

Clase 4

EJEMPLOS DE APLICACIÓN:

**FORMULACIÓN DE MODELOS DE
PROGRAMACIÓN LINEAL**

EJEMPLO 6: Problema de mezclas

Producción de gasolina a partir de crudos

Ecopetrol produce tres tipos de gasolina y cada una de estas se hace a partir de la mezcla de tres tipos de crudo



Los precios de compra por barril de crudo y los precios de venta por barril de gasolina pueden verse en la siguiente tabla.



3

	Precio de venta por barril de gasolina		Precio de compra por barril de crudo
Gasolina 1	US\$ 70	Crudo 1	US\$ 45
Gasolina 2	US\$ 60	Crudo 2	US\$ 35
Gasolina 3	US\$ 50	Crudo 3	US\$ 25

Los tres tipos de gasolina difieren en la relación de octanaje y en el contenido de sulfuros.

Ver tabla 1

Las mezclas de crudo para producir cada tipo de gasolina también difieren en la relación de octanaje y en el contenido de sulfuros.

Ver tabla 2





	Relación octanaje (como mínimo)	Contenido de sulfuros (a lo sumo en %)
Gasolina 1	10	1%
Gasolina 2	8	2%
Gasolina 3	6	1%



	Relación octanaje	Contenido de sulfuros
Crudo 1	12	0.5%
Crudo 2	6	2%
Crudo 3	8	3%

Transformar un barril de crudo en un litro de gasolina cuesta US\$ 4.



La refinería puede producir a lo sumo 14000 barriles diarios.

Ecopetrol puede comprar a lo sumo 5000 barriles de cada crudo por día.

Los clientes de Ecopetrol requieren las siguientes cantidades por día.

8

Gasolina 1 → 3000 barriles por día

Gasolina 2 → 2000 barriles por día

Gasolina 3 → 1000 barriles por día

Se tiene la opción de hacer propaganda para estimular la venta.

Cada dólar gastado en publicidad diariamente en un tipo particular de gasolina, aumenta la demanda diaria de ésta en 10 barriles. $\frac{10 \text{ barriles/día}}{1 \text{ USD/día}} =$







$\frac{10 \text{ barriles}}{\text{USD}}$

Ojo: Es obligatorio cumplir con las demandas



Síntesis de la información

9

- 👉 Precio de venta del barril de gasolina. 
- 👉 Precio de compra del barril de crudo.
- 👉 Octanajes mínimos (en cada tipo de gasolina) 
- 👉 Cantidad de sulfuros máximos (por gasolina)
- 👉 Costo de transformación (crudo en gasolina) 
- 👉 Tope máximo de compra de crudo 
- 👉 Demandas de gasolina requeridas. 
- 👉 Publicidad 
- 👉 Relación de octanaje en los crudos
- 👉 Contenido de sulfuros en los crudos

FORMULACIÓN DEL MODELO

1. Variables de decisión

X_{ij} : Cantidad de crudo i , que se utiliza diariamente para producir la gasolina j .
($i = 1, 2, 3$); ($j = 1, 2, 3$) [barriles/día]

A_j : Dólares invertidos diariamente en publicidad de la gasolina j
($j = 1, 2, 3$) [dólares/día]

Compras de crudo diarias:

11

$X_{11} + X_{12} + X_{13}$: Crudo 1

$X_{21} + X_{22} + X_{23}$: Crudo 2

$X_{31} + X_{32} + X_{33}$: Crudo 3

Gasolina producida por día:

$X_{11} + X_{21} + X_{31}$: Gasolina tipo 1

$X_{12} + X_{22} + X_{32}$: Gasolina tipo 2

$X_{13} + X_{23} + X_{33}$: Gasolina tipo 3

2. Medida de la eficiencia: F. O.

12

Maximizar beneficios: Ingresos – Costos


Max Z = Ingresos por la venta de gasolina

- costos por la compra de crudo

- costos de producción

- costos de publicidad

Ingresos (brutos) por la venta de gasolina:


$$70(X_{11} + X_{21} + X_{31}) + 60(X_{12} + X_{22} + X_{32}) + 50(X_{13} + X_{23} + X_{33})$$

Costos por la compra de cada tipo de crudo:

$$45(X_{11} + X_{12} + X_{13}) + 35(X_{21} + X_{22} + X_{23}) + 25(X_{31} + X_{32} + X_{33})$$

Costos por producción (conversión de crudo en gasolina):

$$4(X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{13} + X_{23} + X_{33})$$

Costos de publicidad: $A_1 + A_2 + A_3$

Simplificando, la F.O. será:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 21X_{11} + 11X_{12} + X_{13} \\ &+ 31X_{21} + 21X_{22} + 11X_{23} \\ &+ 41X_{31} + 31X_{32} + 21X_{33} \\ &- A_1 - A_2 - A_3 \end{aligned}$$



3. Restricciones funcionales

Capacidad de producción de la refinería por día. [barriles/día]

14



$$R1: X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{31} + X_{32} + X_{33} \leq 14000$$

Demanda de la clientela. (demanda de la gasolina j por día) [barriles/día]

$$R2: X_{11} + X_{21} + X_{31} \geq 3000 + 10 A_1$$

$$R3: X_{12} + X_{22} + X_{32} \geq 2000 + 10 A_2$$

$$R4: X_{13} + X_{23} + X_{33} \geq 1000 + 10 A_3$$

Capacidad de compra de crudo ⁱ por día [barriles/día]



$$R5: X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 5000$$

$$R6: X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 5000$$

$$R7: X_{31} + X_{32} + X_{33} \leq 5000$$

Relación de octanaje para la gasolina j



$$\text{R8} \longrightarrow \frac{12X_{11} + 6X_{21} + 8X_{31}}{X_{11} + X_{21} + X_{31}} \geq 10$$

$$\text{R9} \longrightarrow \frac{12X_{12} + 6X_{22} + 8X_{32}}{X_{12} + X_{22} + X_{32}} \geq 8$$

$$\text{R10} \longrightarrow \frac{12X_{13} + 6X_{23} + 8X_{33}}{X_{13} + X_{23} + X_{33}} \geq 6$$

Contenido de sulfuro para la gasolina i

17



$$\mathbf{R11} \longrightarrow \frac{0.005X_{11} + 0.02X_{21} + 0.03X_{31}}{X_{11} + X_{21} + X_{31}} \leq 0.01$$

$$\mathbf{R12} \longrightarrow \frac{0.005X_{12} + 0.02X_{22} + 0.03X_{32}}{X_{12} + X_{22} + X_{32}} \leq 0.02$$

$$\mathbf{R13} \longrightarrow \frac{0.005X_{13} + 0.02X_{23} + 0.03X_{33}}{X_{13} + X_{23} + X_{33}} \leq 0.01$$

Ejemplo 7: Problema de Programación de Producción

Una compañía manufacturera produce dos tipos de artículos: A y B. Se comprometió a entregar los artículos en los siguientes plazos y cantidades.

	A	B
31 de marzo	5000	2000
30 de abril	8000	4000



La compañía tiene 2 líneas de montaje, 1 y 2, con las siguientes horas de producción disponibles:

19

	Horas de producción disponibles	
	Línea 1	Línea 2
Marzo	800	2000
Abril	400	1200



En cada línea se requiere de un tiempo diferente para la producción de los artículos tipo A y B, así:

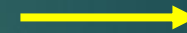
20

	Tiempos de producción [<i>hora/art</i>]	
	Línea 1	Línea 2
Artículo A	0.15	0.16
Artículo B	0.12	0.14





**Costo por hora de tiempo de línea
(producción de cualquier artículo)**



5 dólares

**Costo de mantenimiento de
inventario, por mes y para cada
artículo**



**20 centavos por
unidad**

Actualmente hay 500 unidades de A y 750 unidades de B en el Inventario

La gerencia quisiera tener, al final del mes de abril, por lo menos 1000 unidades de cada artículo en el inventario

Formule un modelo de P.L para determinar la programación de la producción que minimice el costo total para satisfacer las demandas a tiempo.



FORMULACIÓN DE UN MODELO DE P.L.

1. Variables de decisión

X_{ijk} : Cantidad de artículos del tipo i , que se producen en la línea j , en el mes k .

$i = A, B; j = 1, 2; k = 1$ (marzo), 2 (abril)

[art/mes]

Z_{ik} : Cantidad de artículos del tipo i , que se tienen en inventario al final del mes k

$i = A, B; k = 1$ (marzo), 2 (abril)

[art/mes]

2. Medida de la eficiencia



24

Z: Costo total:

Producción: $[\text{US$/hora}] * [\text{hora/art}] * [\text{art/mes}] = [\text{US$/mes}]$

Inventario: $[\text{US$/art}] * [\text{art/mes}] = [\text{US$/mes}]$

$$\begin{aligned} \text{Min } Z = & 5 * 0.15 X_{A11} + 5 * 0.15 X_{A12} \\ & + 5 * 0.16 X_{A21} + 5 * 0.16 X_{A22} \\ & + 5 * 0.12 X_{B11} + 5 * 0.12 X_{B12} \\ & + 5 * 0.14 X_{B21} + 5 * 0.14 X_{B22} \\ & + 0.2 (Z_{A1} + Z_{A2} + Z_{B1} + Z_{B2}) \end{aligned}$$

3. Restricciones funcionales.

25

R1: Inventario artículos del tipo A en marzo



$$500 + X_{A11} + X_{A21} = 5000 + Z_{A1}$$

[art/mes]

R2: Inventario artículos del tipo A en abril

$$Z_{A1} + X_{A12} + X_{A22} = 8000 + Z_{A2}$$

[art/mes]



R3: Inventario artículos del tipo B en marzo

$$750 + X_{B11} + X_{B21} = 2000 + Z_{B1}$$

[art/mes]

R4: Inventario artículos del tipo B en abril

$$Z_{B1} + X_{B12} + X_{B22} = 4000 + Z_{B2}$$

[art/mes]

R5: Cantidad de artículos tipo A al final de abril

$$Z_{A2} \geq 1000$$

[art/mes]

R6: Cantidad de artículos tipo B al final de abril

$$Z_{B2} \geq 1000$$

[art/mes]



R7: Horas de producción disponibles en marzo en la línea 1

$$0.15X_{A11} + 0.12X_{B11} \leq 800$$

[hora/art]*[art/mes]

R8: Horas de producción disponibles en marzo en la línea 2

$$0.16X_{A21} + 0.14X_{B21} \leq 2000$$

[hora/art]*[art/mes]

R9: Horas de producción disponibles en abril en la línea 1



29

$$0.15X_{A12} + 0.12X_{B12} \leq 400$$

[hora/art]*[art/mes]

R10: Horas de producción disponibles en abril en la línea 2

$$0.16X_{A22} + 0.14X_{B22} \leq 1200$$

[hora/art]*[art/mes]

Restricciones de signo de las variables

$$X_{ijk} \geq 0 \quad Z_{ik} \geq 0$$