Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín

Clase #2

EL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN DE RECURSOS

FORMULACIÓN DE MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

SUPOSICIONES DE LA PROGRAMACION LINEAL

CONTENIDO

1. El Problema de Asignación de Recursos.

1.1 Definición del problema y Recolección de información.

1.2. Formulación del modelo de P.L:

1.2.1 El modelo en forma estándar.

1.2.2 El modelo en forma matricial

2. Variaciones a la forma estándar.

3. Etapas en la formulación del modelo de P.L.

4. Suposiciones del modelo de P. L.

5. Ejemplo : El problema de la dieta

1. EL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN DE RECURSOS
1.1 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA (GENERAL)

Ejemplo prototipo	Problema General
• Capacidad de producción de las plantas	• Recursos
• 3 Plantas	• m recursos
• Fabricación de productos	• Actividades
•2 Productos	• n actividades
•Tasa de producción del producto j, X_j	• Nivel de la actividad j, X_j
•Ganancia Z	•Medida global de efectividad Z

RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN

Recurso	Consumo de recursos por unidad de actividad				Cantidad de recursos disponibles
	Actividad (Variable)				
	1	*2*		*n*	
1	a_{11}	a_{12}	....	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	....	a_{2n}	b_2
⋮	......	......		......	⋮
m	a_{m1}	a_{m2}	....	a_{mn}	b_m
Contribución a Z por unidad de actividad	c_1	c_2	....	c_n	

1.2 FORMULACIÓN DEL MODELO DE P. L.

Definición de Variables y parámetros

X_j = Nivel de la actividad j (para j = 1, 2,......, n).

c_j = Incremento en Z que resulta al aumentar una

unidad en el nivel de la actividad j (costo o utilidad)

Z = Valor de la medida global de efectividad.

b_i = Cantidad del recurso i disponible para asignar a las actividades (i =1,2,..., m) (recurso o requerimiento)

a_{ij} = Cantidad del recurso i consumido por cada unidad de la actividad j. (Coeficientes tecnológicos)

1.2.1 El Modelo de P.L. en Forma Estándar

Max $Z = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_nX_n$ → Función objetivo

Sujeto a:

(restricciones funcionales)

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}X_n \leq b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}X_n \leq b_2$$

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}X_n \leq b_m$$

(restricciones de signo de las variables)

$$X_i \geq 0 \quad para\ i = 1, 2, \ldots, n$$

1.2.2 El Modelo en Forma Matricial

$$\text{Max} \quad Z = \underline{c}\ \underline{x}$$

Sujeto a

$$\underline{A}\ \underline{x} \le \underline{b}$$

$$\underline{x} \ge \underline{0}$$

¿ Qué significa cada uno de estos símbolos?

En el ejemplo de la Wyndor:

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

2. VARIACIONES A LA FORMA ESTÁNDAR

1. Minimizar en lugar de maximizar la función objetivo.

Min $Z = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_nX_n$

2. Restricciones funcionales del tipo $\geq$

$a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{in}X_n \geq b_i$ *para algún i*

3. Restricciones funcionales del tipo =

$a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{in}X_n = b_i$ *para algún i*

4. Las variables de decisión sin la restricción de no negatividad.

X_j no restringida en signo para algún j

3 ETAPAS EN LA FORMULACIÓN DEL MODELO

1. Definición de Variables
2. Coeficientes de costos (o de utilidades)
3. Función Objetivo (F. O.)
4. Término independiente o del lado derecho (recursos o requerimientos)
5. Coeficientes tecnológicos
6. Restricciones funcionales
7. Restricciones de signo de las variables

4. SUPOSICIONES DEL MODELO DE P. L.

4.1 Suposición de proporcionalidad.
(en la F. O. y en las restricciones)

4.2 Suposición de divisibilidad.
(Las variables toman valores reales)

4.3 Suposición de certidumbre.
(Los valores de los parámetros se conocen con certeza)

4.4 Suposición de aditividad.
(en la F. O. y en las restricciones)

4.1 Suposición de proporcionalidad

- **1.1.1 En la Función Objetivo: Z**

- **La contribución de cada actividad a la F.O. es proporcional al nivel de la actividad $X_{j,}$**
  como lo representa el término c_jX_j

En el ejemplo de la Wyndor: *$Z = \underline{3X_1} + 5X_2$*

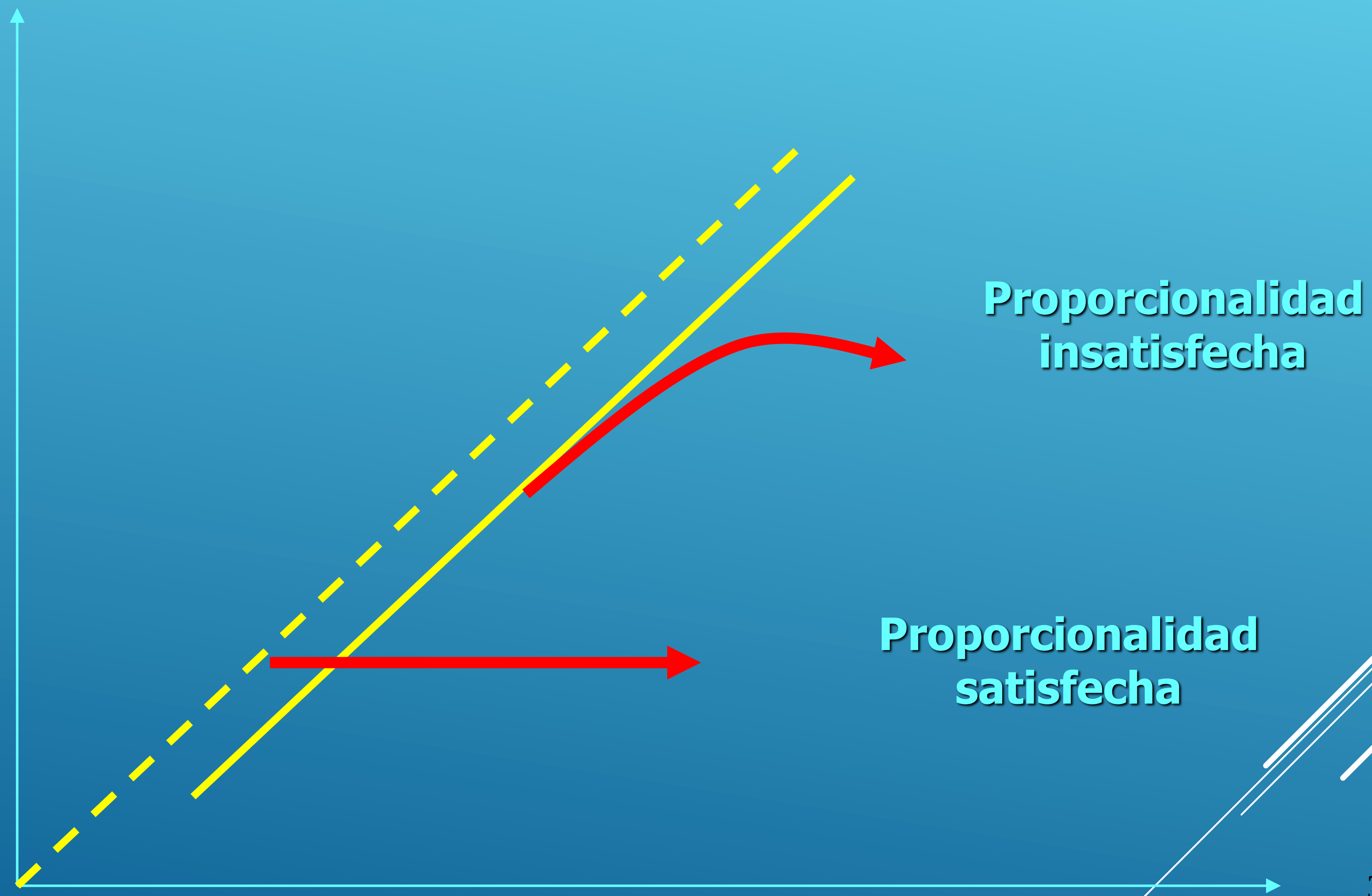
Por cada lote del producto 1 que se fabrique, la ganancia es US$ 3000.

1.1.2 Al lado izquierdo de cada actividad:

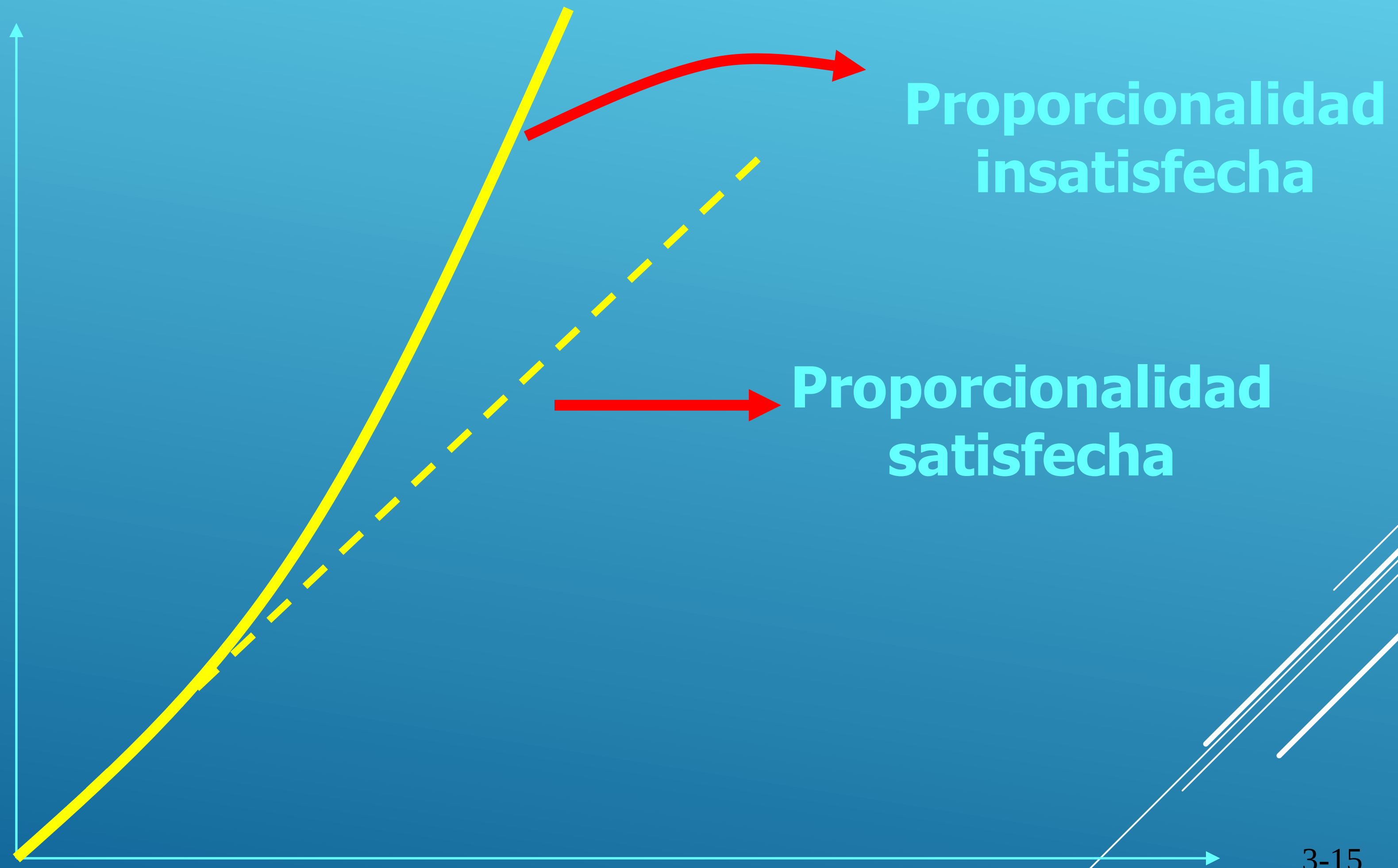
- **La contribución de cada actividad al lado izquierdo de las restricciones es proporcional al nivel de la actividad X_j como lo representa el término $a_{ij}X_j$ en las restricciones.**

Nivel	Ganancia del producto 1 (miles US$ por semana)			
	Proporcionalidad satisfecha	**Proporcionalidad insatisfecha**		
		Caso 1	Caso 2	Caso 3
0	0	0	0	0
1	3	2	3	3
2	6	5	7	5
3	9	8	12	6
4	12	11	18	6
		Costos fijos	**Rendimiento marginal creciente**	**Rendimiento marginal decreciente**

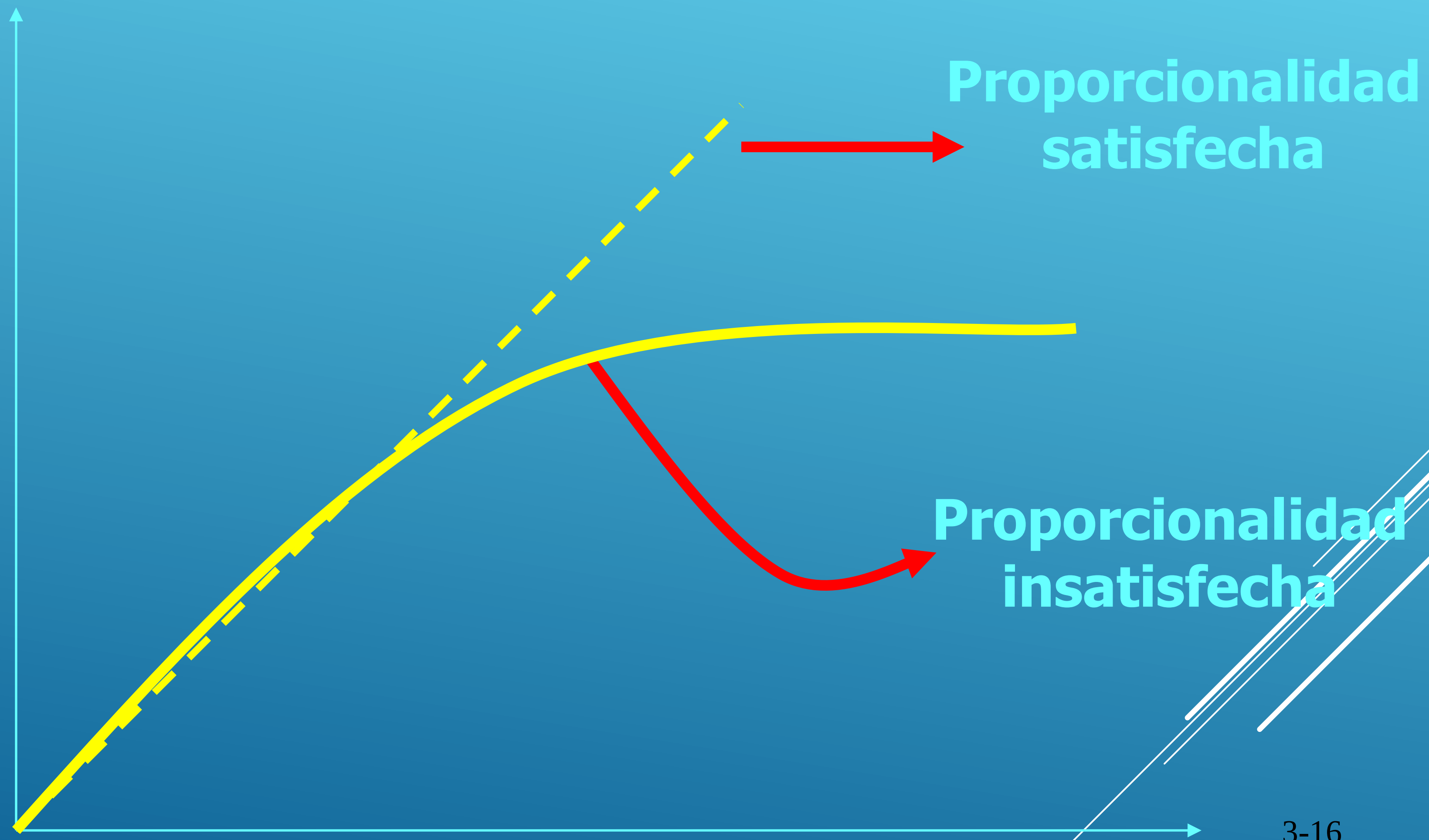
Costos fijos



Rendimiento marginal creciente



Rendimiento marginal decreciente



4.2 Suposición de divisibilidad

Los valores de las variables de decisión pueden tomar cualquier valor real. es decir, <u>no necesariamente tienen que ser números enteros.</u>

PROGRAMACIÓN ENTERA
PROGRAMACIÓN BINARIA
PROGRAMACIÓN MIXTA

4.3 Suposición de certidumbre.

Se supone que todos los parámetros a_{ij}, b_i, c_j son conocidos con certeza.

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD
ANÁLISIS DE TRUEQUES
ANÁLISIS PARAMÉTRICO

4.4 Suposición de aditividad.

Según esta suposición, cada función de un modelo de P.L (tanto la función objetivo como el lado izquierdo de las restricciones funcionales) es la suma de las contribuciones individuales de cada una de las actividades involucradas.

En el Ejemplo de la Wyndor:

Maximizar $Z = 3X_1 + 5X_2$

Sujeto a:

$$X_1 \leq 4$$

$$2X_2 \leq 12$$

$$\underbrace{3X_1 + 2X_2 \leq 18}_{\text{Funciones lineales}}$$

Análisis de aditividad en la función objetivo

(X_1,X_2)	Valor de Z		
	Aditividad satisfecha	Aditividad insatisfecha	
		Caso 1	Caso 2
(1,0)	3	3	3
(0,1)	5	5	5
(1,1)	8	9	7
	$Z=3X1+5X2$	$Z=3X_1+5X_2+X_1X_2$	$Z=3X_1+5X_2-X_1X_2$

Caso 1 Rendimiento marginal creciente: productos complementarios que requieren menor gasto en publicidad si se producen los dos

Caso 2 Rendimiento marginal decreciente: productos competitivos. Productos que usan la misma maquinaria. Si se producen los dos hay que perder tiempo haciendo ajustes a la maquinaria o cambiando piezas, lo que genera un tiempo improductivo de producción

En el lado izquierdo de las restricciones funcionales

(X_1,X_2)	Valor del lado izquierdo		
	Aditividad satisfecha	Aditividad insatisfecha	
		Caso 1	Caso 2
(2,0)	6	6	6
(0,3)	6	6	6
(2,3)	12 $3X1+2X2$	15 $3X_1+2X_2+0.5X_1X_2$	10.8 $3X_1+2X_2-0.1X_1^2X_2$

Caso 1 Productos que usan la misma maquinaria. Si se producen los dos hay que perder tiempo haciendo ajustes a la maquinaria o cambiando piezas que genera un tiempo improductivo de producción (Es el mismo caso 2 anterior)

Caso 2: cuando se producen los dos productos al tiempo, si se produce un solo producto hay tiempos ociosos en una máquina que se pueden utilizar en otro de los productos.
En materia prima: mejor utilización de materiales cuando se producen los dos productos.

5. Ejemplo: Formulación de Dietas

La señora María Eugenia, dietista del Hospital General, es la responsable de la planeación y administración de los requerimientos alimenticios de los pacientes.

En la actualidad examina el caso de un paciente, a quien se le ha formulado una dieta especial que consta de 2 fuentes alimenticias.

Al paciente no se le ha restringido la cantidad de alimentos que puede consumir; sin embargo, deben satisfacerse ciertos requerimientos nutricionales mínimos por día.

sigue

	Requerimiento mínimo (en unidades)	Contenido por onza alimento 1 (en unidades)	Contenido por onza alimento 2 (en unidades)
Nutriente A	1000	100	200
Nutriente B	2000	400	250
Nutriente C	1500	200	200
Costo de alimento ($/libra)		6	8

La señora María Eugenia, desea determinar la combinación de fuentes alimenticias que arroje el menor costo y satisfaga todos los requerimientos nutritivos.

FORMULACIÓN DEL MODELO

1. Definición de Variables

X_1: Número de onzas de la fuente alimenticia tipo 1 que deben consumirse diariamente [*onzas*]

X_2: Número de onzas de la fuente alimenticia tipo 2 que deben consumirse diariamente [*onzas*]

2. Coeficientes de costo: Datos

3. Medida de la eficiencia (F. O.)

Z: Costo de suministrarle, al paciente, los dos (2) tipos de alimentos tal que se satisfagan sus requerimientos nutricionales mínimos

$$Min\ Z = 0.375X_1 + 0.5X_2$$

$$[\$/onza] * [onza] = [\$]$$

Nota: Recuerde que los costos de las fuentes alimenticias se expresaron en libras y no en onzas. (1 libra = 16 onzas)
Por lo tanto:
c_1 = \$6/16 = \$0.375 por onza y c_2 = \$8/16 = \$0.5 por onza.

4. Restricciones funcionales

R1: Consumo mínimo de nutriente A

$$100X_1 + 200X_2 \geq 1000$$

[*unidades/ onza*] * [*onza*] =[*unidades*]

R2: Consumo mínimo de nutriente B

$$400X_1 + 250X_2 \geq 2000$$

[*unidades/ onza*] * [*onza*] =[*unidades*]

R3: Consumo mínimo de nutriente C

$$200X_1 + 200X_2 \geq 1500$$

[*unidades/ onza*] * [*onza*] =[*unidades*]

5. Restricciones de signo de las variables

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

Modelo completo.

$$\text{Min } Z = 0.375X_1 + 0.5X_2$$

s.a

$$100X_1 + 200X_2 \geq 1000$$

$$400X_1 + 250X_2 \geq 2000$$

$$200X_1 + 200X_2 \geq 1500$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$