



Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín

Clase #3

EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Ejemplo 1: Programación de personal

Union Airways va a agregar vuelos desde y hacia su aeropuerto base, y por lo tanto necesita contratar más agentes de servicio al cliente. Sin embargo, no está claro cuantos más debe contratar.

La administración reconoce la necesidad de controlar el costo y al mismo tiempo brindar un nivel de atención satisfactorio

Se ha realizado un análisis del número mínimo de agentes de servicio que deben encontrarse de guardia en diferente momentos del día para proporcionar un nivel satisfactorio de servicio⁴⁻²

sigue



Período	Períodos cubiertos					Número mínimo de agentes necesarios
	Turno					
	1	2	3	4	5	
6:00 am a 8:00am	✓					48
8:00 am a 10:00am	✓	✓				79
10:00 am a 12:00am	✓	✓				65
12:00 am a 2:00pm	✓	✓	✓			87
2:00 pm a 4:00pm		✓	✓			64
4:00 pm a 6:00pm			✓	✓		73
6:00 pm a 8:00pm			✓	✓		82
8:00 pm a 10:00pm				✓		43
10:00 pm a 12:00pm				✓	✓	52
12:00 pm a 6:00am					✓	15
Costo diario por agente	170	160	175	180	195	4-3

Se ha acordado que cada agente trabaje un turno de 8 horas, 5 días a la semana en los turnos mostrados en la tabla anterior.

Los salarios de cada turno son diferentes debido a que unos son más deseables que otros.

La compañía debe determinar cuántos agentes deben asignarse a los turnos respectivos cada día para minimizar el costo total del personal.

Los requerimientos mínimos de servicio deben cumplirse obligatoriamente, pero pueden ⁴⁻⁴sobrepasarse.

1. Definición de Variables

**X_j : Número de agentes asignados al turno j
(de 8 horas) [*agentes*] $j = 1, 2, 3, 4, 5$.**

2. Coeficientes de costo: Datos

3. Medida de la eficiencia (F. O.)

**Z : Costo total de los agentes asignados a los
5 turnos**

$$\text{Min } Z = 170X_1 + 160X_2 + 175X_3 + 180X_4 + 195X_5$$

[\$/agente] * [agente] = [\$]

4. Restricciones funcionales

Requerimiento mínimo de personal en cada período. **[agentes]**

$$\begin{array}{rcl} X_1 & & \geq 48 \text{ 6:00 am a 8:00am} \\ X_1 + X_2 & & \geq 79 \text{ 8:00 am a 10:00am} \\ X_1 + X_2 & & \geq 65 \text{ 10:00 am a 12:00am} \\ X_1 + X_2 + X_3 & & \geq 87 \text{ 12:00 am a 2:00pm} \\ & X_2 + X_3 & \geq 64 \text{ 2:00 pm a 4:00pm} \\ & X_3 + X_4 & \geq 73 \text{ 4:00 pm a 6:00pm} \\ & X_3 + X_4 & \geq 82 \text{ 6:00 pm a 8:00pm} \\ & X_4 & \geq 43 \text{ 8:00 pm a 10:00pm} \\ & X_4 + X_5 & \geq 52 \text{ 10:00 pm a 12:00pm} \\ & X_5 & \geq 15 \text{ 12:00 pm a 6:00am} \end{array}$$

Condición de signo de las variables: $X_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, 5$

Algunas de estas restricciones son redundantes:



$$X_1 + X_2 \geq 79$$

~~$X_1 + X_2 \geq 65$~~  *Redundante*

~~$X_3 + X_4 \geq 73$~~  *Redundante*

$$X_3 + X_4 \geq 82$$

Las restricciones de no negatividad de las variables X_1 , X_4 , X_5 , también sobran, pues tienen cotas inferiores por encima de cero.

Modelo completo

$$\text{Min } Z = 170X_1 + 160X_2 + 175X_3 + 180X_4 + 195X_5$$

s.a

$$X_1 \geq 48$$

$$X_1 + X_2 \geq 79$$

$$\cancel{X_1} + \cancel{X_2} \geq 65$$

$$X_1 + X_2 + X_3 \geq 87$$

$$X_2 + X_3 \geq 64$$

$$\cancel{X_3} + \cancel{X_4} \geq 73$$

$$X_3 + X_4 \geq 82$$

$$X_4 \geq 43$$

$$X_4 + X_5 \geq 52$$

$$X_5 \geq 15$$

$$X_j \geq 0 \text{ para } j = 1, 2, \dots, 5$$

Ejemplo 2: Análisis de Inversiones

Un banco trata de determinar su portafolio de inversiones para el próximo año. Actualmente dispone de **US\$ 500000** para invertir en bonos, préstamos hipotecarios, préstamos para compra de automóviles y préstamos personales.

La tasa de rendimiento anual para cada inversión resulta ser:

- Bonos: 10%
- Préstamos hipotecarios: 16%
- Préstamos para compra de automóviles: 13%⁴⁻⁹
- Préstamos personales: 20%

sigue



Para asegurar que la cartera del banco no sea demasiado arriesgada, el gerente de inversiones del banco ha puesto las siguientes 3 restricciones de cartera:

- 1. La cantidad invertida en préstamos personales, no puede ser mayor que la invertida en bonos.**
- 2. La cantidad invertida en préstamos hipotecarios, no puede ser mayor que la invertida en préstamos para automóviles.**
- 3. No puede invertirse más del 25% de la cantidad total invertida, en préstamos personales.**

El objetivo del banco es maximizar el rendimiento anual de su cartera de inversiones.

1. Definición de Variables

**X_j : Cantidad de dinero a invertir durante el año en la opción j , $j = 1, 2, 3, 4$.
[US\$]**

1. Bonos

2. Préstamos hipotecarios

3. Préstamos para compra de automóviles

4. Préstamos personales

2. Coeficientes de costo: Datos

3. Medida de la eficiencia (F. O.)

Z : Ganancia total de las inversiones hechas durante el año

$$\text{Max } Z = 0.1X_1 + 0.16X_2 + 0.13X_3 + 0.2X_4$$

[US\$]

4. Restricciones funcionales

R1: La cantidad invertida en préstamos personales, no puede ser mayor que la invertida en bonos.

$$X_4 \leq X_1 \quad [US\$]$$

R2: La cantidad invertida en préstamos hipotecarios, no puede ser mayor que la invertida en préstamos para automóviles.

$$X_2 \leq X_3 \quad [US\$]$$

R3: No puede invertirse más del 25% de la cantidad total invertida, en préstamos personales.

$$X_4 \leq 0.25 * (X_1 + X_2 + X_3 + X_4) \quad [US\$]$$

R4: La empresa sólo posee US\$ 500000 para invertir.

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 500000 \quad [US\$]$$

Modelo completo.

$$\text{Max } Z = 0.1X_1 + 0.16X_2 + 0.13X_3 + 0.2X_4$$

S.a.

$$-X_1 \qquad \qquad \qquad +X_4 \leq 0$$

$$X_2 - X_3 \leq 0$$

$$X_1 + X_2 + X_3 - 3X_4 \geq 0$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 500000$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

Ejemplo 3: Inversiones a plazo

Alfredo tiene US 2200 para invertir durante los próximos cinco años. Al principio de cada año puede invertir su dinero en depósitos a plazo fijo de 1 o 2 años. El banco paga el 8% de interés en depósitos a plazo fijo de un año y el 17% (total) en depósitos a plazo fijo de dos años. Además, al principio del segundo año, Corfinsura ofrecerá certificados a tres años. Estos certificados tendrán una ganancia del 27% (total). Si Alfredo reinvierte su dinero disponible cada año, formule un programa lineal que muestre como maximizar su ganancia total al final del quinto año.

44-15

sigue

4.15

DEFINICIÓN DE VARIABLES

Subíndices inversiones

x_{ij} :

i tipo (plazo) 1 a 1 año, 2 a dos años, 3 a 3 años

j : principio del año en que se hace la inversión $j=1$ a 5

año 1

año 2

año 3

año 4

año 5

x11

x12

x13

x14

x15

x21

x22

x23

x24

x32

Medida de la eficiencia (F. O.):
Cantidad de dinero que se retira al
final del año 5
 $Z = 1.08x15 + 1.17x24$ (observar
en el diagrama anterior que las dos
únicas inversiones que se retiran al
final del año 5 son $x15$ y $x24$.

Ecuaciones de balance de inventario: lo que se invierte al inicio de 1 año es lo que se recoge al final del año anterior y se plantea una restricción al principio de cada uno de los cinco años.

$2200 = x_{11} + x_{21}$	(principio del año 1)
$1.08 * x_{11} = x_{12} + x_{22} + x_{32}$	(principio del año 2)
$1.08 * x_{12} + 1.17 * x_{21} = x_{13} + x_{23}$	(principio del año 3)
$1.08 * x_{13} + 1.17 * x_{22} = x_{14} + x_{24}$	(principio del año 4)
$1.08 * x_{14} + 1.17 * x_{23} + 1.27 * x_{32} = x_{15}$	(principio del año 5)

Modelo completo.

$$\text{Max } Z = 1.08x_{15} + 1.17x_{24}$$

s.a:

$$2200 = x_{11} + x_{21}$$

$$1.08 * x_{11} = x_{12} + x_{22} + x_{32}$$

$$1.08 * x_{12} + 1.17 * x_{21} = x_{13} + x_{23}$$

$$1.08 * x_{13} + 1.17 * x_{22} = x_{14} + x_{24}$$

$$1.08 * x_{14} + 1.17 * x_{23} + 1.27 * x_{32} = x_{15}$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, \\ x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{32} \geq 0$$