Series de Tiempo

Jonathan Acosta

Magíster en Ciencia de Datos
Pontificia Universidad Católica de Chile

Clase en vivo 1

Esquema

1. Conceptos Fundamentales Semana 1
   - Modelos Ingenuos
     - Suavizamientos Exponenciales

2. Conceptos Fundamentales Semana 2
     - Método de Descomposición
   - Funciones de autocorrelación muestrales
     - Test de Blancura

Esquema

¿Qué es una Serie de Tiempo o Serie Cronológica?

¿Qué es una Serie de Tiempo o Serie Cronológica?

Algunos ejemplos:

- Calentamiento Global

Conceptos Fundamentales Semana 1

¿Qué es una Serie de Tiempo o Serie Cronológica?

Algunos ejemplos:

- Calentamiento Global
- IPC (indice de precio al consumidor)

¿Qué es una Serie de Tiempo o Serie Cronológica?

Algunos ejemplos:

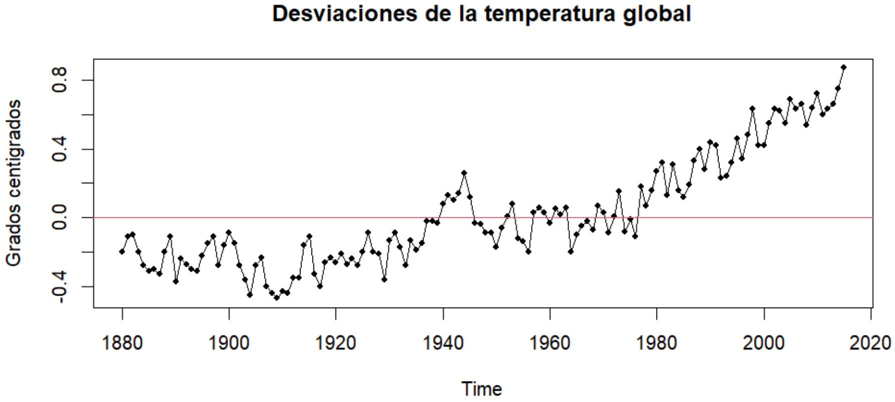
- Calentamiento Global
- IPC (indice de precio al consumidor)
- Indicadores Bursátiles

¿Qué es una Serie de Tiempo o Serie Cronológica?

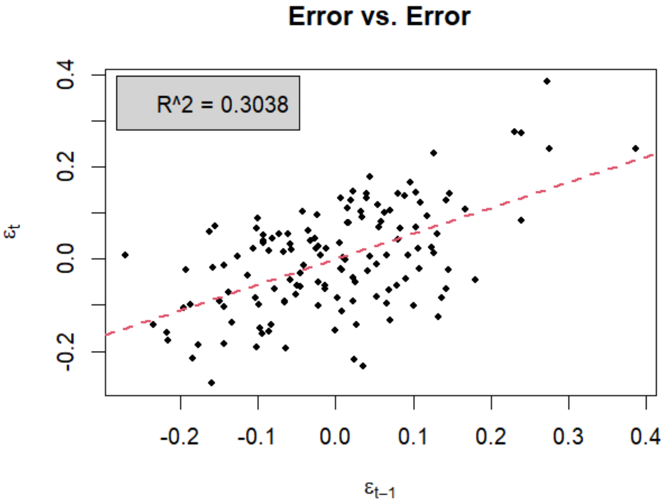
Algunos ejemplos:

- Calentamiento Global
- IPC (indice de precio al consumidor)
- Indicadores Bursátiles
- Precio del Cobre

Ejemplo (Calentamiento Global): Considere el índice de temperatura media mundial entre la tierra y el océano desde 1880 hasta 2015, con el período base 1951-1980.



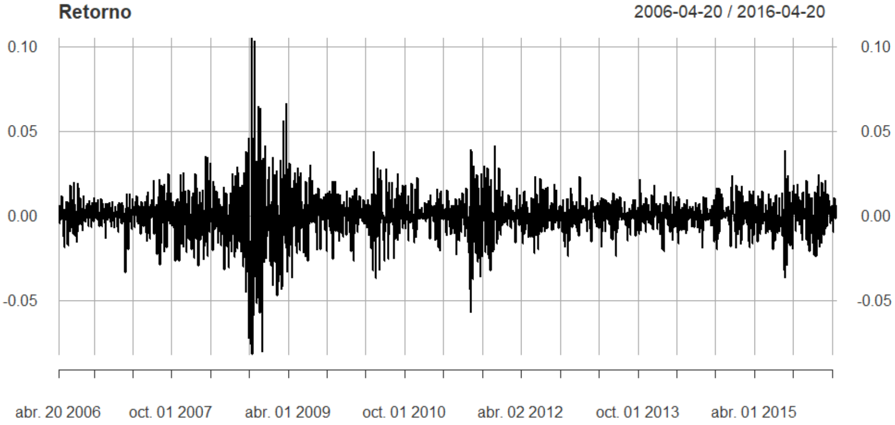
Conceptos Fundamentales Semana 1



Ejemplo 2 (Promedio Industrial Dow Jones): Refleja el comportamiento del precio de la acción de las 30 compañías industriales más importantes y representativas de Estados Unidos.

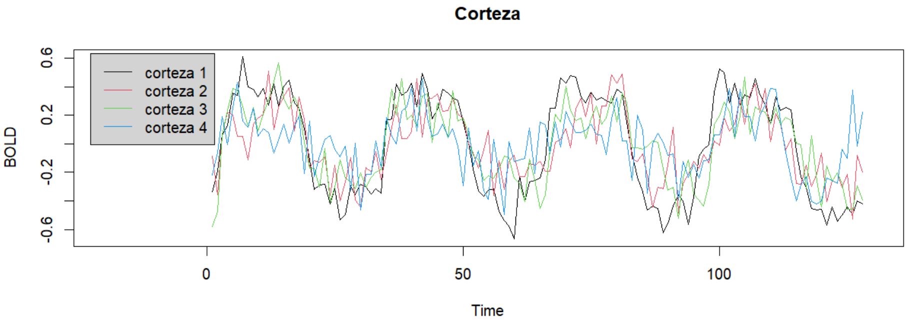
Obs.: En las series financieras se suele utilizar y modelizar el retorno:

$$r_t = \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}} \approx \ln(x_t) - \ln(x_{t-1}) = \nabla \ln(x_t)$$



Introducción

En la siguiente gráfica observamos los datos recogidos en varias localizaciones del cerebro mediante imágenes de resonancia magnética funcional (fMRI).



¿Como identificar la componente periódica, es decir, que valor o valores asignar a la frecuencia ω?

Conceptos Fundamentales Semana 1

La principal característica de un análisis en series de tiempo es utilizar la información del pasado de la variable para ajustar hacia el futuro.

Modelos Ingenuos

Modelos Ingenuos

- Los modelos ingenuos son un conjunto de ecuaciones, que describen una serie de tiempo de forma heurística.
- Existen dos problemas que se pueden abordar usando este tipo de técnica:
  - Obtener una versión suavizada (eliminar ruido).
  - Representación de la serie y predicción.

Caso Multiplicativo:

Caso Multiplicativo:

$$
\begin{aligned}
\overline{X}_t &= \alpha \frac{X_t}{S_{t-p}} + (1-\alpha)\left(\overline{X}_{t-1} + m_{t-1}\right), & \overline{X}_p &= \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} X_i \\
m_t &= \beta\left(\overline{X}_t - \overline{X}_{t-1}\right) + (1-\beta)m_{t-1}, & m_p &= 0 \\
S_t &= \gamma \frac{X_t}{\overline{X}_t} + (1-\gamma)S_{t-p}, & S_j &= \frac{X_j}{\overline{X}_p}, \\
& & j &= 1, \ldots, p
\end{aligned}
$$

Caso Multiplicativo:

$$\begin{aligned}
\overline{X}_t &= \alpha \frac{X_t}{S_{t-p}} + (1-\alpha)\left(\overline{X}_{t-1} + m_{t-1}\right), & \overline{X}_p &= \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} X_i \\
m_t &= \beta\left(\overline{X}_t - \overline{X}_{t-1}\right) + (1-\beta)m_{t-1}, & m_p &= 0 \\
S_t &= \gamma \frac{X_t}{\overline{\overline{X}}_t} + (1-\gamma)S_{t-p}, & S_j &= \frac{X_j}{\overline{\overline{X}}_p}, \\
& & j &= 1, \ldots, p
\end{aligned}$$

Ecuación de pronóstico

$$\widehat{X}_t(k) = \left(\overline{X}_t + m_t k\right) S_{t-p+k \operatorname{mod}(p)}$$

Modelos Ingenuos

Caso Aditivo:

Caso Aditivo:

$$\begin{aligned}
\overline{X}_t &= \alpha\left(X_t - S_{t-p}\right) + (1-\alpha)\left(\overline{X}_{t-1} + m_{t-1}\right), & \overline{X}_p &= \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} X_i \\
m_t &= \beta\left(\overline{X}_t - \overline{X}_{t-1}\right) + (1-\beta)m_{t-1}, & m_p &= 0 \\
S_t &= \gamma\left(X_t - \overline{X}_t\right) + (1-\gamma)S_{t-p}, & S_j &= X_j - \overline{X}_p, \\
& & j &= 1,\ldots,p
\end{aligned}$$

Caso Aditivo:

$$
\begin{aligned}
\overline{X}_t &= \alpha\left(X_t - S_{t-p}\right) + (1-\alpha)\left(\overline{X}_{t-1} + m_{t-1}\right), & \overline{X}_p = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} X_i \\
m_t &= \beta\left(\overline{X}_t - \overline{X}_{t-1}\right) + (1-\beta)m_{t-1}, & m_p = 0 \\
S_t &= \gamma\left(X_t - \overline{X}_t\right) + (1-\gamma)S_{t-p}, & S_j = X_j - \overline{X}_p, \\
& & j = 1, \ldots, p
\end{aligned}
$$

Ecuación de Pronóstico:

$$\widehat{X}_t(k) = \left(\overline{X}_t + m_t k\right) + S_{t-p+k \operatorname{mod}(p)}$$

Esquema

1. Conceptos Fundamentales Semana 1
   - Modelos Ingenuos
     - Suavizamientos Exponenciales

2. Conceptos Fundamentales Semana 2
     - Método de Descomposición
   - Funciones de autocorrelación muestrales
     - Test de Blancura

Método de Descomposición

Método de Descomposición

Estos métodos asumen que una serie se puede descomponer en partes:

Método de Descomposición

Estos métodos asumen que una serie se puede descomponer en partes:

- Tendencia (T_t).

Método de Descomposición

Estos métodos asumen que una serie se puede descomponer en partes:

- Tendencia (T_t).
- Estacionalidad (S_t).

Método de Descomposición

Estos métodos asumen que una serie se puede descomponer en partes:

- Tendencia (T_t).
- Estacionalidad (S_t).
- Ruido (A_t).

Modelos Ingenuos

Los tres componentes anteriores se pueden relacionar del siguiente modo:

Modelos Ingenuos

Los tres componentes anteriores se pueden relacionar del siguiente modo:

$$
\begin{aligned}
&\text{(Modelo Aditivo)} && X_t = T_t + S_t + A_t \\
&\text{(Modelo Multiplicativo)} && X_t = T_t \cdot S_t \cdot A_t \\
&\text{(Modelo Mixto)} && X_t = T_t \cdot S_t + A_t
\end{aligned}
$$

Modelos Ingenuos

Los tres componentes anteriores se pueden relacionar del siguiente modo:

$$
\begin{aligned}
&\text{(Modelo Aditivo)} && X_t = T_t + S_t + A_t \\
&\text{(Modelo Multiplicativo)} && X_t = T_t \cdot S_t \cdot A_t \\
&\text{(Modelo Mixto)} && X_t = T_t \cdot S_t + A_t
\end{aligned}
$$

Las respectivas ecuaciones de pronóstico son:

$$
\begin{aligned}
&\text{(Modelo Aditivo)} && \widehat{X}_t(k) = \widehat{T}_{t+k} + \widehat{S}_{t+k} \\
&\text{(Modelo Multiplicativo)} && \widehat{X}_t(k) = \widehat{T}_{t+k} \cdot \widehat{S}_{t+k}
\end{aligned}
$$

Modelos Ingenuos

En general para estimar la tendencia podemos utilizas modelos de regresión. Algunos ejemplos:

Modelos Ingenuos

En general para estimar la tendencia podemos utilizas modelos de regresión. Algunos ejemplos:

1. $T_t = a + bt$
2. $T_t = b_0 + b_1 t + \cdot + b_m t^m$
3. $T_t = a \cdot e^{bt}$
4. $T_t = a + b \cdot r^t$ (Exponencial Modificada)

Modelos Ingenuos

En general para estimar la tendencia podemos utilizas modelos de regresión. Algunos ejemplos:

1. $T_t = a + bt$
2. $T_t = b_0 + b_1 t + \cdot + b_m t^m$
3. $T_t = a \cdot e^{bt}$
4. $T_t = a + b \cdot r^t$ (Exponencial Modificada)

Modelos Ingenuos

Una vez estimada la Tendencia, se procede a calcular la componente Estacional, para ello se define:

Una vez estimada la Tendencia, se procede a calcular la componente Estacional, para ello se define:

$$\text{(Aditivo)} \qquad W_t = X_t - \widehat{T}_t$$

$$\text{(Mixto)} \qquad W_t = \frac{X_t}{\widehat{T}_t}$$

Una vez estimada la Tendencia, se procede a calcular la componente Estacional, para ello se define:

$$\text{(Aditivo)} \qquad W_t = X_t - \widehat{T}_t$$

$$\text{(Mixto)} \qquad W_t = \frac{X_t}{\widehat{T}_t}$$

Si el periodo de la serie es P, ejemplo $P = 12$, se tiene

$$S_t = S_{t+12} = S_{t+24} = \cdot = S_{t+k12}$$

Así que basta estimas S_t para $t = 1, \ldots, P$, ejemplo $P = 12$.

Modelos Ingenuos

Se definen

$$e(h) : \text{Promedio de los valores de } W \text{ en el mes } h.$$

$$\bar{e} = \frac{1}{P}\sum_{h=1}^{P} e(h)$$

Luego,

Modelos Ingenuos

Se definen

$$e(h) : \text{Promedio de los valores de } W \text{ en el mes } h.$$

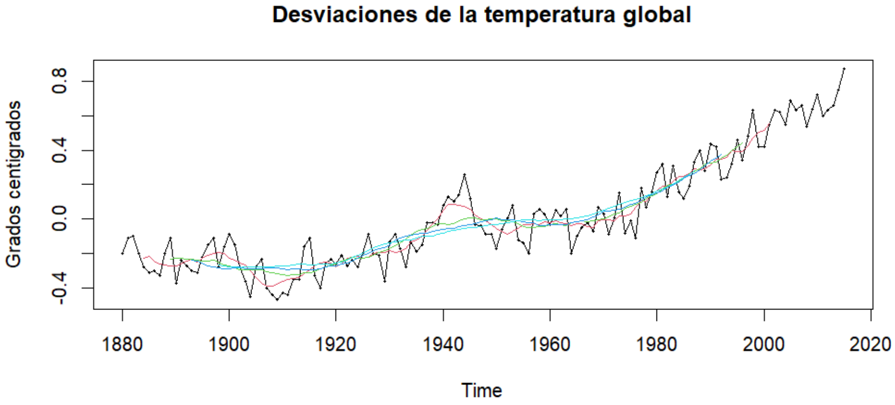
$$\bar{e} = \frac{1}{P} \sum_{h=1}^{P} e(h)$$

Luego,

$$\begin{aligned} &\text{(Aditivo)} \qquad && \widehat{S}_h = e(h) - \bar{e} \\ &\text{(Multiplicativo)} \qquad && \widehat{S}_h = e(h) - (\bar{e} - 1) \end{aligned}$$

Filtros de Media Móvil

Al aplicar filtros de media móvil a la base de temperatura global, se obtiene:



ACF

¿Para que sirven las funciones de autocorrelación muestrales?

Test de Blancura

Propocisión (Test de Box-Pierce-Ljung)

Considere las hipótesis

- H_0: Los residuos no son correlacionados.
- H_1: Los residuos tienen correlación.

Para poner a prueba las hipótesis anterior, se define el estadístico:

$$Q = n(n+2)\sum_{h=1}^{H}\frac{\widehat{\rho}_e^2(h)}{n-h} \quad \xrightarrow[\mathrm{H}_0]{D} \quad \chi^2_{H-p-q}$$

Por lo tanto, se rechaza H_0 con significancia $\alpha\,\%$ si $Q > \chi^2_{H-p-q,1-\alpha}$.

Test de Blancura

Propocisión (Test de Box-Pierce-Ljung)

Considere las hipótesis

- H_0: Los residuos no son correlacionados.
- H_1: Los residuos tienen correlación.

Para poner a prueba las hipótesis anterior, se define el estadístico:

$$Q = n(n+2)\sum_{h=1}^{H}\frac{\widehat{\rho}_e^2(h)}{n-h} \quad \xrightarrow[\mathrm{H}_0]{D} \quad \chi^2_{H-p-q}$$

Por lo tanto, se rechaza H_0 con significancia $\alpha\,\%$ si $Q > \chi^2_{H-p-q,1-\alpha}$.

Obs.: Típicamente, $H = 20$ o $H = \frac{n}{4}$.

¿Alguna Consulta?