

Ecuaciones Problema de N-Cuerpos

L. Guevara*

Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia
(12 DE MARZO DE 2023)

Resumen

En este documento se contextualiza el problema de N-Cuerpos y se deducen el sistema de ecuaciones de primer orden asociadas al problema

I. DESARROLLO

En un sistema de N cuerpo con masas m_1, m_2, \dots, m_N tenemos que la fuerza neta sobre la i -ésima masa está dada por:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -G \sum_{j \neq i} m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}$$

tomando $\mathbf{s}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, tenemos que

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -G \sum_{j \neq i} m_j \frac{\mathbf{s}_{ij}}{|\mathbf{s}_{ij}|^3}$$

el lado izquierdo corresponde a la multiplicación matricial de la matriz S , definida por

$$(S)_{ij} = \begin{cases} \frac{\mathbf{s}_{ij}}{|\mathbf{s}_{ij}|^3} & \text{sí } i \neq j, \\ 0 & \text{sí } i = j, \end{cases}$$

y el vector $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$. Es decir, que la fuerza neta sobre la i -ésima partícula es:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -G (S\mathbf{m})_i$$

Ahora, tomando $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$, tenemos que las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_i &= -G (S\mathbf{m})_i \\ \dot{\mathbf{r}}_i &= \mathbf{v}_i, \end{aligned}$$

conforman un sistema de ecuaciones de primer orden para el problema de N cuerpos.

Por ejemplo, para 4 cuerpos se tiene:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_1 &= -Gm_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3} - Gm_4 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4|^3} \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -Gm_1 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} - Gm_3 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|^3} - Gm_4 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4|^3} \\ \ddot{\mathbf{r}}_3 &= -Gm_1 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} - Gm_2 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|^3} - Gm_4 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4|^3} \\ \ddot{\mathbf{r}}_4 &= -Gm_1 \frac{\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1|^3} - Gm_2 \frac{\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3|^3} \end{aligned}$$

Tomando $\mathbf{s}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\mathbf{s}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{s}_{23} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3$, $\mathbf{s}_{32} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$, $\mathbf{s}_{43} = \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3$, $\mathbf{s}_{14} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4$, $\mathbf{s}_{13} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3$, $\mathbf{s}_{31} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{s}_{24} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_1 &= Gm_2 \frac{\mathbf{s}_{12}}{|\mathbf{s}_{12}|^3} + Gm_3 \frac{\mathbf{s}_{13}}{|\mathbf{s}_{13}|^3} - Gm_4 \frac{\mathbf{s}_{14}}{|\mathbf{s}_{14}|^3} \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -Gm_1 \frac{\mathbf{s}_{21}}{|\mathbf{s}_{21}|^3} + Gm_3 \frac{\mathbf{s}_{23}}{|\mathbf{s}_{23}|^3} - Gm_4 \frac{\mathbf{s}_{24}}{|\mathbf{s}_{24}|^3} \\ \ddot{\mathbf{r}}_3 &= -Gm_1 \frac{\mathbf{s}_{31}}{|\mathbf{s}_{31}|^3} - Gm_2 \frac{\mathbf{s}_{32}}{|\mathbf{s}_{32}|^3} + Gm_4 \frac{\mathbf{s}_{34}}{|\mathbf{s}_{34}|^3} \\ \ddot{\mathbf{r}}_4 &= Gm_1 \frac{\mathbf{s}_{41}}{|\mathbf{s}_{41}|^3} + Gm_2 \frac{\mathbf{s}_{42}}{|\mathbf{s}_{42}|^3} - Gm_3 \frac{\mathbf{s}_{43}}{|\mathbf{s}_{43}|^3} \end{aligned}$$

por lo que:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_1 \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 \\ \ddot{\mathbf{r}}_3 \\ \ddot{\mathbf{r}}_4 \end{pmatrix} = -G \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mathbf{s}_{12}}{|\mathbf{s}_{12}|^3} & \frac{\mathbf{s}_{13}}{|\mathbf{s}_{13}|^3} & \frac{\mathbf{s}_{14}}{|\mathbf{s}_{14}|^3} \\ \frac{\mathbf{s}_{21}}{|\mathbf{s}_{21}|^3} & 0 & \frac{\mathbf{s}_{23}}{|\mathbf{s}_{23}|^3} & \frac{\mathbf{s}_{24}}{|\mathbf{s}_{24}|^3} \\ \frac{\mathbf{s}_{31}}{|\mathbf{s}_{31}|^3} & \frac{\mathbf{s}_{32}}{|\mathbf{s}_{32}|^3} & 0 & \frac{\mathbf{s}_{34}}{|\mathbf{s}_{34}|^3} \\ \frac{\mathbf{s}_{41}}{|\mathbf{s}_{41}|^3} & \frac{\mathbf{s}_{42}}{|\mathbf{s}_{42}|^3} & \frac{\mathbf{s}_{43}}{|\mathbf{s}_{43}|^3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{pmatrix}$$

* lpguevarad@unal.edu.co
