

De onde vêm os axiomas das teorias matemáticas?

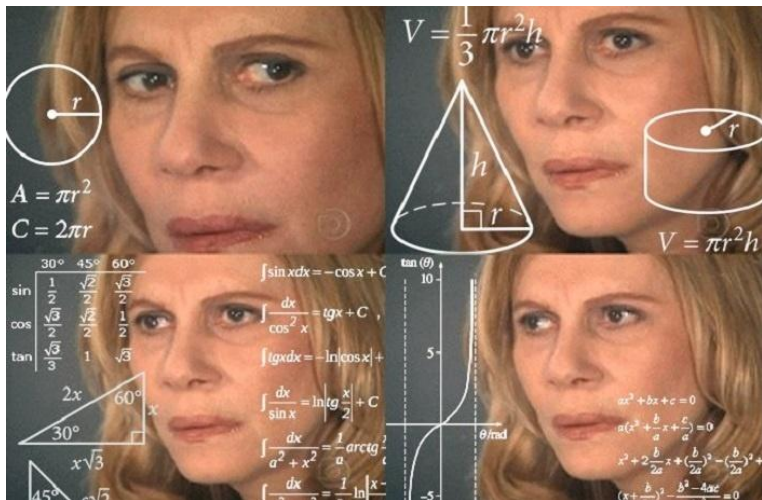
Júlio C. V. Barczyszyn

Universidade Federal de Santa Catarina

6 de setembro, 2024

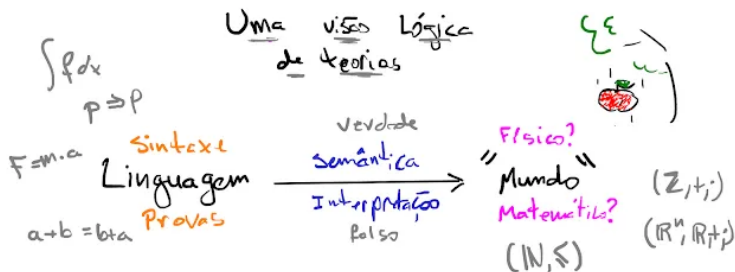
Apresentação para a disciplina **Seminários I** (MTM3581) no semestre 2024-2

O que são teorias *matemáticas*? Aliás, o que são *teorias*?



- 1 Motivação: “Mundo” vs. “Teoria(s)”
- 2 Teoremas de representação: “Concreto” vs. “Abstrato”
- 3 Teorema de Representação de Stone

Motivação: "Mundo" vs. "Teoria(s)"



Primeiro, uma anedota

- Vamos imaginar o seguinte cenário...

Primeiro, uma anedota

- Vamos imaginar o seguinte cenário...
- Um *jovem* pesquisador acredita que a Matemática é *uma linguagem*

Primeiro, uma anedota

- Vamos imaginar o seguinte cenário...
- Um *jovem* pesquisador acredita que a Matemática é *uma linguagem*
- Um dia, este jovem pesquisador decide criar uma *teoria* (coleção de *sentenças* como “para todo a e para todo b , $a+b = b+a$ ” e mais algumas outras), pois este jovem anseia muito se tornar um matemático que criou uma *teoria matemática* conhecida!

Primeiro, uma anedota

- Vamos imaginar o seguinte cenário...
- Um *jovem* pesquisador acredita que a Matemática é *uma linguagem*
- Um dia, este jovem pesquisador decide criar uma *teoria* (coleção de *sentenças* como “para todo a e para todo b , $a+b = b+a$ ” e mais algumas outras), pois este jovem anseia muito se tornar um matemático que criou uma *teoria matemática* conhecida!
- Feliz com sua nova empreitada, ele se encontra com seu orientador para falar sobre e é pego desprevenido :o

Primeiro, uma anedota

- Vamos imaginar o seguinte cenário...
- Um *jovem* pesquisador acredita que a Matemática é *uma linguagem*
- Um dia, este jovem pesquisador decide criar uma *teoria* (coleção de *sentenças* como “para todo a e para todo b , $a+b = b+a$ ” e mais algumas outras), pois este jovem anseia muito se tornar um matemático que criou uma *teoria matemática* conhecida!
- Feliz com sua nova empreitada, ele se encontra com seu orientador para falar sobre e é pego desprevenido :o
- Assim que termina de explicar quais axiomas tinha escolhido, o orientador lhe pergunta a única pergunta possível:

Primeiro, uma anedota

- Vamos imaginar o seguinte cenário...
- Um *jovem* pesquisador acredita que a Matemática é *uma linguagem*
- Um dia, este jovem pesquisador decide criar uma *teoria* (coleção de *sentenças* como “para todo a e para todo b , $a+b = b+a$ ” e mais algumas outras), pois este jovem anseia muito se tornar um matemático que criou uma *teoria matemática* conhecida!
- Feliz com sua nova empreitada, ele se encontra com seu orientador para falar sobre e é pego desprevenido :o
- Assim que termina de explicar quais axiomas tinha escolhido, o orientador lhe pergunta a única pergunta possível:
- Quais *criaturas* se comportam de acordo com essa axiomática?

Primeiro, uma anedota

- Vamos imaginar o seguinte cenário...
- Um *jovem* pesquisador acredita que a Matemática *é uma linguagem*
- Um dia, este jovem pesquisador decide criar uma *teoria* (coleção de *sentenças* como “para todo a e para todo b , $a+b = b+a$ ” e mais algumas outras), pois este jovem anseia muito se tornar um matemático que criou uma *teoria matemática* conhecida!
- Feliz com sua nova empreitada, ele se encontra com seu orientador para falar sobre e é pego desprevenido :o
- Assim que termina de explicar quais axiomas tinha escolhido, o orientador lhe pergunta a única pergunta possível:
- Quais *criaturas* se comportam de acordo com essa axiomática?
- Ele fica em choque! Vai para casa encucado. Uma série de perguntas agora o assombram: como assim quais criaturas? Matemática não era só uma linguagem? Quem disse que preciso me preocupar com o “mundo” e “quais criaturas habitam nele”?

O que *são* os números naturais?

- Axiomas vs. Modelos (estruturas que satisfazem axiomas)

Dando nome aos bois

- Axiomas vs. Modelos (estruturas que satisfazem axiomas)
- Os matemáticos às vezes chamam modelos de *exemplos*:
 “($\mathbb{R}^2, +, \cdot$) é um exemplo de espaço vetorial!”
- Modelos vs. Realidade

- Axiomas vs. Modelos (estruturas que satisfazem axiomas)
- Os matemáticos às vezes chamam modelos de *exemplos*:
 “(\mathbb{R}^2 , +, \cdot) é um exemplo de espaço vetorial!”
- Modelos vs. Realidade
- Certamente *as coisas das quais falamos* não são os axiomas que usamos para falar delas!

- Axiomas vs. Modelos (estruturas que satisfazem axiomas)
- Os matemáticos às vezes chamam modelos de *exemplos*:
 “(\mathbb{R}^2 , +, \cdot) é um exemplo de espaço vetorial!”
- Modelos vs. Realidade
- Certamente *as coisas das quais falamos* não são os axiomas que usamos para falar delas!
- Então o que são os números naturais?

- Axiomas vs. Modelos (estruturas que satisfazem axiomas)
- Os matemáticos às vezes chamam modelos de *exemplos*:
 “(\mathbb{R}^2 , +, \cdot) é um exemplo de espaço vetorial!”
- Modelos vs. Realidade
- Certamente *as coisas das quais falamos* não são os axiomas que usamos para falar delas!
- Então o que são os números naturais?
- Um conjunto? Um monoide? Nada disso?

- Axiomas vs. Modelos (estruturas que satisfazem axiomas)
- Os matemáticos às vezes chamam modelos de *exemplos*:
 “(\mathbb{R}^2 , +, \cdot) é um exemplo de espaço vetorial!”
- Modelos vs. Realidade
- Certamente *as coisas das quais falamos* não são os axiomas que usamos para falar delas!
- Então o que são os números naturais?
- Um conjunto? Um monoide? Nada disso?
- Inclui o zero? O que é o zero?

- Essa questão pode parecer irrespondível, mas isso **não a torna inútil**

Sobre a *utilidade* de estudos fundacionais

- Essa questão pode parecer irrespondível, mas isso **não a torna inútil**
- Ao entendermos a dificuldade em responder tal questão, entendemos a pertinência do **método axiomático** pra nossa civilização

- Essa questão pode parecer irrespondível, mas isso **não a torna inútil**
- Ao entendermos a dificuldade em responder tal questão, entendemos a pertinência do **método axiomático** pra nossa civilização
- Nos séculos XIX e XX, a comunidade matemática começa a perceber que não tinha *certas* respostas sobre a existência de *certos* objetos

- Essa questão pode parecer irrespondível, mas isso **não a torna inútil**
- Ao entendermos a dificuldade em responder tal questão, entendemos a pertinência do **método axiomático** pra nossa civilização
- Nos séculos XIX e XX, a comunidade matemática começa a perceber que não tinha *certas* respostas sobre a existência de *certos* objetos
- Essa percepção passa pelo surgimento da Teoria de Conjuntos, etc.

- Essa questão pode parecer irrespondível, mas isso **não a torna inútil**
- Ao entendermos a dificuldade em responder tal questão, entendemos a pertinência do **método axiomático** pra nossa civilização
- Nos séculos XIX e XX, a comunidade matemática começa a perceber que não tinha *certas* respostas sobre a existência de *certos* objetos
- Essa percepção passa pelo surgimento da Teoria de Conjuntos, etc.
- Muitas pessoas se dedicaram aos fundamentos da Aritmética, mas os axiomas “dos números naturais” leva o nome de Peano: os

Axiomas de Peano

Axiomas de Peano: teoria *dos* números naturais?

- Há muitas maneiras de apresentar os Axiomas de Peano

Axiomas de Peano: teoria *dos* números naturais?

- Há muitas maneiras de apresentar os Axiomas de Peano
- Faremos uma apresentação intuitiva deles

Axiomas de Peano: teoria *dos* números naturais?

- Há muitas maneiras de apresentar os Axiomas de Peano
- Faremos uma apresentação intuitiva deles
- Que *ingredientes* constituem os números naturais?
 - Há um *primeiro número*.

Axiomas de Peano: teoria *dos* números naturais?

- Há muitas maneiras de apresentar os Axiomas de Peano
- Faremos uma apresentação intuitiva deles
- Que *ingredientes* constituem os números naturais?
 - Há um *primeiro número*.
 - Há uma função *sucessor* $n \mapsto n + 1$ (n é dito antecessor de $n + 1$).
 - Enfatizando, esse primeiro elemento não tem antecessor.

Axiomas de Peano: teoria *dos* números naturais?

- Há muitas maneiras de apresentar os Axiomas de Peano
- Faremos uma apresentação intuitiva deles
- Que *ingredientes* constituem os números naturais?
 - Há um *primeiro número*.
 - Há uma função *sucessor* $n \mapsto n + 1$ (n é dito antecessor de $n + 1$).
 - Enfatizando, esse primeiro elemento não tem antecessor.
 - Dois números com mesmo sucessor são iguais.

Axiomas de Peano: teoria dos números naturais?

- Há muitas maneiras de apresentar os Axiomas de Peano
- Faremos uma apresentação intuitiva deles
- Que *ingredientes* constituem os números naturais?
 - Há um *primeiro número*.
 - Há uma função *sucessor* $n \mapsto n + 1$ (n é dito antecessor de $n + 1$).
 - Enfatizando, esse primeiro elemento não tem antecessor.
 - Dois números com mesmo sucessor são iguais.
 - Se o primeiro elemento satisfaz uma propriedade, e todo número após ele satisfaz também, então todos os números naturais satisfazem essa propriedade. Este é o Princípio de Indução Matemática.
- Mas peraí... e a pergunta do orientador?
- A resposta vem com Dedekind, von Neumann e companhia

- O *fazer teórico* parece com algo, esquematicamente, assim:

- O *fazer teórico* parece com algo, esquematicamente, assim:
- Primeiro, temos um domínio de estudo pretendido

- O *fazer teórico* parece com algo, esquematicamente, assim:
- Primeiro, temos um domínio de estudo pretendido
- É difícil dizer *o que é* precisamente, pois se soubéssemos, não precisaríamos de uma *teoria* pra começo de conversa!



- O *fazer teórico* parece com algo, esquematicamente, assim:
- Primeiro, temos um domínio de estudo pretendido
- É difícil dizer ***o que é*** precisamente, pois se soubéssemos, não precisaríamos de uma *teoria* pra começo de conversa!
- Anotamos uma lista “pequena” de sentenças sobre: os axiomas

- O *fazer teórico* parece com algo, esquematicamente, assim:
- Primeiro, temos um domínio de estudo pretendido
- É difícil dizer *o que é* precisamente, pois se soubéssemos, não precisaríamos de uma *teoria* pra começo de conversa!
- Anotamos uma lista “pequena” de sentenças sobre: os axiomas
- Este passo não é nada direto. É preciso muito trabalho até entendermos quais deveriam ser as sentenças que importam

- O *fazer teórico* parece com algo, esquematicamente, assim:
- Primeiro, temos um domínio de estudo pretendido
- É difícil dizer *o que é* precisamente, pois se soubéssemos, não precisaríamos de uma *teoria* pra começo de conversa!
- Anotamos uma lista “pequena” de sentenças sobre: os axiomas
- Este passo não é nada direto. É preciso muito trabalho até entendermos quais deveriam ser as sentenças que importam
- Aceitamos um tipo de fundamento matemático

- O *fazer teórico* parece com algo, esquematicamente, assim:
- Primeiro, temos um domínio de estudo pretendido
- É difícil dizer *o que é* precisamente, pois se soubéssemos, não precisaríamos de uma *teoria* pra começo de conversa!
- Anotamos uma lista “pequena” de sentenças sobre: os axiomas
- Este passo não é nada direto. É preciso muito trabalho até entendermos quais deveriam ser as sentenças que importam
- Aceitamos um tipo de fundamento matemático
- Neste fundamento, que dá a *ontologia matemática*, procuramos objetos, coisas, estruturas, que satisfazem a lista

Visualizando com bolos :p

"teoria"	"modelos"	"domínios"
receita 	conjuntos (B, I) (B', I') (B'', I'')	

E como ficam os estudos *puramente* matemáticos?

- Modelos *de uma teoria* são estruturas (conjuntistas) que satisfazem os axiomas dessa teoria, certo?



E como ficam os estudos *puramente* matemáticos?

- Modelos *de uma teoria* são estruturas (conjuntistas) que satisfazem os axiomas dessa teoria, certo?
- Porém, é possível nos depararmos com estruturas sem que seja necessário ou apropriado chamar de “modelo” de alguma teoria

E como ficam os estudos *puramente* matemáticos?

- Modelos *de uma teoria* são estruturas (conjuntistas) que satisfazem os axiomas dessa teoria, certo?
- Porém, é possível nos depararmos com estruturas sem que seja necessário ou apropriado chamar de “modelo” de alguma teoria
- Por exemplo, eu posso me deparar com \mathbb{Z} antes de ter uma teoria matemática (e portanto sem ter os modelos dessa teoria) a disposição para tratar de coisas como essa estrutura
- Assim, a “imagem” que temos do *fazer matemático* ficaria algo como:

Visualizando sem bolos :(

"teoria"	"modelos"	"domínios"
axiomas 	conjuntos $(\mathbb{R}, +)$ $(\mathbb{Q}, +)$ $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \cdot)$	 com +

- Confeiteiros abstraem de exemplos **concretos** certas receitas e depois outros podem estudar “as consequências dessas receitas”

- Confeiteiros abstraem de exemplos **concretos** certas receitas e depois outros podem estudar “as consequências dessas receitas”
- Biólogos quando falam de características de tigres, em seus livros e artigos, esperam estar listando características de um animal que existe. Ou, pelo menos, de interesse genuíno da comunidade da Biologia

Alguns comentários

- Confeiteiros abstraem de exemplos **concretos** certas receitas e depois outros podem estudar “as consequências dessas receitas”
- Biólogos quando falam de características de tigres, em seus livros e artigos, esperam estar listando características de um animal que existe. Ou, pelo menos, de interesse genuíno da comunidade da Biologia
- Parece que matemáticos, através da abstração de casos **concretos** (que surgem na pesquisa mais de uma vez, em contextos diferentes, por exemplo), criam teorias **abstratas**, as quais terão como modelos/exemplos também aqueles casos concretos

- Confeiteiros abstraem de exemplos **concretos** certas receitas e depois outros podem estudar “as consequências dessas receitas”
- Biólogos quando falam de características de tigres, em seus livros e artigos, esperam estar listando características de um animal que existe. Ou, pelo menos, de interesse genuíno da comunidade da Biologia
- Parece que matemáticos, através da abstração de casos **concretos** (que surgem na pesquisa mais de uma vez, em contextos diferentes, por exemplo), criam teorias **abstratas**, as quais terão como modelos/exemplos também aqueles casos concretos
- Resumindo tudo isso num bordão: **matemáticas(os) são as(os) biólogas(os) das coisas abstratas**
- Pergunta: como saber quais axiomas escolher?

Teoremas de representação: “Concreto” vs. “Abstrato”

- Consideremos um conjunto, por exemplo, $X = \mathbb{N}$.

Teoremas de representação: “Concreto” vs. “Abstrato”

- Consideremos um conjunto, por exemplo, $X = \mathbb{N}$.
- Afirmação: poxa, *bijeções* são tão legais, úteis e importantes!

Teoremas de representação: “Concreto” vs. “Abstrato”

- Consideremos um conjunto, por exemplo, $X = \mathbb{N}$.
- Afirmação: poxa, *bijeções* são tão legais, úteis e importantes!
- Seja, então, $S(X)$ o conjunto de todas as bijeções de X em X .

Teoremas de representação: “Concreto” vs. “Abstrato”

- Consideremos um conjunto, por exemplo, $X = \mathbb{N}$.
- Afirmação: poxa, *bijeções* são tão legais, úteis e importantes!
- Seja, então, $S(X)$ o conjunto de todas as bijeções de X em X .
- Estudando o conjunto $S(X)$ (com \circ), percebemos que
 - S1. Existe uma função que faz papel de identidade, $id_X: X \rightarrow X$.
 - S2. Toda função tem inversa.
 - S3. A composição de funções \circ é associativa.
- Neste caso, há uma estrutura **concreta**, $(S(X), \circ)$

Teoremas de representação: “Concreto” vs. “Abstrato”

- Consideremos um conjunto, por exemplo, $X = \mathbb{N}$.
- Afirmação: poxa, *bijeções* são tão legais, úteis e importantes!
- Seja, então, $S(X)$ o conjunto de todas as bijeções de X em X .
- Estudando o conjunto $S(X)$ (com \circ), percebemos que

S1. Existe uma função que faz papel de identidade, $id_X: X \rightarrow X$.

S2. Toda função tem inversa.

S3. A composição de funções \circ é associativa.

- Neste caso, há uma estrutura **concreta**, $(S(X), \circ)$
- Aparições: determinantes, matemática discreta, etc.

Teoremas de representação: “Concreto” vs. “Abstrato”

- Poderíamos ter escolhido outro X ...

Teoremas de representação: “Concreto” vs. “Abstrato”

- Poderíamos ter escolhido outro X ...
- Seria conveniente estudar os $S(X)$ tal como *biólogos estudam tigres*

Teoremas de representação: “Concreto” vs. “Abstrato”

- Poderíamos ter escolhido outro X ...
- Seria conveniente estudar os $S(X)$ tal como *biólogos estudam tigres*
- Vamos criar uma teoria sobre os $S(X)$: a teoria de *grupos*!

Teoremas de representação: “Concreto” vs. “Abstrato”

- Poderíamos ter escolhido outro X ...
- Seria conveniente estudar os $S(X)$ tal como *biólogos estudam tigres*
- Vamos criar uma teoria sobre os $S(X)$: a teoria de *grupos*!
- Dizemos que $(G, *)$ é um **grupo** quando

G1. Existe um elemento de G que faz papel de identidade.

G2. Todo elemento de G tem inverso segundo $*$.

G3. A operação $*$ é associativa.

- Como $S(X)$ motivou a teoria, é chamado de *grupo concreto*.

Teoremas de representação: “Concreto” vs. “Abstrato”

- Poderíamos ter escolhido outro X ...
- Seria conveniente estudar os $S(X)$ tal como *biólogos estudam tigres*
- Vamos criar uma teoria sobre os $S(X)$: a teoria de *grupos*!
- Dizemos que $(G, *)$ é um **grupo** quando

G1. Existe um elemento de G que faz papel de identidade.

G2. Todo elemento de G tem inverso segundo $*$.

G3. A operação $*$ é associativa.

- Como $S(X)$ motivou a teoria, é chamado de *grupo concreto*.
- Será que G1-G3 “alcança criaturas indesejados”?

Teoremas de representação: “Concreto” vs. “Abstrato”

- Poderíamos ter escolhido outro X ...
- Seria conveniente estudar os $S(X)$ tal como *biólogos estudam tigres*
- Vamos criar uma teoria sobre os $S(X)$: a teoria de *grupos*!
- Dizemos que $(G, *)$ é um **grupo** quando

G1. Existe um elemento de G que faz papel de identidade.

G2. Todo elemento de G tem inverso segundo $*$.

G3. A operação $*$ é associativa.

- Como $S(X)$ motivou a teoria, é chamado de *grupo concreto*.
- Será que G1-G3 “alcança criaturas indesejados”?
- Precisamos de um *teorema de representação*:

Teorema (Teorema de Representação de Cayley)

Todo grupo é isomorfo a um subgrupo de $S(X)$ para algum X .

Teorema de Representação de Stone

- A história é parecida para *álgebras de Boole*.
- Lembremos que um conjunto das partes $P(X)$ satisfaz

$$Y \cup \emptyset = Y, \quad Y \cap X = Y, \quad Y \cup Y = Y, \quad Y \cap Y = Y,$$

$$(Y \cup Z)^c = Y^c \cap Z^c, \quad (Y \cap Z)^c = Y^c \cup Z^c,$$

$$Y \cup Z = Z \cup Y, \quad Y \cap Z = Z \cap Y,$$

$$(Y \cup Z) \cup W = Y \cup (Z \cup W), \quad (Y \cap Z) \cap W = Y \cap (Z \cap W),$$

$$Y \cup (Z \cap W) = (Y \cup Z) \cap (Y \cup W), \quad Y \cap (Z \cup W) = (Y \cap Z) \cup (Y \cap W),$$

$$Y \cup Y^c = X, \quad Y \cap Y^c = \emptyset,$$

para todos Y, Z e W subconjuntos de X .

Teorema de Representação de Stone

- A história é parecida para *álgebras de Boole*.
- Lembremos que um conjunto das partes $P(X)$ satisfaz

$$Y \cup \emptyset = Y, \quad Y \cap X = Y, \quad Y \cup Y = Y, \quad Y \cap Y = Y,$$

$$(Y \cup Z)^c = Y^c \cap Z^c, \quad (Y \cap Z)^c = Y^c \cup Z^c,$$

$$Y \cup Z = Z \cup Y, \quad Y \cap Z = Z \cap Y,$$

$$(Y \cup Z) \cup W = Y \cup (Z \cup W), \quad (Y \cap Z) \cap W = Y \cap (Z \cap W),$$

$$Y \cup (Z \cap W) = (Y \cup Z) \cap (Y \cup W), \quad Y \cap (Z \cup W) = (Y \cap Z) \cup (Y \cap W),$$

$$Y \cup Y^c = X, \quad Y \cap Y^c = \emptyset,$$

para todos Y, Z e W subconjuntos de X .

- A teoria das álgebra de Boole é motivada por $P(X)$.
- $P(X)$ são os exemplos concretos dessa teoria.

Teorema de Representação de Stone

Sejam B um conjunto, \vee, \wedge duas operações binárias, $b \mapsto \neg b$ uma operação unária e $0, 1 \in B$. Dizemos que $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ é uma **álgebra de Boole** se, para todos $a, b, c \in B$, satisfaz:

$$\text{B1. } a \vee 0 = a, \quad (\text{elementos neutros de } \vee \text{ e } \wedge)$$

$$a \wedge 1 = a$$

$$\text{B2. } a \vee a = a, \quad (\text{idempotência de } \vee \text{ e } \wedge)$$

$$a \wedge a = a$$

$$\text{B3. } \neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b, \quad (\text{Leis de De Morgan})$$

$$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$$

$$\text{B4. } a \vee b = b \vee a, \quad (\text{comutatividade de } \vee \text{ e } \wedge)$$

$$a \wedge b = b \wedge a$$

Teorema de Representação de Stone

- B5. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c),$ (associatividade de \vee e \wedge)
 $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
- B6. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c),$ (distributividade)
 $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
- B7. $a \vee \neg a = 1,$ (Terceiro Excluído)
 $a \wedge \neg a = 0$

Chamamos $a \wedge b$ de **ínfimo** de a e b e $a \vee b$ de **supremo** de a e b .

Teorema de Representação de Stone

- B5. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c),$ (associatividade de \vee e \wedge)
 $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
- B6. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c),$ (distributividade)
 $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
- B7. $a \vee \neg a = 1,$ (Terceiro Excluído)
 $a \wedge \neg a = 0$

Chamamos $a \wedge b$ de **ínfimo** de a e b e $a \vee b$ de **supremo** de a e b .

Teorema (Teorema de Representação de Stone)

Toda álgebra de Boole é isomorfa a uma subálgebra de $P(X)$ para algum X .

Quem foi Stone?



Marshall Harvey Stone (1903-1989) foi um lógico e matemático americano que fez contribuições cruciais para o desenvolvimento da matemática no século XX. Na década de 30, vive seu “período de ouro”. Nessa época, entre outras coisas, estuda a conexão entre álgebras de Boole e Topologia.

Por hoje é só, pessoal!

Obrigado pela atenção.

- [1] KRAUSE, D. **Introdução aos Fundamentos Axiomáticos da Ciência**. EPU, 2002.
- [2] MORTARI, C. A. **Introdução à Lógica**. Unesp, 2001.
- [3] HALVORSON, H. **The Logic in Philosophy of Science**. CUP, 2019.
- [4] FRIGG, R. **Models and Theories**. Routledge, 2022.
- [5] BARCZYSZYN, J. C. V. **Dualidade de Stone**. UFSC, 2023.

⋮