

#### Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

## Clase #3

# EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

#### **Ejemplo 1: Programación de personal**

Nacia su aeropuerto base, y por lo tanto necesita contratar más agentes de servicio al cliente. Sin embargo, no está claro cuantos más debe contratar.

La administración reconoce la necesidad de controlar el costo y al mismo tiempo brindar un nivel de atención satisfactorio

Se ha realizado un análisis del número mínimo de agentes de servicio que deben encontrarse de guardia en diferente momentos del día para proporcionar un nivel satisfactorio de servicio 4-2 sigue

	Períodos cubiertos Turno					Número mínimo de agentes necesarios
Período						
	1	2	3	4	5	
6:00 am a 8:00am	√					43
8:00 am a 10:00am	1	<b>√</b>				79
10:00 am a 12:00am	√	$\checkmark$				65
12:00 am a 2:00pm	√	1	<b>√</b>			87
2:00 pm a 4:00pm		<b>√</b>	$\checkmark$			64
4:00 pm a 6:00pm			√	<b>√</b>		73
6:00 pm a 8:00pm			$\checkmark$	$\sqrt{}$		82
8:00 pm a 10:00pm				<b>√</b>		43
10:00 pm a 12:00pm				<b>√</b>	√	52
12:00 pm a 6:00am					1	15
Costo diario por agente	170	160	175	180	195	4-3

Se ha acordado que cada agente trabaje un turno de 8 horas, 5 días a la semana en los turnos mostrados en la tabla anterior.

Los salarios de cada turno son diferentes debido a que unos son más deseables que otros.

La compañía debe determinar cuántos agentes deben asignarse a los turnos respectivos cada día para minimizar el costo total del personal.

cumplirse obligatoriamente, pero pueden sobrepasarse.

#### 1. Definición de Variables

 $X_{j}$ : Número de agentes asignados al turno jodo (de 8 horas) [agentes] j = 1, 2, 3, 4, 5.

- 2. Coeficientes de costo: Datos
- 3. Medida de la eficiencia (F. O.)
- Z: Costo total de los agentes asignados a los5 turnos

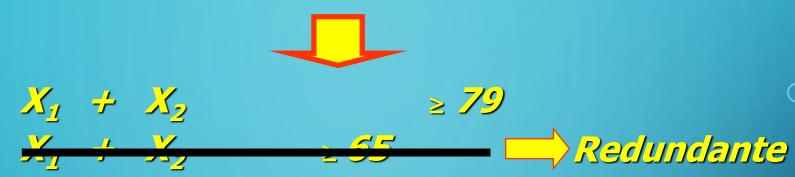
Min 
$$Z = 170X_1 + 160X_2 + 175X_3 + 180X_4 + 195X_5$$

[\$/agente] \* [agente] = [\$]

#### 4. Restricciones funcionales

Requerimiento mínimo de personal en cada período. [agentes]

Algunas de estas restricciones son redundantes:



$$\frac{X_3 + X_4 \ge 73}{X_3 + X_4 \ge 32}$$
 Redundante

Las restricciones de no negatividad de las variables  $X_1$ ,  $X_4$ ,  $X_5$ , también sobran, pues tienen cotas inferiores por encima de cero.

# **Modelo completo**

$$Min Z = 170X_1 + 160X_2 + 175X_3 + 180X_4 + 195X_5$$

5,3

$$X_{1}$$
  $+$   $X_{2}$   $\geq 43$ 
 $X_{1}$   $+$   $X_{2}$   $\geq 55$ 
 $X_{2}$   $+$   $X_{3}$   $\geq 57$ 
 $X_{1}$   $+$   $X_{2}$   $+$   $X_{3}$   $\geq 64$ 
 $X_{2}$   $+$   $X_{3}$   $\geq 64$ 
 $X_{3}$   $+$   $X_{4}$   $\geq 82$ 
 $X_{4}$   $+$   $X_{5}$   $\geq 43$ 
 $X_{4}$   $+$   $X_{5}$   $\geq 52$ 
 $X_{5}$   $\geq 15$ 

 $X_i \ge 0$  para j = 1, 2, ..., 5

4-8

### **Ejemplo 2: Análisis de Inversiones**

Un banco trata de determinar su portafolio de inversiones para el próximo año. Actualmente dispone de US\$ 500000 para invertir en bonos, prestamos hipotecarios, préstamos para compra de automóviles y préstamos personales.

La tasa de rendimiento anual para cada inversión resulta ser:

- **→Bonos: 10%**
- Préstamos hipotecarios: 16%
- Préstamos para compra de automóviles: 13%
- Préstamos personales: 20%

sigue

Para asegurar que la cartera del banco no sea demasiado arriesgada, el gerente de inversiones del banco ha puesto las siguientes 3 restricciones de cartera:

- 1. La cantidad invertida en préstamos personales, no puede ser mayor que la invertida en bonos.
- 2. La cantidad invertida en préstamos hipotecarios, no puede ser mayor que la invertida en préstamos para automóviles.
- 3. No puede invertirse más del 25% de la cantidad total invertida, en préstamos personales.

El objetivo del banco es maximizar el rendimiento anual de su cartera de inversiones.

#### 1. Definición de Variables

 $X_j$ : Cantidad de dinero a invertir durante el año en la opción j, j = 1, 2, 3, 4.

[ $US_j$ ]

- 1. Bonos
- 2. Préstamos hipotecarios
- 3. Préstamos para compra de automóviles
- 4. Préstamos personales

#### 2. Coeficientes de costo: Datos

## 3. Medida de la eficiencia (F. O.)

Z: Ganancia total de las inversiones hechas durante el año

$$Max Z = 0.1X_1 + 0.16X_2 + 0.13X_3 + 0.2X_4$$

[US\$]

#### 4. Restricciones funcionales

R1: La cantidad invertida en préstamos personales, no puede ser mayor que la invertida en bonos.

$$X_4 \leq X_2$$
 [US\$]

R2: La cantidad invertida en préstamos hipotecarios, no puede ser mayor que la invertida en préstamos para automóviles.

$$X_2 \leq X_3$$
 [US\$]

OR3: No puede invertirse más del 25% de la cantidad total pinvertida, en préstamos personales.

$$X_4 \le 0.25 * (X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$$
 [US\$]

R4: La empresa sólo posee US\$ 500000 para invertir.

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \le 500000$$

[*US\$*]

## Modelo completo.

$$M_{EXX}Z = 0.1X_1 + 0.16X_2 + 0.13X_3 + 0.2X_4$$

5.3.

$$-X_{2}$$
  $-X_{3} \le 0$ 
 $X_{2} - X_{3} \le 0$ 
 $X_{1} + X_{2} + X_{3} - 3X_{4} \ge 0$ 

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \le 500000$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

## **Ejemplo 3: Inversiones a plazo**

Alfredo tiene US 2200 para invertir durante próximos cinco años. Al principio de cada año puede invertir su dinero en depósitos a plazo fijo de 1 o 2 años. El banco paga el 8% de interés en depósitos a plazo fijo de un año y el 17% (total) en depósitos a plazo fijo de dos años. Además, al principio del segundo año, Corfinsura ofrecerá certificados a tres años. Estos certificados tendrán una ganancia del 27% (total). Si Alfredo reinvierte su dinero disponible cada año, formule un programa lineal que muestre como maximizar su ganancia total al final del quinto año.

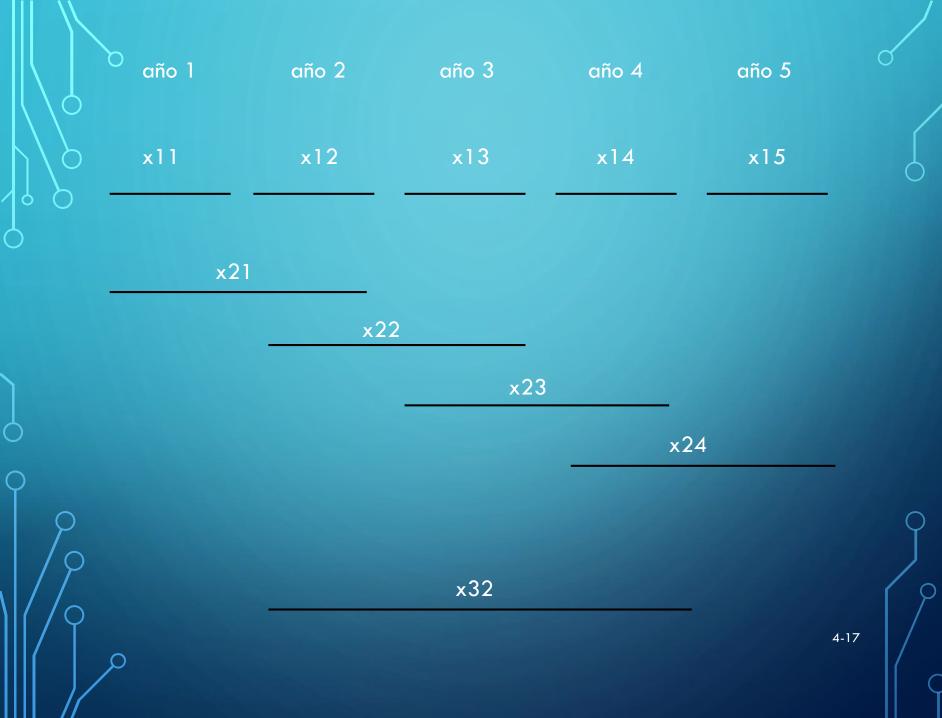
44-115

DEFINICIÓN DE VARIABLES Subíndices inversiones

#### xij:

i tipo (plazo) 1 a 1 año, 2 a dos años, 3 a 3 años

j: principio del año en que se hace la inversión j=1 a 5



Medida de la eficiencia (F. O.):
Cantidad de dinero que se retira al
final del año 5
Z = 1.08x15 + 1.17x24 (observar
en el diagrama anterior que las dos
únicas inversiones que se retiran al
final del año 5 son x15 y x24.

Ecuaciones de balance de inventario: lo que se invierte al inicio de 1 año es lo que se se recoge al final del año anterior y se plantea una restricción al principio de cada uno de los cinco años.

2200=x11+x21	(principio del año 1)
1.08*x11=x12+x22+x32	(principio del año 2)
1.08*x12+1.17*x21=x13+x23	(principio del año 3)
1.08*x13+1.17*x22=x14+x24	(principio del año 4)
1.08*x14+1.17*x23+1.27*x32=x15	(principio del año 5)

## Modelo completo.

s.a:

2200 = x11 + x21

1.08\*x11=x12+x22+x32

1.08\*x12+1.17\*x21=x13+x23

1.08\*x13+1.17\*x22=x14+x24

1.08\*x14+1.17\*x23+1.27\*x32=x15

x11, x12, x13, x14, x15, $<math>x21, x22, x23, x24, x32 \ge 0$