Sobre os axiomas das teorias matemáticas

Júlio C. V. Barczyszyn

Universidade Federal de Santa Catarina

6 de setembro, 2024

Apresentação para a disciplina **Seminários I** (MTM3581) no semestre 2024-2

Mas...

O que são teorias *matemáticas*? Aliás, o que são *teorias*?

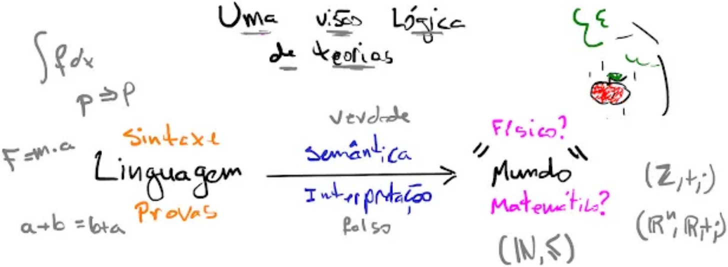
Roteiro

Motivação: *mundo* vs. teoria(s)

Teoremas de representação: *concreto* vs. abstrato

Teorema de Representação de Stone

Motivação: *mundo* vs. teoria(s)



Primeiro, uma anedota

- Vamos imaginar o seguinte cenário...

Primeiro, uma anedota

- Vamos imaginar o seguinte cenário...
- Um *jovem* pesquisador acredita que Matemática *é só uma linguagem*

Primeiro, uma anedota

- Vamos imaginar o seguinte cenário...
- Um *jovem* pesquisador acredita que Matemática *é só uma linguagem*
- Um dia, este jovem pesquisador decide criar uma *teoria axiomática*

Primeiro, uma anedota

- Vamos imaginar o seguinte cenário...
- Um *jovem* pesquisador acredita que Matemática *é só uma linguagem*
- Um dia, este jovem pesquisador decide criar uma *teoria axiomática*
- Feliz com sua nova empreitada, ele conta ao orientador

Primeiro, uma anedota

- Vamos imaginar o seguinte cenário...
- Um *jovem* pesquisador acredita que Matemática *é só uma linguagem*
- Um dia, este jovem pesquisador decide criar uma *teoria axiomática*
- Feliz com sua nova empreitada, ele conta ao orientador
- E é pego desprevenido :o

Primeiro, uma anedota

- Vamos imaginar o seguinte cenário...
- Um *jovem* pesquisador acredita que Matemática *é só uma linguagem*
- Um dia, este jovem pesquisador decide criar uma *teoria axiomática*
- Feliz com sua nova empreitada, ele conta ao orientador
- E é pego desprevenido :o
- Assim que termina de explicar quais axiomas tinha escolhido, o orientador lhe pergunta a única pergunta possível:

Primeiro, uma anedota

- Vamos imaginar o seguinte cenário...
- Um *jovem* pesquisador acredita que Matemática *é só uma linguagem*
- Um dia, este jovem pesquisador decide criar uma *teoria axiomática*
- Feliz com sua nova empreitada, ele conta ao orientador
- E é pego desprevenido :o
- Assim que termina de explicar quais axiomas tinha escolhido, o orientador lhe pergunta a única pergunta possível:
- Quais *criaturas* se comportam de acordo com os axiomas?

Primeiro, uma anedota

- Vamos imaginar o seguinte cenário...
- Um *jovem* pesquisador acredita que Matemática *é só uma linguagem*
- Um dia, este jovem pesquisador decide criar uma *teoria axiomática*
- Feliz com sua nova empreitada, ele conta ao orientador
- E é pego desprevenido :o
- Assim que termina de explicar quais axiomas tinha escolhido, o orientador lhe pergunta a única pergunta possível:
- Quais *criaturas* se comportam de acordo com os axiomas?
- Ele fica em choque! Vai para casa encucado

Primeiro, uma anedota

- Vamos imaginar o seguinte cenário...
- Um *jovem* pesquisador acredita que Matemática *é só uma linguagem*
- Um dia, este jovem pesquisador decide criar uma *teoria axiomática*
- Feliz com sua nova empreitada, ele conta ao orientador
- E é pego desprevenido :o
- Assim que termina de explicar quais axiomas tinha escolhido, o orientador lhe pergunta a única pergunta possível:
- Quais *criaturas* se comportam de acordo com os axiomas?
- Ele fica em choque! Vai para casa encucado
- Uma série de perguntas agora o assombram:

Primeiro, uma anedota

- Vamos imaginar o seguinte cenário...
- Um *jovem* pesquisador acredita que Matemática *é só uma linguagem*
- Um dia, este jovem pesquisador decide criar uma *teoria axiomática*
- Feliz com sua nova empreitada, ele conta ao orientador
- E é pego desprevenido :o
- Assim que termina de explicar quais axiomas tinha escolhido, o orientador lhe pergunta a única pergunta possível:
- Quais *criaturas* se comportam de acordo com os axiomas?
- Ele fica em choque! Vai para casa encucado
- Uma série de perguntas agora o assombram:
- Como assim quais criaturas?

Primeiro, uma anedota

- Vamos imaginar o seguinte cenário...
- Um *jovem* pesquisador acredita que Matemática *é só uma linguagem*
- Um dia, este jovem pesquisador decide criar uma *teoria axiomática*
- Feliz com sua nova empreitada, ele conta ao orientador
- E é pego desprevenido :o
- Assim que termina de explicar quais axiomas tinha escolhido, o orientador lhe pergunta a única pergunta possível:
- Quais *criaturas* se comportam de acordo com os axiomas?
- Ele fica em choque! Vai para casa encucado
- Uma série de perguntas agora o assombram:
- Como assim quais criaturas?
- Matemática não era só uma linguagem?

Primeiro, uma anedota

- Vamos imaginar o seguinte cenário...
- Um *jovem* pesquisador acredita que Matemática *é só uma linguagem*
- Um dia, este jovem pesquisador decide criar uma *teoria axiomática*
- Feliz com sua nova empreitada, ele conta ao orientador
- E é pego desprevenido :o
- Assim que termina de explicar quais axiomas tinha escolhido, o orientador lhe pergunta a única pergunta possível:
- Quais *criaturas* se comportam de acordo com os axiomas?
- Ele fica em choque! Vai para casa encucado
- Uma série de perguntas agora o assombram:
- Como assim quais criaturas?
- Matemática não era só uma linguagem?
- Se preocupar com o "mundo" e "quais criaturas habitam nele"?

Mudando de assunto...

O que ***são*** os números naturais?

Dando nome aos bois

- Axiomas vs. modelos (estruturas que satisfazem axiomas)

Dando nome aos bois

- Axiomas vs. modelos (estruturas que satisfazem axiomas)
- Os matemáticos às vezes chamam modelos de *exemplos*:

  "$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ é um exemplo de espaço vetorial!"
- Modelos vs. realidade

Dando nome aos bois

- Axiomas vs. modelos (estruturas que satisfazem axiomas)
- Os matemáticos às vezes chamam modelos de *exemplos*:

  "$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ é um exemplo de espaço vetorial!"
- Modelos vs. realidade
- Usualmente, as *coisas das quais falamos* não são os axiomas!

Dando nome aos bois

- Axiomas vs. modelos (estruturas que satisfazem axiomas)
- Os matemáticos às vezes chamam modelos de *exemplos*:

  "$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ é um exemplo de espaço vetorial!"
- Modelos vs. realidade
- Usualmente, as *coisas das quais falamos* não são os axiomas!
- Então o que são os números naturais?

Dando nome aos bois

- Axiomas vs. modelos (estruturas que satisfazem axiomas)
- Os matemáticos às vezes chamam modelos de *exemplos*:

  “$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ é um exemplo de espaço vetorial!”
- Modelos vs. realidade
- Usualmente, as *coisas das quais falamos* não são os axiomas!
- Então o que são os números naturais?
- Um conjunto? Um monoide? Nada disso?

Dando nome aos bois

- Axiomas vs. modelos (estruturas que satisfazem axiomas)
- Os matemáticos às vezes chamam modelos de *exemplos*:

  "$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ é um exemplo de espaço vetorial!"
- Modelos vs. realidade
- Usualmente, as *coisas das quais falamos* não são os axiomas!
- Então o que são os números naturais?
- Um conjunto? Um monoide? Nada disso?
- Inclui o zero? O que ***é*** o zero?

Sobre a *utilidade* de estudos fundacionais

- Essa questão pode parecer irrespondível, mas **nada inútil**

Sobre a *utilidade* de estudos fundacionais

- Essa questão pode parecer irrespondível, mas **nada inútil**
- Ao entendermos a dificuldade em responder tal questão, entendemos a pertinência do **método axiomático**

Sobre a *utilidade* de estudos fundacionais

- Essa questão pode parecer irrespondível, mas **nada inútil**
- Ao entendermos a dificuldade em responder tal questão, entendemos a pertinência do **método axiomático**
- Nos séculos XIX-XX, a comunidade matemática percebe que não tinha *certas* respostas sobre a existência de *certos* objetos

Sobre a *utilidade* de estudos fundacionais

- Essa questão pode parecer irrespondível, mas **nada inútil**
- Ao entendermos a dificuldade em responder tal questão, entendemos a pertinência do **método axiomático**
- Nos séculos XIX-XX, a comunidade matemática percebe que não tinha *certas* respostas sobre a existência de *certos* objetos
- Isso influencia o surgimento da Teoria de Conjuntos, etc.

Sobre a *utilidade* de estudos fundacionais

- Essa questão pode parecer irrespondível, mas **nada inútil**
- Ao entendermos a dificuldade em responder tal questão, entendemos a pertinência do **método axiomático**
- Nos séculos XIX-XX, a comunidade matemática percebe que não tinha *certas* respostas sobre a existência de *certos* objetos
- Isso influencia o surgimento da Teoria de Conjuntos, etc.
- Muitas pessoas se dedicaram aos fundamentos da Aritmética, mas os axiomas “dos números naturais” leva o nome de Peano

Axiomas de Peano: teoria *dos* números naturais?

- Há muitas maneiras de apresentar os Axiomas de Peano

Axiomas de Peano: teoria *dos* números naturais?

- Há muitas maneiras de apresentar os Axiomas de Peano
- Faremos uma apresentação intuitiva deles

Axiomas de Peano: teoria *dos* números naturais?

- Há muitas maneiras de apresentar os Axiomas de Peano
- Faremos uma apresentação intuitiva deles
- Que *ingredientes* constituem os números naturais?
  - Há um *primeiro número*.

Axiomas de Peano: teoria *dos* números naturais?

- Há muitas maneiras de apresentar os Axiomas de Peano
- Faremos uma apresentação intuitiva deles
- Que *ingredientes* constituem os números naturais?
  - Há um *primeiro número*.
  - Há uma função *sucessor* $n \mapsto n+1$ (n é dito antecessor de $n+1$).
  - Enfatizando, esse primeiro elemento não tem antecessor.

Axiomas de Peano: teoria *dos* números naturais?

- Há muitas maneiras de apresentar os Axiomas de Peano
- Faremos uma apresentação intuitiva deles
- Que *ingredientes* constituem os números naturais?
  - Há um *primeiro número*.
  - Há uma função *sucessor* $n \mapsto n+1$ (n é dito antecessor de $n+1$).
  - Enfatizando, esse primeiro elemento não tem antecessor.
  - Dois números com mesmo sucessor são iguais.

Axiomas de Peano: teoria *dos* números naturais?

- Há muitas maneiras de apresentar os Axiomas de Peano
- Faremos uma apresentação intuitiva deles
- Que *ingredientes* constituem os números naturais?
  - Há um *primeiro número*.
  - Há uma função *sucessor* $n \mapsto n + 1$ (n é dito antecessor de $n + 1$).
  - Enfatizando, esse primeiro elemento não tem antecessor.
  - Dois números com mesmo sucessor são iguais.
  - Princípio de Indução: se o primeiro elemento satisfaz uma propriedade, e todo número após ele também, então todos os números naturais satisfazem essa propriedade.
- Mas peraí... e a pergunta do orientador?
- A resposta vem com Cantor, Dedekind, von Neumann, etc.

Resumindo...

- O *fazer teórico* parece com algo, esquematicamente, assim:

Resumindo...

- O *fazer teórico* parece com algo, esquematicamente, assim:
- Primeiro, temos um domínio de estudo pretendido

Resumindo...

- O *fazer teórico* parece com algo, esquematicamente, assim:
- Primeiro, temos um domínio de estudo pretendido
- É difícil dizer ***o que é*** precisamente, pois se soubéssemos, não precisaríamos de uma *teoria* pra começo de conversa!

Resumindo...

- O *fazer teórico* parece com algo, esquematicamente, assim:
- Primeiro, temos um domínio de estudo pretendido
- É difícil dizer ***o que é*** precisamente, pois se soubéssemos, não precisaríamos de uma *teoria* pra começo de conversa!
- Anotamos uma lista “pequena” de sentenças sobre: os axiomas

Resumindo...

- O *fazer teórico* parece com algo, esquematicamente, assim:
- Primeiro, temos um domínio de estudo pretendido
- É difícil dizer ***o que é*** precisamente, pois se soubéssemos, não precisaríamos de uma *teoria* pra começo de conversa!
- Anotamos uma lista “pequena” de sentenças sobre: os axiomas
- Este passo não é nada direto. É preciso muito trabalho até entendermos quais deveriam ser as sentenças que importam

Resumindo...

- O *fazer teórico* parece com algo, esquematicamente, assim:
- Primeiro, temos um domínio de estudo pretendido
- É difícil dizer ***o que é*** precisamente, pois se soubéssemos, não precisaríamos de uma *teoria* pra começo de conversa!
- Anotamos uma lista “pequena” de sentenças sobre: os axiomas
- Este passo não é nada direto. É preciso muito trabalho até entendermos quais deveriam ser as sentenças que importam
- Aceitamos um tipo de fundamento matemático

Resumindo...

- O *fazer teórico* parece com algo, esquematicamente, assim:
- Primeiro, temos um domínio de estudo pretendido
- É difícil dizer ***o que é*** precisamente, pois se soubéssemos, não precisaríamos de uma *teoria* pra começo de conversa!
- Anotamos uma lista "pequena" de sentenças sobre: os axiomas
- Este passo não é nada direto. É preciso muito trabalho até entendermos quais deveriam ser as sentenças que importam
- Aceitamos um tipo de fundamento matemático
- Neste fundamento, que dá a *ontologia matemática*, procuramos objetos, coisas, estruturas, que satisfazem a lista

Visualizando com bolos :p

"teoria"	"modelos"	"dom frio"
receita 	conjuntos (B, I) (B', I') (B'', I')	

E como ficam os estudos *puramente* matemáticos?

- Modelos *de uma teoria* são estruturas que satisfazem os axiomas

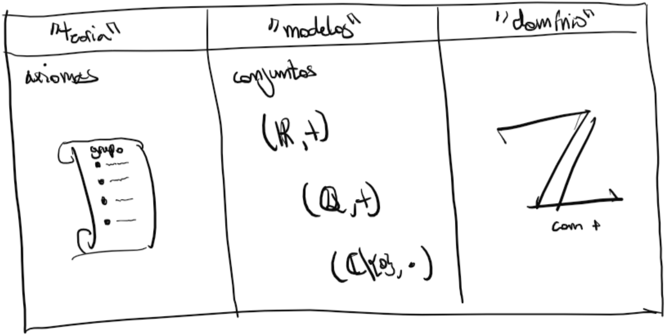
E como ficam os estudos *puramente* matemáticos?

- Modelos *de uma teoria* são estruturas que satisfazem os axiomas
- Porém, é possível nos depararmos com estruturas sem que seja necessário ou apropriado chamar de “modelo” de alguma teoria

E como ficam os estudos *puramente* matemáticos?

- Modelos *de uma teoria* são estruturas que satisfazem os axiomas
- Porém, é possível nos depararmos com estruturas sem que seja necessário ou apropriado chamar de “modelo” de alguma teoria
- Podemos nos deparar com $\mathbb{Z}$ antes de ter uma teoria matemática (e portanto sem ter os modelos dessa teoria) a disposição
- Assim, a “imagem” que temos do *fazer matemático* é algo como:

Visualizando sem bolos :(



Alguns comentários

- Confeiteiros abstraem de exemplos **concretos** certas receitas e depois outros podem estudar “as consequências dessas receitas”

Alguns comentários

- Confeiteiros abstraem de exemplos **concretos** certas receitas e depois outros podem estudar “as consequências dessas receitas”
- Biólogos quando falam de características de tigres, em seus livros e artigos, esperam estar listando características de **algo**

Alguns comentários

- Confeiteiros abstraem de exemplos **concretos** certas receitas e depois outros podem estudar “as consequências dessas receitas”
- Biólogos quando falam de características de tigres, em seus livros e artigos, esperam estar listando características de **algo**
- Parece que matemáticos, através da abstração de casos **concretos**, criam teorias **abstratas** que têm como modelos os casos concretos

Alguns comentários

- Confeiteiros abstraem de exemplos **concretos** certas receitas e depois outros podem estudar "as consequências dessas receitas"
- Biólogos quando falam de características de tigres, em seus livros e artigos, esperam estar listando características de **algo**
- Parece que matemáticos, através da abstração de casos **concretos**, criam teorias **abstratas** que têm como modelos os casos concretos
- Resumindo tudo isso num bordão:

  matemáticas(os) são as(os) biólogas(os) das coisas abstratas

- **Pergunta:** como saber quais axiomas escolher?

Teoremas de representação: *concreto* vs. abstrato

- Consideremos um conjunto, por exemplo, $X = \mathbb{N}$.

Teoremas de representação: *concreto* vs. abstrato

- Consideremos um conjunto, por exemplo, $X = \mathbb{N}$.
- Afirmação: poxa, *bijeções* são tão legais, úteis e importantes!

Teoremas de representação: *concreto* vs. abstrato

- Consideremos um conjunto, por exemplo, $X = \mathbb{N}$.
- Afirmação: poxa, *bijeções* são tão legais, úteis e importantes!
- Seja, então, $S(X)$ o conjunto de todas as bijeções de X em X.

Teoremas de representação: *concreto* vs. abstrato

- Consideremos um conjunto, por exemplo, $X = \mathbb{N}$.
- Afirmação: poxa, *bijeções* são tão legais, úteis e importantes!
- Seja, então, $S(X)$ o conjunto de todas as bijeções de X em X.
- Estudando o conjunto $S(X)$ (com $\circ$), percebemos que

  S1. Existe uma função que faz papel de identidade, $id_X\colon X \to X$.
  S2. Toda função tem inversa.
  S3. A composição de funções $\circ$ é associativa.

- Neste caso, há uma estrutura **concreta**, $(S(X), \circ)$

Teoremas de representação: *concreto* vs. abstrato

- Consideremos um conjunto, por exemplo, $X = \mathbb{N}$.
- Afirmação: poxa, *bijeções* são tão legais, úteis e importantes!
- Seja, então, $S(X)$ o conjunto de todas as bijeções de X em X.
- Estudando o conjunto $S(X)$ (com $\circ$), percebemos que

  S1. Existe uma função que faz papel de identidade, $id_X \colon X \to X$.
  S2. Toda função tem inversa.
  S3. A composição de funções $\circ$ é associativa.

- Neste caso, há uma estrutura **concreta**, $(S(X), \circ)$
- Aparições: determinantes, matemática discreta, etc.

Teoremas de representação: *concreto* vs. abstrato

- Poderíamos ter escolhido outro X...

Teoremas de representação: *concreto* vs. abstrato

- Poderíamos ter escolhido outro X...
- Seria conveniente estudar os $S(X)$ tal como *biólogos estudam tigres*

Teoremas de representação: *concreto* vs. abstrato

- Poderíamos ter escolhido outro X...
- Seria conveniente estudar os $S(X)$ tal como *biólogos estudam tigres*
- Vamos criar uma teoria sobre os $S(X)$: a teoria de *grupos*!

Teoremas de representação: *concreto* vs. abstrato

- Poderíamos ter escolhido outro X...
- Seria conveniente estudar os $S(X)$ tal como *biólogos estudam tigres*
- Vamos criar uma teoria sobre os $S(X)$: a teoria de *grupos*!
- Dizemos que $(G, *)$ é um **grupo** quando

  G1. Existe um elemento de G que faz papel de identidade.
  G2. Todo elemento de G tem inverso segundo $*$.
  G3. A operação $*$ é associativa.

- Como $S(X)$ motivou a teoria, é chamado de *grupo concreto*.

Teoremas de representação: *concreto* vs. abstrato

- Poderíamos ter escolhido outro X...
- Seria conveniente estudar os $S(X)$ tal como *biólogos estudam tigres*
- Vamos criar uma teoria sobre os $S(X)$: a teoria de *grupos*!
- Dizemos que $(G, *)$ é um **grupo** quando

  G1. Existe um elemento de G que faz papel de identidade.
  G2. Todo elemento de G tem inverso segundo $*$.
  G3. A operação $*$ é associativa.

- Como $S(X)$ motivou a teoria, é chamado de *grupo concreto*.
- Será que G1-G3 "alcança criaturas indesejados"?

Teoremas de representação: *concreto* vs. abstrato

- Poderíamos ter escolhido outro X...
- Seria conveniente estudar os $S(X)$ tal como *biólogos estudam tigres*
- Vamos criar uma teoria sobre os $S(X)$: a teoria de *grupos*!
- Dizemos que $(G, *)$ é um **grupo** quando

  G1. Existe um elemento de G que faz papel de identidade.
  G2. Todo elemento de G tem inverso segundo $*$.
  G3. A operação $*$ é associativa.

- Como $S(X)$ motivou a teoria, é chamado de *grupo concreto*.
- Será que G1-G3 "alcança criaturas indesejados"?
- Precisamos de um *teorema de representação*:

Teorema (Teorema de Representação de Cayley)

Todo grupo é isomorfo a um subgrupo de $S(X)$ para algum X.

Teorema de Representação de Stone

- A história é parecida para *álgebras de Boole*.
- Lembremos que um conjunto das partes $P(X)$ satisfaz

$$
\begin{aligned}
Y \cup \varnothing = Y, \qquad Y \cap X = Y, \qquad & Y \cup Y = Y, \qquad Y \cap Y = Y,\\
(Y \cup Z)^{\mathsf{c}} = Y^{\mathsf{c}} \cap Z^{\mathsf{c}}, \qquad & (Y \cap Z)^{\mathsf{c}} = Y^{\mathsf{c}} \cup Z^{\mathsf{c}},\\
Y \cup Z = Z \cup Y, \qquad & Y \cap Z = Z \cap Y,\\
(Y \cup Z) \cup W = Y \cup (Z \cup W), \qquad & (Y \cap Z) \cap W = Y \cap (Z \cap W),\\
Y \cup (Z \cap W) = (Y \cup Z) \cap (Y \cup W), \qquad & Y \cap (Z \cup W) = (Y \cap Z) \cup (Y \cap W),\\
Y \cup Y^{\mathsf{c}} = X, \qquad & Y \cap Y^{\mathsf{c}} = \varnothing,
\end{aligned}
$$

para todos Y, Z e W subconjuntos de X.

Teorema de Representação de Stone

- A história é parecida para *álgebras de Boole*.
- Lembremos que um conjunto das partes $P(X)$ satisfaz

$$\begin{aligned} Y \cup \varnothing = Y, \qquad Y \cap X = Y, \qquad & Y \cup Y = Y, \qquad Y \cap Y = Y, \\ (Y \cup Z)^{\mathsf{c}} = Y^{\mathsf{c}} \cap Z^{\mathsf{c}}, \qquad & (Y \cap Z)^{\mathsf{c}} = Y^{\mathsf{c}} \cup Z^{\mathsf{c}}, \\ Y \cup Z = Z \cup Y, \qquad & Y \cap Z = Z \cap Y, \\ (Y \cup Z) \cup W = Y \cup (Z \cup W), \qquad & (Y \cap Z) \cap W = Y \cap (Z \cap W), \\ Y \cup (Z \cap W) = (Y \cup Z) \cap (Y \cup W), \qquad & Y \cap (Z \cup W) = (Y \cap Z) \cup (Y \cap W), \\ Y \cup Y^{\mathsf{c}} = X, \qquad & Y \cap Y^{\mathsf{c}} = \varnothing, \end{aligned}$$

para todos Y, Z e W subconjuntos de X.

- A teoria das álgebra de Boole é motivada por $P(X)$.
- $P(X)$ são os exemplos concretos dessa teoria.

Teorema de Representação de Stone

Sejam B um conjunto, $\vee, \wedge$ duas operações binárias, $b \mapsto \neg b$ uma operação unária e $0, 1 \in B$. Dizemos que $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ é uma **álgebra de Boole** se, para todos $a, b, c \in B$, satisfaz:

B1. $a \vee 0 = a,$ (elementos neutros de $\vee$ e $\wedge$)
$a \wedge 1 = a$

B2. $a \vee a = a,$ (idempotência de $\vee$ e $\wedge$)
$a \wedge a = a$

B3. $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b,$ (Leis de De Morgan)
$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$

B4. $a \vee b = b \vee a,$ (comutatividade de $\vee$ e $\wedge$)
$a \wedge b = b \wedge a$

Teorema de Representação de Stone

B5. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$, (associatividade de $\vee$ e $\wedge$)
$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

B6. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, (distributividade)
$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

B7. $a \vee \neg a = 1$, (Terceiro Excluído)
$a \wedge \neg a = 0$

Chamamos $a \wedge b$ de **ínfimo** de a e b e $a \vee b$ de **supremo** de a e b.

Teorema de Representação de Stone

B5. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$, (associatividade de $\vee$ e $\wedge$)
$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

B6. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, (distributividade)
$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

B7. $a \vee \neg a = 1$, (Terceiro Excluído)
$a \wedge \neg a = 0$

Chamamos $a \wedge b$ de **ínfimo** de a e b e $a \vee b$ de **supremo** de a e b.

Teorema (Teorema de Representação de Stone)

Toda álgebra de Boole é isomorfa a uma subálgebra de $P(X)$ para algum X.

Quem foi Stone?

Marshall Harvey Stone (1903-1989) foi um lógico e matemático americano que fez contribuições cruciais para o desenvolvimento da matemática no século XX. Na década de 30, vive seu "período de ouro". Nessa época, entre outras coisas, estuda a conexão entre álgebras de Boole e Topologia.

Obrigado pela atenção.

Referências principais

Júlio C. V. Barczyszyn
Dualidade de Stone
Repositório UFSC, 2022

Hans Halvorson
The Logic in Philosophy of Science
Cambridge University Press, 2019

Décio Krause
Introdução aos Fundamentos Axiomáticos da Ciência
Editora Pedagógica e Universitária, 2002

Décio Krause & Jonas R. Becker Arenhart
The Logical Foundations of Scientific Theories
Routledge, 2016

Cezar A. Mortari
Introdução à Lógica
Editora UNESP, 2021