sim q) \vee (q \vee \sim p)) \wedge ((\sim q \wedge p) \vee (\sim p \vee q))$
6. $(p \vee (q \vee \sim p)) \wedge (\sim q \vee (q \vee \sim p)) \wedge (\sim q \vee (\sim p \vee q)) \wedge (p \vee (\sim p \vee q))$
7. $(p \vee (\sim p \vee q)) \wedge ((\sim q \vee q) \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee (q \vee \sim p)) \wedge ((p \vee \sim p) \vee q)$
8. $((p \vee \sim p) \vee q) \wedge ((\sim q \vee q) \vee \sim p) \wedge ((\sim q \vee q) \vee \sim p) \wedge ((p \vee \sim p) \vee q)$
9. $((\blacksquare) \vee q) \wedge ((\blacksquare) \vee \sim p) \wedge ((\blacksquare) \vee \sim p) \wedge ((\blacksquare) \vee q)$
10. $(\blacksquare) \wedge (\blacksquare) \wedge (\blacksquare) \wedge (\blacksquare)$
11. $\blacksquare$

Forma Normal Conjuntiva - FNC

Converter a expressão abaixo para sua forma normal conjuntiva

$$p \leftrightarrow q \vee \sim r$$

1. $(\sim p \vee q \vee \sim r) \wedge (\sim (q \vee \sim r) \vee p)$
2. $(\sim p \vee q \vee \sim r) \wedge ((\sim q \wedge \sim\sim r) \vee p)$
3. $(\sim p \vee q \vee \sim r) \wedge ((\sim q \wedge r) \vee p)$
4. $(\sim p \vee q \vee \sim r) \wedge (\sim q \vee p) \wedge (r \vee p)$

Forma Normal Disjuntiva - FND

- contém (no máximo) os conectivos $\sim, \wedge, \vee$
- $\sim$ não aparece repetido ($\sim\sim$)
- $\sim$ não tem alcance sobre $\wedge, \vee$, ou seja, só afeta proposições simples
- $\wedge$ não tem alcance sobre $\vee$ como em $(p \wedge (q \vee r))$

Exemplos de FND:

- p
- $\sim p \vee \sim q$
- $\sim p \vee q \vee r$
- $\sim q \wedge r$
- $(\sim p \wedge q) \vee (\sim q \wedge \sim r)$

UDESC Joinville

Forma Normal Disjuntiva - FND

Converter a expressão abaixo para sua forma normal disjuntiva

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

1. $(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$
2. $((\sim p \vee q) \wedge \sim q) \vee ((\sim p \vee q) \wedge p)$
3. $(\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge p) \vee (q \wedge p)$
4. $(\sim p \wedge \sim q) \vee (\Box) \vee (\Box) \vee (q \wedge p)$
5. $(\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge p)$

Forma Normal Disjuntiva - FND

Converter a expressão abaixo para sua forma normal disjuntiva

$$\sim (((p \vee q) \wedge \sim q) \vee (q \wedge r))$$

1. $\sim ((p \vee q) \wedge \sim q) \wedge \sim (q \wedge r)$
2. $(\sim (p \vee q) \vee \sim\sim q) \wedge (\sim q \vee \sim r)$
3. $((\sim p \wedge \sim q) \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r)$
4. $(((\sim p \wedge \sim q) \vee q) \wedge \sim q) \vee (((\sim p \wedge \sim q) \vee q) \wedge \sim r)$
5. $(\sim p \wedge \sim q \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (q \wedge \sim r)$
6. $(\sim p \wedge (\sim q \wedge \sim q)) \vee (\square) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (q \wedge \sim r)$
7. $(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (q \wedge \sim r)$

UDESC Joinville

- Se uma proposição só contém os conectivos $\sim, \wedge, \vee$ então se trocarmos cada símbolo $\wedge$ por $\vee$ e vice-versa, dá-se o nome de **dual** à proposição resultante.
- *Exemplo:* $\sim ((p \wedge q) \vee \sim r)$ e sua dual $\sim ((p \vee q) \wedge \sim r)$
- **Princípio da Dualidade:** se $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são fórmulas equivalentes que só contenham conectivos $\sim$, $\wedge$, e $\vee$, então suas duais $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ respectivamente, também são equivalentes. Isto é:
  - se $\quad \mathcal{F}_1 \equiv \mathcal{F}_2$
  - então $\quad \mathcal{G}_1 \equiv \mathcal{G}_2$
- Comprove o **Princípio da Dualidade** com exemplos, construindo TV ou transformando fórmulas

Fórmulas Duais – Fixando

Basicamente, por definição, obter uma fórmula dual de $\mathcal{F}$, efetuamos:

- Trocamos $\vee$ por $\wedge$, e vice-versa;
- A negação tem como dual ela própria ($\sim p$ tem como dual $\sim p$);
- E se algum termo da fórmula $\mathcal{F}$ for $\blacksquare$ troque por $\square$, e vice-versa.

Exemplos de Fixação

Ex1: $X \vee (X \wedge Y) \equiv \mathcal{F}_1$
sua dual é:
$X \wedge (X \vee Y) \equiv \mathcal{F}_2$

Ex2: $X \vee \square \equiv X$
sua dual é:
$X \wedge \blacksquare \equiv X$

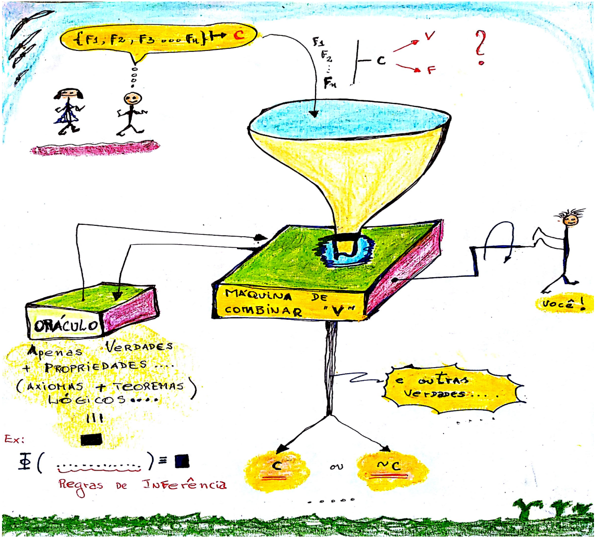
Ex3: $X \vee \blacksquare \equiv \blacksquare$
sua dual é:
$X \wedge \square \equiv \square$

Método Dedutivo - Exercícios

1. Simplifique as proposições
   1. $\sim (\sim p \rightarrow \sim q)$
   2. $\sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$
2. Use o método dedutivo para demonstrar
   1. $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q \wedge r)$
3. Determine a FNC
   1. $p \rightarrow q$
   2. $p \leftrightarrow \sim p$
   3. $\sim p \downarrow (q \veebar p)$
4. Determine a FND
   1. $\sim (\sim p \vee \sim q)$
   2. $(p \rightarrow q) \vee \sim p$

Demonstração Direta (ou natural)

Idéia de uma prova lógica:



Algo mais formal:

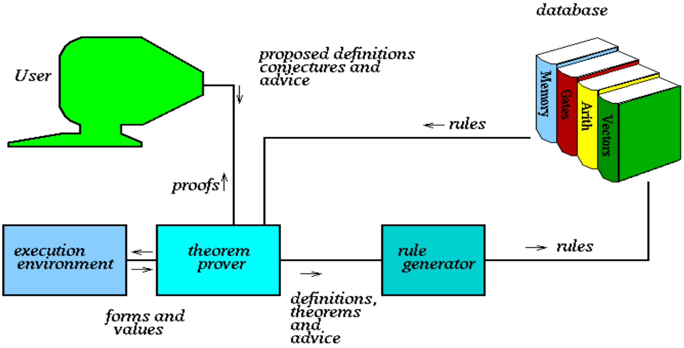


Figura 1: Ilustrando o conceito de provas – explicação em aula

Demonstração Direta - Argumentos

- Dadas as proposições (*premissas*) $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e uma conclusão q, denota-se que:

$$\{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \vdash q$$

- **Validade de Argumento:** um argumento é considerado válido se

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \Rightarrow q$$

- Assim a interpretação de um argumento válido (ver definição de $\Rightarrow$) é dado por:

$$\Phi^{n+1}((p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q) \equiv \blacksquare$$

- Logo, esta é a definição de **teorema lógico** ou argumento válido: <u>uma verdade</u>!
- Exemplo: $p \vdash p \vee q$ é sempre válido (um teorema!)
- Assim: $\Phi(p \rightarrow (p \vee q)) \equiv \blacksquare$

Argumentos Válidos Fundamentais

Adição (AD) $p \vdash p \vee q$

Simplificação (SIMP) $p \wedge q \vdash p$
$p \wedge q \vdash q$

Conjunção (CONJ) $p, q \vdash p \wedge q$

Absorção (ABS) $p \rightarrow q \vdash p \rightarrow (p \wedge q)$

Modus Ponens (MP) $p \rightarrow q, p \vdash q$

Modus Tollens (MT) $p \rightarrow q, \sim q \vdash \sim p$

Demonstração Direta - Argumentos

Argumentos Válidos Fundamentais

Silogismo Disjuntivo (SD) $p \vee q, \sim p \vdash q$
$p \vee q, \sim q \vdash p$

Silogismo Hipotético (SH) $p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$

Dilema Construtivo (DC) $p \rightarrow q, r \rightarrow s, p \vee r \vdash q \vee s$

Dilema Destrutivo (DD) $p \rightarrow q, r \rightarrow s, \sim q \vee \sim s \vdash \sim p \vee \sim r$

Regras de Inferência

- Escreve-se as premissas (em coluna), um traço horizontal e então escreve-se a conclusão
- Exemplo para a regra Modus Ponens (MP)

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \hline q \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \sim p \vee r \to s \wedge \sim q \\ \sim p \vee r \\ \hline s \wedge \sim q \end{array}$$

Validade mediante Regras de Inferência

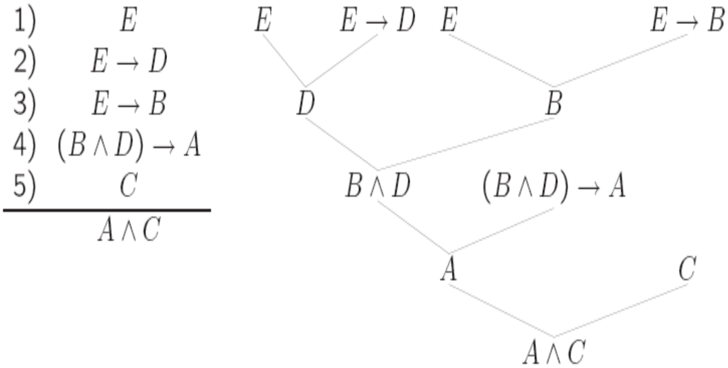


Figura 2: Exemplo de prova simples – explicação em aula

Validade mediante Regras de Inferência

Verifique a validade para $p \to q, p \wedge r \vdash q$

Validade mediante Regras de Inferência

Verifique a validade para $p \to q, p \wedge r \vdash q$

$$\frac{p \wedge r}{p} \quad \textbf{por (SIMP)}$$

Validade mediante Regras de Inferência

Verifique a validade para $p \rightarrow q, p \land r \vdash q$

$$\frac{p \land r}{p} \quad \textbf{por (SIMP)}$$

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \end{array}}{q} \quad \textbf{por (MP)}$$

Validade mediante Regras de Inferência

Verifique a validade para $p \wedge q, p \vee r \rightarrow s \vdash p \wedge s$

Validade mediante Regras de Inferência

Verifique a validade para $p \wedge q, p \vee r \rightarrow s \vdash p \wedge s$

$$\begin{array}{ll} (1) & p \wedge q \\ (2) & p \vee r \rightarrow s \\ \hline \end{array}$$

Validade mediante Regras de Inferência

Verifique a validade para $p \land q, p \lor r \to s \vdash p \land s$

$$
\begin{array}{lll}
(1) & p \land q & \\
(2) & p \lor r \to s & \\
\hline
(3) & p & \textbf{(1) por (SIMP)}
\end{array}
$$

Verifique a validade para $p \wedge q, p \vee r \rightarrow s \vdash p \wedge s$

$$
\begin{array}{lll}
(1) & p \wedge q & \\
(2) & p \vee r \rightarrow s & \\
\hline
(3) & p & \textbf{(1) por (SIMP)} \\
(4) & p \vee r & \textbf{(3) por (AD)}
\end{array}
$$

Validade mediante Regras de Inferência

Verifique a validade para $p \wedge q, p \vee r \rightarrow s \vdash p \wedge s$

$$
\begin{array}{lll}
(1) & p \wedge q & \\
(2) & p \vee r \rightarrow s & \\
\hline
(3) & p & \mathbf{(1)\ por\ (SIMP)} \\
(4) & p \vee r & \mathbf{(3)\ por\ (AD)} \\
(5) & s & \mathbf{(2, 4)\ por\ (MP)}
\end{array}
$$

Verifique a validade para $p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p \vdash r$

$$
\begin{array}{ll}
(1) & p \rightarrow (q \rightarrow r) \\
(2) & p \rightarrow q \\
(3) & p \\
\hline
\end{array}
$$

Validade mediante Regras de Inferência

Verifique a validade para $p \to (q \to r), p \to q, p \vdash r$

$$
\begin{array}{lll}
(1) & p \to (q \to r) & \\
(2) & p \to q & \\
(3) & p & \\
\hline
(4) & q \to r & \mathbf{(1,3)\ por\ (MP)}
\end{array}
$$

Validade mediante Regras de Inferência

Verifique a validade para $p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p \vdash r$

(1)	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	
(2)	$p \rightarrow q$	
(3)	p	
(4)	$q \rightarrow r$	$\mathbf{(1, 3)}$ **por (MP)**
(5)	q	$\mathbf{(2, 3)}$ **por (MP)**

Validade mediante Regras de Inferência

Verifique a validade para $p \to (q \to r), p \to q, p \vdash r$

$$
\begin{array}{lll}
(1) & p \to (q \to r) & \\
(2) & p \to q & \\
(3) & p & \\
\hline
(4) & q \to r & \mathbf{(1,3)\ por\ (MP)} \\
(5) & q & \mathbf{(2,3)\ por\ (MP)} \\
(6) & r & \mathbf{(4,5)\ por\ (MP)}
\end{array}
$$

Validade mediante Regras de Inferência

Verifique a validade para $p \rightarrow q, p \wedge q \rightarrow r, \sim (p \wedge r) \vdash \sim p$

$$
\begin{array}{ll}
(1) & p \rightarrow q \\
(2) & p \wedge q \rightarrow r \\
(3) & \sim (p \wedge r) \\
\hline
\end{array}
$$

Validade mediante Regras de Inferência

Verifique a validade para $p \rightarrow q, p \wedge q \rightarrow r, \sim (p \wedge r) \vdash \sim p$

$$
\begin{array}{ll}
(1) & p \rightarrow q \\
(2) & p \wedge q \rightarrow r \\
(3) & \sim (p \wedge r) \\
\hline
(4) & p \rightarrow p \wedge q \quad \textbf{(1) por (ABS)}
\end{array}
$$

Verifique a validade para $p \to q, p \wedge q \to r, \sim (p \wedge r) \vdash \sim p$

$$
\begin{array}{lll}
(1) & p \to q & \\
(2) & p \wedge q \to r & \\
(3) & \sim (p \wedge r) & \\
\hline
(4) & p \to p \wedge q & \mathbf{(1)\ por\ (ABS)} \\
(5) & p \to r & \mathbf{(2,4)\ por\ (SH)}
\end{array}
$$

Validade mediante Regras de Inferência

Verifique a validade para $p \rightarrow q, p \wedge q \rightarrow r, \sim (p \wedge r) \vdash \sim p$

$$
\begin{array}{lll}
(1) & p \rightarrow q & \\
(2) & p \wedge q \rightarrow r & \\
(3) & \sim (p \wedge r) & \\
\hline
(4) & p \rightarrow p \wedge q & \mathbf{(1)\ por\ (ABS)} \\
(5) & p \rightarrow r & \mathbf{(2,4)\ por\ (SH)} \\
(6) & p \rightarrow p \wedge r & \mathbf{(5)\ por\ (ABS)}
\end{array}
$$

Validade mediante Regras de Inferência

Verifique a validade para $p \rightarrow q, p \wedge q \rightarrow r, \sim (p \wedge r) \vdash \sim p$

(1)	$p \rightarrow q$	
(2)	$p \wedge q \rightarrow r$	
(3)	$\sim (p \wedge r)$	
(4)	$p \rightarrow p \wedge q$	**(1) por (ABS)**
(5)	$p \rightarrow r$	**(2, 4) por (SH)**
(6)	$p \rightarrow p \wedge r$	**(5) por (ABS)**
(7)	$\sim p$	**(3, 6) por (MT)**

Verifique a validade para
$p \vee q \rightarrow r, r \vee q \rightarrow (p \rightarrow (s \leftrightarrow t)), p \wedge s \vdash s \leftrightarrow t$

$$
\begin{array}{ll}
(1) & p \vee q \rightarrow r \\
(2) & r \vee q \rightarrow (p \rightarrow (s \leftrightarrow t)) \\
(3) & p \wedge s \\
\hline
\end{array}
$$

Verifique a validade para
$p \vee q \rightarrow r, r \vee q \rightarrow (p \rightarrow (s \leftrightarrow t)), p \wedge s \vdash s \leftrightarrow t$

(1)	$p \vee q \rightarrow r$	
(2)	$r \vee q \rightarrow (p \rightarrow (s \leftrightarrow t))$	
(3)	$p \wedge s$	
(4)	p	**(3) por (SIMP)**
(5)	$p \vee q$	**(4) por (AD)**
(6)	r	**(1, 5) por (MP)**
(7)	$r \vee q$	**(6) por (AD)**
(8)	$p \rightarrow (s \leftrightarrow t)$	**(2, 7) por (MP)**
(9)	$s \leftrightarrow t$	**(4, 8) por (MP)**

Validade mediante Regras de Inferência

Verifique a validade para

$$p \to \sim q, \sim p \to (r \to \sim q), (\sim s \vee \sim r) \to \sim\sim q, \sim s \vdash \sim r$$

Validade mediante Regras de Inferência

Verifique a validade para

$$p \to \sim q, \sim p \to (r \to \sim q), (\sim s \vee \sim r) \to \sim\sim q, \sim s \vdash \sim r$$

(1)	$p \to \sim q$	
(2)	$\sim p \to (r \to \sim q)$	
(3)	$(\sim s \vee \sim r) \to \sim\sim q$	
(4)	$\sim s$	
(5)	$\sim s \vee \sim r$	**(4) por (AD)**
(6)	$\sim\sim q$	**(3, 5) por (MP)**
(7)	$\sim p$	**(1, 6) por (MT)**
(8)	$r \to \sim q$	**(2, 7) por (MP)**
(9)	$\sim r$	**(6, 8) por (MT)**

Validade mediante Regras de Inferência

Verifique a validade para

$$p \wedge q \rightarrow r, r \rightarrow s, t \rightarrow \sim u, t, \sim s \vee u \vdash \sim (p \wedge q)$$

Verifique a validade para

$$p \wedge q \to r, r \to s, t \to \sim u, t, \sim s \vee u \vdash \sim (p \wedge q)$$

(1)	$p \wedge q \to r$	
(2)	$r \to s$	
(3)	$t \to \sim u$	
(4)	t	
(5)	$\sim s \vee u$	
(6)	$\sim u$	**(3, 4) por (MP)**
(7)	$\sim s$	**(5, 6) por (SD)**
(8)	$\sim r$	**(2, 7) por (MT)**
(9)	$\sim (p \wedge q)$	**(1, 8) por (MT)**

Validade mediante Regras de Inferência

Verifique a validade para

$$p \rightarrow q, p \vee (\sim\sim r \wedge \sim\sim q), s \rightarrow \sim r, \sim (p \wedge q) \vdash \sim s \vee \sim q$$

Validade mediante Regras de Inferência

Verifique a validade para

$$p \rightarrow q, p \vee (\sim\sim r \wedge \sim\sim q), s \rightarrow \sim r, \sim (p \wedge q) \vdash \sim s \vee \sim q$$

(1)	$p \rightarrow q$	
(2)	$p \vee (\sim\sim r \wedge \sim\sim q)$	
(3)	$s \rightarrow \sim r$	
(4)	$\sim (p \wedge q)$	
(5)	$p \rightarrow p \wedge q$	**(1) por (ABS)**
(6)	$\sim p$	**(4, 5) por (MP)**
(7)	$\sim\sim r \wedge \sim\sim q$	**(2, 6) por (SD)**
(8)	$\sim\sim r$	**(7) por (SIMP)**
(9)	$\sim s$	**(3, 8) por (MT)**
(10)	$\sim s \vee \sim q$	**(9) por (AD)**

Regra da Substituição

- Uma proposição p ou apenas parte dela pode ser substituída por uma proposição q equivalente, sendo que a proposição resultante será equivalente a p

Equivalências Notáveis

Idempotência (ID)

$$p \Leftrightarrow p \wedge p$$
$$p \Leftrightarrow p \vee p$$

Comutação (COM)

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$
$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

Associação (ASSOC)

$$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$$
$$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$$

Distribuição (DIST)

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Dupla Negação (DN) $p \Leftrightarrow \sim\sim p$

Equivalências Notáveis

De Morgan (DM)
$$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$
$$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$$

Condicional (COND) $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$

Bicondicional (BICOND)
$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$
$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

Contraposição (CP) $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$

Exportação–Importação (EI) $p \wedge q \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$

Validade mediante Regras de Inferência e Equivalência

Demonstrar: $p \rightarrow \sim q, q \vdash \sim p$

Demonstrar: $p \to \sim q, q \vdash \sim p$

(1)	$p \to \sim q$	
(2)	q	
(3)	$\sim\sim q \to \sim p$	**(1) por (CP)**
(4)	$q \to \sim p$	**(3) por (DN)**
(5)	$\sim p$	**(2, 4) por (MP)**

Validade mediante Regras de Inferência e Equivalência

Demonstrar: $p \rightarrow q, r \rightarrow \sim q \vdash p \rightarrow \sim r$

Demonstrar: $p \rightarrow q, r \rightarrow \sim q \vdash p \rightarrow \sim r$

(1)	$p \rightarrow q$	
(2)	$r \rightarrow \sim q$	
(3)	$\sim\sim q \rightarrow \sim r$	**(2) por (CP)**
(4)	$q \rightarrow \sim r$	**(3) por (DN)**
(5)	$p \rightarrow \sim r$	**(1, 4) por (SH)**

Validade mediante Regras de Inferência e Equivalência

Demonstrar: $p \vee (q \wedge r), p \vee q \rightarrow s \vdash p \vee s$

Validade mediante Regras de Inferência e Equivalência

Demonstrar: $p \vee (q \wedge r), p \vee q \rightarrow s \vdash p \vee s$

(1)	$p \vee (q \wedge r)$	
(2)	$p \vee q \rightarrow s$	
(3)	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	**(1) por (DIST)**
(4)	$p \vee q$	**(3) por (SIMP)**
(5)	s	**(2, 4) por (MP)**
(6)	$s \vee p$	**(5) por (AD)**
(7)	$p \vee s$	**(6) por (COM)**

Demonstrar: $p \rightarrow q, q \leftrightarrow s, t \vee (r \wedge \sim s) \vdash p \rightarrow t$

Validade mediante Regras de Inferência e Equivalência

Demonstrar: $p \to q, q \leftrightarrow s, t \vee (r \wedge \sim s) \vdash p \to t$

(1)	$p \to q$	
(2)	$q \leftrightarrow s$	
(3)	$t \vee (r \wedge \sim s)$	
(4)	$(q \to s) \wedge (s \to q)$	**(2) por (BICOND)**
(5)	$q \to s$	**(4) por (SIMP)**
(6)	$p \to s$	**(1, 5) por (SH)**
(7)	$(t \vee r) \wedge (t \vee \sim s)$	**(3) por (DIST)**
(8)	$t \vee \sim s$	**(7) por (SIMP)**
(9)	$\sim s \vee t$	**(8) por (COM)**
(10)	$s \to t$	**(9) por (COND)**
(11)	$p \to t$	**(6, 10) por (SH)**

Validade mediante Regras de Inferência e Equivalência

Princípio da Inconsistência

- Quando duas ou mais proposições não podem ser simultaneamente verdadeiras
- Exemplo:

$$\sim (p \vee \sim q), p \vee \sim r, q \rightarrow r$$

Validade mediante Regras de Inferência e Equivalência

Demonstrar a inconsistência entre: $\sim (p \vee \sim q), p \vee \sim r, q \rightarrow r$

(1)	$\sim (p \vee \sim q)$	
(2)	$p \vee \sim r$	
(3)	$q \rightarrow r$	
(4)	$\sim p \wedge \sim\sim q$	**(1) por (DM)**
(5)	$\sim p \wedge q$	**(4) por (DN)**
(6)	q	**(5) por (SIMP)**
(7)	r	**(3, 6) por (MP)**
(8)	$\sim p$	**(5) por (SIMP)**
(9)	$\sim r$	**(2, 8) por (SD)**
(10)	$r \wedge \sim r$	**(7, 9) por (CONJ)**
(11)	$\square$	**(10) por (CONTR)**

Demonstração Condicional

Demonstração Condicional

- Seja o argumento

$$\{p_1, p_2, \ldots, p_N\} \vdash A \to B$$

- este só é válido se a regra

$$\Phi((p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_N) \to (A \to B)) \equiv \blacksquare$$

- Aplicando a regra da importação temos

$$(p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_N) \land A \to B$$

- Portanto, conclui-se que:

$$\{p_1, p_2, \ldots, p_N, A\} \vdash B$$

Demonstração Condicional

Demonstrar: $p \vee (q \rightarrow r), \sim r \vdash q \rightarrow p$

$$\begin{array}{ll} (1) & p \vee (q \rightarrow r) \\ (2) & \sim r \\ \hline \end{array}$$

Demonstração Condicional

Demonstrar: $p \vee (q \rightarrow r), \sim r \vdash q \rightarrow p$

$$\begin{array}{lll}
(1) & p \vee (q \rightarrow r) & \\
(2) & \sim r & \\
(3) & q & \textbf{por (Dem.C)} \vdash p \\
\hline
\end{array}$$

Demonstração Condicional

Demonstrar: $p \vee (q \rightarrow r), \sim r \vdash q \rightarrow p$

$$
\begin{array}{lll}
(1) & p \vee (q \rightarrow r) & \\
(2) & \sim r & \\
(3) & q & \textbf{por (Dem.C)} \vdash p \\
\hline
(4) & p \vee (\sim q \vee r) & \textbf{(1) por (COND)} \\
(5) & (p \vee \sim q) \vee r & \textbf{(4) por (ASSOC)} \\
(6) & p \vee \sim q & \textbf{(2,5) por (SD)} \\
(7) & p & \textbf{(3,6) por (SD)}
\end{array}
$$

Demonstração Condicional

Demonstrar: $\sim p \rightarrow \sim q \vee r, s \vee (r \rightarrow t), \sim p \vee s, \sim s \vdash q \rightarrow t$

Demonstração Condicional

Demonstrar: $\sim p \rightarrow \sim q \vee r, s \vee (r \rightarrow t), \sim p \vee s, \sim s \vdash q \rightarrow t$

(1)	$\sim p \rightarrow \sim q \vee r$	
(2)	$s \vee (r \rightarrow t)$	
(3)	$\sim p \vee s$	
(4)	$\sim s$	
(5)	q	**por (Dem.C)** $\vdash t$
(6)	$p \rightarrow s$	**(3) por (COND)**
(7)	$\sim p$	**(4, 6) por (MT)**
(8)	$\sim q \vee r$	**(1, 7) por (MP)**
(9)	$q \rightarrow r$	**(8) por (COND)**
(10)	$r \rightarrow t$	**(2, 4) por (SD)**
(11)	$q \rightarrow t$	**(9, 10) por (SH)**
(12)	t	**(5, 11) por (MP)**

Demonstração Condicional

Demonstrar: $\sim p \rightarrow \sim q, r \rightarrow s, (\sim p \wedge t) \vee (r \wedge u) \vdash q \rightarrow s$

Demonstrar: $\sim p \rightarrow \sim q, r \rightarrow s, (\sim p \wedge t) \vee (r \wedge u) \vdash q \rightarrow s$

(1)	$\sim p \rightarrow \sim q$	
(2)	$r \rightarrow s$	
(3)	$(\sim p \wedge t) \vee (r \wedge u)$	
(4)	q	**por (Dem.C)** $\vdash s$
(5)	$\sim\sim p$	**(1, 4) por (MT)**
(6)	p	**(5) por (DN)**
(7)	$p \vee \sim t$	**(6) por (AD)**
(8)	$\sim\sim p \vee \sim t$	**(7) por (DN)**
(9)	$\sim (\sim p \wedge t)$	**(8) por (DM)**
(10)	$r \wedge u$	**(3, 9) por (SD)**
(11)	r	**(10) por (SIMP)**
(12)	s	**(2, 11) por (MP)**

Demonstração Indireta (ou por Absurdo)

Demonstração por Absurdo

- Consiste em admitir a negação da conclusão ($\sim Q$) como sendo uma nova premissa
- E então, demonstrar logicamente que o novo argumento é inconsistente:
$$\{p_1, p_2, \ldots, p_n, \sim Q\} \vdash \Box$$
- A semântica é dada por:
$$\Phi^{n+1}((p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \wedge \sim Q) \equiv \Box$$
- Explicando: se todos argumentos eram válidos, ao adicionar a conclusão negada ($\sim Q$) e esta gerou uma $\Box$, logo, Q era verdadeiro!
- Assim, temos que demonstrar $\Box$ em algum passo da dedução

Demonstração por Absurdo

Demonstrar: $p \rightarrow \sim q, r \rightarrow q \vdash \sim (p \wedge r)$

Demonstração por Absurdo

Demonstrar: $p \to \sim q, r \to q \vdash \sim (p \wedge r)$

(1)	$p \to \sim q$	
(2)	$r \to q$	
(3)	$\sim\sim (p \wedge r)$	**por (Dem.Ab.)** $\vdash \square$
(4)	$p \wedge r$	**(3) por (DN)**
(5)	p	**(4) por (SIMP)**
(6)	r	**(4) por (SIMP)**
(7)	$\sim q$	**(1, 5) por (MP)**
(8)	q	**(2, 6) por (MP)**
(9)	$\sim q \wedge q$	**(7, 8) por (CONJ)**
(10)	$\square$	**(9) por (CONTR)**

Demonstração por Absurdo

Demonstrar: $\sim p \rightarrow q, \sim q \vee r, \sim r \vdash p \vee s$

Demonstração por Absurdo

Demonstrar: $\sim p \to q, \sim q \vee r, \sim r \vdash p \vee s$

(1)	$\sim p \to q$	
(2)	$\sim q \vee r$	
(3)	$\sim r$	
(4)	$\sim (p \vee s)$	**por (Dem.Ab.)** $\vdash \square$
(5)	$\sim p \wedge \sim s$	**(4) por (DM)**
(6)	$\sim p$	**(5) por (SIMP)**
(7)	q	**(1, 6) por (MP)**
(8)	$\sim q$	**(2, 3) por (SD)**
(9)	$q \wedge \sim q$	**(7, 8) por (CONJ)**
(10)	$\square$	**(9) por (CONTR)**

Demonstração por Absurdo

Demonstrar: $\sim p \vee q, \sim q, \sim r \rightarrow s, \sim p \rightarrow (s \rightarrow \sim t) \vdash t \rightarrow r$

Demonstração por Absurdo

Demonstrar: $\sim p \vee q, \sim q, \sim r \rightarrow s, \sim p \rightarrow (s \rightarrow \sim t) \vdash t \rightarrow r$

(1)	$\sim p \vee q$	
(2)	$\sim q$	
(3)	$\sim r \rightarrow s$	
(4)	$\sim p \rightarrow (s \rightarrow \sim t)$	
(5)	t	**por (Dem.C)** $\vdash r$
(6)	$\sim r$	**por (Dem.Ab.)** $\vdash \square$
(7)	$\sim p$	**(1, 2) por (SD)**
(8)	$s \rightarrow \sim t$	**(4, 7) por (MP)**
(9)	s	**(3, 6) por (MP)**
(10)	$\sim t$	**(8, 9) por (MP)**
(11)	$t \wedge \sim t$	**(5, 10) por (CONJ)**
(12)	$\square$	**(11) por (CONTR)**

Demonstração por Absurdo

Demonstre por absurdo:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \sim (y \neq 1 \lor z \neq -1) \\
(2) & (x < y \land x > z) \land z = -1 \to x = 0 \\
(3) & \sim (y = 1 \lor x = 0) \lor (x < y \land x > z) \\
\hline
\vdash & x = 0
\end{array}
$$

Demonstração por Absurdo

Demonstre por absurdo:

(1)	$\sim (y \neq 1 \lor z \neq -1)$	
(2)	$(x < y \land x > z) \land z = -1 \rightarrow x = 0$	
(3)	$\sim (y = 1 \lor x = 0) \lor (x < y \land x > z)$	
(4)	$x \neq 0$	**por (Dem.Ab.)** $\vdash \Box$
(5)	$y = 1 \land z = -1$	**(1) por (DM)**
(6)	$y = 1$	**(5) por (SIMP)**
(7)	$y = 1 \lor x = 0$	**(6) por (AD)**
(8)	$x < y \land x > z$	**(3, 7) por (SD)**
(9)	$z = -1$	**(5) por (SIMP)**
(10)	$(x < y \land x > z) \land z = -1$	**(8, 9) por (CONJ)**
(11)	$x = 0$	**(2, 10) por (MP)**
(12)	$x \neq 0 \land x = 0$	**(4, 11) por (CONJ)**
(13)	$\Box$	**(12) por (CONTR)**

Método pela Resolução

Definição:

A resolução é um método de dedução, que também define uma estrutura para representação e dedução de conhecimento. Não temos axiomas, apenas uma regra de inferência. Utilizamos na prova de argumentos a partir do conhecimento representado no sistema. A prova é feita aplicando a regra de resolução sobre um conjunto de cláusulas.

De forma dual, a resolução se aplica a fórmulas que são conjunções de disjunções de literais,representadas na forma de conjunto de cláusulas. A linguagem de programação ProLoG, é um exemplo de utilização desse método.

UDESC Joinville

Notação:

Representação na forma de conjunto de cláusulas:
Exemplo:

$$H = (p \vee \sim q \vee r) \wedge (p \vee \sim q) \wedge (p \vee p)$$

A representação na forma de **conjunto de cláusulas** fica:

$$H = \{\{p, \sim q, r\}, \{p, \sim q\}, \{p\}\}$$

Onde as vírgulas internas representam as disjunções ($\vee$) e as externas as conjunções ($\wedge$).
OBS: Quanto à representação do último termo do conjunto, note que:

$$(p \vee p) = \{p, p\} = \{p\}$$

Cláusulas

Definição: na Lógica Proposicional uma cláusula é uma disjunção de literais. Exemplo: Utilizando o conjunto de cláusulas do exemplo

anterior:

$C_1 = \{p, \sim q, r\}$
$C_2 = \{p, \sim q\}$
$C_3 = \{p\}$

Assim, H possui 3 cláusulas: C_1, C_2 e C_3

UDESC Joinville

Literais Complementares

Definição: para serem complementares, um literal deverá ser a negação do outro.

p	$\sim p$
q	$\sim q$

Resolvente de Duas Cláusulas

Definição: sejam duas cláusulas:

$$C_1 = \{a_1, ..., a_n\}$$

$$C_2 = \{b_1, ..., b_n\}$$

- Considere que ambas possuem literais complementares.
- Agora, supondo que há um literal λ em C_1 e seu complemento $\sim \lambda$ em C_2.
- O resolvente $Res(C_1, C_2)$ é definido por:

$$Res(C_1, C_2) = (C_1 - \lambda) \cup (C_2 - \sim \lambda) \tag{1}$$

- Se $Res(C_1, C_2) = \{\}$, dizemos que temos um *resolvente vazio* ou *trivial*

Exemplos:

- $C_1 = \{p, \sim q, r\}$ e $C_2 = \{\sim p, r\}$ O resolvente de C_1 e C_2 é dado por:

  $$Res(C_1, C_2) = \{\sim q, r\}$$

  O resolvente de C_1 e C_2 também é uma cláusula e $\lambda = p$.

- $D_1 = \{p\}$ e $D_2 = \{\sim p\}$ O resolvente de D_1 e D_2 é dado por

  $$Res(D_1, D_2) = \{\}$$

  Neste caso, o resolvente das duas cláusulas é a cláusula vazia e $\lambda = p$.

- $E_1 = \{p, \sim q\}$ e $E_2 = \{\sim p, q\}$

$$Res(E_1, E_2) = \{\sim q, q\}$$

Agora, a resolução não elimina todos os literais das cláusulas mesmo eles sendo complementares.

Regra de Resolução

- O mecanismo de inferência da resolução utiliza apenas uma regra que é semelhante à Modus Ponens, porém mais adequada às implementações em computadores.

- A regra de resolução é definida a partir de duas cláusulas quaisquer

$$C_1 = \{a_1, ..., a_n\}$$

$$C_2 = \{b1, ..., bn\}$$

tal que a regra de resolução aplicada a C_1 e C_2 é definida pelo procedimento a seguir:

Expansão por Resolução

- Onde C_1 e C_2 com seus termo λ em C_1 e $\sim \lambda$ em C_2, aplique $Res(C_1, C_2)$ definida na equação 1

- Essencialmente é a aplicação do passo anterior sucessivas vezes, até encontrar a cláusula vazia. Se esta for encontrada, há uma contradição.

- A regra de resolução é aplicada repetidamente, até que se consiga obter a cláusula vazia. Essa aplicação repetida da regra de resolução determina uma *expansão por resolução*.

Exemplos:

Considere o conjunto de cláusulas:
$\{\{\sim p, q, r\}, \{p, r\}, \{p, \sim r\}\}$.
Uma expansão por resolução sobre esse conjunto é:

1.	$\{\sim p, q, r\}$	
2.	$\{p, r\}$	
3.	$\{p, \sim r\}$	
4.	$\{q, r\}$	$Res(1, 2)$
5.	$\{q, p\}$	$Res(3, 4)$
6.	$\{p\}$	$Res(2, 3)$

A expansão acima é obtida por três aplicações da regra de resolução. Neste exemplo, não foi possível obter a cláusula vazia. OBS: A obtenção da cláusula vazia é uma propriedade importante. Quando ocorre, chamamos de `Expansão por Resolução Fechada`.

Prova por Resolução

- Seja H é um teorema lógico por **H**ipótese
- Não se sabe se é verdade ou falso
- Supondo que seja teorema lógico, então será uma tautologia
- Logo, $\sim H$ deverá ser uma inconsistência
- Definição: seja H uma fórmula e $\sim H_c$ a forma clausal associada a $\sim H$. Uma prova de H por resolução é uma expansão por resolução fechada sobre $\sim H_c$. Neste caso, H é um teorema do sistema de resolução.

Exemplo de Prova por Resolução:

Exemplo 1:

Considere a fórmula:

$H = ((p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \rightarrow p_4) \wedge (p_3 \rightarrow p_4)) \rightarrow p_4$

Relembrando tudo:

- Seja $H = ((p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \rightarrow p_4) \wedge (p_3 \rightarrow p_4)) \rightarrow p_4$
- Isto é: $((p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \rightarrow p_4) \wedge (p_3 \rightarrow p_4)) \vdash p_4$
- ou ainda $\{(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \rightarrow p_4) \wedge (p_3 \rightarrow p_4)\} \vdash p_4$
- ou ainda $\{(p_1 \vee p_2 \vee p_3), (p_1 \rightarrow p_4), (p_3 \rightarrow p_4)\} \vdash p_4$
- Nenhuma alteração foi feita, apenas reescrevemos o exercício.
- Bem como: $\Phi(\{(p_1 \vee p_2 \vee p_3), (p_1 \rightarrow p_4), (p_3 \rightarrow p_4)\} \vdash p_4) \equiv \blacksquare$
- com rigor: $\Phi(\{(p_1 \vee p_2 \vee p_3), (p_1 \rightarrow p_4), (p_3 \rightarrow p_4)\} \rightarrow p_4) \equiv \blacksquare$
- Ou seja $\Phi(H) = \blacksquare$
- Logo, $\Phi(\sim H) = \square$

- Primeiro passo:
determinar uma forma clausal $\sim H_c$ associada a $\sim H$. A fórmula $\sim H_c$ é determinada considerando as equivalências a seguir:
$\sim H = \sim(((p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \rightarrow p_4) \wedge (p_2 \rightarrow p_4) \wedge (p_3 \rightarrow p_4) \rightarrow p_4$
equivale a:
$\sim(\sim((p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (\sim p_1 \vee p_4) \wedge (\sim p_2 \vee p_4) \wedge (\sim p_3 \vee p_4) \vee p_4$
equivale a:
$(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (\sim p_1 \vee p_4) \wedge (\sim p_2 \vee p_4) \wedge (\sim p_3 \vee p_4) \wedge \sim p_4 = \sim H_c$

Exemplo de Prova por Resolução:

- Segundo passo:
  observe que a fórmula $\sim H_{clausulas}$ é uma conjunção de cláusulas e é representada como:

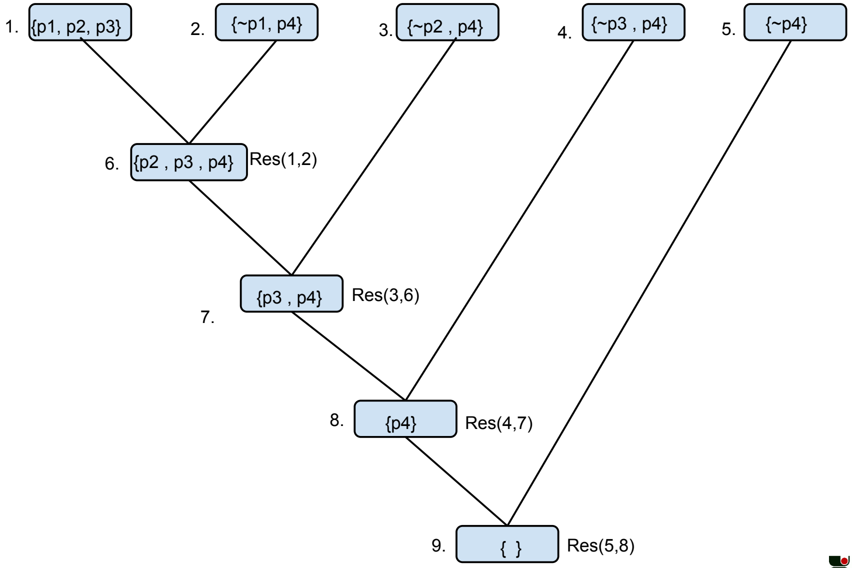
$$\sim H_c = \{\{p_1, p_2, p_3\}, \{\sim p_1, p_4\}, \{\sim p_2, p_4\}, \{\sim p_3, p_4\}, \{\sim p_4\}\}$$

Exemplo de Prova por Resolução:

- Terceiro passo:
  desenvolver uma expansão por resolução sobre $\sim Hc$.

1.	$\{p1, p2, p3\}$	
2.	$\{\sim p1, p4\}$	
3.	$\{\sim p2, p4\}$	
4.	$\{\sim p3, p4\}$	
5.	$\{\sim p4\}$	
6.	$\{p2, p3, p4\}$	$Res(1, 2)$
7.	$\{p3, p4\}$	$Res(3, 6)$
8.	$\{p4\}$	$Res(4, 7)$
9.	$\{\}$	$Res(5, 8)$

A expansão por resolução é fechada, portanto temos uma prova de H.


1. {p1, p2, p3}
2. {~p1, p4}
3. {~p2 , p4}
4. {~p3 , p4}
5. {~p4}
6. {p2 , p3 , p4}
Res(1,2)
7. {p3 , p4}
Res(3,6)
8. {p4}
Res(4,7)
9. { }
Res(5,8)

Exemplo de Prova por Resolução:

Exemplo 2:

- Considere as fórmulas

$$G = ((p1 \vee p2) \wedge (p1 \rightarrow p4) \wedge (p2 \rightarrow p4) \wedge (p3 \rightarrow p4)) \rightarrow p3$$

- Considerando as equivalências:

$$\sim G = \sim (((p1 \vee p2) \wedge (p1 \rightarrow p4) \wedge (p2 \rightarrow p4) \wedge (p3 \rightarrow p4)) \rightarrow p3)$$

- equivale a:
  $\sim (\sim ((p1 \vee p2) \wedge (\sim p1 \vee p4) \wedge (\sim p2 \vee p4) \wedge (\sim p3 \vee p4)) \vee p3$

- equivale a:
  $(p1 \vee p2) \wedge (\sim p1 \vee p4) \wedge (\sim p2 \vee p4) \wedge (\sim p3 \vee p4) \wedge \sim p3 = \sim Gc$

Exemplo de Prova por Resolução:

Na notação de conjuntos $\sim Gc$ é:
$\sim Gc = \{\{p1, p2\}, \{\sim p1, p4\}, \{\sim p2, p4\}, \{\sim p3, p4\}, \{\sim p3\}\}$
Uma expansão por resolução sobre $\sim Gc$ é dada por:

1.	$\{p1, p2\}$	
2.	$\{\sim p1, p4\}$	
3.	$\{\sim p2, p4\}$	
4.	$\{\sim p3, p4\}$	
5.	$\{\sim p3\}$	
6.	$\{p2, p4\}$	$Res(1, 2)$
7.	$\{p4\}$	$Res(3, 6)$

Neste caso a expansão por resolução não é fechada. Portanto, não temos a prova de G.

Consequência Lógica por Resolução

Dada uma fórmula H e um conjunto de hipóteses
$\beta = \{a1, ..., an\}$,
então H é uma consequência lógica de β, por resolução, se existe uma prova de
$(a1 \wedge ... \wedge an) \rightarrow H$
por resolução.

Exemplo de Consequência Lógica por Resolução

Seja o exemplo:

1. Guga é determinado.
2. Guga é inteligente.
3. Se Guga é determinado e atleta, ele não é um perdedor.
4. Guga é um atleta se é um amante do tênis.
5. Guga é amante do tênis se é inteligente.

Demonstre que: "*Guga não é um perdedor*"é uma consequência lógica dos argumentos acima?

Exemplo de Consequência Lógica por Resolução

- Demonstra-se a seguir, utilizando resolução, que a consequência lógica ocorre.

- Conforme foi analisado anteriormente, a representação dos argumentos na Lógica Proposicional é dada por:

$$H = (p \land q \land ((p \land r) \rightarrow \sim p1) \land (q1 \rightarrow r) \land (q \rightarrow q1)) \rightarrow \sim p1$$

Exemplo de Consequência Lógica por Resolução

A forma clausal associada a $\sim H$ é obtida pelas equivalências:

$\sim H = \sim ((p \wedge q \wedge ((p \wedge r) \rightarrow \sim p1) \wedge (q1 \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow q1)) \rightarrow \sim p1)$

equivale a:

$\sim (\sim (p \wedge q \wedge ((p \wedge r) \rightarrow \sim p1) \wedge (q1 \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow q1)) \vee \sim p1)$

equivale a:

$p \wedge q \wedge ((p \wedge r) \rightarrow \sim p1) \wedge (q1 \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow q1) \wedge p1$

equivale a:

$p \wedge q \wedge (\sim (p \wedge r) \vee \sim p1) \wedge (\sim q1 \vee r) \wedge (\sim q \vee q1) \wedge p1$

equivale a:

$p \wedge q \wedge (\sim p \vee \sim r \vee \sim p1) \wedge (\sim q1 \vee r) \wedge (\sim q \vee q1) \wedge p1 = \sim Hc.$

Exemplo de Consequência Lógica por Resolução

Na notação de conjuntos $\sim Hc$ é dada por:

$\sim Hc = \{p, q, \{\sim p, \sim r, \sim p1\{\sim q1, r\}, \{\sim q, q1\}, \{p1\}\}$

Uma expansão por resolução sobre $\sim Hc$ é indicada a seguir:

1.	$\{p\}$	
2.	$\{q\}$	
3.	$\{\sim p, \sim r, \sim p1\}$	
4.	$\{\sim q1, r\}$	
5.	$\{\sim q, q1\}$	
6.	$\{p1\}$	
7.	$\{\sim q, r\}$	$Res(4, 5)$
8.	$\{\sim p, \sim p1, \sim q\}$	$Res(3, 7)$
9.	$\{\sim p1, \sim q\}$	$Res(1, 8)$
10.	$\{\sim q\}$	$Res(6, 9)$
11.	$\{\}$	$Res(2, 10)$

A expansão obtida é fechada, portanto $\vdash H$. Logo, pelo teorema da corretude, H é uma tautologia.

Exercícios

- Construa as árvores de resolução de todos os exemplos anteriores. Como referência, veja o exemplo da figura 3
- Considere os exercícios dos métodos anteriormente vistos, resolva-os pelo método da resolução

Tableaux Semânticos

Definição:

Sistema de dedução que possui uma estrutura que permite a representação e a dedução formal de conhecimento. Por não ser axiomático os tableaux semânticos são mais adequados para implementações em computadores.

Diferente dos outros métodos, os tableaux semânticos estabelecem um importante mecanismo de decisão, pois, nos permitem inferir a falsidade da consequência sintática.

Elementos Básicos

- O alfabeto da Lógica Proposicional
- O conjunto das fórmulas da Lógica Proposicional
- Um conjunto de regras de dedução

Os elementos básicos do sistema de tableaux semânticos determinam a sua estrutura. Os tableaux semânticos contém apenas regras de dedução que definem o mecanismo de inferência.

- Regras de Inferência que Prolongam:

R_1 :

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ | \\ p \\ | \\ q \end{array}$$

R_5 :

$$\begin{array}{c} \sim\sim p \\ | \\ p \end{array}$$

R_7 :

$$\begin{array}{c} \sim (p \vee q) \\ | \\ \sim p \\ | \\ \sim q \end{array}$$

R_8 :

$$\begin{array}{c} \sim (p \rightarrow q) \\ | \\ p \\ | \\ \sim q \end{array}$$

Regras de Inferências - Continuação

- Regras de Inferência que Bifurcam:

R_2:

$$p \vee q$$

$$p \qquad\qquad q$$

R_3 :

$$p \rightarrow q$$

$$\sim p \qquad\qquad q$$

R_4 :

$$p \leftrightarrow q$$

$$p \wedge q \qquad\qquad \sim p \wedge \sim q$$

R_6 :

$$\sim (p \wedge q)$$

$$\sim p \qquad\qquad \sim q$$

R_9 :

$$\sim (p \leftrightarrow q)$$

$$\sim p \wedge q \qquad\qquad p \wedge \sim q$$

Aplicação do Método de Prova no sistema dos Tableaux Semânticos

O método de prova nos tableaux semânticos é feita utilizando o método da negação ou redução ao absurdo. Dessa forma, para provar uma fórmula H, inicialmente consideramos $\sim H$.
Em seguida precisamos:

- Construir o tableau semântico para $\sim H$.
- Utilizando as regras de dedução, a fórmula $\sim H$ é decomposta em subfórmulas.

Construção de um Tableau Semântico

Um tableau semântico na Lógica Proposicional, é construído como segue:

Seja um conjunto de fórmulas

$$\{A_1, ..., A_n\}$$

Exemplo de construção de um tableau semântico

Considere o conjunto de fórmulas:

$$\{(p \vee q), (p \wedge \sim q)\}$$

1:	$p \vee q$	
2:	$p \wedge \sim q$	
3:	p	$R_1, 2.$
4:	$\sim q$	$R_1, 2.$
5:	p | q	$R_2, 1.$

- Heurística (Aplicação de regras): Aplicamos preferencialmente as regras que prolongam.

Construção de um Tableau Semântico

Considere o conjunto de fórmulas

$$\{(p \rightarrow q), \sim (p \vee q), \sim (r \rightarrow p)\}$$

As fórmulas anteriores resultam num tableau que é uma árvore de um ramo só.

$$\begin{array}{ll} 1: & p \rightarrow q \\ & \quad | \\ 2: & \sim (p \vee q) \\ & \quad | \\ 3: & \sim (r \rightarrow p) \end{array}$$

- Aplicando as regras de inferência o tableau resultante será:

Tableau Semântico Resultante

1:	$p \rightarrow q$		
2:	$\sim (p \vee q)$		
3:	$\sim (r \rightarrow p)$		
4:	$\sim p$		$R_7, 2.$
5:	$\sim q$		$R_7, 2.$
6:	$\sim p$	$\sim q$	$R_3, 1.$
7:	r	r	$R_8, 3.$
8:	$\sim p$	$\sim p$	$R_8, 3.$

O tableau da figura anterior contém dois ramos. Nesse caso, o ramo à direita contém as fórmulas $\sim q$ e q. O ramo à esquerda não contém nenhuma fórmula juntamente com sua negação. Essa é uma propriedade a ser identificada nos ramos de um tableau.

- Ramo: é uma sequência de fórmulas $H_1, ..., H_n$ onde H_1 é a primeira fórmula do tableau e, nessa sequência, H_{i+1} é a derivada de H_i.
- Ramo Fechado: é fechado se ele contém uma fórmula H e sua negação $\sim H$.
- Ramo Aberto: é aberto se ele não é fechado.

- Ramo Saturado: é saturado se para toda fórmula H, do ramo:
  - já foi aplicada alguma regra de inferência, ou seja, H já foi expandida por alguma regra; ou
  - não é possível aplicar nenhuma regra de inferência.
- Tableau Fechado: é fechado quando todos os seus ramos são fechados
- Tableau Aberto: é aberto se ele possui algum ramo aberto.

Consequência Lógica no Sistema de Tableaux Semânticos

Seja H uma fórmula. Uma prova de H, no sistema Tb_a, é um tableau fechado iniciado com a fórmula $\sim H$. Nesse caso, H é um teorema do sistema de tableax semânticos Tb_a.

Considere a fórmula:

$$H = \sim ((p \to q) \land \sim (p \leftrightarrow q) \land \sim\sim p).$$

Observe que o tableau é iniciado com a negação da fórmula H, que é igual a

$$\sim\sim ((p \to q) \land \sim (p \leftrightarrow q) \land \sim\sim p).$$

Após a aplicação das regras, se todos os seus ramos são fechados, o tableaux é fechado, portanto constitui uma prova de H.

Exemplo de Aplicação do Sistema de Tableaux Semânticos

1:	$\sim(\sim(p \leftrightarrow q) \vee \sim\sim p)$		
2:	$\sim(p \leftrightarrow q)$		$R_7, 1.$
3:	$\sim\sim p$		$R_7, 1.$
4:	p		$R_5, 3.$
5:	$p \wedge \sim q$	$\sim p \wedge q$	$R_9, 2.$
6:	p	$\sim p$	$R_1, 5.$
7:	$\sim q$	q	$R_1, 5.$
	aberto	fechado	

Teorema da Completude e da Corretude

Teorema da Completude e da Corretude

- **Teorema da Completude**: seja H uma fórmula da Lógica Proposicional. Se H é uma tautologia então existe uma prova de H por resolução.
  A prova por resolução também é correta. Todo teorema é uma tautologia. Isto significa que dada uma fórmula H, se uma expansão por resolução associada a $\sim$H é fechada, então H é uma tautologia. Os argumentos provados utilizando a resolução são válidos.
- **Teorema da Corretude**: seja H uma fórmula da Lógica Proposicional. Se existe uma prova de H, por resolução, então H é uma tautologia.

Introdução à Lógica de Primeira Ordem

Lógica de Primeira Ordem

- Lógica de Primeira Ordem (LPO) é uma extensão à Lógica Proposicional onde cada proposição $p, q, r, \ldots$ é entendida como um conjunto de proposições pertencentes a um dado conjunto (chamado de **domínio**)

$$p(x): \; x \in A$$

- $p(x)$ é uma **sentença aberta** em um conjunto A, se e somente se, $p(x)$ se torna uma proposição para todo $x = a, a \in A$
- Se $a \in A$ e $\Phi(p(a)) =$ verdade diz-se que a **satisfaz** $p(x)$
- Exemplo: seja $N = 1, 2, 3, \ldots$
    - $x + 1 > 8$
    - $x^2 - 5x + 6 = 0$

Conjunto-Verdade para Sentenças Abertas

- É definido com o conjunto (V_p) de todos os elementos $a \in A$ tais que $\Phi(p(a)) =$ verdade

- Exemplo: $x + 1 > 8$ em N (números naturais)
  - $V_p = \{x \mid x \in N \wedge x + 1 > 8\} = \{8, 9, 10, \ldots\}$

- Considerações

  Condição Universal $V_p = A$, $\Phi(p(x))$ é verdade para **todo** $x \in A$
  Condição Possível $V_p \subset A$, $\Phi(p(x))$ é verdade para **algum** $x \in A$
  Condição Impossível $V_p = \phi$, $\Phi(p(x))$ é verdade para **nenhum** $x \in A$

Sentenças Abertas – Duas Variáveis

- $p(x, y)$ é uma sentença aberta em dois domínios A e B, se e somente se, $p(x, y)$ se torna uma proposição para todo par $(a, b) \in A \times B$

- Se $a \in A, b \in B$ e $\Phi(p(a, b)) =$ verdade diz-se que (a, b) satisfaz $p(x, y)$

- Exemplo: seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{5, 6\}$
  - $x < y$
  - $y = 2x$

Conjunto-Verdade para Sentenças Abertas

- É o conjunto (V_p) de todos os elementos $(a, b) \in A \times B$ tais que $\Phi(p(a, b)) =$ verdade

$$V_p = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B \wedge \Phi(p(x, y))\}$$

- Considerações

  Condição Universal $V_p = A \times B$, $\Phi(p(x, y))$ é verdade para **todo** $(x, y) \in A \times B$

  Condição Possível $V_p \subset A \times B$, $\Phi(p(x, y))$ é verdade para **algum** $(x, y) \in A \times B$

  Condição Impossível $V_p = \phi$, $\Phi(p(x, y))$ é verdade para **nenhum** $(x, y) \in A \times B$

- $p(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ é uma sentença aberta em N domínios $A_1, A_2, \ldots, A_N$, se e somente se, $p(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ se torna uma proposição para toda tupla $(a_1, a_2, \ldots, a_N) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_N$

Exercícios

- Determinar o conjunto-verdade (V_p) para
  1. $2x = 6$
  2. $x - 1 < 4$
  3. $x^2 < 25$
- ...considerando:
  - A = números naturais
  - $A = \{1, 3, 4, 7, 9, 11\}$

Operações Lógicas sobre Sentenças Abertas

- **Conjunção**

$$V_{p \wedge q} = V_p \cap V_q = \{x \in A \mid p(x)\} \cap \{x \in A \mid q(x)\}$$

- **Disjunção**

$$V_{p \vee q} = V_p \cup V_q = \{x \in A \mid p(x)\} \cup \{x \in A \mid q(x)\}$$

- **Negação**

$$V_{\sim p} = \bar{A} = \{x \in A \mid A - p(x)\}$$

- **Condicional**
  - Se $p(x) \rightarrow q(x)$ então $\sim p(x) \vee q(x)$

$$V_{p\rightarrow q} = V_{\sim p} \cup V_q = \{x \in A \mid A - p(x)\} \cup \{x \in A \mid q(x)\}$$

- **Bicondicional**
  - Se $p(x) \leftrightarrow q(x)$ então $(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge (q(x) \rightarrow p(x))$

$$V_{p\leftrightarrow q} = (V_{\sim p} \cup V_q) \cap (V_{\sim q} \cup V_p)$$

A álgebra das proposições que era válida para proposições atômicas e compostas, continua válida para sentenças abertas

Exercícios

- Determina o conjunto-verdade para $A = \{1 \ldots 10\}$
  1. $x < 7 \wedge$ x é ímpar
  2. x é par $\wedge\ x + 2 \leq 10$
  3. x é primo $\vee\ x + 5 \in A$
  4. $\sim$ (x é primo)
  5. $\sim (x^2 - 3x = 0)$
  6. $x + 5 \in A \rightarrow x < 0$
  7. $x^2 < 12 \leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

Quantificadores

- Expressam relações lógicas de quantidade entre variáveis e seus respectivos domínios

- Tipos:
  - Quantificador Universal ($\forall$)
  - Quantificador Existencial ($\exists$)

Quantificador Universal

- Para uma sentença aberta $p(x)$ em um conjunto não-vazio A, onde para **todo** elemento $x \in A$, temos $\Phi(p(x)) =$ verdade
  - $\Phi(\forall x \in A : p(x)) \equiv p(x_1) \wedge p(x_2) \wedge p(x_3) \wedge \ldots \wedge p(x_N)$
  - ou simplesmente $\Phi(\forall x : p(x))$
  - conclui-se que $V_p = A$

- Exemplo: "*Todo x é mortal no domínio dos seres humanos*"

Quantificador Universal - Exercício

- Seja D = [10 . . . 15]

$$\forall x \in D : \frac{x}{2} \geq 5$$

Interprete e avalia a validade da expressão acima

- Seja D = [10 ... 15]

$$\forall x \in D : \frac{x}{2} \geq 5$$

Interprete e avalia a validade da expressão acima

- $\Phi(\forall x \in D : \frac{x}{2} \geq 5) = \Phi(\frac{10}{2} \geq 5) \wedge \Phi(\frac{11}{2} \geq 5) \wedge \Phi(\frac{12}{2} \geq 5) \wedge \Phi(\frac{13}{2} \geq 5) \wedge \Phi(\frac{14}{2} \geq 5) \wedge \Phi(\frac{15}{2} \geq 5)$

UDESC Joinville

Quantificador Universal - Exercício

- Seja D = [10 ... 15]
$$\forall x \in D : \frac{x}{2} \geq 5$$
Interprete e avalia a validade da expressão acima

- $\Phi(\forall x \in D : \frac{x}{2} \geq 5) = \Phi(\frac{10}{2} \geq 5) \wedge \Phi(\frac{11}{2} \geq 5) \wedge \Phi(\frac{12}{2} \geq 5) \wedge \Phi(\frac{13}{2} \geq 5) \wedge \Phi(\frac{14}{2} \geq 5) \wedge \Phi(\frac{15}{2} \geq 5)$

- $\Phi(\forall x \in D : \frac{x}{2} \geq 5) = V \wedge V \wedge V \wedge V \wedge V \wedge V = V$

Quantificador Existencial

- Para uma sentença aberta $p(x)$ em um conjunto não-vazio A, onde para **pelo menos um** elemento $x \in A$, temos $\Phi(p(x)) =$ verdade
  - $\Phi(\exists x \in A : p(x)) \equiv p(x_1) \vee p(x_2) \vee p(x_3) \vee \ldots \vee p(x_N)$
  - ou simplesmente $\Phi(\exists x : p(x))$
  - conclui-se que $V_p \subset A$

- Exemplo: "*Existe pelo menos um x que é homem no domínio dos seres humanos*"

Quantificador Existencial - Exercício

- Seja D = [10 ... 15]

$$\exists x \in D : mod(x, 3) = 0$$

Interprete e avalia a validade da expressão acima

Quantificador Existencial - Exercício

- Seja D = [10 ... 15]

$$\exists x \in D : mod(x, 3) = 0$$

Interprete e avalia a validade da expressão acima

- $\Phi(\exists x \in D : mod(x, 3) = 0) = \Phi(mod(10, 3) = 0) \vee \Phi(mod(11, 3) = 0) \vee \Phi(mod(12, 3) = 0) \vee \Phi(mod(13, 3) = 0) \vee \Phi(mod(14, 3) = 0) \vee \Phi(mod(15, 3) = 0)$

- $\Phi(\exists x \in D : mod(x, 3) = 0) = F \vee F \vee V \vee F \vee F \vee V = V$

Variável Ligada e Variável Livre

- Se há um quantificador incidindo sobre uma variável, essa se chama **variável ligada**. Caso contrário, chama-se **variável livre**
- Em outras palavras, variáveis ligadas estarão sempre associadas a domínios, e portanto para tais é possível a sua interpretação (Φ)
- Exemplos:

$$\exists x \in A : 3x + 1 > 10$$

$$x + 3 = -4$$

- Princípio da Substituição de Variáveis Ligadas
  - $\forall x \in A : p(x) \Leftrightarrow \forall y \in A : p(y)$
  - $\exists x \in A : p(x) \Leftrightarrow \exists y \in A : p(y)$

- Para $x^2 = 16$ sobre o conjunto dos números reais ($\Re$) temos:

$$4^2 = 16 \land (-4)^2 = 16 \Leftrightarrow 4 \neq -4$$

portanto conclui-se que:

$$\exists x, y \in \Re : (x^2 = 16 \land y^2 = 16 \land x \neq y)$$

- Para $x^3 = 27$ temos:

$$\exists x \in \Re : (x^3 = 27)$$

$$(x^3 = 27) \land (y^3 = 27) \to (x = y)$$

portanto:

$$\exists! x \in \Re : (x^3 = 27)$$

Negação de Quantificadores

- Regra de DE MORGAN para quantificadores
- $\sim (\forall x \in A : p(x)) \Leftrightarrow \exists x \in A :\sim p(x)$
- $\sim (\exists x \in A : p(x)) \Leftrightarrow \forall x \in A :\sim p(x)$

Quantificadores – N-Variáveis

Quantificação Parcial

$$\exists x \in A : (2x + y < 7),$$
$$\text{onde } A = \{1 \ldots 5\}$$

Quantificação Múltipla

$$\exists x \in A, \forall y \in B : (2x + y < 7),$$
$$\text{onde } A = \{1 \ldots 5\}, B = \{3, 4, 5\}$$

UDESC Joinville

Negação de Múltiplos Quantificadores

- $\sim (\forall x \exists y : p(x, y)) \Leftrightarrow$
- $\exists x \sim (\exists y : p(x, y)) \Leftrightarrow$
- $\exists x \forall y :\sim p(x, y)$

Simplificando a Notação da LPO

Em alguns livros, a notação dos parênteses pode ser omitida, mas tome muito cuidado. Veja os exemplos de simplificações:

- $\forall x \;\; p(x) \equiv \forall x \;\; px$
- $\exists x \forall y \;\; p(x, y) \equiv \exists x \forall y \;\; pxy$
- $\exists x \forall y \exists z \;\; p(x, y, z) \equiv \exists x \forall y \exists z \;\; pxyz$

Em geral, vamos continuar usando os parênteses e vírgulas.

Exercícios – Obrigatórios

Considere a seguinte interpretação em um domínio dado por $D = \{a, b\}$.

p(a,a)	p(a,b)	p(b,a)	p(b,b)
V	F	F	V

Determine o valor verdade (f_{aval} ou Φ), passo-a-passo, das seguintes fórmulas:

1. $\forall x \exists y \;\; p(x, y)$
2. $\forall x \forall y \;\; p(x, y)$
3. $\exists x \forall y \;\; p(x, y)$
4. $\exists y \;\; \sim p(a, y)$
5. $\forall x \forall y \;\; (p(x, y) \to p(y, x))$
6. $\forall x \;\; p(x, x)$

Retirado do livro do Chang-Lee – página 42

Lógica de Primeira Ordem – LPO

(*Visitando* os elementos da LPO)

Slides do Prof. José Augusto Baranauskas

Fonte: `http://dfm.ffclrp.usp.br/~augusto`

(Modificados para se adequarem a esta disciplina com autorização do autor)

Lógica Proposicional vs. Lógica de Predicados

- Na lógica proposicional, utilizamos *proposições* para a representação de conceitos. Ex.: p : o céu é azul

- Na lógica de predicados (ou lógica de primeira ordem) utilizaremos:
  1. Objetos pertencentes a um dado domínio (D)
  2. Fatos sobre objetos
  3. Relações ou relacionamento entre os objetos de domínios:

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_N$$

Lógica Proposicional vs. Lógica de Predicados

- O objetivo (motivação) de se utilizar LPO é aumentar a capacidade de representação de conceitos
- "**Todo homem é mortal**"
- "**Sócrates é um homem**"
- Logo .... "**Sócrates é um mortal**"

Lógica Proposicional vs. Lógica de Predicados

- O objetivo (motivação) de se utilizar LPO é aumentar a capacidade de representação de conceitos

- "**Todo homem é mortal**"

$$\forall x \in HUMANIDADE : (homem(x) \rightarrow mortal(x))$$

- "**Sócrates é um homem**"

$$homem(socrates)$$

- Logo .... "**Sócrates é um mortal**"

$homem(socrates) \rightarrow mortal(socrates)$ por Particularização Universal

$mortal(socrates)$ por Modus Ponens

Lógica de Predicados

- Problema: representar o fato de que todas as mulheres do DCC são bonitas
- Lista de mulheres do DCC: Ana, Laura, Cláudia, Bianca, Fernanda, Paula, Joana, Maria, ...
- Antes, no cálculo proposicional, seria necessário criar uma proposição para cada caso:
  1. p: "*Ana é bonita*"
  2. q: "*Laura é bonita*"
  3. r: "*Cláudia é bonita*"
  4. s: "*Bianca é bonita*"
  5. e assim por diante ...
- Fácil perceber que rapidamente faltarão símbolos proposicionais !

Lógica de Predicados

- Solução: representar o fato através de variáveis relacionadas com o domínio 'DCC '
- $\forall x \in DCC : mulher(x) \rightarrow bonita(x)$
- E ainda, como o domínio é conhecido e fixo, é usual a representação do fato sem explicitar o domínio:

$$\forall x : mulher(x) \rightarrow bonita(x)$$

Lógica de Predicados - Representação

Símbolos Constantes representam objetos específicos do domínio. São representados por letras minúsculas ou números: **a, maria, bola, 10, 7.43**

Símbolos Variáveis representam objetos não-específicos (instanciáveis) que podem assumir apenas os valores de um domínio. São representados por letras maiúsculas: **X, Y, PESSOA**

Símbolos Funcionais representam funções no domínio D: $f : D^N \mapsto D$ onde N é o número de argumentos da função (*Aridade*).

Não possuem valor lógico. Exemplo:

$$idade(joao) \mapsto \Phi(idade(joao)) = 23$$

Símbolos Predicados representam relação ou propriedade p de um ou mais objetos no domínio D $p : D^N \mapsto \{V, F\}$. São representados por nome que iniciam com letra minúscula.

Exemplo:

$$gosta(X, Y)$$

$$empresta(Fulano, Objeto, Alguem)$$

Termos é o menor elemento para construção de fatos e regras de primeira ordem. Constantes, variáveis e funções são exemplos de termos.

É denominado *tupla* a um conjunto de termos: $(t_1, t_2, \ldots, t_N)$

Átomo é um símbolo predicado aplicado a uma tupla de termos: $p(t_1, t_2, \ldots, t_N)$. Exemplos:

$$gosta(joao, maria)$$

$$irmao(pedro, X)$$

$$empresta(maria, livro, mae(joao))$$

Símbolo de Igualdade usado para indicar que dois símbolos se referem ao mesmo objeto: $pai(joao) = henrique$

Símbolos Conectivos continuam válidos os símbolos $\wedge, \vee, \veebar, \sim, \rightarrow, \leftrightarrow$ com o acréscimo dos símbolos $\forall, \exists$

Particularização dada uma fórmula com variáveis ligadas (associadas a um domínio), **particularizar** significa associar um dos elementos pertencentes ao domínio à variável. Denota-se por **variável/valor**. Tipos: Particularização Universal (PU) ou Particularização Existencial (PE)
Por exemplo: dado $\forall X \in D : gato(X)$ e
$D = [frajola, felix, garfield]$; uma possível PU é dada por
$gato(frajola) \;\; PU \;\; (X/frajola)$

Generalização dado um domínio (ou vários), **generalizar** uma fórmula (para $\forall$ ou $\exists$) desde que as variáveis envolvidas não estejam relacionadas a outras já existentes. Tipos: Generalização Universal (GU) ou Generalização Existencial (GE)
Exemplo: dado o conjunto $D = [frajola, garfield, snoopy]$;
uma possível GE seria $\exists X \in D : gato(X) \;\; GU \;\; em \;\; D$

Traduzir da linguagem natural (LN) para linguagem de primeira ordem (LPO):

1. Todos os homens são mortais
2. Alguns gatos são amarelos
3. Nenhuma baleia é peixe
4. Nem tudo que reluz é ouro
5. Meninas e meninos gostam de brincar
6. Leite e banana são nutritivos

Lógica de Predicados - Exercícios $LN \Rightarrow LPO$

Traduzir da linguagem natural (LN) para linguagem de primeira ordem (LPO):

1. Todos os homens são mortais

$$\forall X : (homem(X) \rightarrow mortal(X))$$

2. Alguns gatos são amarelos

$$\exists X : (gato(X) \wedge amarelo(X))$$

3. Nenhuma baleia é peixe

$$\forall X : (baleia(X) \rightarrow \sim peixe(X))$$

4. Nem tudo que reluz é ouro

$$\exists X : (reluz(X) \wedge \sim ouro(X))$$

$$\sim (\forall X : (reluz(X) \rightarrow ouro(X)))$$

5. Meninas e meninos gostam de brincar

$$\forall X : (menino(X) \vee menina(X) \rightarrow gosta(X, brincar))$$

6. Leite e banana são nutritivos

$$\forall X : (leite(X) \vee banana(X) \rightarrow nutritivo(X))$$

Lógica de Predicados - Exercícios $LPO \Rightarrow LN$

Traduzir da linguagem de primeira ordem (LPO) para linguagem natural (LN):

1. $\forall X \exists Y : (pessoa(X) \wedge pessoa(Y) \wedge engana(X, Y) \rightarrow engana(X, X))$
2. $\forall X \exists Y : (humano(X) \rightarrow erro(Y) \wedge faz(X, Y))$
3. $\forall X \exists Y : (erro(Y) \wedge \sim faz(X, Y) \rightarrow \sim humano(X))$

Traduzir da linguagem de primeira ordem (LPO) para linguagem natural (LN):

1. $\forall X \exists Y : (pessoa(X) \land pessoa(Y) \land engana(X, Y) \rightarrow engana(X, X))$

   "*Pessoas que enganam outras pessoas, enganam a si mesmas*"

2. $\forall X \exists Y : (humano(X) \rightarrow erro(Y) \land faz(X, Y))$

   "*Todas as pessoas cometem erros*"

3. $\forall X \exists Y : (erro(Y) \land \sim faz(X, Y) \rightarrow \sim humano(X))$

   "*Não é humano quem não erra*"

Inferência em LPO

- O processo para especificação de conhecimento inferível em LPO é dado através de **fatos** e **regras**
- *Fatos* representam enumerações dos elementos de um domínio. São informações que se conhece como verdadeiras. É através de um conjunto de fatos que é possível se realizar a operação de particularização. Exemplo: $gato(felix)$
- *Regras* são generalizações de domínios para situações específicas. Exemplo: $\forall X \; gato(X) \rightarrow agil(X)$
- **Exercício:** Prove que "Felix é ágil"

UDESC Joinville

Inferência em LPO

- O processo para especificação de conhecimento inferível em LPO é dado através de **fatos** e **regras**
- *Fatos* representam enumerações dos elementos de um domínio. São informações que se conhece como verdadeiras. É através de um conjunto de fatos que é possível se realizar a operação de particularização. Exemplo: $gato(felix)$
- *Regras* são generalizações de domínios para situações específicas. Exemplo: $\forall X : \ gato(X) \rightarrow agil(X)$
- **<u>Exercício:</u>** Prove que “Felix é ágil”

$$agil(felix)$$

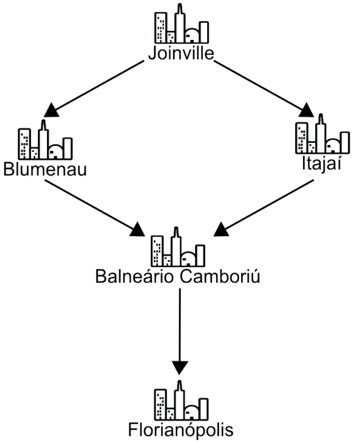
Inferência em LPO

$$\begin{array}{ll} (1) & gato(felix) \\ (2) & \forall X:\ gato(X) \rightarrow agil(X) \quad \vdash agil(felix) \\ \hline \end{array}$$

Inferência em LPO

(1)	$gato(felix)$	
(2)	$\forall X:\ gato(X) \rightarrow agil(X)$	$\vdash agil(felix)$
(3)	$gato(felix) \rightarrow agil(felix)$	**(2) por (PU) X/felix**
(4)	$agil(felix)$	**(1, 3) por (MP)**

- Considere uma lista de cidades: **Joinville, Itajaí, Blumenau, Balneário Camboriú, Florianópolis**
- Considere agora que essas cidades são conectadas por estradas, conforme a figura a seguir
- Determine se existe algum **caminho** entre duas cidades.
- Há um caminho entre duas cidades se:
  1. as duas cidades são conectadas por uma estrada
  2. existe uma cidade intermediária (escala) que é conectada à cidade de origem a partir da qual há um caminho para a cidade destino
- Demonstre que há um caminho que ligue a cidade de **Joinville** à cidade de **Florianópolis**


Joinville
Blumenau
Itajaí
Balneário Camboriú
Florianópolis

Inferência em LPO - Passo #1 = Definir o domínio

$$
\begin{array}{ll}
(1) & estrada(joinville, itajai) \\
(2) & estrada(joinville, blumenau) \\
(3) & estrada(itajai, balneariocamboriu) \\
(4) & estrada(blumenau, balneariocamboriu) \\
(5) & estrada(balneariocamboriu, florianopolis) \\
\hline
\end{array}
$$

Inferência em LPO - Passo #2 = Definir as regras

(1)	$estrada(joinville, itajai)$
(2)	$estrada(joinville, blumenau)$
(3)	$estrada(itajai, balneariocamboriu)$
(4)	$estrada(blumenau, balneariocamboriu)$
(5)	$estrada(balneariocamboriu, florianopolis)$
(6)	$\forall Origem\ \exists Destino : estrada(Origem, Destino) \rightarrow caminho(Origem, Destino)$
(7)	$\forall Origem\ \exists Destino : estrada(Origem, Escala) \wedge caminho(Escala, Destino) \rightarrow caminho(Origem, Destino)$

Inferência em LPO - Passo #3 = Definição da Hipótese

$$\begin{array}{ll}
(1) & estrada(joinville, itajai) \\
(2) & estrada(joinville, blumenau) \\
(3) & estrada(itajai, balneariocamboriu) \\
(4) & estrada(blumenau, balneariocamboriu) \\
(5) & estrada(balneariocamboriu, florianopolis) \\
(6) & \forall Origem\ \exists Destino : estrada(Origem, Destino) \rightarrow caminho(Origem, Destino) \\
(7) & \forall Origem\ \exists Destino : estrada(Origem, Escala) \wedge caminho(Escala, Destino) \rightarrow caminho(Origem, Destino) \\
\hline
\end{array}$$

$$\vdash caminho(joinville, florianopolis)$$

(1) $estrada(joinville, itajai)$
(2) $estrada(joinville, blumenau)$
(3) $estrada(itajai, balneariocamboriu)$
(4) $estrada(blumenau, balneariocamboriu)$
(5) $estrada(balneariocamboriu, florianopolis)$
(6) $\forall Origem\ \exists Destino : estrada(Origem, Destino) \rightarrow caminho(Origem, Destino)$
(7) $\forall Origem\ \exists Destino : estrada(Origem, Escala) \wedge caminho(Escala, Destino)$
$\rightarrow caminho(Origem, Destino)$

---

(8) $estrada(joinville, itajai) \wedge caminho(itajai, florianopolis) \rightarrow caminho(joinville, florianopolis)$ **(7) por (P**

$$\vdash caminho(joinville, florianopolis)$$

Inferência em LPO - Passo #4 = Inferência

(1) $estrada(joinville, itajai)$
(2) $estrada(joinville, blumenau)$
(3) $estrada(itajai, balneariocamboriu)$
(4) $estrada(blumenau, balneariocamboriu)$
(5) $estrada(balneariocamboriu, florianopolis)$
(6) $\forall Origem\ \exists Destino : estrada(Origem, Destino) \rightarrow caminho(Origem, Destino)$
(7) $\forall Origem\ \exists Destino : estrada(Origem, Escala) \wedge caminho(Escala, Destino)$
$\rightarrow caminho(Origem, Destino)$

---

(8) $estrada(joinville, itajai) \wedge caminho(itajai, florianopolis) \rightarrow caminho(joinville, florianopolis)$ **(7) por (P**

(9) $estrada(itajai, balneariocamboriu) \wedge caminho(balneariocamboriu, florianopolis)$

$\rightarrow caminho(itajai, florianopolis)$ **(7) por (P**

$$\vdash caminho(joinville, florianopolis)$$

UDESC Joinville

(1) $estrada(joinville, itajai)$
(2) $estrada(joinville, blumenau)$
(3) $estrada(itajai, balneariocamboriu)$
(4) $estrada(blumenau, balneariocamboriu)$
(5) $estrada(balneariocamboriu, florianopolis)$
(6) $\forall Origem\ \exists Destino : estrada(Origem, Destino) \rightarrow caminho(Origem, Destino)$
(7) $\forall Origem\ \exists Destino : estrada(Origem, Escala) \wedge caminho(Escala, Destino)$
$\rightarrow caminho(Origem, Destino)$

---

(8) $estrada(joinville, itajai) \wedge caminho(itajai, florianopolis) \rightarrow caminho(joinville, florianopolis)$ **(7) por (**I

(9) $estrada(itajai, balneariocamboriu) \wedge caminho(balneariocamboriu, florianopolis)$

$\rightarrow caminho(itajai, florianopolis)$ **(7) por (**I

(10) $estrada(balneariocamboriu, florianopolis) \rightarrow caminho(balneariocamboriu, florianopolis)$ **(6) por (**I

$$\vdash caminho(joinville, florianopolis)$$

(1)	$estrada(joinville, itajai)$	
(2)	$estrada(joinville, blumenau)$	
(3)	$estrada(itajai, balneariocamboriu)$	
(4)	$estrada(blumenau, balneariocamboriu)$	
(5)	$estrada(balneariocamboriu, florianopolis)$	
(6)	$\forall Origem\ \exists Destino : estrada(Origem, Destino) \rightarrow caminho(Origem, Destino)$	
(7)	$\forall Origem\ \exists Destino : estrada(Origem, Escala) \wedge caminho(Escala, Destino)$ $\rightarrow caminho(Origem, Destino)$	
(8)	$estrada(joinville, itajai) \wedge caminho(itajai, florianopolis) \rightarrow caminho(joinville, florianopolis)$	**(7) por (**
(9)	$estrada(itajai, balneariocamboriu) \wedge caminho(balneariocamboriu, florianopolis)$ $\rightarrow caminho(itajai, florianopolis)$	**(7) por (**
(10)	$estrada(balneariocamboriu, florianopolis) \rightarrow caminho(balneariocamboriu, florianopolis)$	**(6) por (**
(11)	$caminho(balneariocamboriu, florianopolis)$	**(5, 10) po**

$$\vdash caminho(joinville, florianopolis)$$

Inferência em LPO - Passo #4 = Inferência

(1) $estrada(joinville, itajai)$
(2) $estrada(joinville, blumenau)$
(3) $estrada(itajai, balneariocamboriu)$
(4) $estrada(blumenau, balneariocamboriu)$
(5) $estrada(balneariocamboriu, florianopolis)$
(6) $\forall Origem\ \exists Destino : estrada(Origem, Destino) \rightarrow caminho(Origem, Destino)$
(7) $\forall Origem\ \exists Destino : estrada(Origem, Escala) \wedge caminho(Escala, Destino) \rightarrow caminho(Origem, Destino)$

---

(8) $estrada(joinville, itajai) \wedge caminho(itajai, florianopolis) \rightarrow caminho(joinville, florianopolis)$ **(7) por (I**

(9) $estrada(itajai, balneariocamboriu) \wedge caminho(balneariocamboriu, florianopolis)$

$\rightarrow caminho(itajai, florianopolis)$ **(7) por (I**

(10) $estrada(balneariocamboriu, florianopolis) \rightarrow caminho(balneariocamboriu, florianopolis)$ **(6) por (I**

(11) $caminho(balneariocamboriu, florianopolis)$ **(5, 10) po**
(12) $estrada(itajai, balneariocamboriu) \wedge caminho(balneariocamboriu, florianopolis)$ **(3, 11) po**

$$\vdash caminho(joinville, florianopolis)$$

UDESC Joinville

Inferência em LPO - Passo #4 = Inferência

(1)	$estrada(joinville, itajai)$	
(2)	$estrada(joinville, blumenau)$	
(3)	$estrada(itajai, balneariocamboriu)$	
(4)	$estrada(blumenau, balneariocamboriu)$	
(5)	$estrada(balneariocamboriu, florianopolis)$	
(6)	$\forall Origem\ \exists Destino : estrada(Origem, Destino) \rightarrow caminho(Origem, Destino)$	
(7)	$\forall Origem\ \exists Destino : estrada(Origem, Escala) \wedge caminho(Escala, Destino)$ $\rightarrow caminho(Origem, Destino)$	
(8)	$estrada(joinville, itajai) \wedge caminho(itajai, florianopolis) \rightarrow caminho(joinville, florianopolis)$	**(7) por (**
(9)	$estrada(itajai, balneariocamboriu) \wedge caminho(balneariocamboriu, florianopolis)$ $\rightarrow caminho(itajai, florianopolis)$	**(7) por (**
(10)	$estrada(balneariocamboriu, florianopolis) \rightarrow caminho(balneariocamboriu, florianopolis)$	**(6) por (**
(11)	$caminho(balneariocamboriu, florianopolis)$	**(5, 10) po**
(12)	$estrada(itajai, balneariocamboriu) \wedge caminho(balneariocamboriu, florianopolis)$	**(3, 11) po**
(13)	$caminho(itajai, florianopolis)$	**(9, 12) po**

$$\vdash caminho(joinville, florianopolis)$$

Inferência em LPO - Passo #4 = Inferência

(1)	$estrada(joinville, itajai)$	
(2)	$estrada(joinville, blumenau)$	
(3)	$estrada(itajai, balneariocamboriu)$	
(4)	$estrada(blumenau, balneariocamboriu)$	
(5)	$estrada(balneariocamboriu, florianopolis)$	
(6)	$\forall Origem\ \exists Destino : estrada(Origem, Destino) \rightarrow caminho(Origem, Destino)$	
(7)	$\forall Origem\ \exists Destino : estrada(Origem, Escala) \wedge caminho(Escala, Destino) \rightarrow caminho(Origem, Destino)$	
(8)	$estrada(joinville, itajai) \wedge caminho(itajai, florianopolis) \rightarrow caminho(joinville, florianopolis)$	**(7) por (**
(9)	$estrada(itajai, balneariocamboriu) \wedge caminho(balneariocamboriu, florianopolis) \rightarrow caminho(itajai, florianopolis)$	**(7) por (**
(10)	$estrada(balneariocamboriu, florianopolis) \rightarrow caminho(balneariocamboriu, florianopolis)$	**(6) por (**
(11)	$caminho(balneariocamboriu, florianopolis)$	**(5, 10) po**
(12)	$estrada(itajai, balneariocamboriu) \wedge caminho(balneariocamboriu, florianopolis)$	**(3, 11) po**
(13)	$caminho(itajai, florianopolis)$	**(9, 12) po**
(14)	$estrada(joinville, itajai) \wedge caminho(itajai, florianopolis)$	**(1, 13) po**

$$\vdash caminho(joinville, florianopolis)$$

UDESC Joinville

Inferência em LPO - Passo #4 = Inferência

(1)	$estrada(joinville, itajai)$	
(2)	$estrada(joinville, blumenau)$	
(3)	$estrada(itajai, balneariocamboriu)$	
(4)	$estrada(blumenau, balneariocamboriu)$	
(5)	$estrada(balneariocamboriu, florianopolis)$	
(6)	$\forall Origem\ \exists Destino : estrada(Origem, Destino) \rightarrow caminho(Origem, Destino)$	
(7)	$\forall Origem\ \exists Destino : estrada(Origem, Escala) \wedge caminho(Escala, Destino) \rightarrow caminho(Origem, Destino)$	
(8)	$estrada(joinville, itajai) \wedge caminho(itajai, florianopolis) \rightarrow caminho(joinville, florianopolis)$	**(7) por (**
(9)	$estrada(itajai, balneariocamboriu) \wedge caminho(balneariocamboriu, florianopolis) \rightarrow caminho(itajai, florianopolis)$	**(7) por (**
(10)	$estrada(balneariocamboriu, florianopolis) \rightarrow caminho(balneariocamboriu, florianopolis)$	**(6) por (**
(11)	$caminho(balneariocamboriu, florianopolis)$	**(5, 10) po**
(12)	$estrada(itajai, balneariocamboriu) \wedge caminho(balneariocamboriu, florianopolis)$	**(3, 11) po**
(13)	$caminho(itajai, florianopolis)$	**(9, 12) po**
(14)	$estrada(joinville, itajai) \wedge caminho(itajai, florianopolis)$	**(1, 13) po**
(15)	$caminho(joinville, florianopolis)$	**(8, 14) po**

$$\vdash caminho(joinville, florianopolis)$$

UDESC Joinville

Inferência em LPO - Exercício

Traduzir os conhecimentos abaixo para LPO (fatos ou regras):

1. Marcos era um homem
2. Todos os homens e mulheres são pessoas
3. Marcos nasceu em Pompeia
4. Todos os que nasceram em Pompeia eram romanos
5. Cesar era um soberano
6. Todos os romanos eram leais a Cesar ou o odiavam
7. As pessoas só tentam assassinar soberanos aos quais não são leais
8. Marcos tentou assassinar Cesar

Prove que: Marcos odeia Cesar

Inferência em LPO - Exercício

(1)	$homem(marcos)$
(2)	$\forall X:\ homem(X) \lor mulher(X) \rightarrow pessoa(X)$
(3)	$pompeano(marcos)$
(4)	$\forall X:\ pompeano(X) \rightarrow romano(X)$
(5)	$soberano(cesar)$
(6)	$\forall X:\ romano(X) \rightarrow leal\_a(X, cesar) \lor odeia(X, cesar)$
(7)	$\forall X\ \exists Y:\ pessoa(X) \land soberano(Y) \land tenta\_assassinar(X, Y) \rightarrow \sim leal\_a(X, Y)$
(8)	$tenta\_assassinar(marcos, cesar)$

$$\vdash odeia(marcos, cesar)$$

Inferência em LPO - Exercício

(1)	$homem(marcos)$	
(2)	$\forall X: \ homem(X) \vee mulher(X) \rightarrow pessoa(X)$	
(3)	$pompeano(marcos)$	
(4)	$\forall X: \ pompeano(X) \rightarrow romano(X)$	
(5)	$soberano(cesar)$	
(6)	$\forall X: \ romano(X) \rightarrow leal\_a(X, cesar) \vee odeia(X, cesar)$	
(7)	$\forall X \ \exists Y: \ pessoa(X) \wedge soberano(Y) \wedge tenta\_assassinar(X, Y) \rightarrow \sim leal\_a(X, Y)$	
(8)	$tenta\_assassinar(marcos, cesar)$	
(9)	$pessoa(marcos) \wedge soberano(cesar) \wedge tenta\_assassinar(marcos, cesar)$ $\rightarrow \sim leal\_a(marcos, cesar)$	**(7) por (PU)** X/m Y/c
(10)	$homem(marcos) \vee mulher(marcos) \rightarrow pessoa(marcos)$	**(2) por (PU) X/m**
(11)	$homem(marcos) \vee mulher(marcos)$	**(1) por (AD)**
(12)	$pessoa(marcos)$	**(10, 11) por (MP)**
(13)	$pessoa(marcos) \wedge soberano(cesar)$	**(5, 12) por (CONJ**
(14)	$pessoa(marcos) \wedge soberano(cesar) \wedge tenta\_assassinar(marcos, cesar)$	**(8, 13) por (CONJ**
(15)	$\sim leal\_a(marcos, cesar)$	**(9, 14) por (MP)**
(16)	$pompeano(marcos) \rightarrow romano(marcos)$	**(4) por (PU) X/m**
(17)	$romano(marcos)$	**(3, 16) por (MP)**
(18)	$romano(marcos) \rightarrow leal\_a(marcos, cesar) \vee odeia(marcos, cesar)$	**(6) por (PU) X/m**
(19)	$leal\_a(marcos, cesar) \vee odeia(marcos, cesar)$	**(17, 18) por (MP)**
(20)	$odeia(marcos, cesar)$	**(15, 19) por (SD)**

$$\vdash odeia(marcos, cesar)$$

UDESC Joinville

Resumindo os Elementos da Lógica de Predicados

- Há fatos sobre objetos atômicos: $\{a, b, ..., 0, 1, ..., V, F, ...\}$
- Os objetos são pertencentes a um dado domínio: (D)
- Assim, há **predicados** que estabelecem relações entre os objetos
- Estas relações ou predicados operam sobre objetos de domínios:

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_N$$

- Há o conceito de interpretação ou validade da fórmula predicativa, dada por: $\Phi(\mathit{predicado}) = \{V, F\}$
- Há ainda, os functores ou funções lógicas, os quais são mapeados em D
- Em resumo, adicione o conceito de conjuntos à lógica proposicional, e define-se uma lógica mais poderosa: a **lógica de primeira-ordem**.

Exercício

Considere o seguinte conjunto de fórmulas:

1.	$\forall x \forall y (q(x,y) \land r(y) \rightarrow p(y))$
2.	$\forall x (q(x,x) \rightarrow p(x))$
3.	$\forall x \exists y (s(x) \rightarrow q(x,y))$
4.	$r(b)$
5.	$s(a)$
6.	$s(b)$

Utilizando as propriedades da LPO (por exemplo: PU, GU, GE e PE), demonstre: $\sim p(a)$ **ou** $p(a)$ e $\sim p(b)$ **ou** $p(b)$. O domínio é dado por $D = \{a, b\}$.

Introdução à Programação em Lógica

Programação em Lógica

- Programação Lógica é um paradigma de programação baseado em linguagens **declarativas**
- Um programa declarativo rompe com a noção de <u>sequencialidade</u> de instruções lógicas; ao invés disso, trabalha com os conceitos de conhecimento declarativo e procedimental
- Conhecimento **declarativo** é aquele conhecimento que é especificado cujo uso não foi definido
- Conhecimento **procedimental** são informações de controle sobre o uso do conhecimento declarativo

UDESC Joinville

Programação Lógica

- O processo de se programar através desse paradigma é o que se segue:

1. Modelagem do(s) domínio(s)
2. Modelagem dos fatos conhecidos acerca do problema
3. Modelagem das regras conhecidas acerca do problema
4. Consulta à base de conhecimento
5. Especificação da inferência desejada (predicado)

Em caso de sucesso, o motor de inferência retorna o predicado com suas variáveis **unificadas**

Programação Lógica - Unificação

- É o processo do PROLOG reconhecer predicados como sendo <u>similares</u>
- A fim de garantir a similiridade entre predicados os seguintes critérios precisam ser satisfeitos:
  1. mesmo nome de predicado
  2. mesma quantidade de parâmetros (aridade)
  3. mesmos valores literais na mesma ordem especificada (caso existam)
- Exemplos:
  - $homem(joao) \Leftrightarrow homem(X) \equiv MATCH$
  - $predicado(X, Marcos) \Leftrightarrow predicado(Y) \equiv$ NOT MATCH
- No caso da unificação ocorrer com sucesso, o motor de inferência substitui as variáveis presentes pelos seus respectivos valores unificados.

  Exemplo: no primeiro exemplo acima **X/joao**, ou seja, a variável X é substituída pela constante literal *joao*

- A linguagem de programação lógica **PROLOG** é um exemplo de linguagem declarativa
- Algumas restrições de representação de predicados são impostas pela linguagem:
  1. Todas as expressões são sucedidas pelo símbolo ponto **(.)**
  2. Os quantificadores $\forall$ e $\exists$ não são implementados explicitamente. O que significa que precisam ser representados de forma implícita (como conjunções ou disjunções)
  3. Os operadores lógicos possuem simbologia específica. A saber:

$$\wedge \ \equiv \ , \quad \vee \ \equiv \ ; \quad \rightarrow \equiv : -$$

  4. As regras de implicação lógica podem conter apenas um predicado no seu consequente:

$$homem(X) \wedge humano(X) \rightarrow mortal(X)$$

  e ainda, são especificados em sua forma recíproca: **consequente** $\rightarrow$ **antecedente**:

$$mortal(X) : -homem(X), humano(X)$$

Exemplo de Programação Lógica (I)

- “*Hoje fui a uma festa e apresentado a três casais. Os maridos tinham esposas e profissões distintas. Após alguns goles, me confundi quem era casado com quem e suas profissões. Apenas lembro de alguns fatos. Então me ajude a descobrir quem são os casais. Eis os fatos que eu me lembro:*”[1]
  1. O médico é casado com a Maria
  2. Paulo é advogado
  3. Patrícia não é casada com Paulo
  4. Carlos não é médico
  5. Ah! Luis e Lúcia também estavam na festa
  6. Lembro também que alguém era engenheiro

[1] Retirado da Revista Coquetel - Problemas de Lógica

Exemplo de Programação Lógica (II)

Modelagem do Problema:

- Podemos identificar três domínios:

  Homens (H) Pedro, Carlos, Luis
  Mulheres (M) Patrícia, Lúcia, Maria
  Profissões (P) Médico, Engenheiro, Advogado

- Queremos identificar tuplas-3 da forma (H, M, P)
- A solução do problema é então uma lista com 3 dessas tuplas:

$$(H1, M1, P1), (H2, M2, P2), (H3, M3, P3)$$

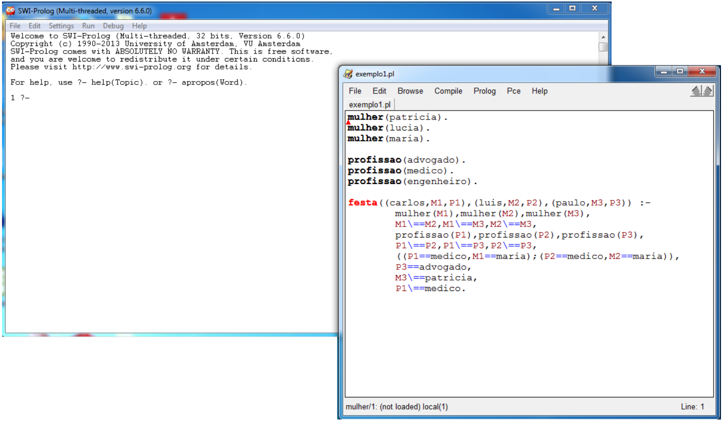
Exemplo de Programação Lógica (III)

- O processo para desenvolvimento e execução de um programa em PROLOG é o seguinte:

1. Editoração do código do programa em um ou mais arquivos texto (usualmente *.pl)
2. É necessário ter um motor de inferência PROLOG como **SWI-Prolog**[2] ou **tkEclipse**
3. Consulta ao arquivo fonte através do menu **File | Consult**
4. Em caso de sucesso na consulta, basta digitar no prompt do ambiente (**?-**) a inferência desejada (não esqueça do "." !)

[2] `http://www.swi-prolog.org/`

Exemplo de Programação Lógica (IV)



Exemplo de Programação Lógica (V)

exemplo1.pl

```
profissao (medico).
profissao (engenheiro).
profissao (advogado).

mulher(maria).
mulher(lucia).
mulher(patricia).

festa (( carlos ,  M1, P1), (luis ,  M2, P2), (paulo, M3, P3)) :-
        mulher(M1), mulher(M2), mulher(M3),
        M1\==M2,M1\==M3,M2\==M3,
        profissao (P1),  profissao (P2),  profissao (P3),
        P1\==P2,P1\==P3,P2\==P3,
        ((P1 == medico,M1 == maria);(P2 == medico, M2 == maria)),
        P3 == advogado,
        M3 \== patricia,
        P1 \== medico.
```

Inferência PROLOG com Sentenças Abertas

- O que nós acabamos de fazer foi uma inferência (em uma base de conhecimento) a partir de uma sentença aberta
- Ou seja, na prática o que o PROLOG foi construir uma enumeração de todas as possíveis combinações de particularização das variáveis envolvidas (produto cartesiano) e retornou aquela particularização que satisfez ao predicado inferido
- Notem que, dependendo do problema podem haver mais de uma particularização que satisfaz o problema. O Prolog irá apenas mostrar inicialmente a primeira destas. Caso se deseje ver outras possíveis respostas, use a tecla "**;**" (no tkEclipse há um botão na interface para isso)
- "**.**" encerra o processo

Inferência PROLOG com Sentenças Abertas

- Mas como funciona o processo de determinação da particularização no Prolog ?
- Através de uma abordagem recursiva denominada **backtracking** (retrocesso)
- Inicialmente, o sistema particulariza cada variável do predicado sendo inferido com a primeira opção disponível na base de conhecimento
- Em seguida, para a última variável inferida, uma próxima particularização é determinada
- Quando não houverem mais particularizações possíveis para a última variável, então o processo é realizado para a penúltima variável de forma análoga (e assim por diante, para as demais variáveis)

prodcartesiano.pl

```
a(1).
a(2).
a(3).
b(alfa).
b(beta).
b(gama).
produto(X,Y) :- a(X),b(Y).
```

Inferência PROLOG com Sentenças Abertas

- Ao inferirmos a sentença "**produto(A,B).**" obtemos como resultado todas as particularizações para as variáveis A e B que assumem os valores produzidos para as variáveis X e Y respectivamente: **X/A Y/B**
- O resultado obtido é:

$$
\begin{array}{ll}
A = 1 & B = alfa \\
A = 1 & B = beta \\
A = 1 & B = gama \\
A = 2 & B = alfa \\
A = 2 & B = beta \\
A = 2 & B = gama \\
A = 3 & B = alfa \\
A = 3 & B = beta \\
A = 3 & B = gama
\end{array}
$$

Inferência PROLOG com Sentenças Abertas

- Sempre que uma variável é particularizada por algum predicado, ela permanecerá particularizada pelo restante da interpretação (Φ) daquele predicado (variáveis não mudam de valor durante uma interpretação)
- Neste caso, predicados que já tenham suas variáveis particularizadas se tornam 'fatos' e são interpretadas pelo Prolog como proposições (V ou F)

prodcartesiano2.pl

```
a(1).
a(2).
a(3).
b(1).
b(3).
b(5).
c(X,Y) :- a(Y), b(X).
produto(X,Y) :- a(X),b(Y),c(X,Y).
```

Qual a sequência de particularizações para o predicado “produto(A,B).”
?

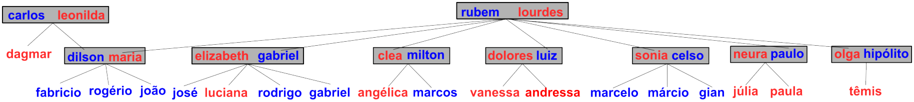
Prolog - Exercício (I)

1. Traduzir o exercício dos caminhos e estradas visto em aula, para Prolog
2. Repetir a inferência "**caminho(joinville, florianopolis).**" para confirmar se a programação está correta
3. Inferir outros caminhos (válidos e inválidos)
4. Acrescentar novas cidades e estradas ao mapa original

Prolog - Exercício (II)

1. Traduzir o exercício do soberano visto em aula, para Prolog
2. Repetir a inferência "**odeia(marcos, cesar).**" para confirmar se a programação está correta

1. Construir um programa em PL para descrever relações familiares em uma árvore genealógica
2. Considere como fatos: homem, mulher, pai, casal
3. Sugestão: use sua própria família como exemplo
4. Construa regras para descrever os seguintes predicados: irmão, irmã, avô, avó, tio, tia, primo, prima



familia-pessoas.pl

```
homem(carlos).
homem(rubem).
homem(dilson).
homem(fabricio).
homem(rogerio).
homem(joao).
homem(gabriel).
homem(jose).
homem(rodrigo).
homem(gabrielzinho).
homem(milton).
homem(marcos).
homem(luiz).
homem(celso).
homem(marcelo).
homem(marcio).
homem(gian).
homem(paulo).
homem(hipolito).
```

```
mulher(leonilda).
mulher(lourdes).
mulher(maria).
mulher(dagmar).
mulher(elizabeth).
mulher(luciana).
mulher(clea).
mulher(angelica).
mulher(dolores).
mulher(vanessa).
mulher(andressa).
mulher(sonia).
mulher(neura).
mulher(julia ).
mulher(paula).
mulher(olga).
mulher(temis).
```

Prolog - Exercício (III)

familia-pais.pl

```prolog
pai(carlos, dilson).
pai(carlos, dagmar).
pai(dilson, fabricio).
pai(dilson, rogerio).
pai(dilson, joao).
pai(rubem, maria).
pai(rubem, gabriel).
pai(rubem, clea).
pai(rubem, luiz).
pai(rubem, sonia).
pai(rubem, paulo).
pai(rubem, olga).
pai(gabriel, jose).
pai(gabriel, luciana).
pai(gabriel, rodrigo).
pai(gabriel, gabrielzinho).
pai(milton, angelica).
pai(milton, marcos).
pai(luiz, vanessa).
pai(luiz, andressa).
pai(celso, marcelo).
pai(celso, marcio).
pai(celso, gian).
pai(paulo, julia).
pai(paulo, paula).
pai(hipolito, temis).
```

```prolog
casal(carlos, leonilda).
casal(dilson, maria).
casal(rubem, lourdes).
casal(gabriel, elizabeth).
casal(milton, clea).
casal(luiz, dolores).
casal(celso, sonia).
casal(paulo, neura).
casal(hipolito, olga).
```

Prolog - Exercício (III)

familia-relacoes.pl

```
mae(X,Y) :- mulher(X), pai(W,Y), casal(W,X).
avo(X,Y) :- homem(X), pai(W,Y), pai(X,W).
avo(X,Y) :- homem(X), mae(W,Y), pai(X,W).
avoh(X,Y) :- mulher(X), pai(W,Y), mae(X,W).
avoh(X,Y) :- mulher(X), mae(W,Y), mae(X,W).
irmao(X,Y) :- homem(X), pai(W,X), pai(W,Y), X\==Y.
irma(X,Y) :- mulher(X), pai(W,X), pai(W,Y), X\==Y.
irmaos(X,Y) :- irmao(X,Y) ; irma(X,Y).
tio(X,Y) :- homem(X), pai(W,Y), irmao(X,W) .
tio(X,Y) :- homem(X), mae(W,Y), irmao(X,W).
tio(X,Y) :- homem(X), pai(W,Y), irma(Z,W), casal(X,Z).
tio(X,Y) :- homem(X), mae(W,Y), irma(Z,W), casal(X,Z).
tia(X,Y) :- mulher(X), pai(W,Y), irma(X,W) .
tia(X,Y) :- mulher(X), mae(W,Y), irma(X,W).
tia(X,Y) :- mulher(X), pai(W,Y), irmao(Z,W), casal(Z,X).
tia(X,Y) :- mulher(X), mae(W,Y), irmao(Z,W), casal(Z,X).
primo(X,Y) :- homem(X), pai(W,X), pai(T,Y), irmao(W,T).
primo(X,Y) :- homem(X), pai(W,X), mae(T,Y), irmao(W,T).
primo(X,Y) :- homem(X), mae(W,X), pai(T,Y), irma(W,T).
primo(X,Y) :- homem(X), mae(W,X), mae(T,Y), irma(W,T).
prima(X,Y) :- mulher(X), pai(W,X), pai(T,Y), irmao(W,T).
prima(X,Y) :- mulher(X), pai(W,X), mae(T,Y), irmao(W,T).
prima(X,Y) :- mulher(X), mae(W,X), pai(T,Y), irma(W,T).
prima(X,Y) :- mulher(X), mae(W,X), mae(T,Y), irma(W,T).
```

UDESC Joinville

Introdução à Lógica Nebulosa