



UC | Chile



UC | Chile

Algebra Lineal Aplicada para Ciencia de Datos



Clase 7. Descomposición en valores propios




- 1 Introducción
- 2 Tema 1: Valores y vectores propios
- 3 Tema 2: PageRank
- 4 Tema 3: Iteración de potencia



UC | Chile

Introducción

Introducción y motivación



Hemos visto como una matriz cuadrada A puede ser considerada como un operador lineal, la cual transforma, como combinación de operaciones como rotaciones, reflexiones o escalamiento, vectores en vectores.

En esta clase veremos un tipo especial de transformaciones con matrices que llamaremos diagonalizables.

Además entenderemos la importancia de encontrar una representación de estas transformaciones. En particular, discutiremos la aplicación de esto para clasificar según importancia páginas web en algoritmos de búsqueda.



UC | Chile

Tema 1: Valores y vectores propios

Definición de valor y vector propio

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Un número λ se dice **valor propio** de A si existe un vector llamado **vector propio** $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que:

$$Av = \lambda v$$

Ejemplo: Considere la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Entonces $\lambda = 2$ y $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, en efecto

$$Av = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda v$$

Polinomio característico

Definición: Sea $A = (A_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y sea $A_{[i,j]}$ la matriz formada al quitar de A la fila i -ésima y la columna j -ésima. Entonces, el **determinante** de A , denotado por $\det(A)$, se define recursivamente por:

- 1 Si $n = 1$, entonces $\det(A) = A_{11}$, la única componente de A .
- 2 Si $n \geq 2$, entonces para un valor fijo $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{(i+j)} A_{ij} \det(A_{[i,j]})$$

Definición: Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. El **polinomio característico** asociado a A es el polinomio de grado n en λ dado por

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Teorema



Un número λ es un valor propio de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si y solo si la matriz $(A - \lambda I)$ es singular, es decir, $\dim(\mathbf{im}(A)) =: \text{rank}(A) < n$. Además, λ satisface la ecuación característica

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0.$$

Ejemplo

Sea la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

- Compruebe que el polinomio característico es $p_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$.
- Compruebe que el valor propio $\lambda_1 = 2$ y el vector propio asociado es

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Compruebe que el valor propio $\lambda_2 = 1$ tiene dos vectores propios asociados es

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Propiedades



Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- La matriz A posee al menos 1 y a lo más n valores propios, los cuales pueden ser complejos.
- La matriz A^T tiene los mismos valores propios que la matriz A .
- Si $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ son valores propios distintos de A entonces los vectores propios correspondientes v_1, \dots, v_k son linealmente independientes.
- Si A tiene n valores propios distintos y reales entonces los vectores propios asociados forman una base de \mathbb{R}^n .
- La matriz A es singular si y solo si $\lambda = 0$ es valor propio de A .

Matrices diagonalizables

Definición: Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es **diagonalizable** si existe una matriz no singular V y una matriz diagonal $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tales que

$$A = V\Lambda V^{-1},$$

es decir, A es semejante a la matriz diagonal Λ .

Teorema. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A son todos distintos, entonces los vectores propios asociados v_1, \dots, v_n son linealmente independientes y la matriz A es diagonalizable

$$A = V\Lambda V^{-1} = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix}^{-1}$$

Matrices diagonalizables



Teorema. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica ($A = A^\top$). Entonces A existe una matriz Q ortogonal y una matriz diagonal $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tales que

$$A = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda Q^\top.$$

Propiedad. Si λ y v son valor y vector propio de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, entonces, λ^2 y v son valor y vector propio de $A^2 = AA$.

$$Av = \lambda v \quad \implies \quad A^2v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda Av = \lambda \lambda v = \lambda^2 v.$$

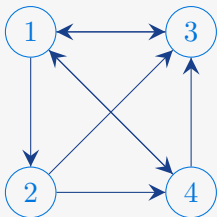


UC | Chile

Tema 2: PageRank

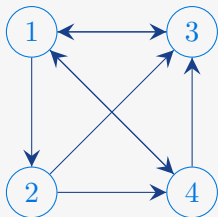
Descripción del problema

Nos interesa una web d n -páginas, donde cada página está indexada con $1 \leq k \leq n$. Denotamos por x_k el puntaje de relevancia de la página k en la web. Así si para dos páginas i y j tenemos que $x_j > x_i$ entonces concluimos que la página j es mas relevante que la página i .



Descripción del problema

Nos interesa una web d n -páginas, donde cada página está indexada con $1 \leq k \leq n$. Denotamos por x_k el puntaje de relevancia de la página k en la web. Así si para dos páginas i y j tenemos que $x_j > x_i$ entonces concluimos que la página j es mas relevante que la página i .

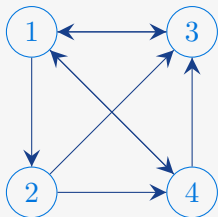


Matriz de conectividad

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Descripción del problema

Nos interesa una web d n -páginas, donde cada página está indexada con $1 \leq k \leq n$. Denotamos por x_k el puntaje de relevancia de la página k en la web. Así si para dos páginas i y j tenemos que $x_j > x_i$ entonces concluimos que la página j es mas relevante que la página i .



Matriz de conectividad

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vector de relevancia

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Problema



La solución anterior solo considera el número de páginas que llegan a una determinada, sin considerar la relevancia de estas.

Problema



La solución anterior solo considera el número de páginas que llegan a una determinada, sin considerar la relevancia de estas.

Cómo incluir la relevancia de las páginas?

Problema



La solución anterior solo considera el número de páginas que llegan a una determinada, sin considerar la relevancia de estas.

Cómo incluir la relevancia de las páginas?

 Bryan, K., & Leise, T. (2006). The \$25,000,000,000 eigenvector: The linear algebra behind Google. *SIAM review*, 48(3), 569-581.

Algoritmo PageRank



Calcularemos el puntaje de relevancia de la página j como la suma de los puntajes de relevancia de las páginas que tienen link a j , es decir:

$$x_1 = x_3 + x_4, \quad x_2 = x_1, \quad x_3 = x_1 + x_2 + x_4, \quad x_4 = x_1 + x_2$$

Pero obviamente x_3 y x_4 dependen de x_1 .

Si la página j contiene n_j links, uno de ellos a k , entonces el puntaje x_k se incrementará por x_j/n_j .

Ejemplo: El nodo 1 apunta a los nodos 2, 3, 4, entonces contiene 3 links, así aportará cada uno $x_1/3$.

Algoritmo PageRank



Calcularemos el puntaje de relevancia de la página j como la suma de los puntajes de relevancia de las páginas que tienen link a j , es decir:

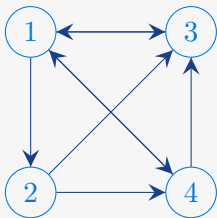
$$x_1 = x_3 + x_4, \quad x_2 = x_1, \quad x_3 = x_1 + x_2 + x_4, \quad x_4 = x_1 + x_2$$

Pero obviamente x_3 y x_4 dependen de x_1 .

Si la página j contiene n_j links, uno de ellos a k , entonces el puntaje x_k se incrementará por x_j/n_j .

Ejemplo: El nodo 1 apunta a los nodos 2, 3, 4, entonces contiene 3 links, así aportará cada uno $x_1/3$.

Algoritmo PageRank

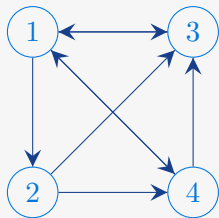


Matriz link

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Buscamos $Ax = x$

Algoritmo PageRank



Matriz link

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Buscamos $Ax = x$

Solución es el vector:

$$x = \begin{bmatrix} 12/31 \\ 4/31 \\ 9/31 \\ 6/31 \end{bmatrix}$$

Como calculamos este vector?



UC | Chile

Tema 3: Iteración de potencia

Algoritmos para el cálculo de valores propios

Iteración de potencia: genera una aproximación del vector propio correspondiente al valor propio de mayor magnitud de A .

Inicializar x_0 : $\|x_0\|_1 = 1$,

iteración k : $x^{(k)} = Ax^{(k-1)}$

Ejemplo: Considere la matriz de link:

$$x^{(0)} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x^{(1)} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/12 \\ 13/48 \\ 7/48 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 11/32 \\ 1/6 \\ 9/32 \\ 5/24 \end{bmatrix}$$



UC | Chile