Todos os cavalos têm a mesma cor?

Júlio C. V. Barczyszyn

Universidade Federal de Santa Catarina

29 de agosto, 2023

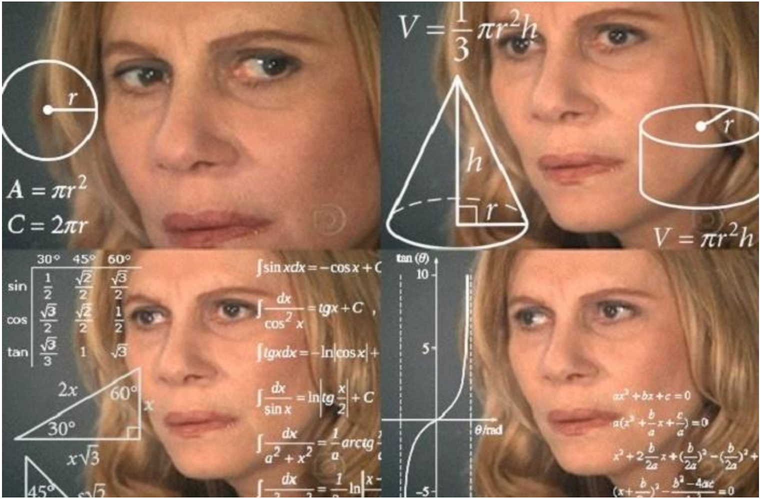
Apresentação para o **Encontro Acadêmico de Matemática** no semestre 2023-2

Tá, mas e aí...

Todos os cavalos têm a mesma cor?

A resposta é...

Não, ué.



$A = \pi r^2$
$C = 2\pi r$
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
h
r
$V = \pi r^2 h$
30° 45° 60°
sin $\frac{1}{2}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{1}{2}$
tan $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 1 $\sqrt{3}$
$2x$
60°
x
30°
$x\sqrt{3}$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$
tan (θ)
10
5
-5
θ/rad
$ax^2 + bx + c = 0$

Explicando melhor!

- Se todos os cavalos têm ou não a mesma cor **é uma questão empírica**. Isso não significa que é falso... ainda.

[1] Pelo menos é isso que diz na Wikipédia ;)

Explicando melhor!

- Se todos os cavalos têm ou não a mesma cor **é uma questão empírica**. Isso não significa que é falso... ainda.
- Mas nós sabemos que isso **não é verdade** pois podemos encontrar pelo menos dois cavalos de cores diferentes facilmente.

[1] Pelo menos é isso que diz na Wikipédia ;)

Explicando melhor!

- Se todos os cavalos têm ou não a mesma cor **é uma questão empírica**. Isso não significa que é falso... ainda.
- Mas nós sabemos que isso **não é verdade** pois podemos encontrar pelo menos dois cavalos de cores diferentes facilmente.
- O que é curioso é que mesmo assim, **com certa ingenuidade**, conseguimos "provar" por indução que todos têm a mesma cor!
- Este é um problema clássico de **uso equivocado de indução**.

[1] Pelo menos é isso que diz na Wikipédia ;)

Explicando melhor!

- Se todos os cavalos têm ou não a mesma cor **é uma questão empírica**. Isso não significa que é falso... ainda.
- Mas nós sabemos que isso **não é verdade** pois podemos encontrar pelo menos dois cavalos de cores diferentes facilmente.
- O que é curioso é que mesmo assim, **com certa ingenuidade**, conseguimos "provar" por indução que todos têm a mesma cor!
- Este é um problema clássico de **uso equivocado de indução**.
- Apareceu pela primeira vez em 1954 num livro de George Pólya enunciado diferente e a versão sobre cavalos foi criada, num artigo satírico, por Joel Cohen em 1961[1].

[1] Pelo menos é isso que diz na Wikipédia ;)

Explicando melhor!

- Se todos os cavalos têm ou não a mesma cor **é uma questão empírica**. Isso não significa que é falso... ainda.
- Mas nós sabemos que isso **não é verdade** pois podemos encontrar pelo menos dois cavalos de cores diferentes facilmente.
- O que é curioso é que mesmo assim, **com certa ingenuidade**, conseguimos "provar" por indução que todos têm a mesma cor!
- Este é um problema clássico de **uso equivocado de indução**.
- Apareceu pela primeira vez em 1954 num livro de George Pólya enunciado diferente e a versão sobre cavalos foi criada, num artigo satírico, por Joel Cohen em 1961[1].
- A oficina será sobre **como usar indução matemática**!

[1] Pelo menos é isso que diz na Wikipédia ;)

Roteiro

1. O que ***são*** os números naturais?

2. Axiomas de Peano

3. Princípio de Indução Matemática

4. Exemplos

Essa oficina será bem pragmática mas..

O que ***são*** os números naturais?

Dando nome aos bois

- Axiomas vs. Modelos (estruturas que satisfazem axiomas)

Dando nome aos bois

- Axiomas vs. Modelos (estruturas que satisfazem axiomas)
- Os matemáticos às vezes chamam modelos de *exemplos*:

  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ é um exemplo de espaço vetorial!
- Modelos vs. Realidade

Dando nome aos bois

- Axiomas vs. Modelos (estruturas que satisfazem axiomas)
- Os matemáticos às vezes chamam modelos de *exemplos*:

  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ é um exemplo de espaço vetorial!
- Modelos vs. Realidade
- Certamente *as coisas das quais falamos* não são os axiomas que usamos para falar delas!

Dando nome aos bois

- Axiomas vs. Modelos (estruturas que satisfazem axiomas)
- Os matemáticos às vezes chamam modelos de *exemplos*:

  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ é um exemplo de espaço vetorial!
- Modelos vs. Realidade
- Certamente *as coisas das quais falamos* não são os axiomas que usamos para falar delas!
- Então o que são os números naturais?

Dando nome aos bois

- Axiomas vs. Modelos (estruturas que satisfazem axiomas)
- Os matemáticos às vezes chamam modelos de *exemplos*:

  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ é um exemplo de espaço vetorial!
- Modelos vs. Realidade
- Certamente *as coisas das quais falamos* não são os axiomas que usamos para falar delas!
- Então o que são os números naturais?
- Um conjunto? Um monoide? Um semianel? Nada disso?

Dando nome aos bois

- Axiomas vs. Modelos (estruturas que satisfazem axiomas)
- Os matemáticos às vezes chamam modelos de *exemplos*:

  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ é um exemplo de espaço vetorial!
- Modelos vs. Realidade
- Certamente *as coisas das quais falamos* não são os axiomas que usamos para falar delas!
- Então o que são os números naturais?
- Um conjunto? Um monoide? Um semianel? Nada disso?
- Inclui o zero? O que ***é*** o zero?

Sobre a *utilidade* de estudos fundacionais

- Essa questão pode parecer irrespondível, mas isso **não a torna inútil**.

Sobre a *utilidade* de estudos fundacionais

- Essa questão pode parecer irrespondível, mas isso **não a torna inútil**.
- Ao entendermos a dificuldade em responder tal questão, entendemos a pertinência do **método axiomático** pra nossa civilização.

Sobre a *utilidade* de estudos fundacionais

- Essa questão pode parecer irrespondível, mas isso **não a torna inútil**.
- Ao entendermos a dificuldade em responder tal questão, entendemos a pertinência do **método axiomático** pra nossa civilização.
- Foi só nos séculos XIX e XX que a humanidade começou a perceber que não tinha certas respostas que sempre acreditou ter.

Sobre a *utilidade* de estudos fundacionais

- Essa questão pode parecer irrespondível, mas isso **não a torna inútil**.
- Ao entendermos a dificuldade em responder tal questão, entendemos a pertinência do **método axiomático** pra nossa civilização.
- Foi só nos séculos XIX e XX que a humanidade começou a perceber que não tinha certas respostas que sempre acreditou ter.
- Com isso, surge Teoria de Conjuntos, Lógica Matemática, etc.

Sobre a *utilidade* de estudos fundacionais

- Essa questão pode parecer irrespondível, mas isso **não a torna inútil**.
- Ao entendermos a dificuldade em responder tal questão, entendemos a pertinência do **método axiomático** pra nossa civilização.
- Foi só nos séculos XIX e XX que a humanidade começou a perceber que não tinha certas respostas que sempre acreditou ter.
- Com isso, surge Teoria de Conjuntos, Lógica Matemática, etc.
- Muitas pessoas se dedicaram aos fundamentos da Aritmética, mas os axiomas "dos números naturais" leva o nome de Peano: os

Axiomas de Peano.

Axiomas de Peano

- Há muitas maneiras de apresentar os Axiomas de Peano.

Axiomas de Peano

- Há muitas maneiras de apresentar os Axiomas de Peano.
- Faremos uma apresentação intuitiva deles. Depois, vamos dar uma olhada em algumas aparições do *Princípio da Indução* na literatura.

Axiomas de Peano

- Há muitas maneiras de apresentar os Axiomas de Peano.
- Faremos uma apresentação intuitiva deles. Depois, vamos dar uma olhada em algumas aparições do *Princípio da Indução* na literatura.
- Que *ingredientes* constituem os números naturais?
    - Há um *primeiro número*.

Axiomas de Peano

- Há muitas maneiras de apresentar os Axiomas de Peano.
- Faremos uma apresentação intuitiva deles. Depois, vamos dar uma olhada em algumas aparições do *Princípio da Indução* na literatura.
- Que *ingredientes* constituem os números naturais?
  - Há um *primeiro número*.
  - Há uma função *sucessor* $n \mapsto n+1$ (n é dito antecessor de $n+1$).
  - Enfatizando, esse primeiro elemento não tem antecessor.

Axiomas de Peano

- Há muitas maneiras de apresentar os Axiomas de Peano.
- Faremos uma apresentação intuitiva deles. Depois, vamos dar uma olhada em algumas aparições do *Princípio da Indução* na literatura.
- Que *ingredientes* constituem os números naturais?
  - Há um *primeiro número*.
  - Há uma função *sucessor* $n \mapsto n+1$ (n é dito antecessor de $n+1$).
  - Enfatizando, esse primeiro elemento não tem antecessor.
  - Dois números com mesmo sucessor são iguais.

Axiomas de Peano

- Há muitas maneiras de apresentar os Axiomas de Peano.
- Faremos uma apresentação intuitiva deles. Depois, vamos dar uma olhada em algumas aparições do *Princípio da Indução* na literatura.
- Que *ingredientes* constituem os números naturais?
    - Há um *primeiro número*.
    - Há uma função *sucessor* $n \mapsto n+1$ (n é dito antecessor de $n+1$).
    - Enfatizando, esse primeiro elemento não tem antecessor.
    - Dois números com mesmo sucessor são iguais.
    - Se o primeiro elemento satisfaz uma propriedade, e todo número após ele satisfaz também, então todos os números naturais satisfazem essa propriedade. Este *é* o Princípio de Indução Matemática.

Princípio de Indução Matemática

- Se foi só ali pelo século XIX que a discussão sobre fundamentos começou, **como se provava teoremas sobre números antes?**
- Bem, acontece que o **Princípio de Indução Matemática** (PIM) não surge com Peano. Houve muita discussão sobre o PIM antes.

Princípio de Indução Matemática

- Se foi só ali pelo século XIX que a discussão sobre fundamentos começou, **como se provava teoremas sobre números antes?**
- Bem, acontece que o **Princípio de Indução Matemática** (PIM) não surge com Peano. Houve muita discussão sobre o PIM antes.
- Há enunciados equivalentes ao PIM já na antiguidade: "não existe sequência infinita decrescente de números naturais".

Princípio de Indução Matemática

- Se foi só ali pelo século XIX que a discussão sobre fundamentos começou, **como se provava teoremas sobre números antes?**
- Bem, acontece que o **Princípio de Indução Matemática** (PIM) não surge com Peano. Houve muita discussão sobre o PIM antes.
- Há enunciados equivalentes ao PIM já na antiguidade: "não existe sequência infinita decrescente de números naturais".
- O enunciado acima é conhecido como **Princípio da Boa Ordem**.
- Antes de continuarmos, vamos pra motivação!

Motivação para o PIM

- Diz a lenda que o jovem Gauss com 7 anos[2] teria descoberto a fórmula da soma da PA ao ser confrontado com a questão

  "Quanto é a soma dos 100 primeiros números naturais?"

- Geralmente, explicam o que ele supostamente fez assim:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
S & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & 99 & + & 100 \\
+ & & + & & + & & \cdots & & + & & + \\
S & = & 100 & + & 99 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\
\parallel & & \parallel & & \parallel & & \cdots & & \parallel & & \parallel \\
2S & = & 101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 & + & 101
\end{array}$$

- Logo, $2S = 100 \times 101$, i.e., $S = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$.

[2] Não era pra ser motivador? ;-;

Motivação para o PIM

- Convenhamos: é uma baita manipulação!

Motivação para o PIM

- Convenhamos: é uma baita manipulação!
- Há algum problema com a *prova*?

Motivação para o PIM

- Convenhamos: é uma baita manipulação!
- Há algum problema com a *prova*?
- Bem, o que significa reticências, afinal?!

Motivação para o PIM

- Convenhamos: é uma baita manipulação!
- Há algum problema com a *prova*?
- Bem, o que significa reticências, afinal?!
- O PIM tem vários usos no dia-a-dia d@s matemátic@s.

Motivação para o PIM

- Convenhamos: é uma baita manipulação!
- Há algum problema com a *prova*?
- Bem, o que significa reticências, afinal?!
- O PIM tem vários usos no dia-a-dia d@s matemátic@s.
- Um dos usos é a formalização de argumentos do tipo

  "se eu tivesse feito sempre assim, teria sido sempre assado"

Motivação para o PIM

- Convenhamos: é uma baita manipulação!
- Há algum problema com a *prova*?
- Bem, o que significa reticências, afinal?!
- O PIM tem vários usos no dia-a-dia d@s matemátic@s.
- Um dos usos é a formalização de argumentos do tipo

  "se eu tivesse feito sempre assim, teria sido sempre assado"
- Vamos formalizar o argumento do Gauss!

Enunciados do Princípio de Indução Matemática

- Você pode encontrar o PIM assim por aí:

Princípio de Indução Matemática “por propriedades”

Seja $P(n)$ uma propriedade sobre $\mathbb{N}$. Então, se

1. $P(0)$ vale; e
2. Para todo $k \geq 0$, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$;

então $P(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Enunciados do Princípio de Indução Matemática

- Você pode encontrar o PIM assim por aí:

Princípio de Indução Matemática "por propriedades"

Seja $P(n)$ uma propriedade sobre $\mathbb{N}$. Então, se

1. $P(0)$ vale; e
2. Para todo $k \geq 0$, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$;

então $P(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Ou assim:

Princípio de Indução Matemática "conjuntista"

Seja $X \subseteq \mathbb{N}$. Então, se

1. $0 \in X$;
2. Para todo $k \geq 0$, $k \in X \Rightarrow k+1 \in X$;

então $X = \mathbb{N}$.

Enunciados do Princípio de Indução Matemática

- Você pode encontrar a versão transladada:

Princípio de Indução Matemática "por propriedades" "transladado"

Seja $P(n)$ uma propriedade sobre $\mathbb{N}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$. Então, se

1. $P(n_0)$ vale; e
2. Para todo $k \geq n_0$, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$;

então $P(n)$ vale para todo $n \geq n_0$.

Enunciados do Princípio de Indução Matemática

- Você pode encontrar a versão transladada:

Princípio de Indução Matemática "por propriedades" "transladado"

Seja $P(n)$ uma propriedade sobre $\mathbb{N}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$. Então, se

1. $P(n_0)$ vale; e
2. Para todo $k \geq n_0$, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$;

então $P(n)$ vale para todo $n \geq n_0$.

- Ou assim:

Princípio de Indução Matemática "conjuntista" "transladado"

Seja $X \subseteq \mathbb{N}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$. Então, se

1. $n_0 \in X$;
2. Para todo $k \geq n_0$, $k \in X \Rightarrow k+1 \in X$;

então $n_0 + \mathbb{N} := \{n_0 + n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$.

Generalizando e formalizando o argumento do Gauss

- O nosso primeiro exemplo é a formalização do argumento do Gauss:

Teorema

Para todo número natural $n \geq 2$, vale

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- Toda prova por indução é uma batalha para satisfazer (1) e (2) do PIM, a.k.a, respectivamente, como *caso base* e *passo indutivo*.

Generalizando e formalizando o argumento do Gauss

Prova. Considere a propriedade

$$P(n): \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Vamos provar que $P(n)$ vale para todo $n \geq 2$.

Generalizando e formalizando o argumento do Gauss

Prova. Considere a propriedade

$$P(n): \quad 1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Vamos provar que $P(n)$ vale para todo $n \geq 2$.

(caso base) Veja que se $n=2$, então

$$1+2=3 \quad \text{e} \quad \frac{2(2+1)}{2}=3,$$

ou seja,

$$1+2=\frac{2(2+1)}{2}.$$

Logo, $P(2)$ vale.

Prova. (passo indutivo) Seja $k \geq 2$ e suponha que $P(k)$ vale, i.e.,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad \text{(HI)}$$

Queremos mostrar que $P(k+1)$ vale, i.e., que vale

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}.$$

Generalizando e formalizando o argumento do Gauss

Prova. (passo indutivo) Seja $k \geq 2$ e suponha que $P(k)$ vale, i.e.,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad \text{(HI)}$$

Queremos mostrar que $P(k+1)$ vale, i.e., que vale

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}.$$

Dica de ouro: sempre reescreva o que você quer mostrar, simplificando, antes de começar a prova do passo indutivo. Queremos mostrar que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Prova. Agora, veja que

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+k+(k+1) &= (1+2+3+\cdots+k)+(k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \quad \text{(HI)} \\ &= \frac{k(k+1)}{2}+\frac{2}{2}(k+1) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo PIM, segue o desejado. $\square$

- Normalmente, fórmulas “indexadas” por números naturais.

Que coisas podemos provar com indução?

- Normalmente, fórmulas "indexadas" por números naturais.
- "Usamos" indução para *simplificar* axiomas.

Que coisas podemos provar com indução?

- Normalmente, fórmulas "indexadas" por números naturais.
- "Usamos" indução para *simplificar* axiomas.
- Por exemplo, nos axiomas de espaços topológicos, precisamos pedir apenas que a interseção de cada dois abertos seja aberto.

Que coisas podemos provar com indução?

- Normalmente, fórmulas "indexadas" por números naturais.
- "Usamos" indução para *simplificar* axiomas.
- Por exemplo, nos axiomas de espaços topológicos, precisamos pedir apenas que a interseção de cada dois abertos seja aberto.
- Mas nem tudo são flores. Vamos ver um exemplo de uso equivocado!

Todos os cavalos têm a mesma cor ou não, pô?

- Vamos *tentar* provar o seguinte enunciado:

  "Todos os cavalos têm a mesma cor."

- A tentativa de prova será por indução.

Todos os cavalos têm a mesma cor ou não, pô?

- Vamos *tentar* provar o seguinte enunciado:

  "Todos os cavalos têm a mesma cor."

- A tentativa de prova será por indução.
- Primeiro, vamos convencionar a notação usada. Se tivermos n cavalos, denotaremos cada por um C_i, ou seja, cavalo C_1, cavalo C_2, etc.

Todos os cavalos têm a mesma cor ou não, pô?

- Vamos *tentar* provar o seguinte enunciado:

  "Todos os cavalos têm a mesma cor."

- A tentativa de prova será por indução.
- Primeiro, vamos convencionar a notação usada. Se tivermos n cavalos, denotaremos cada por um C_i, ou seja, cavalo C_1, cavalo C_2, etc.
- Desse modo, podemos reenunciar o que queremos provar do seguinte modo: "para todo $n \geq 1$, se $\{C_1, \ldots, C_n\}$ é um conjunto de cavalos arbitrário, todos os C_i, com $1 \leq i \leq n$, têm mesma cor."

Crime. Considere a propriedade

$$P(n): \quad \{C_1, \ldots, C_n\} \text{ arbitrário} \Rightarrow C_i \text{ de mesma cor.}$$

Vamos *provar* que $P(n)$ vale para todo $n \geq 1$.

Crime. Considere a propriedade

$$P(n): \quad \{C_1, \ldots, C_n\} \text{ arbitrário} \Rightarrow C_i \text{ de mesma cor.}$$

Vamos *provar* que $P(n)$ vale para todo $n \geq 1$.

(caso base) Veja que se $n = 1$, então $\{C\}$ é unitário. Por definição, é um conjunto de cavalos da mesma cor. Logo, $P(1)$ vale.

Cometendo o crime

Crime. (passo indutivo) Seja $k \geq 1$ e suponha que $P(k)$ vale, i.e.,

$$\{C_1, \ldots, C_k\} \text{ arbitrário} \Rightarrow C_i \text{ de mesma cor} \quad \text{(HI)}$$

Queremos mostrar que $P(k+1)$ vale, i.e., que vale

$$\{C_1, \ldots, C_k, C_{k+1}\} \text{ arbitrário} \Rightarrow C_i \text{ de mesma cor.}$$

Cometendo o crime

Crime. (passo indutivo) Seja $k \geq 1$ e suponha que $P(k)$ vale, i.e.,

$$\{C_1, \ldots, C_k\} \text{ arbitrário} \Rightarrow C_i \text{ de mesma cor} \quad \text{(HI)}$$

Queremos mostrar que $P(k+1)$ vale, i.e., que vale

$$\{C_1, \ldots, C_k, C_{k+1}\} \text{ arbitrário} \Rightarrow C_i \text{ de mesma cor.}$$

Seja $\{C_1, \ldots, C_k, C_{k+1}\}$ um conjunto de cavalos arbitrário. Daí, temos que

$$A = \{C_1 \ldots, C_k\} \quad \text{e} \quad B = \{C_2, \ldots, C_{k+1}\}$$

são conjuntos arbitrários de cavalos com k elementos. Usando (HI), todos os cavalos em A têm mesma cor e todos os cavalos em B têm mesma cor. Como $C_2 \in A \cap B$, todos os $k+1$ cavalos têm mesma cor.

Descometendo o crime

- Qual o problema com a ”demonstração“?

Descometendo o crime

- Qual o problema com a ”demonstração“?
- Intuitivamente, o problema é que, para a prova funcionar, teria que ser sempre possível quebrar o conjunto com $k + 1$ cavalos em dois cuja interseção seja não vazia.

Descometendo o crime

- Qual o problema com a ''demonstração``?
- Intuitivamente, o problema é que, para a prova funcionar, teria que ser sempre possível quebrar o conjunto com $k+1$ cavalos em dois cuja interseção seja não vazia.
- Formalmente, devemos ter $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ para todo $k \geq 1$. Se existir um k onde $P(k)$ vale, mas $P(k+1)$ não vale, logicamente a sentença é falsa. E, portanto, não se pode aplicar indução.

Descometendo o crime

- Qual o problema com a "demonstração"?
- Intuitivamente, o problema é que, para a prova funcionar, teria que ser sempre possível quebrar o conjunto com $k+1$ cavalos em dois cuja interseção seja não vazia.
- Formalmente, devemos ter $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ para todo $k \geq 1$. Se existir um k onde $P(k)$ vale, mas $P(k+1)$ não vale, logicamente a sentença é falsa. E, portanto, não se pode aplicar indução.
- Neste caso, se tomarmos $k=1$, é verdade que todo conjunto unitário de cavalos só tem cavalos de mesma cor, i.e, $P(1)$ vale. Porém, note que quando $k=2$, obtemos $A=\{C_1\}$ e $B=\{C_2\}$ tal que $A \cap B = \varnothing$. Ou seja, $P(2)$ não necessariamente vale.

Descometendo o crime

- Qual o problema com a "demonstração"?
- Intuitivamente, o problema é que, para a prova funcionar, teria que ser sempre possível quebrar o conjunto com $k+1$ cavalos em dois cuja interseção seja não vazia.
- Formalmente, devemos ter $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ para todo $k \geq 1$. Se existir um k onde $P(k)$ vale, mas $P(k+1)$ não vale, logicamente a sentença é falsa. E, portanto, não se pode aplicar indução.
- Neste caso, se tomarmos $k = 1$, é verdade que todo conjunto unitário de cavalos só tem cavalos de mesma cor, i.e, $P(1)$ vale. Porém, note que quando $k = 2$, obtemos $A = \{C_1\}$ e $B = \{C_2\}$ tal que $A \cap B = \varnothing$. Ou seja, $P(2)$ não necessariamente vale.
- Note que isto não significa que existem cavalos de cores diferentes. Como falamos no começo, esta é uma questão empírica. O que vimos agora apenas permite dizer que a "prova" usada não estava correta.

Por hoje é só, pessoal!

Obrigado pela atenção.

Referências

[1] KRAUSE, D. **Introdução aos Fundamentos Axiomáticos da Ciência**. EPU, 2002.

[2] DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de aritmética**. Ed. da UFSC, 2009.

[3] MORTARI, C. A. **Introdução à lógica**. Unesp, 2001.