De onde vêm os axiomas das teorias matemáticas?

Júlio C. V. Barczyszyn

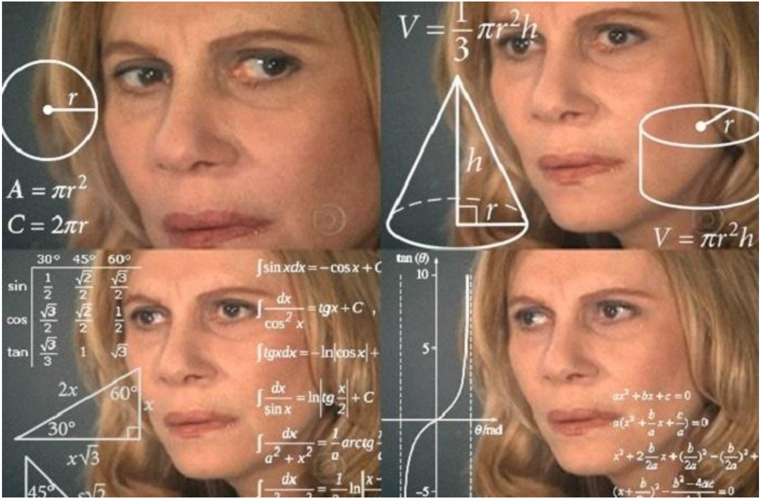
Universidade Federal de Santa Catarina

6 de setembro, 2024

Apresentação para a disciplina **Seminários I** (MTM3581) no semestre 2024-2

Mas...

O que são teorias *matemáticas*? Aliás, o que são *teorias*?



$A = \pi r^2$
$C = 2\pi r$
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
$V = \pi r^2 h$
30° 45° 60°
sin
cos
tan
2x
60°
30°
$x\sqrt{3}$
tan (θ)
θ/rad
$ax^2+bx+c=0$

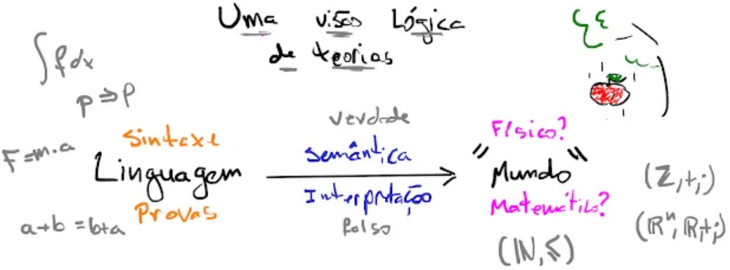
Roteiro

1. Motivação: “Mundo” vs. “Teoria(s)”

2. Teoremas de representação: “Concreto” vs. “Abstrato”

3. Teorema de Representação de Stone

Motivação: "Mundo" vs. "Teoria(s)"



Primeiro, uma anedota

- Vamos imaginar o seguinte cenário...

Primeiro, uma anedota

- Vamos imaginar o seguinte cenário...
- Um *jovem* pesquisador acredita que Matemática *é só uma linguagem*

Primeiro, uma anedota

- Vamos imaginar o seguinte cenário...
- Um *jovem* pesquisador acredita que Matemática *é só uma linguagem*
- Um dia, este jovem pesquisador decide criar uma *teoria* (coleção de *sentenças* como "para todo a e para todo b, a+b = b+a" e mais algumas outras), pois este jovem anseia muito se tornar um matemático que criou uma *teoria matemática* conhecida!

Primeiro, uma anedota

- Vamos imaginar o seguinte cenário...
- Um *jovem* pesquisador acredita que Matemática *é só uma linguagem*
- Um dia, este jovem pesquisador decide criar uma *teoria* (coleção de *sentenças* como "para todo a e para todo b, a+b = b+a" e mais algumas outras), pois este jovem anseia muito se tornar um matemático que criou uma *teoria matemática* conhecida!
- Feliz com sua nova empreitada, ele se encontra com seu orientador para falar sobre e é pego desprevenido :o

Primeiro, uma anedota

- Vamos imaginar o seguinte cenário...
- Um *jovem* pesquisador acredita que Matemática *é só uma linguagem*
- Um dia, este jovem pesquisador decide criar uma *teoria* (coleção de *sentenças* como "para todo a e para todo b, a+b = b+a" e mais algumas outras), pois este jovem anseia muito se tornar um matemático que criou uma *teoria matemática* conhecida!
- Feliz com sua nova empreitada, ele se encontra com seu orientador para falar sobre e é pego desprevenido :o
- Assim que termina de explicar quais axiomas tinha escolhido, o orientador lhe pergunta a única pergunta possível:

Primeiro, uma anedota

- Vamos imaginar o seguinte cenário...
- Um *jovem* pesquisador acredita que Matemática *é só uma linguagem*
- Um dia, este jovem pesquisador decide criar uma *teoria* (coleção de *sentenças* como "para todo a e para todo b, a+b = b+a" e mais algumas outras), pois este jovem anseia muito se tornar um matemático que criou uma *teoria matemática* conhecida!
- Feliz com sua nova empreitada, ele se encontra com seu orientador para falar sobre e é pego desprevenido :o
- Assim que termina de explicar quais axiomas tinha escolhido, o orientador lhe pergunta a única pergunta possível:
- Quais *criaturas* se comportam de acordo com essa axiomática?

Primeiro, uma anedota

- Vamos imaginar o seguinte cenário...
- Um *jovem* pesquisador acredita que Matemática *é só uma linguagem*
- Um dia, este jovem pesquisador decide criar uma *teoria* (coleção de *sentenças* como "para todo a e para todo b, a+b = b+a" e mais algumas outras), pois este jovem anseia muito se tornar um matemático que criou uma *teoria matemática* conhecida!
- Feliz com sua nova empreitada, ele se encontra com seu orientador para falar sobre e é pego desprevenido :o
- Assim que termina de explicar quais axiomas tinha escolhido, o orientador lhe pergunta a única pergunta possível:
- Quais *criaturas* se comportam de acordo com essa axiomática?
- Ele fica em choque! Vai para casa encucado. Uma série de perguntas agora o assombram: como assim quais criaturas? Matemática não era só uma linguagem? Quem disse que preciso me preocupar com o "mundo" e "quais criaturas habitam nele"?

Mudando de assunto...

O que ***são*** os números naturais?

Dando nome aos bois

- Axiomas vs. Modelos (estruturas que satisfazem axiomas)

Dando nome aos bois

- Axiomas vs. Modelos (estruturas que satisfazem axiomas)
- Os matemáticos às vezes chamam modelos de *exemplos*:

  "$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ é um exemplo de espaço vetorial!"
- Modelos vs. Realidade

Dando nome aos bois

- Axiomas vs. Modelos (estruturas que satisfazem axiomas)
- Os matemáticos às vezes chamam modelos de *exemplos*:

  "$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ é um exemplo de espaço vetorial!"
- Modelos vs. Realidade
- Certamente *as coisas das quais falamos* não são os axiomas que usamos para falar delas!

Dando nome aos bois

- Axiomas vs. Modelos (estruturas que satisfazem axiomas)
- Os matemáticos às vezes chamam modelos de *exemplos*:

  "$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ é um exemplo de espaço vetorial!"
- Modelos vs. Realidade
- Certamente *as coisas das quais falamos* não são os axiomas que usamos para falar delas!
- Então o que são os números naturais?

Dando nome aos bois

- Axiomas vs. Modelos (estruturas que satisfazem axiomas)
- Os matemáticos às vezes chamam modelos de *exemplos*:

  "$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ é um exemplo de espaço vetorial!"
- Modelos vs. Realidade
- Certamente *as coisas das quais falamos* não são os axiomas que usamos para falar delas!
- Então o que são os números naturais?
- Um conjunto? Um monoide? Nada disso?

Dando nome aos bois

- Axiomas vs. Modelos (estruturas que satisfazem axiomas)
- Os matemáticos às vezes chamam modelos de *exemplos*:

  "$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ é um exemplo de espaço vetorial!"
- Modelos vs. Realidade
- Certamente *as coisas das quais falamos* não são os axiomas que usamos para falar delas!
- Então o que são os números naturais?
- Um conjunto? Um monoide? Nada disso?
- Inclui o zero? O que *é* o zero?

Sobre a *utilidade* de estudos fundacionais

- Essa questão pode parecer irrespondível, mas isso **não a torna inútil**

Sobre a *utilidade* de estudos fundacionais

- Essa questão pode parecer irrespondível, mas isso **não a torna inútil**
- Ao entendermos a dificuldade em responder tal questão, entendemos a pertinência do **método axiomático** pra nossa civilização

Sobre a *utilidade* de estudos fundacionais

- Essa questão pode parecer irrespondível, mas isso **não a torna inútil**
- Ao entendermos a dificuldade em responder tal questão, entendemos a pertinência do **método axiomático** pra nossa civilização
- Nos séculos XIX e XX, a comunidade matemática começa a perceber que não tinha *certas* respostas sobre a existência de *certos* objetos

Sobre a *utilidade* de estudos fundacionais

- Essa questão pode parecer irrespondível, mas isso **não a torna inútil**
- Ao entendermos a dificuldade em responder tal questão, entendemos a pertinência do **método axiomático** pra nossa civilização
- Nos séculos XIX e XX, a comunidade matemática começa a perceber que não tinha *certas* respostas sobre a existência de *certos* objetos
- Essa percepção passa pelo surgimento da Teoria de Conjuntos, etc.

Sobre a *utilidade* de estudos fundacionais

- Essa questão pode parecer irrespondível, mas isso **não a torna inútil**
- Ao entendermos a dificuldade em responder tal questão, entendemos a pertinência do **método axiomático** pra nossa civilização
- Nos séculos XIX e XX, a comunidade matemática começa a perceber que não tinha *certas* respostas sobre a existência de *certos* objetos
- Essa percepção passa pelo surgimento da Teoria de Conjuntos, etc.
- Muitas pessoas se dedicaram aos fundamentos da Aritmética, mas os axiomas "dos números naturais" leva o nome de Peano: os

Axiomas de Peano

Axiomas de Peano: teoria *dos* números naturais?

- Há muitas maneiras de apresentar os Axiomas de Peano

Axiomas de Peano: teoria *dos* números naturais?

- Há muitas maneiras de apresentar os Axiomas de Peano
- Faremos uma apresentação intuitiva deles

Axiomas de Peano: teoria *dos* números naturais?

- Há muitas maneiras de apresentar os Axiomas de Peano
- Faremos uma apresentação intuitiva deles
- Que *ingredientes* constituem os números naturais?
    - Há um *primeiro número*.

Axiomas de Peano: teoria *dos* números naturais?

- Há muitas maneiras de apresentar os Axiomas de Peano
- Faremos uma apresentação intuitiva deles
- Que *ingredientes* constituem os números naturais?
  - Há um *primeiro número*.
  - Há uma função *sucessor* $n \mapsto n + 1$ (n é dito antecessor de $n + 1$).
  - Enfatizando, esse primeiro elemento não tem antecessor.

Axiomas de Peano: teoria *dos* números naturais?

- Há muitas maneiras de apresentar os Axiomas de Peano
- Faremos uma apresentação intuitiva deles
- Que *ingredientes* constituem os números naturais?
    - Há um *primeiro número*.
    - Há uma função *sucessor* $n \mapsto n + 1$ (n é dito antecessor de $n + 1$).
    - Enfatizando, esse primeiro elemento não tem antecessor.
    - Dois números com mesmo sucessor são iguais.

Axiomas de Peano: teoria *dos* números naturais?

- Há muitas maneiras de apresentar os Axiomas de Peano
- Faremos uma apresentação intuitiva deles
- Que *ingredientes* constituem os números naturais?
  - Há um *primeiro número*.
  - Há uma função *sucessor* $n \mapsto n + 1$ (n é dito antecessor de $n + 1$).
  - Enfatizando, esse primeiro elemento não tem antecessor.
  - Dois números com mesmo sucessor são iguais.
  - Se o primeiro elemento satisfaz uma propriedade, e todo número após ele satisfaz também, então todos os números naturais satisfazem essa propriedade. Este *é* o Princípio de Indução Matemática.
- Mas peraí... e a pergunta do orientador?
- A resposta vem com Dedekind, von Neumann e companhia

Resumindo...

- O *fazer teórico* parece com algo, esquematicamente, assim:

Resumindo...

- O *fazer teórico* parece com algo, esquematicamente, assim:
- Primeiro, temos um domínio de estudo pretendido

Resumindo...

- O *fazer teórico* parece com algo, esquematicamente, assim:
- Primeiro, temos um domínio de estudo pretendido
- É difícil dizer ***o que é*** precisamente, pois se soubéssemos, não precisaríamos de uma *teoria* pra começo de conversa!

Resumindo...

- O *fazer teórico* parece com algo, esquematicamente, assim:
- Primeiro, temos um domínio de estudo pretendido
- É difícil dizer ***o que é*** precisamente, pois se soubéssemos, não precisaríamos de uma *teoria* pra começo de conversa!
- Anotamos uma lista "pequena" de sentenças sobre: os axiomas

Resumindo...

- O *fazer teórico* parece com algo, esquematicamente, assim:
- Primeiro, temos um domínio de estudo pretendido
- É difícil dizer ***o que é*** precisamente, pois se soubéssemos, não precisaríamos de uma *teoria* pra começo de conversa!
- Anotamos uma lista "pequena" de sentenças sobre: os axiomas
- Este passo não é nada direto. É preciso muito trabalho até entendermos quais deveriam ser as sentenças que importam

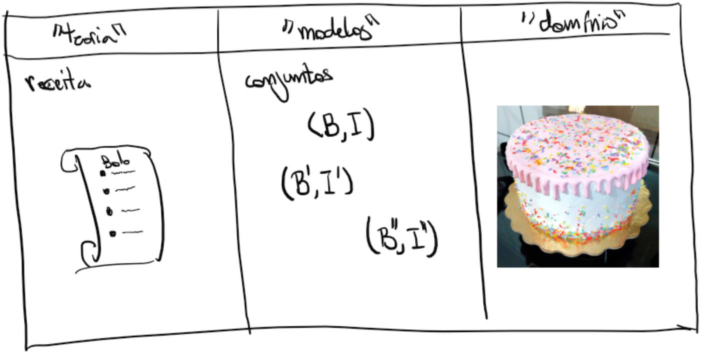
Resumindo...

- O *fazer teórico* parece com algo, esquematicamente, assim:
- Primeiro, temos um domínio de estudo pretendido
- É difícil dizer ***o que é*** precisamente, pois se soubéssemos, não precisaríamos de uma *teoria* pra começo de conversa!
- Anotamos uma lista "pequena" de sentenças sobre: os axiomas
- Este passo não é nada direto. É preciso muito trabalho até entendermos quais deveriam ser as sentenças que importam
- Aceitamos um tipo de fundamento matemático

Resumindo...

- O *fazer teórico* parece com algo, esquematicamente, assim:
- Primeiro, temos um domínio de estudo pretendido
- É difícil dizer ***o que é*** precisamente, pois se soubéssemos, não precisaríamos de uma *teoria* pra começo de conversa!
- Anotamos uma lista "pequena" de sentenças sobre: os axiomas
- Este passo não é nada direto. É preciso muito trabalho até entendermos quais deveriam ser as sentenças que importam
- Aceitamos um tipo de fundamento matemático
- Neste fundamento, que dá a *ontologia matemática*, procuramos objetos, coisas, estruturas, que satisfazem a lista

Visualizando com bolos :p



E como ficam os estudos *puramente* matemáticos?

- Modelos *de uma teoria* são estruturas (conjuntistas) que satisfazem os axiomas dessa teoria, certo?

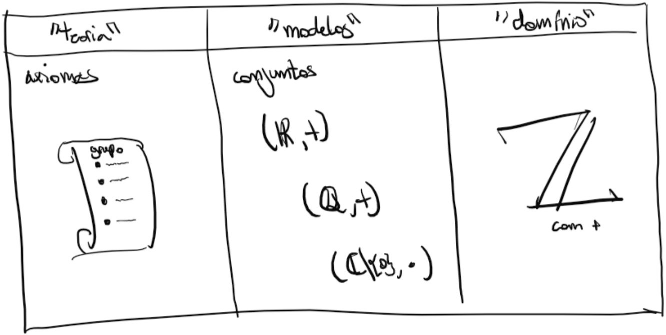
E como ficam os estudos *puramente* matemáticos?

- Modelos *de uma teoria* são estruturas (conjuntistas) que satisfazem os axiomas dessa teoria, certo?
- Porém, é possível nos depararmos com estruturas sem que seja necessário ou apropriado chamar de "modelo" de alguma teoria

E como ficam os estudos *puramente* matemáticos?

- Modelos *de uma teoria* são estruturas (conjuntistas) que satisfazem os axiomas dessa teoria, certo?
- Porém, é possível nos depararmos com estruturas sem que seja necessário ou apropriado chamar de "modelo" de alguma teoria
- Por exemplo, eu posso me deparar com $\mathbb{Z}$ antes de ter uma teoria matemática (e portanto sem ter os modelos dessa teoria) a disposição para tratar de coisas como essa estrutura
- Assim, a "imagem" que temos do *fazer matemático* ficaria algo como:

Visualizando sem bolos :(



Alguns comentários

- Confeiteiros abstraem de exemplos **concretos** certas receitas e depois outros podem estudar “as consequências dessas receitas”

Alguns comentários

- Confeiteiros abstraem de exemplos **concretos** certas receitas e depois outros podem estudar "as consequências dessas receitas"
- Biólogos quando falam de características de tigres, em seus livros e artigos, esperam estar listando características de um animal que existe. Ou, pelo menos, de interesse genuíno da comunidade da Biologia

Alguns comentários

- Confeiteiros abstraem de exemplos **concretos** certas receitas e depois outros podem estudar "as consequências dessas receitas"
- Biólogos quando falam de características de tigres, em seus livros e artigos, esperam estar listando características de um animal que existe. Ou, pelo menos, de interesse genuíno da comunidade da Biologia
- Parece que matemáticos, através da abstração de casos **concretos** (que surgem na pesquisa mais de uma vez, em contextos diferentes, por exemplo), criam teorias **abstratas**, as quais terão como modelos/exemplos também aqueles casos concretos

Alguns comentários

- Confeiteiros abstraem de exemplos **concretos** certas receitas e depois outros podem estudar "as consequências dessas receitas"
- Biólogos quando falam de características de tigres, em seus livros e artigos, esperam estar listando características de um animal que existe. Ou, pelo menos, de interesse genuíno da comunidade da Biologia
- Parece que matemáticos, através da abstração de casos **concretos** (que surgem na pesquisa mais de uma vez, em contextos diferentes, por exemplo), criam teorias **abstratas**, as quais terão como modelos/exemplos também aqueles casos concretos
- Resumindo tudo isso num bordão: **matemáticas(os) são as(os) biólogas(os) das coisas abstratas**
- Pergunta: como saber quais axiomas escolher?

Teoremas de representação: "Concreto" vs. "Abstrato"

- Consideremos um conjunto, por exemplo, $X = \mathbb{N}$.

Teoremas de representação: “Concreto” vs. “Abstrato”

- Consideremos um conjunto, por exemplo, $X = \mathbb{N}$.
- Afirmação: poxa, *bijeções* são tão legais, úteis e importantes!

Teoremas de representação: “Concreto” vs. “Abstrato”

- Consideremos um conjunto, por exemplo, $X = \mathbb{N}$.
- Afirmação: poxa, *bijeções* são tão legais, úteis e importantes!
- Seja, então, $S(X)$ o conjunto de todas as bijeções de X em X.

Teoremas de representação: "Concreto" vs. "Abstrato"

- Consideremos um conjunto, por exemplo, $X = \mathbb{N}$.
- Afirmação: poxa, *bijeções* são tão legais, úteis e importantes!
- Seja, então, $S(X)$ o conjunto de todas as bijeções de X em X.
- Estudando o conjunto $S(X)$ (com $\circ$), percebemos que

  S1. Existe uma função que faz papel de identidade, $id_X : X \to X$.
  S2. Toda função tem inversa.
  S3. A composição de funções $\circ$ é associativa.

- Neste caso, há uma estrutura **concreta**, $(S(X), \circ)$

Teoremas de representação: "Concreto" vs. "Abstrato"

- Consideremos um conjunto, por exemplo, $X = \mathbb{N}$.
- Afirmação: poxa, *bijeções* são tão legais, úteis e importantes!
- Seja, então, $S(X)$ o conjunto de todas as bijeções de X em X.
- Estudando o conjunto $S(X)$ (com $\circ$), percebemos que

  S1. Existe uma função que faz papel de identidade, $id_X : X \to X$.
  S2. Toda função tem inversa.
  S3. A composição de funções $\circ$ é associativa.

- Neste caso, há uma estrutura **concreta**, $(S(X), \circ)$
- Aparições: determinantes, matemática discreta, etc.

Teoremas de representação: “Concreto” vs. “Abstrato”

- Poderíamos ter escolhido outro X...

Teoremas de representação: "Concreto" vs. "Abstrato"

- Poderíamos ter escolhido outro X...
- Seria conveniente estudar os $S(X)$ tal como *biólogos estudam tigres*

Teoremas de representação: “Concreto” vs. “Abstrato”

- Poderíamos ter escolhido outro X...
- Seria conveniente estudar os $S(X)$ tal como *biólogos estudam tigres*
- Vamos criar uma teoria sobre os $S(X)$: a teoria de *grupos*!

Teoremas de representação: "Concreto" vs. "Abstrato"

- Poderíamos ter escolhido outro X...
- Seria conveniente estudar os $S(X)$ tal como *biólogos estudam tigres*
- Vamos criar uma teoria sobre os $S(X)$: a teoria de *grupos*!
- Dizemos que $(G, *)$ é um **grupo** quando

  G1. Existe um elemento de G que faz papel de identidade.
  G2. Todo elemento de G tem inverso segundo $*$.
  G3. A operação $*$ é associativa.

- Como $S(X)$ motivou a teoria, é chamado de *grupo concreto*.

Teoremas de representação: “Concreto” vs. “Abstrato”

- Poderíamos ter escolhido outro X...
- Seria conveniente estudar os $S(X)$ tal como *biólogos estudam tigres*
- Vamos criar uma teoria sobre os $S(X)$: a teoria de *grupos*!
- Dizemos que $(G, *)$ é um **grupo** quando

  G1. Existe um elemento de G que faz papel de identidade.
  G2. Todo elemento de G tem inverso segundo $*$.
  G3. A operação $*$ é associativa.

- Como $S(X)$ motivou a teoria, é chamado de *grupo concreto*.
- Será que G1-G3 “alcança criaturas indesejados”?

Teoremas de representação: "Concreto" vs. "Abstrato"

- Poderíamos ter escolhido outro X...
- Seria conveniente estudar os $S(X)$ tal como *biólogos estudam tigres*
- Vamos criar uma teoria sobre os $S(X)$: a teoria de *grupos*!
- Dizemos que $(G, *)$ é um **grupo** quando

  G1. Existe um elemento de G que faz papel de identidade.
  G2. Todo elemento de G tem inverso segundo $*$.
  G3. A operação $*$ é associativa.

- Como $S(X)$ motivou a teoria, é chamado de *grupo concreto*.
- Será que G1-G3 "alcança criaturas indesejados"?
- Precisamos de um *teorema de representação*:

Teorema (Teorema de Representação de Cayley)

Todo grupo é isomorfo a um subgrupo de $S(X)$ para algum X.

Teorema de Representação de Stone

- A história é parecida para *álgebras de Boole*.
- Lembremos que um conjunto das partes $P(X)$ satisfaz

$$
\begin{aligned}
Y \cup \varnothing = Y, \qquad Y \cap X = Y, \qquad & Y \cup Y = Y, \qquad Y \cap Y = Y, \\
(Y \cup Z)^{c} = Y^{c} \cap Z^{c}, \qquad & (Y \cap Z)^{c} = Y^{c} \cup Z^{c}, \\
Y \cup Z = Z \cup Y, \qquad & Y \cap Z = Z \cap Y, \\
(Y \cup Z) \cup W = Y \cup (Z \cup W), \qquad & (Y \cap Z) \cap W = Y \cap (Z \cap W), \\
Y \cup (Z \cap W) = (Y \cup Z) \cap (Y \cup W), \qquad & Y \cap (Z \cup W) = (Y \cap Z) \cup (Y \cap W), \\
Y \cup Y^{c} = X, \qquad & Y \cap Y^{c} = \varnothing,
\end{aligned}
$$

para todos Y, Z e W subconjuntos de X.

Teorema de Representação de Stone

- A história é parecida para *álgebras de Boole*.
- Lembremos que um conjunto das partes $P(X)$ satisfaz

$$
\begin{aligned}
Y \cup \varnothing = Y, \qquad Y \cap X = Y, &\qquad Y \cup Y = Y, \qquad Y \cap Y = Y,\\
(Y \cup Z)^{\mathsf{c}} = Y^{\mathsf{c}} \cap Z^{\mathsf{c}}, &\qquad (Y \cap Z)^{\mathsf{c}} = Y^{\mathsf{c}} \cup Z^{\mathsf{c}},\\
Y \cup Z = Z \cup Y, &\qquad Y \cap Z = Z \cap Y,\\
(Y \cup Z) \cup W = Y \cup (Z \cup W), &\qquad (Y \cap Z) \cap W = Y \cap (Z \cap W),\\
Y \cup (Z \cap W) = (Y \cup Z) \cap (Y \cup W), &\qquad Y \cap (Z \cup W) = (Y \cap Z) \cup (Y \cap W),\\
Y \cup Y^{\mathsf{c}} = X, &\qquad Y \cap Y^{\mathsf{c}} = \varnothing,
\end{aligned}
$$

para todos Y, Z e W subconjuntos de X.

- A teoria das álgebra de Boole é motivada por $P(X)$.
- $P(X)$ são os exemplos concretos dessa teoria.

Sejam B um conjunto, $\vee, \wedge$ duas operações binárias, $b \mapsto \neg b$ uma operação unária e $0, 1 \in B$. Dizemos que $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ é uma **álgebra de Boole** se, para todos $a, b, c \in B$, satisfaz:

B1. $a \vee 0 = a,$ (elementos neutros de $\vee$ e $\wedge$)

$a \wedge 1 = a$

B2. $a \vee a = a,$ (idempotência de $\vee$ e $\wedge$)

$a \wedge a = a$

B3. $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b,$ (Leis de De Morgan)

$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$

B4. $a \vee b = b \vee a,$ (comutatividade de $\vee$ e $\wedge$)

$a \wedge b = b \wedge a$

B5. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$, (associatividade de $\vee$ e $\wedge$)

$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

B6. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, (distributividade)

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

B7. $a \vee \neg a = 1$, (Terceiro Excluído)

$a \wedge \neg a = 0$

Chamamos $a \wedge b$ de **ínfimo** de a e b e $a \vee b$ de **supremo** de a e b.

Teorema de Representação de Stone

B5. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$, (associatividade de $\vee$ e $\wedge$)

$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

B6. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, (distributividade)

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

B7. $a \vee \neg a = 1$, (Terceiro Excluído)

$a \wedge \neg a = 0$

Chamamos $a \wedge b$ de **ínfimo** de a e b e $a \vee b$ de **supremo** de a e b.

Teorema (Teorema de Representação de Stone)

Toda álgebra de Boole é isomorfa a uma subálgebra de $P(X)$ para algum X.

Quem foi Stone?

Marshall Harvey Stone (1903-1989) foi um lógico e matemático americano que fez contribuições cruciais para o desenvolvimento da matemática no século XX. Na década de 30, vive seu "período de ouro". Nessa época, entre outras coisas, estuda a conexão entre álgebras de Boole e Topologia.

Por hoje é só, pessoal!

Obrigado pela atenção.

Referências principais

[1] KRAUSE, D. **Introdução aos Fundamentos Axiomáticos da Ciência**. EPU, 2002.

[2] MORTARI, C. A. **Introdução à Lógica**. Unesp, 2001.

[3] HALVORSON, H. **The Logic in Philosophy of Science**. CUP, 2019.

[4] FRIGG, R. **Models and Theories**. Routledge, 2022.

[5] BARCZYSZYN, J. C. V. **Dualidade de Stone**. UFSC, 2023.

$\vdots$