UC | Chile

UC | Chile

Algebra Lineal Aplicada para Ciencia de Datos

Clase 3. Independencia lineal y bases

Motivación

Motivación

Los vectores nos permiten **representar datos**.

Las operaciones de suma y multiplicación por escalar nos permiten **combinar vectores** para generar **nuevos vectores**.

Motivación

Serie BRL 2022

Serie JPY 2022

Motivación

$$0.02\mathrm{BRL} - \mathrm{JPY}$$

Motivación

Los vectores nos permiten **representar datos**.

Las operaciones de suma y multiplicación por escalar nos permiten **combinar vectores** para generar **nuevos vectores**.

¿Podemos interpretar nuevos vectores como **nuevos datos**?

¿Cuándo podemos representar un dato en función de otros?

Motivación

Serie EUR 2022

Motivación

Los vectores nos permiten **representar datos**.

Las operaciones de suma y multiplicación por escalar nos permiten **combinar vectores** para generar **nuevos vectores**.

¿Podemos interpretar nuevos vectores como **nuevos datos**?

¿Cuándo podemos representar un dato en función de otros?

Esto nos lleva a estudiar la noción de **combinación lineal**, de **independencia** y **dependencia lineal** y de **base**.

Combinaciónes lineales y espacios generados

Combinaciones lineales

Si $x, y \in \mathbb{R}^d$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ su **combinación lineal** es una expresión de la forma

$$\alpha x + \beta y$$

Combinaciones lineales

Una combinación lineal define un **nuevo vector**

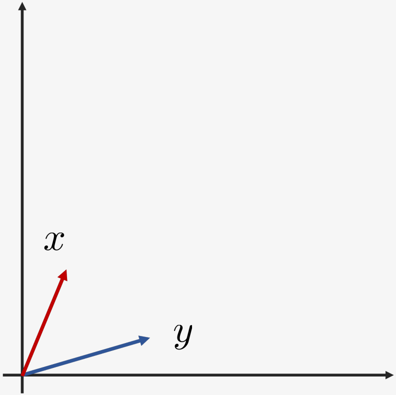
Si

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

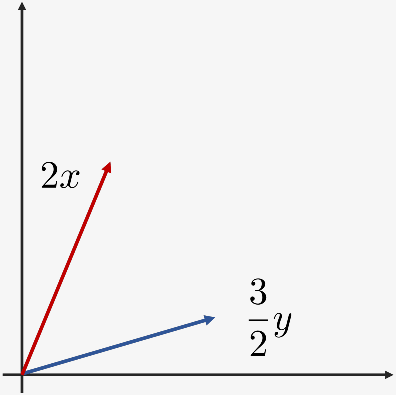
entonces para $\alpha = 2$, $\beta = 3$ su combinación lineal es

$$\alpha x + \beta y = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 20 \end{bmatrix}$$

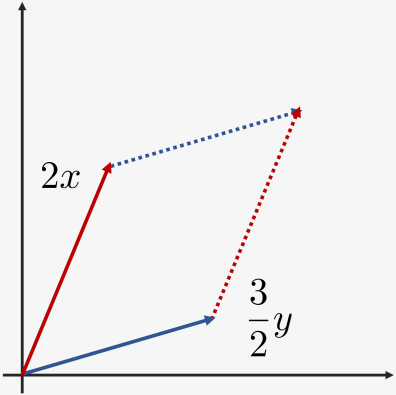
Combinaciones lineales



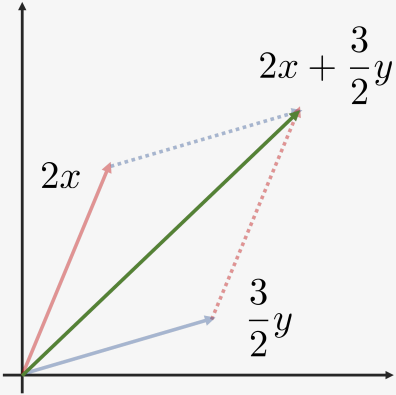
Combinaciones lineales



Combinaciones lineales



Combinaciones lineales



Combinaciones lineales

Las combinaciones lineales se pueden definir para **múltiples vectores**.

Si $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ su **combinación lineal** es la expresión

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$$

Espacio generado

Si $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$ podemos estudiar el conjunto de **todas sus combinaciones lineales**

El **espacio generado** por los vectores $x_1, \ldots, x_n$ es

$$\mathbf{gen}\{x_1, \ldots, x_n\} = \{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n : \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

En otras palabras, es el conjunto de **todas las combinaciones lineales posibles** de los vectores $x_1, \ldots, x_n$

En este contexto, decimos que $x_1, \ldots, x_n$ son los **generadores del espacio**

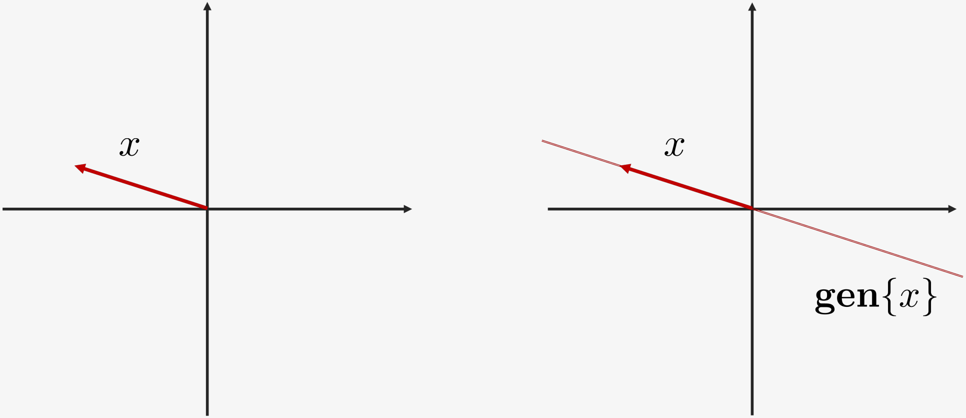
Espacio generado

El espacio generado es un **subespacio vectorial**

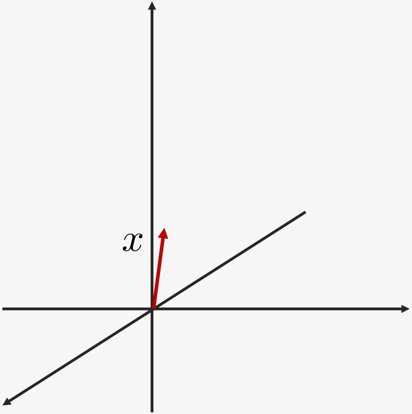
Axioma de subespacio vectorial	Representación matemática
Cerradura con respecto a la suma vectorial	$x, y \in \mathbf{gen}\{x_1, \ldots, x_n\} \;\Rightarrow\; x + y \in \mathbf{gen}\{x_1, \ldots, x_n\}$
Cerradura con respecto a la multiplicación por escalar	$\alpha \in \mathbb{R}, \in \mathbf{gen}\{x_1, \ldots, x_n\} \;\Rightarrow\; \alpha x \in \mathbf{gen}\{x_1, \ldots, x_n\}$

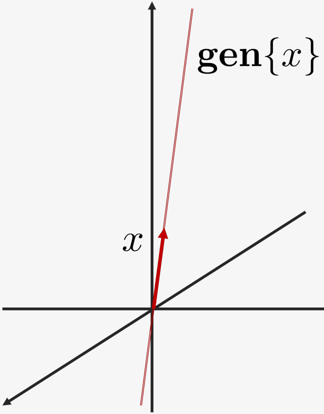
En otras palabras, cualquier combinación lineal de vectores en el espacio generado **pertenece al espacio generado**

Espacio generado

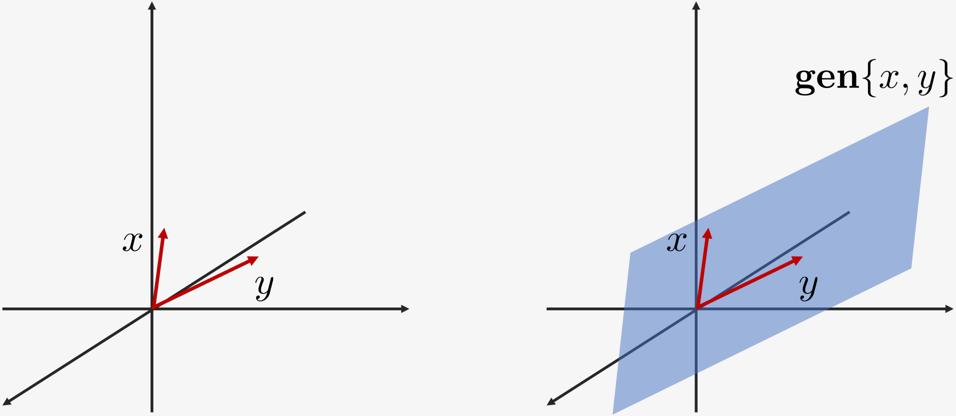


Espacio generado





Espacio generado



Independencia lineal

Independencia lineal

¿Cuándo es un vector una combinación lineal de otros?

Por ejemplo, ¿alguno de los vectores

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -15 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

es combinación lineal del resto?

Independencia lineal

$$x_1 - 2x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -15 \end{bmatrix} = x_2$$

Por lo tanto, x_2 es *redundante* en relación a x_1 y x_3

Independencia lineal

Decimos que $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$ son **linealmente independientes** si

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

En otras palabras, si la **única** forma de representar el vector 0 es multiplicando cada vector por el escalar 0

Independencia lineal

$$x_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

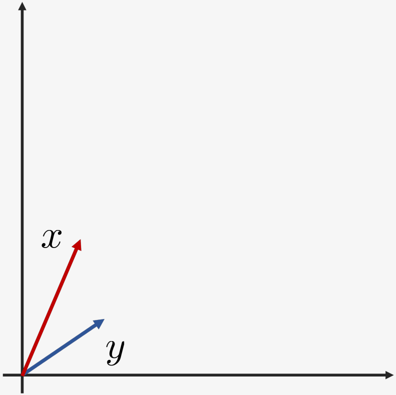
Si $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ entonces

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\alpha_1 \\ 5\alpha_1 \\ 3\alpha_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\alpha_1 + \alpha_2 \\ 5\alpha_1 \\ 3\alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

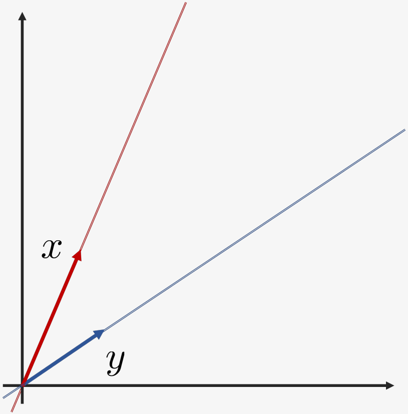
y $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

Los vectores son linealmente independientes

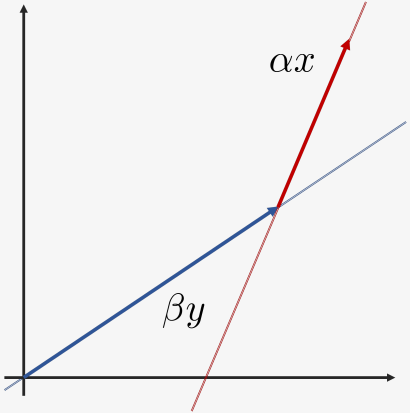
Independencia lineal



Independencia lineal



Independencia lineal



Dependencia lineal

¿Qué ocurre cuando los vectores no son linealmente independientes?

Deben existir $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ **no todos iguales a cero** para los cuales

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$$

Si, p.ej., $\alpha_1 \neq 0$ podemos escribir

$$x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_1 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n$$

Decimos que $x_1, \ldots, x_n$ son **linealmente dependientes**

Dependencia lineal

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -15 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

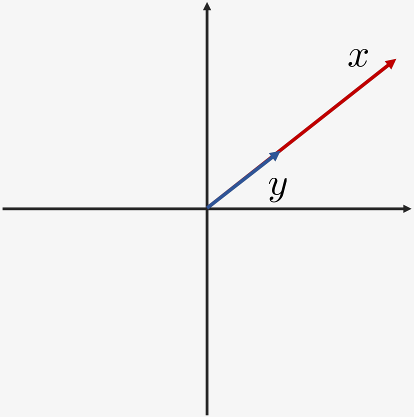
Estos vectores son linealmente dependientes ya que

$$x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$$

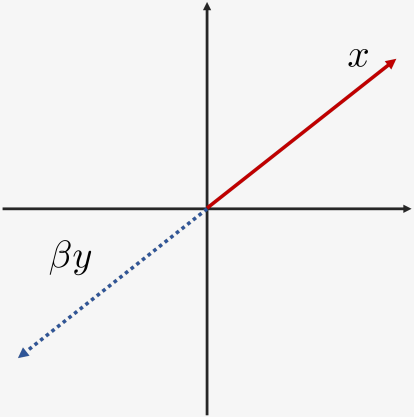
y podemos escribir

$$x_1 = x_2 + 2x_3, \quad x_2 = x_1 - 2x_3 \quad \text{y} \quad x_3 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2$$

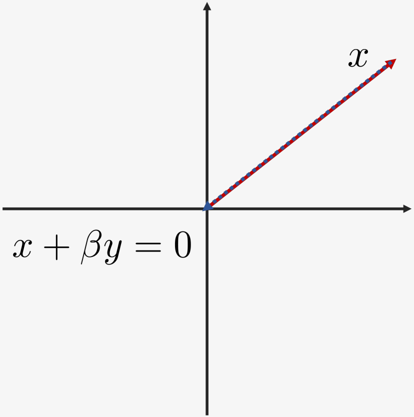
Dependencia lineal



Dependencia lineal



Dependencia lineal



Bases y dimensión de un espacio

Bases

¿Podemos generar $\mathbb{R}^d$ usando una colección $x_1, \ldots, x_n$?

La respuesta es **sí**

Por ejemplo, para la **base canónica** $e_1, \ldots, e_d \in \mathbb{R}^d$ con

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad , e_d = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

se tiene

$$\mathbb{R}^d = \mathbf{gen}\{e_1, \ldots, e_d\}$$

Bases

En otras palabras, **cualquier** $x \in \mathbb{R}^d$ se puede expresar como una **combinación lineal** de $e_1, \ldots, e_d$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + x_d \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 e_1 + \ldots + x_d e_d$$

¿Qué otras colecciones de vectores tienen esta propiedad?

¿Cuántos vectores necesitamos?

Dimensión de un espacio

La **dimensión** de un espacio vectorial es el **tamaño máximo de una colección de vectores linealmente independientes** y el **tamaño mínimo de una colección de vectores que genera todo el espacio**

Esto quiere decir que **cualquier** colección de vectores linealmente independientes que generan todo el espacio **debe** tener exactamente d elementos

Dimensión de un espacio

La dimensión de $\mathbb{R}^d$ es $\mathbf{dim}(\mathbb{R}^d) = d$

La dimensión del espacio $\{0\}$ es $\mathbf{dim}(\{0\}) = 0$

Cualquier **subespacio de** $\mathbb{R}^d$ tiene dimensión **a lo más** d

Intuitivamente, la dimensión es el número de **variables independientes**, **grados de libertad** o número de **parámetros libres** necesarios para representar un vector en $\mathbb{R}^d$

Los problemas en **altas dimensiones** son aquellos para los cuales d es grande

Bases y coordenadas

Decimos que $v_1, \ldots, v_d \in \mathbb{R}^d$ es una **base** de $\mathbb{R}^d$ si **son linealmente independientes** y si **generan todo el espacio**

Decimos que v_i es el i-ésimo elemento de la base

Bases y coordenadas

A cada $x \in \mathbb{R}$ le corresponde una **única** elección $c_1, \ldots, c_d \in \mathbb{R}$ para las cuales

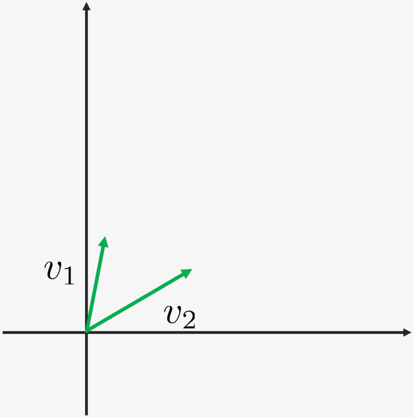
$$x = c_1 v_1 + \ldots + c_d v_d$$

Los escalares $c_1, \ldots, c_d$ son las **coordenadas** de x en la base $v_1, \ldots, v_d$

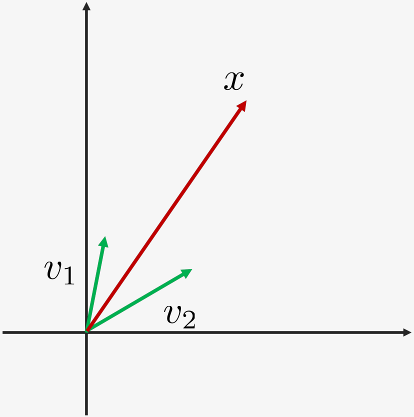
Decimos que c_i es la i-ésima coordenada de x en la base $v_1, \ldots, v_d$

La i-ésima coordenada representa la **contribución de** v_i **al vector** x

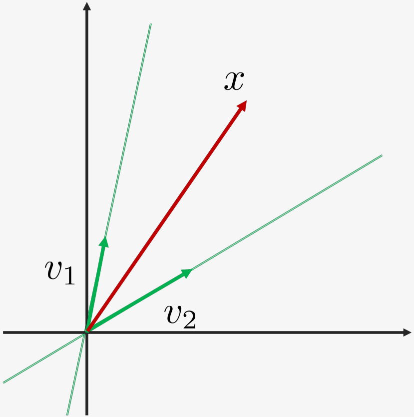
Bases y coordenadas



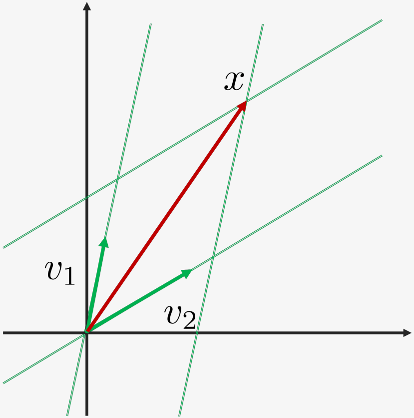
Bases y coordenadas



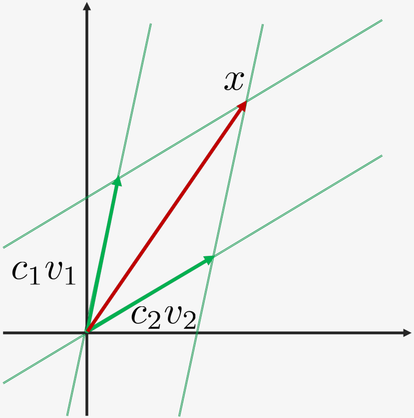
Bases y coordenadas



Bases y coordenadas

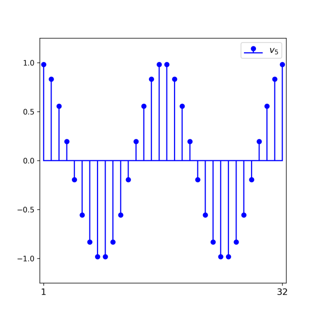


Bases y coordenadas

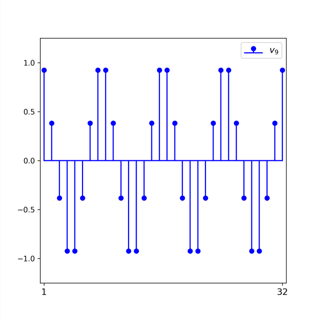


Motivación

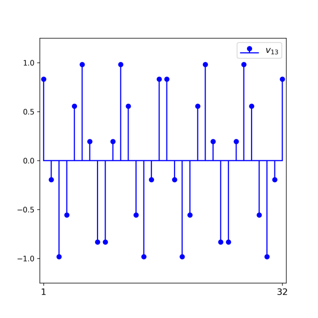
Base del coseno discreto para $d = 32$



v_5



v_9



v_{13}

Bases ortonormales

Bases ortonormales

¿Cómo calculamos las coordenadas de un vector x en una base $v_1, \ldots, v_d$?

Existe un tipo de base para la cual es simple determinar las coordenadas de un vector cualquiera

Bases ortonormales

Decimos que $v_1, \ldots, v_d$ es una **base ortonormal** si

$$v_i \cdot v_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Bases ortonormales

Si $v_1, \ldots, v_d$ es una **base ortonormal** entonces

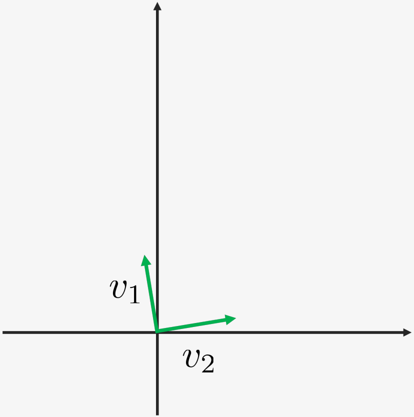
$$x = (v_1 \cdot x)v_1 + \ldots + (v_d \cdot x)v_d$$

y

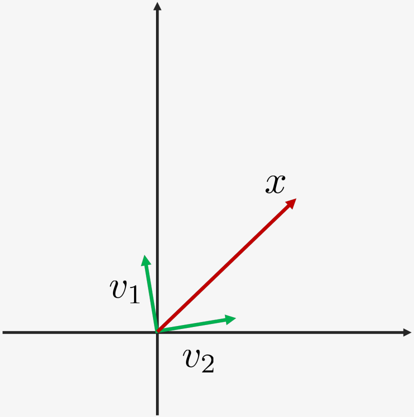
$$\|x\|^2 = (v_1 \cdot x)^2 + \ldots + (v_d \cdot x)^2$$

Este último resultado se conoce como el **teorema de Pitágoras**

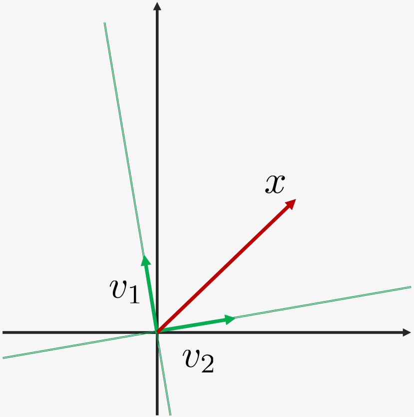
Bases ortonormales



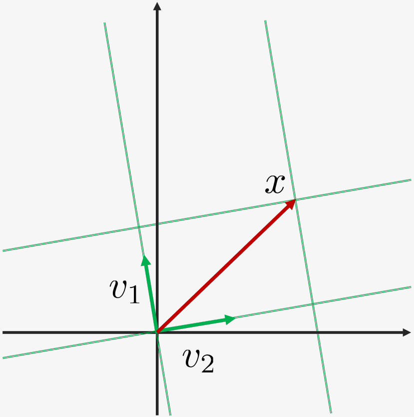
Bases ortonormales



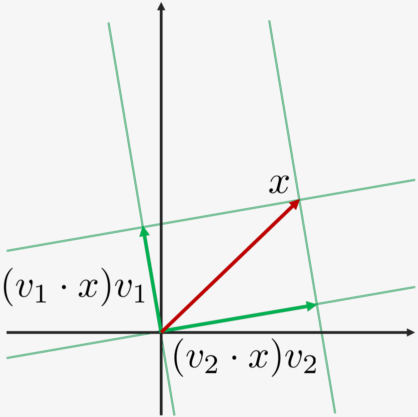
Bases ortonormales



Bases ortonormales



Bases ortonormales



Bases ortogonales

Una base $v_1, \ldots, v_d$ es **base ortogonal** si

$$v_i \cdot v_j = 0 \quad \text{cuando} \quad i \neq j$$

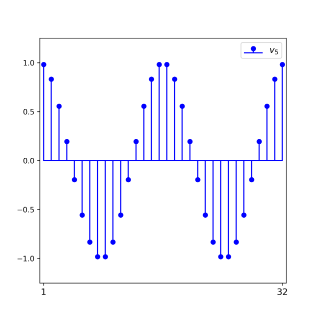
En otras palabras, los vectores son **ortogonales** pero no necesariamente tienen **norma igual a uno**

En este caso, las coordenadas son

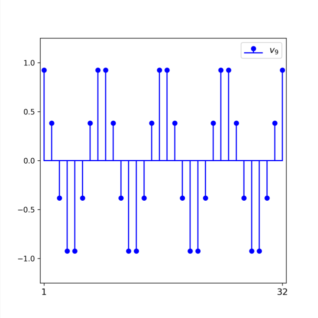
$$x = \frac{v_1 \cdot x}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \ldots + \frac{v_d \cdot x}{v_d \cdot v_d} v_d$$

Bases ortogonales

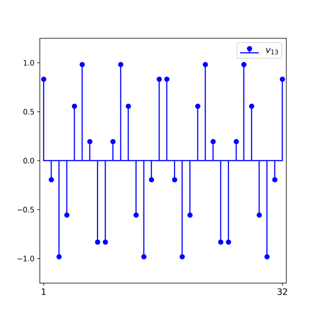
La base del coseno discreto es **ortogonal** para cualquier d



v_5



v_9



v_{13}

UC | Chile