UC | Chile

UC | Chile

Algebra Lineal Aplicada para Ciencia de Datos

Clase 1. Algebra Lineal: conceptos básicos

Introducción

Introducción y motivación

Para procesar y analizar datos es fundamental representarlos de una manera que nos permita realizar operaciones matemáticas en ellos. Una de las formas más utilizadas de representar datos matemáticamente es a través de un vector. En esta clase, introducimos la noción de vector, junto con las operaciones básicas que podemos realizar con ellos.

UC | Chile

Tema 1: Espacios vectoriales

Espacios vectoriales

Un vector de tamaño n es una lista o tupla de n números, usualmente representados como arreglos (o arrays) verticales, o también llamados vectores columnas. Los elementos o componentes de un vector son los valores en el arreglo (o array).
Si a es un vector de tamaño n, entonces usamos el subíndice i para representar el i-ésimo elemento de a, para i entre 1 y n. Por ejemplo, el vector

$$a = \begin{bmatrix} -1.2 \\ 0.3 \\ 2.1 \\ 5.02 \\ -1/3 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{cases} a_1 = -1.2 \\ a_2 = 0.3 \\ a_3 = 2.1 \\ a_4 = 5.02 \\ a_5 = -1/3 \end{cases}$$

Además definimos la operación **transpuesto** $()^\top$, como el arreglo horizontal

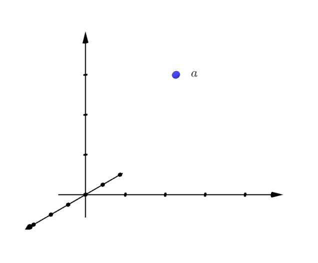
$$a^\top = [-1.2, 0.3, 2.1, 5.02, -1/3]$$

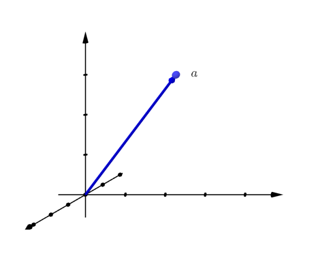
Vectores

Decimos que dos vectores x, y son iguales $x = y$ si ambos son del mismo tamaño, y si cada uno de los elementos son iguales, es decir, $x_i = y_i$.
En el caso que cada uno de los números en las componentes del vector son números reales, como es el caso en la mayoría de las aplicaciones, entonces los llamamos vectores reales. El conjunto de todos los números reales se escribe con $\mathbb{R}$ y el conjunto de todos los vectores reales de tamaño n se denota por $\mathbb{R}^n$. Usaremos el símbolo pertenece $\in$ para denotar que un vector a está en el conjunto $\mathbb{R}^n$.

Ejemplos y aplicaciones de vectores

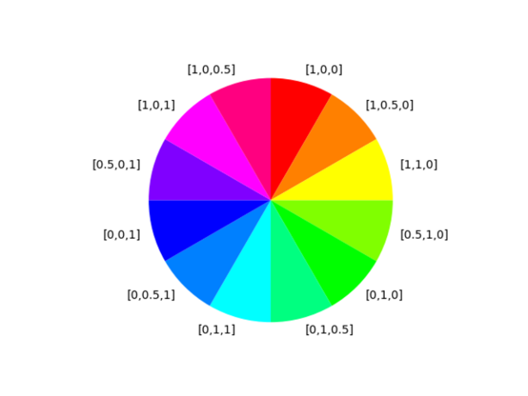
Ubicación y desplazamientos. Un vector puede representar las coordenadas de un punto en 3 dimensiones. De la misma forma el vector puede representar el desplazamiento asociado a un punto en 3 dimensiones





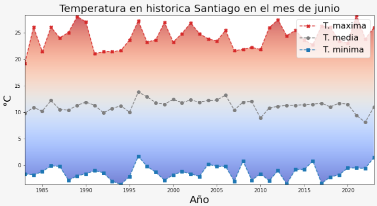
Ejemplos y aplicaciones de vectores

Colores RGB. Otro ejemplo de vectores son los colores RGB. Estos representan basados en la composición de los colores rojo, verde y azul.



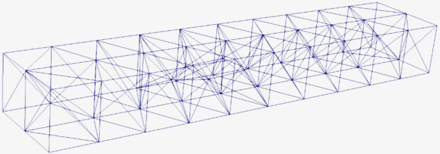
Ejemplos y aplicaciones de vectores

Series de tiempo o señales, señales de audio. (ejemplo UF) Un vector puede representar la evolución en el tiempo de una determinada cantidad, como por ejemplo el valor diario de la Unidad de Fomento (UF). Esto es representado en el gráfico. Otros ejemplos de series de tiempo pueden ser la evolución de la temperatura media, la temperatura máxima y temperatura mínima en Santiago durante el mes de junio desde los años 1983 hasta 2023.



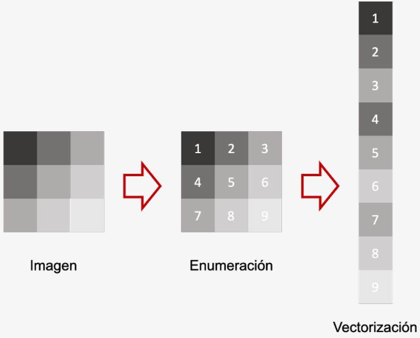
Ejemplos y aplicaciones de vectores

Posición de puntos en un sólido. Ya vimos como ejemplos de vectores puntos en tres dimensiones o vectores posición. Podemos considerar el arreglo de un conjunto de estos vectores como los puntos que definen algún sólido. Esto lo podemos observar con una barra discretizada por el método numérico para simulación de deformaciones. Las intersecciones de líneas son los puntos vectores que controlan el sólido.



Ejemplos y aplicaciones de vectores

Imágenes en escala de grises (imagen como arreglo 2d a vector). Una imagen en escala de grises puede ser representada como un vector donde sus componentes son números entre 0 y 1. Cada pixel de la imagen esta asociado a un valor numérico, luego enumeramos los pixel de la imagen para arreglarla en forma de vector columna.

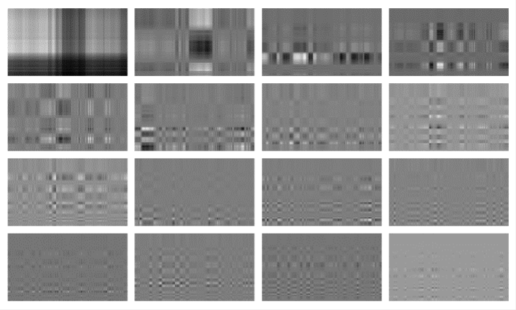


Definición de espacio vectorial

Axioma de espacio vectorial	Representación matemática
Axioma de la adición de vectores	$(x+y)+z = x+(y+z)$
Conmutatividad de adición de vectores	$x+y = y+x$
Elemento identidad de la adición de vectores	$\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n : \quad x+\mathbf{0} = x$
Elemento identidad de la adición de vectores	$(-x) = (-1)x : \quad x+(-x) = 0$
Asociatividad de la multiplicación por escalar	$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
Elemento identidad de multiplicación por escalar	$(1)x = x$
Distributividad de la multiplicación por escalar respecto a la adición de vectores	$\alpha(x+y) = \alpha x + \beta y$
Distributividad de la multiplicación por escalar respecto a la adición de escalares	$(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

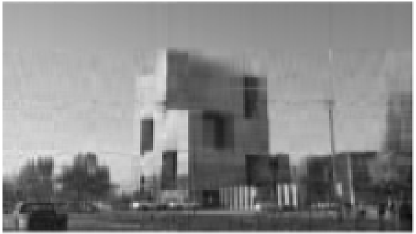
Ejemplo: Adición - Imagen

Ya observamos que cada imagen, en particular en escala de grises, es asociada a un vector. Podemos entonces interpretar la adición de vectores como la adición de imágenes. En el siguiente gráfico presentamos 16 imágenes que al ser sumadas componen una imagen más nítida del centro de innovación UC.



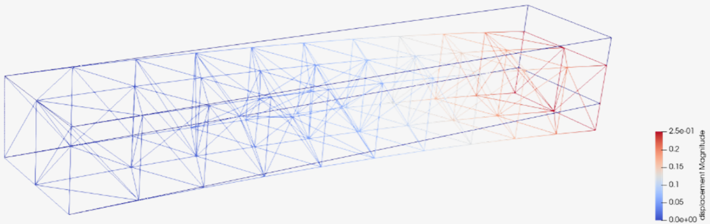
Ejemplo: Adición - Imagen

Ya observamos que cada imagen, en particular en escala de grises, es asociada a un vector. Podemos entonces interpretar la adición de vectores como la adición de imágenes. En el siguiente gráfico presentamos 16 imágenes que al ser sumadas componen una imagen más nítida del centro de innovación UC.



Ejemplo: Escalamiento deformación FEM

Otro ejemplo es la deformación de un conjunto de puntos asociados con la posición de un sólido.



Complejidad de operaciones de vectores

Nḿeros en formato de punto flotante. Números reales son almacenados en el computador usando el formato de punto flotante el cual representa a un número real usando un bloque de 64 bits (0s y 1s), o 8 bytes (grupos de 8 bits). Cada una de las posibles secuencias de bits corresponden a un número real específico. Números que aparecen en aplicaciones son aproximados usando números de punto flotante.

Vectores sparse. Vectores se almacenan como arreglos de números de punto flotante. Así almacenar un vector de tamaño n requiere de $8n$ bytes. Una forma más eficiente de almacenar un vector es usar el formato sparse. Un vector se dice sparse si este contiene un número suficientemente grande de componentes cero. El formato sparse nos permite almacenar solo las componentes no cero del vector $\mathrm{nnz}(x)$.

Complejidad de operaciones de vectores

Operaciones de punto flotante. Operaciones de punto flotante son operaciones aritméticas como adición, sustracción, multiplicación, división, u otras, ejecutadas y representadas en el computador en formato punto flotante. El error asociado a la representación de los números y resultados en el formato se conoce como error de redondeo. Este es relevante en el estudio de estabilidad de algoritmos.
Complejidad. Podemos estimar que tan rápido un computador puede ejecutar algún calculo por el conteo de número total de operaciones de punto flotante o flops. En general decimos que la complejidad de una operación es el número de flops necesario s para ejecutarla en términos del tamaño del input de la operación. Por ejemplo, la complejidad de la operación suma de dos vectores de tamaño n es de $2n$.

Tema 2: Funciones lineales

Definición de funciones lineales

Denotamos por $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a una función f que toma valores en el espacio de vectores reales de tamaño n a valores reales. Un ejemplo de tal función es el producto interior dado un vector.

Decimos que una función f es lineal si satisface las siguientes propiedades para el escalar $\alpha \in \mathbb{R}^n$ y los vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Propiedades de una función lineal	Representación matemática
Homogeneidad	$f(\alpha x) = \alpha f(x)$
Aditividad	$f(x + y) = f(x) + f(y)$

Ejemplos de funciones lineales

1. Producto interior, para un vector fijo $a \in \mathbb{R}^n$, la función que toma un vector x y lo lleva
$$f(x) := a^\top x = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n,$$
es una función lineal. En efecto, se satisface que
$$f(\alpha x) = a^\top(\alpha x) = \alpha(a^\top x)$$
$$f(x+y) = a^\top(x+y) = a^\top x + a^\top y = f(x) + f(y)$$
2. El promedio de un vector
$$f(x) = \mathsf{avg}(x) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$
3. El promedio ponderado por un vector de ponderaciones
$$f(x) = \frac{1}{n}w^\top x = \frac{1}{n}(w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots + w_nx_n)$$

Funciones afín

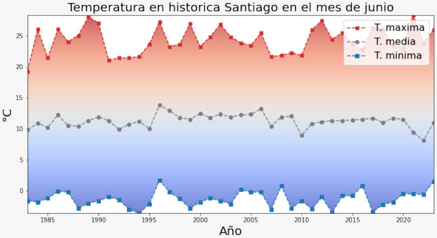
Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice afín si y sólo si puede expresarse como

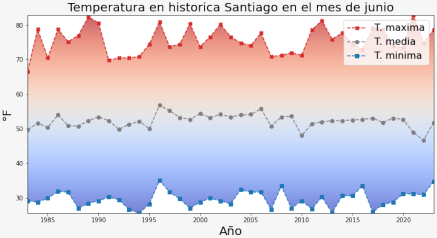
$$f(x) = a^\top x + b$$

Para el vector $a \in \mathbb{R}^n$ y el escalar $b \in \mathbb{R}$.
Observe que una función afín satisface la propiedad de superposición solo su los coeficientes suman 1, es decir

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y), \quad \text{si} \quad \alpha + \beta = 1.$$

Ilustración gráfica de una función afín





Aproximación lineal por expansión de Taylor

Un ejemplo de funcion afin es la aproximación truncada de primer orden por la serie de Taylor. Esta aproximación se define para una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por medio de la aproximación afín

$$\hat{f}(x) = f(z) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(z)(x_1 - z_1) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(z)(x_n - z_n) = f(z) + \nabla f(z)^\top (x - z)$$

donde el gradiente de f está definido por el vector

$$\nabla f(z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(z) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(z) \end{bmatrix}$$

Modelo de Regresión Lineal

Consideramos la función afín como modelo de regresión para un vector de atributos x, llamados regresores, de tamaño n. La función afín está dada por

$$\hat{y} = x^\top \beta + v$$

Donde $\beta \in \mathbb{R}^n$ es un vector y v es un escalar. Acá $\hat{y}$ es llamado predicciones y el escalar v es llamado offset o intercepto del modelo de regresión
Observe que la aproximación lineal (afín) de Taylor es local, y regresión lineal es global.

UC | Chile