2
Grundlæggende mængdelære

Dette kapitel er ment som en kort genopfriskning af grundlæggende begreber inden for mængdelære. De er centrale i resten af bogen. Også personer med et godt kendskab til mængdelære bør kigge i dette kapitel for at sikre sig kendskab til notationen.

2.1 Matematisk induktion

I datalogi beviser vi ofte sætninger ved brug af matematisk induktion. Denne enkle bevisteknik er særdeles nyttig når vi vil bevise sætninger på formen

For ethvert naturligt tal $k \geq c$ gælder at ...

Den underliggende idé i matematisk induktion er at vise at vores påstand gælder for $k = c$ og bliver bevaret, når vi tæller videre. Strategien er da følgende:

1. *Basistrinnet* viser at sætningen er sand for den mindste k-værdi, dvs. for $k = c$.
2. *Induktionsskridtet* viser at hvis vi antager at sætningen gælder for et vilkårligt k, så gælder den også for $k + 1$.

Her er et lille eksempel på hvordan man bruger bevisteknikken.

Sætning 2.1 *For ethvert naturligt tal $k \geq 1$, gælder det om summen $S(k)$ defineret ved*

$$S(k) = 1 + \ldots + k = \sum_{i=1}^{k} i$$

at $S(k) = \frac{k(k+1)}{2}$.

Bevis Dette er en påstand på formen 'for ethvert naturligt tal k gælder ...' så vi laver induktion i k.

Basistrin – $k = 1$: Vi har at $\sum_{i=1}^{k} i = 1$ og at $\frac{1(1+1)}{2} = 1$, så resultatet gælder for basistrinnet.

Induktionsstep – antag for k, vis for $k+1$: Her har vi som induktionsantagelse at $S(k) = \frac{k(k+1)}{2}$. Vi skal nu vise at $S(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Summen $S(k+1)$ kan skrives som

$$S(k+1) = 1 + \ldots + k + (k+1) = \overbrace{1 + \ldots + k}^{S(k)} + (k+1)$$

Bemærk nu at de første k led i denne sum summerer op til $S(k)$. Pr. induktionsantagelsen har vi at $S(k) = \frac{k(k+1)}{2}$, så

$$S(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

Ved at sætte på fælles brøkstreg får vi

$$S(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

som var det, vi skulle vise.

□

Sommetider er det bekvemt at vise en variant af induktionsteknikken som kaldes *det stærke induktionsprincip*. For at vise en påstand på formen

For ethvert naturligt tal $k \geq c$ har vi at ...

gælder for alle k, gør vi følgende:

1. I basistrinnet beviser vi påsanden for $k = c$.
2. I induktionsskridtet antager vi at påstanden gælder for alle $k' \leq k$ og viser påstanden for $k+1$.

2.2 Logisk notation

I resten af bogen bruger vi den sædvanlige logiske notation, men på uformel vis, dvs. vi lægger os ikke fast på en bestemt logik som alle udsagn skal formuleres inden for.

2.2.1 Boolske konnektiver

Sommetider benytter vi os af de Boolske konnektiver $\wedge$ (og), $\vee$ (eller) og $\neg$ (ikke). Det vigtigste at huske om det logiske 'eller' $\vee$ kræver at *mindst ét* af de logiske udsagn er sandt for at hele udsagnet kan blive sandt. Derfor er

$$2 + 2 = 4 \vee 3 + 1 = 4$$

sandt, og det gælder også for

$$2 + 2 = 5 \vee 2 + 2 = 4$$

mens

$$2 + 2 = 5 \vee 2 + 2 = 3$$

er falsk.

2.2.2 Kvantorer

Vi bruger ofte de to kvantorer kendt fra prædikatlogik.

- *Alkvantoren* $\forall$ betyder 'for alle'. Vi kan f.eks. skrive

  $$\forall x.2x = x + x$$

  som skal læses som at det for alle tal x gælder, at $2x$ er lig med $x + x$.
- *Eksistenskvantoren* $\exists$ betyder 'der eksisterer'. Vi kan bruge eksistenskvantorer til at skrive f.eks.

  $$\exists y.y > 0$$

  som skal læses som at der findes et tal y som er skarpt større end 0.

2.3 Mængder

En *mængde* er en helt vilkårlig samling. Man kan tale om f.eks. mængden af hele tal, mængden af datalogistuderende eller mængden af lande i Afrika. Mængdens bestanddele kaldes dens *elementer*. I en mængde må ethvert element forekomme en og kun en gang. En mængde kan beskrives på *listeform* ved, at man opremser dens elementer, anført i krøllede parenteser ('tuborger'). Hvis x er element i mængden $\mathbf{A}$ skriver vi $x \in \mathbf{A}$. Hvis x *ikke* er element i mængden $\mathbf{A}$ skriver vi $x \notin \mathbf{A}$.

Eksempel 2.2 $\{1, 2, 42\}$ er en mængde der som elementer har de hele tal 1, 2 og 42. $\{a, b, 47, \text{Sverige}\}$ er en mængde der som elementer har bogstaverne a og b, det hele tal 47 og landenavnet Sverige. Vi har at $1 \in \{1, 2, 42\}$ men at $3 \notin \{1, 2, 42\}$.

Man kan også definere mængder ved *mængdeabstraktion*. Dette gør man ved mellem tuborger at definere dels hvilket univers, elementer kan tages fra, dels hvilke betingelser et element skal opfylde for at kunne være med.

Eksempel 2.3 Lad $\mathbb{N}$ være mængden af naturlige tal, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$.

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \exists i \in \mathbb{N} : n = i^2\}$$

betegner mængden af kvadrattal.

Når vi benytter os af kvantorer, kan vi begrænse vores kvantificering ved at *kvantificere over en mængde* så vi kan skrive f.eks.

$$\forall x \in \mathbb{N}. x + x \geq x \tag{2.1}$$

Overvejelse 2.4 Hvordan skal vi læse (2.1)?

I denne fremstilling vil vi som hovedregel skrive mængder med **fed skrift** og altid skrive dem med **Stort Begyndelsesbogstav**. Elementer i mængder skrives aldrig med fed, og med ganske enkelte undtagelser (blandt andet i kapitel 1 og frem, hvor S betegner et element i mængden **Kom** og i kapitel 6 hvor D_V betegner et element i **ErkV** og D_P betegner et element i mængden **ErkP**), skrives elementer med småt begyndelsesbogstav. Så $\mathbf{Env}_{\mathbf{V}}$ er en *mængde*, mens env_v er et *element i en mængde*.

Man kan sammenligne mængder: Notationen $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ betyder at det gælder for alle x at hvis $x \in \mathbf{A}$ så $x \in \mathbf{B}$. Vi siger, at $\mathbf{A}$ er en *delmængde af* ***B*** . To mængder er ens, hvis de indeholder præcis de samme elementer, d.v.s. at de er hinandens delmængde. Hvis man vil vise at $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, skal man derfor vise at $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ og $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$.

2.4 Operationer på mængder

Mængdeoperationerne gør det muligt at bygge nye mængder fra gamle.

2.4.1 Foreningsmængde

Lad $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ være mængder. Vi kan da definere

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{x \mid x \in \mathbf{A} \text{ eller } x \in \mathbf{B}\}$$

$\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ kaldes *foreningsmængden* af $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$.

Eksempel 2.5 Lad $\mathbf{A} = \{1, 2\}$ og $\mathbf{B} = \{2, 3\}$. Da er $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{1, 2, 3\}$.

Overvejelse 2.6 Hvis $\mathbf{A}$ er en endelig mængde med m elementer og $\mathbf{B}$ er en endelig mængde med n elementer, hvor mange elementer er der da *højst* i $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$?

2.4.2 Fællesmængde

Lad $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ være mængder. Vi kan da definere

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{x \mid x \in \mathbf{A} \text{ og } x \in \mathbf{B}\}$$

$\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ kaldes *fællesmængden* af $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$.

Eksempel 2.7 Lad $\mathbf{A} = \{1, 2\}$ og $\mathbf{B} = \{2, 3\}$. Da er $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{2\}$.

Overvejelse 2.8 Hvis $\mathbf{A}$ er en endelig mængde med m elementer og $\mathbf{B}$ er en endelig mængde med n elementer, hvor mange elementer er der da *højst* i $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$?

2.4.3 Potensmængde

Lad $\mathbf{A}$ være en mængde. Da kan vi definere mængden

$$\mathcal{P}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{B} \mid \mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}\}$$

$\mathcal{P}(\mathbf{A})$ kaldes for *potensmængden* af $\mathbf{A}$ og er således mængden hvis elementer er alle delmængder af $\mathbf{A}$. Sommetider ser man en anden notation end $\mathcal{P}(\mathbf{A})$, nemlig $\mathbf{2}^{\mathbf{A}}$. I denne bog bruger vi $\mathcal{P}$-notationen.

Eksempel 2.9 Lad $\mathbf{A} = \{1, 2\}$. Da er $\mathcal{P}(\mathbf{A}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Overvejelse 2.10 Hvis $\mathbf{A}$ er en endelig mængde med m elementer, hvor mange elementer er der da *præcis* i $\mathcal{P}(\mathbf{A})$?

2.4.4 Kartesisk produkt

Lad $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ være mængder. Da kan vi definere

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{(a, b) \mid a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B}\}$$

$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ betegner således *mængden af ordnede par med* 1.*-komponent i* $\mathbf{A}$ *og* 2.*-komponent i* $\mathbf{B}$. $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ kaldes det *kartesiske produkt* eller *krydsproduktet* af $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$.

Eksempel 2.11 Lad mængderne $\mathbf{A} = \{1, 2\}$ og $\mathbf{B} = \{2, 3\}$. Da er det kartesiske produkt $\mathbf{A} \times \ \mathbf{B} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$.

Man kan definere kartesisk produkt for vilkårligt mange mængder – f.eks. er $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ mængden af alle *3-tupler*:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \{(a, b, c) \mid a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B}, c \in \mathbf{C}\}$$

Ofte skriver man $\underbrace{\mathbf{A} \times \cdots \mathbf{A}}_{n \text{ gange}}$ som $\mathbf{A}^n$.

Overvejelse 2.12 Hvis $\mathbf{A}$ er en endelig mængde med m elementer og $\mathbf{B}$ er en endelig mængde med n elementer, hvor mange elementer er der da i $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$?

2.5 Relationer

En relation er en mængde af tupler, der alle er taget fra samme kartesiske produkt. Lad $A_1, \ldots, A_k$ være en familie af mængder. En k-ær relation mellem $A_1, \ldots, A_k$ er en vilkårlig delmængde af $A_1 \times \cdots \times A_k$. Hvis $k = 2$, kalder vi relationen for en *binær relation*.

Nogle relationer er velkendte og benytter infiks-notation, så vi skriver f.eks. $2 < 3$ og ikke $(2, 3) \in <$.

Vi kan generalisere denne konvention til vilkårlige binære relationer: hvis vi har en binær relation R og $(a, b) \in R$ skriver vi aRb i stedet.

Eksempel 2.13 Lad $\mathbf{A} = \{1, 2\}$ og $\mathbf{B} = \{2, 3\}$. Så er $R = \{(1, 2), (2, 2)\}$ en binær relation mellem $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$. Her har vi at $1R2$ og at $2R2$ men det gælder *ikke* at $1R3$.

Vi er tit interesseret i nogle særlige slags relationer. En *ækvivalensrelation* er en vilkårlig relation som har bestemte egenskaber fælles med lighed (=).

Definition 2.14 Lad R være en binær relation over mængden$\mathbf{A}$, dvs. $R \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{A}$. R siges at være en *ækvivalensrelation* over $\mathbf{A}$ hvis

- R er *refleksiv*, dvs.xRx for alle $x \in \mathbf{A}$
- R er *symmetrisk*, dvs. xRy medfører at yRx når $x, y \in \mathbf{A}$
- R er *transitiv*, dvs. hvis xRy og yRz da har vi også at xRz, for alle $x, y, z \in \mathbf{A}$

Overvejelse 2.15 Lad $\mathbf{A}$ være mængden af mennesker. Lad p_1 og p_2 være vilkårlige mennesker og definer at $p_1 \bowtie p_2$ hvis p_1 og p_2 har samme forældre. Bevis at $\bowtie$ er en ækvivalensrelation.

Overvejelse 2.16 Lad $\mathbf{A}$ være mængden af mennesker. Lad p_1 og p_2 være vilkårlige mennesker og lad os definere at $p_1 \equiv p_2$ hvis p_1 og p_2 har mindst én forælder til fælles. Er $\equiv$ en ækvivalensrelation?

2.6 Funktioner

En *funktion* f er en tilordning af værdier mellem to mængder, funktionens *definitionsmængde* $Dm(f)$ og dens *værdimængde* $Vm(f)$, således at hver værdi i definitionsmængden tilordnes en og kun en værdi i værdimængden (en funktion er altså *entydig*.)

Vi skriver at funktionen f har værdi y for elementet x i definitionsmængden som $f(x) = y$. Ofte udelader vi parenteserne og skriver blot $fx = y$. x kaldes her for funktionens *argument*.

Hvis en funktion f har $Dm(f) = \mathbf{A}$ og $Vm(f) = \mathbf{B}$, skriver vi ofte $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$. Man siger også at f har *typen* eller *funktionaliteten* $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$.

Eksempel 2.17 Tilordningen t givet ved at $t(1) = 2$, $t(2) = 3$ og $t(7) = 2$ er en funktion med $Dm(t) = \{1, 2, 7\}$ og $Vm(t) = \{2, 3\}$.

Eksempel 2.18 Tilordningen t givet ved at $Dm(t) = \{1, 2\}$ og $Vm(t) = \{7, 8\}$ hvor $t(1) = 7$, $t(1) = 8$, og $t(2) = 7$ er *ikke* en funktion, for t er ikke entydig (flere værdier er defineret for $t(1)$).

2.6.1 Partielle og totale funktioner

I semantik af programmeringssprog betragter vi ofte funktions-agtige objekter som på den ene side opfylder entydighedsbetingelsen for funktioner, men på den anden side ikke nødvendigvis tildeler en værdi til ethvert argument.

En *partiel funktion* fra $\mathbf{A}$ til $\mathbf{B}$ er en binær relation f som opfylder at for ethvert argument a er der *højst én* værdi b således at $f(a) = b$. Vi kalder igen $\mathbf{A}$ for *definitionsmængden* for f og $\mathbf{B}$ for *værdimængden* for f. Vi skriver at $f : \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$.

Bemærk at denne betingelse medfører, at der kan være argumenter som ikke giver anledning til en værdi. Hvis en partiel funktion faktisk giver en værdi for ethvert argument i definitionsmængden, taler vi om en *total funktion*.

Eksempel 2.19 Betragt relationen givet ved at $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ og $f(4) = 2$. f er da en partiel funktion fra $\{1, 2, 3, 4\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$ da den opfylder entydighedsbetingelsen for værdier, men $f(3)$ ikke er defineret.

Overvejelse 2.20 Find et eksempel på en partiel funktion over de reelle tal.

Overvejelse 2.21 Er totale funktioner også partielle?

Eksempel 2.22 Lad funktionen f have $Dm(f) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ og $Vm(f) = \{2, 3\}$ og være defineret ved at $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ og $f(7) = 2$. f er partiel, da f.eks. $f(3)$ ikke er defineret.

2.6.2 Funktionsforskrifter

Ofte definerer man en funktion ved en *forskrift*, d.v.s et udtryk der beskriver hvordan funktionens værdi findes for et vilkårligt argument.

Eksempel 2.23 Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ givet ved forskriften $f(x) = x + 1$ afbilder ethvert naturligt tal over i dets efterfølger.

2.6.3 Funktionsrum

Lad $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ være mængder. Da kan vi definere mængden

$$\mathbf{A} \to \mathbf{B} = \{f \mid f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}\}$$

Dette er mængden af alle funktioner fra $\mathbf{A}$ til $\mathbf{B}$. Vi kalder denne mængde for *funktionsrummet mellem* $\boldsymbol{A}$ *og* $\boldsymbol{B}$.

Bemærk at vi med denne notation kan vælge mellem at skrive

$$f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$$

og

$$f \in \mathbf{A} \to \mathbf{B}$$

for at angive at f er en funktion fra $\mathbf{A}$ til $\mathbf{B}$.

Eksempel 2.24 Lad $\mathbf{A} = \{1, 2\}$ og $\mathbf{B} = \{2, 3\}$. Da er $\mathbf{A} \to \mathbf{B} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ hvor $f_1(1) = 2$ og $f_1(2) = 2$, $f_2(1) = 3$ og $f_2(2) = 3$, $f_3(1) = 3$ og $f_3(2) = 2$ samt $f_4(1) = 2$ og $f_4(2) = 3$.

Overvejelse 2.25 Lad $\mathbf{A} = \{a, b, c\}$ og $\mathbf{B} = \{x, y, z\}$. Find $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$.

Overvejelse 2.26 Hvis $\mathbf{A}$ er en endelig mængde med m elementer og $\mathbf{B}$ er en endelig mængde med n elementer, hvor mange elementer er der da i $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$?

Vi taler også om *partielle funktionsrum* – hvis $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ er mængder, betegner $\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$ mængden af partielle funktioner mellem $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$.

Overvejelse 2.27 Lad igen $\mathbf{A} = \{a, b, c\}$ og $\mathbf{B} = \{x, y, z\}$. Find $\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{B}$.