PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

UC | Chile

UC | Chile

Algebra Lineal Aplicada para Ciencia de Datos

Clase 4. Matrices y sistemas lineales

Motivación

Motivación

Una base nos permite **representar datos** como una combinación lineal

$$x = c_1 v_1 + \ldots + c_d v_d$$

Para encontrar las coordenadas, necesitamos resolver

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ \vdots \\ v_{1,d} \end{bmatrix} + \ldots + c_d \begin{bmatrix} v_{d,1} \\ \vdots \\ v_{d,d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 v_{1,1} \\ \vdots \\ c_1 v_{1,d} \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} c_d v_{d,1} \\ \vdots \\ c_d v_{d,d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 v_{1,1} + \ldots + c_d v_{d,1} \\ \vdots \\ c_1 v_{1,d} + \ldots + c_d v_{d,d} \end{bmatrix}$$

Motivación

¿Cómo encontramos $c_1, \ldots, c_d \in \mathbb{R}$ para los cuales las ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 v_{1,1} + \ldots + c_d v_{d,1} \\ &\vdots \\ x_d &= c_1 v_{1,d} + \ldots + c_d v_{d,d} \end{aligned}$$

son satisfechas?

Esto nos lleva a estudiar **matrices** y **sistemas lineales**

Matrices

Matrices

Una **matriz** es un arreglo rectangular de m filas y n columnas representado como

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{bmatrix}$$

Los valores $A_{1,1}, \dots, A_{m,n}$ son las **componentes** de la matriz

La componente en la i**-ésima fila** y j**-ésima columna** se denota $A_{i,j}$

Si $m = n$ se dice que la matriz es **cuadrada**

Matrices

La colección de todas las matrices de **tamaño** $m \times n$ se denota $\mathbb{R}^{m\times n}$

Dos matrices $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ son **iguales** si

$$A_{i,j} = B_{i,j} \quad \text{para} \quad i \in \{1, \dots, m\},\ j \in \{1, \dots, n\}.$$

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ entonces su **diagonal** son los elementos

$$A_{1,1}, \dots, A_{n,n}$$

Matrices

Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la podemos **representar por columnas** como

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

donde

$$a_1 = \begin{bmatrix} A_{1,1} \\ \vdots \\ A_{m,1} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad a_n = \begin{bmatrix} A_{n,1} \\ \vdots \\ A_{m,n} \end{bmatrix}$$

Los **vectores columna** son los vectores $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$

Matrices

Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la podemos **representar por filas** como

$$A = \begin{bmatrix} a_1^\top \\ \vdots \\ a_m^\top \end{bmatrix}$$

donde

$$a_1 = \begin{bmatrix} A_{1,1} \\ \vdots \\ A_{1,n} \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad a_m = \begin{bmatrix} A_{m,1} \\ \vdots \\ A_{m,n} \end{bmatrix}$$

Los **vectores fila** son los vectores $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$

Matrices. Ejemplos

El arreglo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

es una matriz de 3×2 y por lo tanto $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

Sus 6 componentes son

$$A_{1,1} = 2,\ A_{1,2} = 1,\ A_{2,1} = 3,\ A_{2,2} = 10,\ A_{3,1} = 1,\ A_{3,2} = 0.$$

Matrices. Ejemplos

La representación en columnas tiene la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mientras que su representación en filas es

$$A = \begin{bmatrix} a_1^\top \\ a_2^\top \\ a_3^\top \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Matrices. Matrices especiales

La **matriz nula** o **matriz cero** es la matriz $0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad 0_{i,j} = 0$$

La **matriz identidad** o **identidad** es la matriz **cuadrada** $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad I_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Matrices. Matrices especiales

Una matriz **cuadrada** $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice **diagonal** si

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_{n,n} \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad A_{i,j} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j$$

La matriz identidad es un ejemplo de matriz **diagonal**

Matrices. Matrices especiales

Una matriz **cuadrada** $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice **triangular superior** si

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_{n,n} \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad A_{i,j} = 0 \quad \text{si} \quad i > j$$

y se dice **triangular inferior** si

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,n} \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad A_{i,j} = 0 \quad \text{si} \quad i < j$$

Matrices. Matrices especiales

La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

es **triangular superior** de tamaño 3×3 y la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es **triangular inferior** de tamaño 3×3

Matrices. Matrices especiales

Una matriz **cuadrada** $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice **simétrica** si

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1,n} & \dots & A_{n,n} \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad A_{i,j} = A_{j,i}$$

La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

es una **matriz simétrica** de tamaño 3×3

Matrices. Matrices especiales

Una matriz **cuadrada** $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice **antisimétrica** si

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -A_{1,n} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad A_{i,j} = -A_{j,i}$$

La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -10 & 15 \\ 10 & 0 & -2 \\ -15 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

es una **matriz antisimétrica** de tamaño 3×3

El producto exterior

El producto exterior

El **producto exterior** entre $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^n$ es la **matriz** de $m \times n$

$$xy^\top = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & \dots & x_1 y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m y_1 & \dots & x_m y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 y^\top \\ \vdots \\ x_m y^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 x & \dots & y_n x \end{bmatrix}$$

El producto exterior. Ejemplo

Por ejemplo, el producto exterior entre

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad y = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

es la matriz de 2×3

$$xy^\top = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 2 \\ -20 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

El producto exterior

Propiedad del producto exterior	Representación matemática
Distributividad con respecto a la suma de vectores por la izquierda	$x(y+z)^\top = xy^\top + xz^\top$
Distributividad con respecto a la suma de vectores por la derecha	$(x+y)z^\top = xz^\top + yz^\top$
Compatibilidad con la multiplicación por escalar	$x(\alpha y)^\top = \alpha xy^\top = (\alpha x)y^\top$
Transpuesta del producto	$(xy^\top)^\top = yx^\top$

El espacio de matrices

El espacio de matrices

Si $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ su **suma** es la matriz

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{1,1} + B_{1,1} & \dots & A_{1,n} + B_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} + B_{m,1} & \dots & A_{m,n} + B_{m,n} \end{bmatrix}$$

y si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ su **multiplicación por escalar** es

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha A_{1,1} & \dots & \alpha A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha A_{m,1} & \dots & \alpha A_{m,n} \end{bmatrix}$$

El espacio de matrices

Definimos para $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ el **inverso aditivo**

$$(-A) = \begin{bmatrix} -A_{1,1} & \dots & -A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -A_{m,1} & \dots & -A_{m,n} \end{bmatrix}$$

Con estas operaciones, el conjunto de matrices $\mathbb{R}^{m \times n}$ se vuelve un **espacio vectorial**

El espacio de matrices

Axioma de espacio vectorial	Representación
Axioma de la adición	$(A+B)+C=A+(B+C)$
Conmutatividad de adición	$A+B=B+A$
Elemento identidad de la adición	$A+0=A$
Elemento inverso de la adición	$A+(-A)=0$
Asociatividad de la multiplicación por escalar	$(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$
Elemento identidad de multiplicación por escalar	$(1)A=A$
Distributividad de la multiplicación por escalar respecto a la adición de vectores	$\alpha(A+B)=\alpha A+\beta B$
Distributividad de la multiplicación por escalar respecto a la adición de escalares	$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

El espacio de matrices

Podemos calcular **combinaciones lineales**

Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

entonces

$$2A + 3B = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 6 \\ 3 & 11 & 8 \end{bmatrix}$$

Transformaciones lineales y el producto matriz-vector

Transformaciones lineales

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ representa una **transformación lineal**

Esta transformación asocia a un vector $\mathbb{R}^n$ otro vector en $\mathbb{R}^m$

El número de componentes de x debe ser igual al número de columnas de A

Transformaciones lineales

A cada vector $x \in \mathbb{R}^n$ le asociamos el vector

$$Ax = \begin{bmatrix} A_{1,1}x_1 + \ldots + A_{1,n}x_n \\ \vdots \\ A_{m,1}x_1 + \ldots + A_{m,n}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} A_{1,j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} A_{m,j}x_j \end{bmatrix}$$

Esta operación se llama **producto matriz-vector** y requiere $2nm - m$ operaciones elementales

Para enfatizar la transformación, escribimos $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Transformaciones lineales

Propiedad del producto matriz-vector	**Representación matemática**
Distributividad con respecto a la suma de vectores	$A(x+y) = Ax + Ay$
Distributividad con respecto a la suma de matrices	$(A+B)x = Ax + Bx$
Compatibilidad con la multiplicación por escalar	$A(\alpha x) = \alpha Ax = (\alpha A)x$

Transformaciones lineales. Ejemplo

Una matriz nos permite calcular **el promedio** entre dos números y su **diferencia**

La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

representa la transformación

$$Ax = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1/2 + x_2/2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1 + x_2)/2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

Transformaciones lineales. Representaciones

Si representamos $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en términos de sus **columnas**

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^m$$

entonces

$$Ax = x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n$$

El producto es la combinación lineal de las columnas de A

Transformaciones lineales. Representaciones

Para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad a_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

el producto matriz vector es

$$Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2 = x_1 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1/2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2/2 \\ -x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1 + x_2)/2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

Transformaciones lineales. Representaciones

Si representamos $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ en términos de sus **filas**

$$A = \begin{bmatrix} a_1^\top \\ \vdots \\ a_m^\top \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$$

entonces

$$Ax = \begin{bmatrix} a_1^\top x \\ \vdots \\ a_m^\top x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot x \\ \vdots \\ a_m \cdot x \end{bmatrix}$$

El producto es el vector de productos interiores entre x y las filas de A

Transformaciones lineales. Representaciones

Para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_1^\top \\ a_2^\top \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad a_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

el producto matriz vector es

$$Ax = \begin{bmatrix} a_1 \cdot x \\ a_2 \cdot x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1/2 + x_2/2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1 + x_2)/2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

Transformaciones lineales. Ejemplo

En $\mathbb{R}^2$ la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

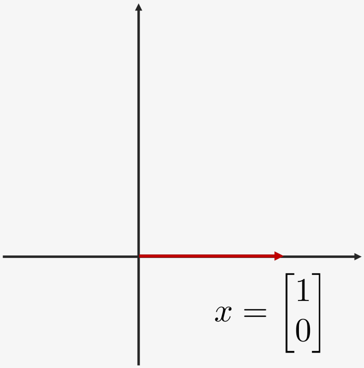
representa una **rotación en un ángulo** θ en sentido antihorario

Transformaciones lineales. Ejemplo

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

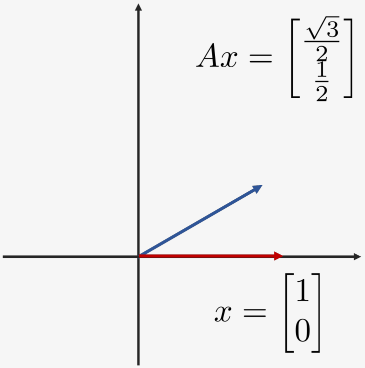


Transformaciones lineales. Ejemplo

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

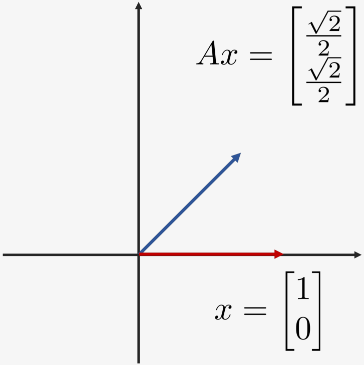


Transformaciones lineales. Ejemplo

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

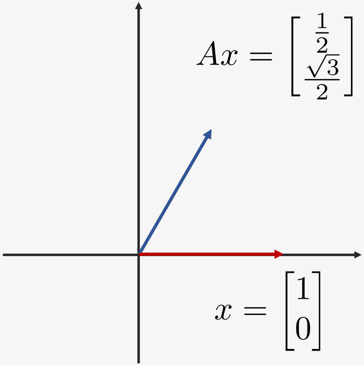


Transformaciones lineales. Ejemplo

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$



UC | Chile

La transpuesta

La transpuesta

A cualquier matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ le podemos asociar una matriz de tamaño $n \times m$

Definimos la **matriz transpuesta** o **transpuesta** como la matriz

$$A^\top = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{m,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \dots & A_{m,n} \end{bmatrix}$$

La matriz transpuesta **intercambia filas por columnas**

Verificamos que $A^\top \in \mathbb{R}^{n \times m}$

La transpuesta. Representaciones

Si representamos $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en términos de sus **columnas**

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$$

entonces la representación de la transpuesta $A^\top$ en términos de sus **filas** es

$$A^\top = \begin{bmatrix} a_1^\top \\ \vdots \\ a_n^\top \end{bmatrix}$$

La transpuesta. Representaciones

Si representamos $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en términos de sus **filas**

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$$

entonces la representación de la transpuesta $A^\top$ en términos de sus **columnas** es

$$A^\top = \begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_m \end{bmatrix}$$

La transpuesta

La transpuesta tiene una propiedad **fundamental**

Si $y \in \mathbb{R}^m$ y $x \in \mathbb{R}^n$ entonces podemos calcular el producto interior entre $y, Ax \in \mathbb{R}^m$

En este caso, **siempre** se tiene

$$y \cdot Ax = (A^\top y) \cdot x$$

La transpuesta. Ejemplo

La transpuesta de la matriz de 2×3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -10 \end{bmatrix}$$

es la matriz de 3×2

$$A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \\ 3 & -10 \end{bmatrix}$$

La transpuesta. Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -10 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad y = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Por una parte,

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0-3 \\ 0+0+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

y

$$y \cdot Ax = 4 + 100 = 104$$

La transpuesta. Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -10 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad y = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Por otra parte,

$$A^\top y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \\ 3 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+0 \\ -10-10 \\ -6-100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -20 \\ -106 \end{bmatrix}$$

y

$$(A^\top y) \cdot x = -2 + 0 + 106 = 104$$

Composición de transformaciones lineales y el producto matricial

Composición de transformaciones

Las matrices $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$ y $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$ representan dos transformaciones lineales

$$B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \quad \text{y} \quad A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$$

Podemos **componer** estas transformaciones para obtener

$$AB : \mathbb{R}^n \xrightarrow{B} \mathbb{R}^k \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m.$$

El número de filas de B debe coincidir con el número de columnas de A

Composición de transformaciones

La transformación AB es representada por la matriz

$$AB = \begin{bmatrix} A_{1,1}B_{1,1} + \ldots + A_{1,k}B_{k,1} & \ldots & A_{1,1}B_{1,n} + \ldots + A_{1,k}B_{k,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1}B_{1,1} + \ldots + A_{m,k}B_{k,1} & \ldots & A_{m,1}B_{1,n} + \ldots + A_{m,k}B_{k,n} \end{bmatrix}$$

Esta operación es el **producto matricial** entre $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$ y $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$ y requiere $mn(2k-1)$ operaciones elementales

Composición de transformaciones

La transformación AB es representada por la matriz

$$AB = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{k} A_{1,k}B_{k,1} & \dots & \sum_{j=1}^{k} A_{1,k}B_{k,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{k} A_{m,k}B_{k,1} & \dots & \sum_{j=1}^{k} A_{m,k}B_{k,n} \end{bmatrix}$$

Esta operación es el **producto matricial** entre $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$ y $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$ y requiere $mn(2k-1)$ operaciones elementales

Transformaciones lineales

Propiedad del producto matricial	Representación matemática
Asociatividad	$A(BC) = (AB)C$
Distributividad con respecto a la suma de matrices por la izquierda	$A(B + C) = AB + AC$
Distributividad con respecto a la suma de matrices por la derecha	$(A + B)C = AC + BC$
Compatibilidad con la multiplicación por escalar	$A(\alpha B) = \alpha AB = (\alpha A)B$
Transpuesta del producto	$(AB)^\top = B^\top A^\top$

Producto matricial. Representaciones

El producto matricial entre $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$ y $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$ tiene múltiples representaciones

Si representamos B en términos de sus **columnas**

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^k$$

entonces la representación de AB en términos de sus **columnas** es

$$AB = \begin{bmatrix} Ab_1 & \dots & Ab_n \end{bmatrix}$$

Producto matricial. Representaciones

Si representamos A en términos de sus **filas**

$$A = \begin{bmatrix} a_1^\top \\ \vdots \\ a_m^\top \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^k$$

entonces la representación de AB en términos de sus **filas** es

$$AB = \begin{bmatrix} (B^\top a_1)^\top \\ \vdots \\ (B^\top a_m)^\top \end{bmatrix}$$

Producto matricial. Representaciones

Si representamos $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$ en términos de sus **filas** y $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$ de sus **columnas**

$$A = \begin{bmatrix} a_1^\top \\ \vdots \\ a_m^\top \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix}$$

entonces

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 \cdot b_1 & \dots & a_1 \cdot b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m \cdot b_1 & \dots & a_m \cdot b_n \end{bmatrix}$$

Producto matricial. Representaciones

Si representamos $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$ en términos de sus **columnas** y $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$ de sus **filas**

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_k \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} b_1^\top \\ \vdots \\ b_k^\top \end{bmatrix}$$

entonces

$$AB = a_1 b_1^\top + \ldots + a_k b_k^\top$$

El espacio nulo y el espacio imagen de una matriz

El espacio nulo y el espacio imagen de una matriz

Podemos asociar a una matriz dos subespacios que serán fundamentales

Representamos $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en términos de sus columnas

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$$

El producto matriz-vector es la **combinación lineal de las columnas**

$$Ax = x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n$$

El espacio nulo de una matriz

El **espacio nulo** de A es el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^n$ para los cuales

$$Ax = 0$$

Escribimos

$$\mathbf{nul}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax = 0\}$$

El espacio nulo es un **subespacio vectorial** de $\mathbb{R}^n$

El espacio nulo de una matriz

Vemos que 0 siempre está en el espacio nulo ya que

$$A0 = 0a_1 + \ldots + 0a_n = 0$$

Cuando este es el único vector en el espacio nulo, las columnas de A son **linealmente independientes**

El espacio imagen de una matriz

El **espacio imagen** de A es el conjunto de todas las **combinaciones lineales de las columnas de** A

$$\mathbf{im}(A) := \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\} = \{\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n x_n : \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

El espacio imagen es un **subespacio vectorial** de $\mathbb{R}^m$

El espacio imagen de una matriz

Vemos que $\mathbf{im}(A)$ contiene todos los vectores de la forma

$$\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n x_n$$

Cuando

$$\mathbb{R}^m = \mathbf{im}(A)$$

las columnas de A **generan** todo el espacio

Decimos en este caso que A tiene **rango completo**

El teorema rango-nulidad

Si bien el espacio nulo y el espacio imagen son subconjuntos de espacios distintos, sus **dimensiones** están relacionadas

Ya que $\mathbf{nul}(A) \subset \mathbb{R}^n$ y que $\mathbf{im}(A) \subset \mathbb{R}^m$ sabemos que

$$\mathbf{dim}\,\mathbf{nul}(A) \leq n \quad \text{y} \quad \mathbf{dim}\,\mathbf{im}(A) \leq m$$

El **teorema de rango-nulidad** nos dice que

$$n = \mathbf{dim}\,\mathbf{nul}(A) + \mathbf{dim}\,\mathbf{im}(A).$$

Relación con la transpuesta

Los espacios nulo e imagen de A están relacionados con aquellos de $A^\top$

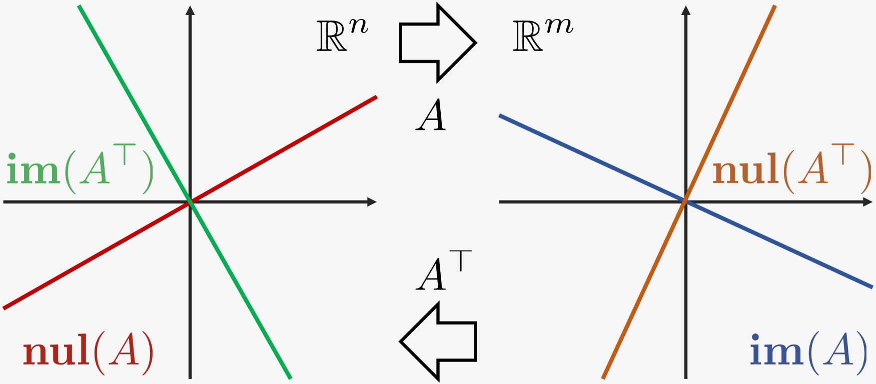
Se tiene que

$$\mathbf{nul}(A^\top) = \mathbf{im}(A)^\perp \qquad \text{y} \qquad \mathbf{im}(A^\top) = \mathbf{nul}(A)^\perp$$

En este caso

$$\mathbf{nul}(A^\top) \subset \mathbb{R}^n \qquad \text{y} \qquad \mathbf{im}(A^\top) \subset \mathbb{R}^m$$

Espacio nulo y espacio imagen



UC | Chile