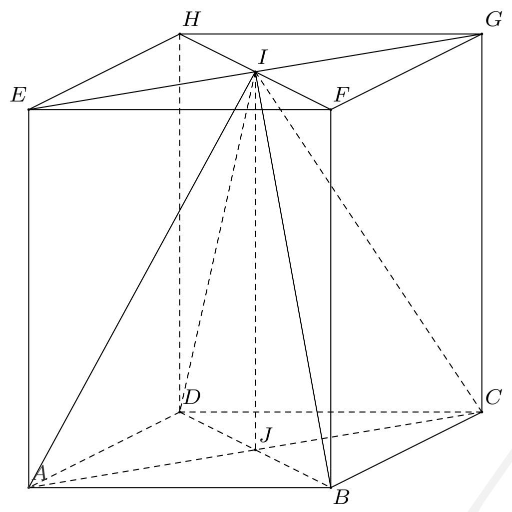
CEG ZOGBO
03 BP 1026 Cotonou
☎: 21380552

Année-Scolaire : 2018 – 2019
Classe: 1^{ere} D
Durée: 3 Heures

PREMIER DEVOIR DU SECOND SEMESTRE

Epreuve: Mathématiques

Contexte:



Le coffre-fort de la l'entreprise GP2BD-SERVICES a la forme du cube représenté par le dessin de la figure ci-contre. Il est sécurisé par un code à trois chiffres deux à deux distincts, commençant par 1 et dont les deux autres chiffres sont des nombres premiers inférieur à 5 et diviseurs communs de 12 et 18. Le Directeur de l'entreprise désire récupérer un document important dans ce coffre-fort et constate qu'il ne se rappelle plus du code. Affolé, il sollicite le secours de son fils Donald, élève en classe de premières C pour l'aider à ouvrir ce coffre. Impressionné par la forme cubique du coffre-fort, Donald décide de revoir quelques propiétés géométriques relatives à la forme de ce solide.

Tâche: Tu vas aider donald et son papa en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1

1. a. Détermine les coordonnées des points B, D et G dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DH}\right)$.

   b. Justifie que le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DH}\right)$ est orthonormal.

2. a. Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{AG}$.

   b. Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont coplanaires.

3. a. Démontre que $(CE) \perp (BDG)$.

   b. Démontre que le plan (BDG) est perpendicaliare aux plans (CFE) et (CGE).

4. Détermine l'ensemble des diviseurs premiers des nombres 12 et 18 puis déduisen le code du coffre-fort sachant que le chiffre des dizaines et supérieur au chiffre des unités.

Problème 2

Le coffre-fort est réalisé à l'aide des matériels spécifiques codés par $A = \cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{5\pi}{12} + \cos\frac{7\pi}{12} + \cos\frac{11\pi}{12}$. Sachant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ et $2\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

5. a. Détermine $\cos\frac{\pi}{12}, \cos\frac{7\pi}{12}$ et $\cos\frac{\pi}{8}$.

   b. Détermine le code A.

   c. Déduis de ce qui précède la valeur de $B = \cos\frac{5\pi}{12} + \cos\frac{11\pi}{12}$

6. Démontre que

   a. $\forall x \in \mathbb{R}, \cos 5x = \left(16\cos^4 x - 20\cos^2 x + 5\right)\cos x$.

   b. $\forall x \in \mathbb{R}, 1 - \cos 5x = (1 - \cos x)\left(4\cos^2 x + 2\cos x - 1\right)^2$.

   c. Justifie que $\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}$ sont solution de l'équation $\cos 5x = 1$

7. a. Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $4X^2 + 2X - 1 = 0$.

   b. En utilisant les questions 5-b et 5-c, justifie que $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$ sont solutions de l'équation $4X^2 + 2X - 1 = 0$.

   c. Déduis-en la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$.

8. a. Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $\cos x = 1$.

   b. Résous dans $\mathbb{R}^2$, le système $\begin{cases} \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{3}+1}{4} \\ \sin x \sin y = \dfrac{\sqrt{3}-1}{4} \end{cases}$

Problème 3

Le but du DG GP2BD-SERVICES est de réaliser un chiffre d'affaire suivant les variations de la fonction h définie par $\begin{array}{rccc} h: & [0;+\infty[& \longrightarrow & [0;+\infty[\\ & x & \longmapsto & x + \sqrt{x} \end{array}$. Mais il compris que la quantité de travail à fournir doit avoir les mêmes variations que celles de la fonction g définie par $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & C_x^{x-2} + \sqrt{x} \end{array}$.

9. Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions g et h. Les fonctions g et h sont-elles des applications? justifie ta réponse.

10. a. Démontre que $\forall x \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}, g(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8} + \sqrt{x}$.

    b. Détermine par g, l'image de 9.

11. a. Démontre que:

$$\forall y \geq 0, h(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{2} = \sqrt{y + \frac{1}{4}} \text{ ou } \sqrt{x} + \frac{1}{2} = -\sqrt{y + \frac{1}{4}}$$

b. Démontre h est une surjection de $[0; +\infty[$ sur $[0; +\infty[$.

c. Démontre que $\forall a, b \in [0; +\infty[, h(a) = h(b) \Leftrightarrow a = b$

12. a. Démontre que h admet une bijection réciproque h^{-1}.

b. Résous dans $[0; +\infty[$, l'équation $X^2 + X - 6 = 0$ et déduis-en $h^{-1}(6)$