UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Mandag 6. desember 2010.
Tid for eksamen:	9:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 9 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

Første del av eksamen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige!
Husk å levere arkene med flervalgssvarene!

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. Løsningen til differensialligningen $y'' - 2y' - 3y = 0$ med initialverdier $y(0) = 1$ og $y'(0) = -1$ er

- [x] $y(x) = e^{-x}$
- [ ] $y(x) = 3e^{3x} - 3e^{x}$
- [ ] $y(x) = e^{x} + xe^{x}$
- [ ] $y(x) = e^{3x}$
- [ ] $y(x) = e^{-2x}$

Oppgave 2. Løsningen til differensialligningen $y' + x^2 y = x^2$ med initialverdi $y(0) = 2$ er

- [ ] $y(x) = 2\cos x$
- [ ] $y(x) = 1/(1 + x^2)$
- [ ] $y(x) = 1 + e^{x^2}$
- [x] $y(x) = 1 + e^{-(x^3/3)}$
- [ ] $y(x) = 1 - e^{x^2}$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Vi skal løse differensialligninger numerisk. For fire av disse ligningene kan vi få store problemer om vi velger uheldige startverdier for x og t. For hvilken ligning vil vi aldri kunne få store problemer?

- [ ] $x'x = 1$
- [x] $x' = e^t/(1 + x^2)$
- [ ] $x' = t + \ln x$
- [ ] $x' = t/(x - 2)$
- [ ] $x' = \sqrt{1 - x^2}$

Oppgave 4. Hvilke(n) av de tre integrasjonsmetodene trapesmetoden, midtpunktmetoden og Simpsons metode vil være nøyaktig for et førstegrads polynom?

- [ ] Bare trapesmetoden
- [ ] Bare midtpunktmetoden
- [ ] Bare Simpsons metode
- [ ] Bare trapesmetoden og Simpsons metode
- [x] Alle sammen

Oppgave 5. En tekst er lagret i en fil med en standard koding, og et av tegnene er kodet med én byte. Hvilken koding kan filen IKKE være kodet med?

- [ ] UTF-8
- [x] UTF-16
- [ ] ISO Latin-1
- [ ] ASCII
- [ ] Den kan være kodet med alle

Oppgave 6. Entropien til en tekst angir det minimale antall bits per tegn som teksten kan kodes med. Hvis vi bruker Huffman-koding basert på tegnenes frekvens i teksten, hvilken av disse tekstene oppnår IKKE minimalt antall bits per tegn?

- [ ] AABB
- [ ] ABCC
- [x] ABBB
- [ ] ABCD
- [ ] Alle fire tekstene over oppnår minimalt antall bits per tegn

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 7. Du skal bruke sekantmetoden til å finne nullpunktet til funksjonen $f(x) = x^3 - 2$ og begynner med startverdiene $x_0 = -2$ og $x_1 = 2$. Etter ett steg, hva er det tilnærmede nullpunktet x^*?

- [ ] $x^* = -0.2$
- [ ] $x^* = 0$
- [ ] $x^* = 0.33$
- [x] $x^* = 0.5$
- [ ] $x^* = 1$

I denne oppgaven kan du få bruk for at sekanten $s(x)$ til f gjennom de to punktene a og b er gitt ved

$$s(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Oppgave 8. Vi skal beregne en tilnærming til den deriverte $f'(a)$ til funksjonen $f(x) = \cos x$ ved hjelp av tilnærmingen

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Da er absoluttfeilen for enhver $h > 0$ begrenset av (vi ser bort fra avrundingsfeil)

- [ ] $h^2/2$
- [ ] $h^2 \cos(1)$
- [ ] $h \sin(0)$
- [ ] $h \cos(a)/4$
- [x] $h/2$

Oppgave 9. Differensialligningen $x'' + tx' - t^2 = 5$ skal skrives som et system av førsteordens differensialligninger. Hvilket system er riktig?

- [ ] $x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = 5 + t(t - x_2)$
- [ ] $x_1' = x_2, \quad x_2' = t^2 - x_1$
- [ ] $x_1' = x_2, \quad x_2' = 5 + t(t - x_1)$
- [x] $x_1' = x_2, \quad x_2' = 5 + t(t - x_2)$
- [ ] $x_2' = x_1, \quad x_1' = 5 + t^2 - tx_2$

Oppgave 10. En full melkekartong holder 4 grader og blir satt i et rom med temperatur 20 grader ved tiden $t = 0$. La $T(t)$ være temperaturen i melken ved tiden t. Hvilken av differensialligningene nedenfor er en fornuftig beskrivelse av temperaturutviklingen i melken?

- [ ] $T' = T - 20, \quad T(0) = 4$
- [ ] $T' = 4T, \quad T(0) = 20$
- [x] $T' = k(20 - T), \quad T(0) = 4$ og $k > 0$
- [ ] $T' = (T - 4)/k, \quad T(0) = 4$ og $k < 0$
- [ ] $T' = 20 - 4T, \quad T(0) = 4$

(Fortsettes på side 4.)

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes!

Oppgave 1.

a) Du har en sum penger a som du setter i banken til 4 % årlig rente. Du vet også at du har har behov for å ta ut kr. 10 000 hvert år. Forklar hvorfor differensligningen

$$y_{n+1} - \frac{26}{25} y_n = -10\ 000, \quad y_0 = a, \tag{1}$$

beskriver utviklingen av kapitalen og løs ligningen.
For resten av oppgaven får du oppgitt at

$$y_n = 250\ 000 + (a - 250\ 000)\left(\frac{26}{25}\right)^n.$$

Du ønsker at kapitalen skal være fullstendig oppbrukt etter 10 år, hvor mye må du da sette inn når sparingen begynner?

Løsning. Vi lar y_n være kapitalen etter n år. Da er kaiptalen etter $n+1$ år lik det vi hadde etter n år, pluss rente, minus de 10 000 vi tar ut,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{4}{100} y_n - 10\ 000.$$

Trekker vi sammen og ordner får vi (1).
Differensligningen (1) er lineær og inhomogen, så vi løser den ved å finne den generelle løsningen til den homgene ligningen og legge til en partikulær løsning.
En generell lineær, førsteordens ligning på formen $y_{n+1} - r y_n = 0$ har løsningen $y_n = Cr^n$ der C er en vilkårlig konstant. Vår homogene ligning $y_{n+1} - 26y_n/25 = 0$ har derfor løsningen

$$y_n^h = C\left(\frac{26}{25}\right)^n.$$

Høyresiden i (1) er konstant så for å finne en partikulær løsning prøver vi med en løsning på formen $y_n^p = A$. Skal denne passe må vi ha

$$A - \frac{26}{25} A = -10\ 000.$$

Løser vi får vi $A = 250\ 000$. Den generelle løsningen av (1) er derfor

$$y_n = 250\ 000 + C\left(\frac{26}{25}\right)^n.$$

Startverdien $y_0 = a$ gir ligningen

$$a = y_0 = 250\ 000 + C$$

og dermed løsningen oppgitt over.
Hvis kapitalen skal være oppbrukt etter 10 år må $y_{10} = 0$, altså

$$250\ 000 + (a - 250\ 000)\left(\frac{26}{25}\right)^{10} = 0$$

Løser vi denne med hensyn på a får vi $a \approx 81\ 109$.

(Fortsettes på side 5.)

b) Anta at vi skal simulere kapitalutviklingen over mange år (med en mye større startkapital enn det du fant i (a)). Forklar hvilke problemer avrundingsfeil vil kunne gi for en slik simulering?

Løsning. Koeffisienten 26/25 i ligningen er et rasjonalt tall som ikke kan representeres eksakt ved hjelp av flyttall, så vi må derfor være forberedt på avrundingsfeil. Vi vet at den eksakte løsningen består av to ledd, nemlig partikulærløsningen $y_n^p = 250\ 000$ og den homogene løsningen

$$y_n^h = (a - 250\ 000)\left(\frac{26}{25}\right)^n.$$

Vi kan kun få problem med avrundingsfeil for store n om koeffisienten i den homogene løsningen skal være eksakt lik 0, noe som *ikke* er tilfelle her.
Legg merke til at vi bør bruke 64 bits flyttall i simuleringene. Med 32 bits flyttall har vi bare 6–7 riktige sifre, noe som vil føre til at øreverdiene blir feil, selv i vårt konkrete eksempel der kapitalen ble oppbrukt etter 10 år.

Oppgave 2. Kod ordet *Beregninger* med Huffman-koding.
Hvor mye avviker lengden på denne koden fra lengden til en optimal kode?

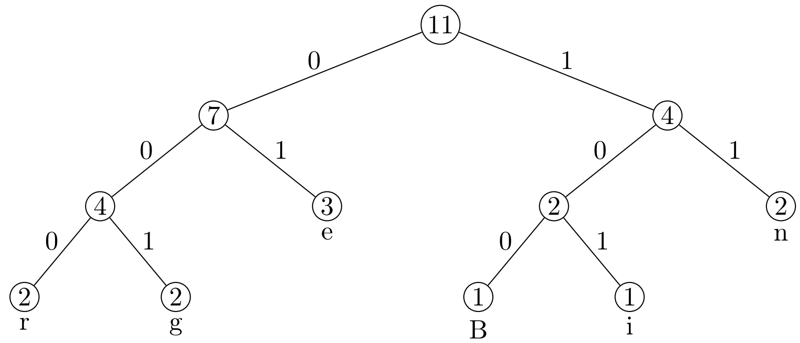
I oppgave 2 kan du få bruk for at entropien til et alfabet $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ der α_i har sannsynlighet $p(\alpha_i)$ er gitt ved

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p(\alpha_i)\log_2 p(\alpha_i).$$

Løsning. Vi ser at tegnene i teksten har følgende frekvenser:

$$f(B) = 1, \quad f(e) = 3, \quad f(r) = 2, \quad f(g) = 2, \quad f(n) = 2, \quad f(i) = 1.$$

Vi starter med samlingen av trær gitt ved de forskjellige tegnene og kombinerer så suksessivt de to trærne som har lavest frekvens. Dette gir Huffman-treet



Vi ser dermed at tegnene får kodene

$$c(r) = 000, \quad c(g) = 001, \quad c(e) = 01, \quad c(B) = 100, \quad c(i) = 101, \quad c(n) = 11.$$

Teksten blir derfor kodet som

100 01 000 01 001 11 101 11 001 01 000

(Fortsettes på side 6.)

(mellomrommene er satt inn for å gjøre det lettere å lese koden). Siden det er mange ulike måter å slå sammen trærne i løpet av Huffman-algoritmen er denne kodingen ikke entydig, men de andre kodingene gir akkurat samme lengde for koden. Vi observerer at koden er på 28 bit, eller omtrent 2.55 bit per tegn.
For å sjekke hvor nær vi er en minimal kode regner vi ut entropien til alfabetet. Vi observerer først at

$$p(B) = \frac{1}{11},\ p(e) = \frac{3}{11},\ p(r) = \frac{2}{11},\ p(g) = \frac{2}{11},\ p(n) = \frac{2}{11},\ p(i) = \frac{1}{11}.$$

Entropien er gitt ved

$$\begin{aligned} H &= -\big(p(B)\log_2 p(B) + p(e)\log_2 p(e) + p(r)\log_2 p(r) + p(g)\log_2 p(g) \\ &\qquad + p(n)\log_2 p(n) + p(i)\log_2 p(i)\big) \\ &= -\Big(\frac{3}{11}\log_2\big(\frac{3}{11}\big) + 3\frac{2}{11}\log_2\big(\frac{2}{11}\big) + 2\frac{1}{11}\log_2\big(\frac{1}{11}\big)\Big) \\ &= -\frac{1}{11}(3\log_2 3 + 6 - 11\log_2 11) \\ &\approx 2.48. \end{aligned}$$

Det betyr at det minimale antall bits er 28 siden $11 * 2.48 \approx 27.3$ og vi må ha et heltallig antall bits. Altså er Huffman-koding optimalt i dette tilfellet.

Oppgave 3. Vi har gitt differensialligningen

$$x' = \frac{t}{3x^2}, \quad x(0) = 1.$$

a) Finn en formel for løsningen $x(t)$.

Løsning. Vi observerer at differensialligningen er separabel. Vi har derfor

$$\int 3x^2 x'\,dt = \int t\,dt.$$

Integralet på høyre side gir

$$\int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + C$$

der C er en vilkårlig konstant. Integralet på venstre side gir

$$3\int x^2 x'\,dt = 3\int x^2\,dx = x^3.$$

Løsningen er derfor gitt ved ligningen

$$x(t)^3 = \frac{1}{2}t^2 + C.$$

Løser vi denne med hensyn på $x(t)$ får vi

$$x(t) = \Big(\frac{1}{2}t^2 + C\Big)^{1/3}.$$

Initialverdien gir $1 = x(0) = C^{1/3}$, så $C = 1$. Dermed er løsningen

$$x(t) = \Big(\frac{1}{2}t^2 + 1\Big)^{1/3}.$$

(Fortsettes på side 7.)

b) Start i $t = 0$ og regn ut en tilnærming til $x(0.4)$ ved å ta to steg med Eulers metode med $h = 0.2$.
Finn også en tilnærming til $x(0.4)$ ved å ta ett steg med kvadratisk Taylor, med $h = 0.4$.
Hvilken av de to numeriske løsningene gir minst absolutt feil i $t = 0.4$?

Løsning. Hvis differensialligningen er $x' = f(t, x)$ kommer vi med Eulers metode fra en tilnærming (t_k, x_k) til en tilnærming (t_{k+1}, x_{k+1}) ved hjelp av formelen

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k)$$

der $h = t_{k+1} - t_k$. I vårt tilfelle er $f(t, x) = t/(3x^2)$. Vi starter i $(t_0, x_0) = (0, 1)$, går først til $(0.2, x_1)$ og deretter til $(0.4, x_2)$, med $h = 0.2$ i begge tilfeller. Utregnet gir dette

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + hf(t_0, x_0) = 1 + 0.2f(0, 1) = 1 + 0.2 \cdot 0 = 1, \\
x_2 &= x_1 + hf(t_1, x_1) = 1 + 0.2f(0.2, 1) = 1 + 0.2 \cdot \frac{1}{15} \approx 1.01333.
\end{aligned}$$

Med kvadratisk Taylor-metode går vi i steden fra (t_k, x_k) til (t_{k+1}, x_{k+1}) med et kvadratisk Taylor-polynom,

$$x_{k+1} = x_k + hx'_k + \frac{h^2}{2}x''_k. \tag{2}$$

Her er $x'_k = f(t_k, x_k)$ mens x''_k framkommer ved å sette inn t_k, x_k og x'_k i den andrederiverte til løsningen. Denne finner vi ved å derivere differensialligningen (som vi skriver $x' = tx^{-2}/3$),

$$x'' = \frac{1}{3}\bigl(x^{-2} - 2tx^{-3}x'\bigr).$$

I $t = t_0 = 0$ har vi $x_0 = x(0) = 1$, $x'_0 = x'(0) = 0/(3 \cdot 1) = 0$ og dermed

$$x''_0 = x''(0) = \frac{1}{3}\bigl(1 - 2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 0\bigr) = \frac{1}{3}.$$

Vi skal nå bare ta ett steg, fra $(t_0, x_0) = (0, 1)$ og rett til $(t_1, x_1) = (0.4, x_1)$. Vi setter inn i (2) og får

$$x_1 = x_0 + hx'_0 + \frac{h^2}{2}x''_0 = 1 + 0.4 \cdot 0 + \frac{0.4^2}{2 \cdot 3} \approx 1.02667.$$

Feilen i de to numeriske tilnærmingene finner vi ved å sammenligne med den eksakte løsningen som er $x(0.4) \approx 1.02599$. Feilen med Eulers metode er dermed

$$x(0.4) - 1.01333 = 0.0126522,$$

mens feilen med kvadratisk Taylor med bare ett steg er

$$x(0.4) - 1.02667 \approx -0.0006811.$$

Med andre ord er kvadratisk Taylor med ett steg mer nøyaktig enn Euler med to steg i dette tilfellet.

(Fortsettes på side 8.)

Oppgave 4. Vi trenger å regne ut en tilnærmet verdi av integralet

$$\int_0^1 \sin(z^2)\,dz.$$

a) Vi bestemmer oss for å gjøre dette ved å tilnærme $\sin x$ med sitt Taylor-polynom av grad 5 om $a = 0$, erstatte x med z^2 og integrere. Forklar hvorfor dette gir tilnærmingen

$$\int_0^1 \sin(z^2)\,dz \approx \frac{2867}{9240}.$$

Løsning. Vi observerer at Taylor-polynomet til $\sin x$ av grad 5 er $T_5(x) = x - x^3/6 + x^5/120$. Vi følger oppskriften og får

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sin z^2\,dz &\approx \int_0^1 \Big(z^2 - \frac{(z^2)^3}{6} + \frac{(z^2)^5}{120}\Big)\,dz \\
&= \int_0^1 \Big(z^2 - \frac{z^6}{6} + \frac{z^{10}}{120}\Big)\,dz \\
&= \Big[\frac{z^3}{3} - \frac{z^7}{7\cdot 6} + \frac{z^{11}}{11\cdot 120}\Big]_0^1 \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} \\
&= \frac{2867}{9240}.
\end{aligned}$$

b) Vi bruker samme strategi som i (a), men tilnærmer nå $\sin x$ med et Taylor-polynom av grad $2n-1$, for en $n \geq 1$ slik at vi får en tilnærming I_n til integralet. Vis at feilen da er begrenset ved

$$\Big|\int_0^1 \sin(z^2)\,dz - I_n\Big| \leq \frac{1}{(4n+3)(2n+1)!}\max_{x\in[0,1]}\big|f^{(2n+1)}(x)\big|,$$

der $f(x) = \sin x$.
Finn en verdi av n som garanterer at feilen blir mindre enn 10^{-10}.

Løsning. Vi observerer først at i Taylor-polynomet til $\sin x$ er alle ledd av like grad lik 0. Vi har derfor at

$$T_{2n-1}(\sin;0)(x) = T_{2n}(\sin;0)(x).$$

Dette betyr at vi kan bruke feilleddet R_{2n} istedenfor R_{2n-1}, noe som vanligvis vil gi oss et bedre feilestimat. Vi har

$$R_{2n}(\sin;0)(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}f^{(2n+1)}(c),$$

der c er et tall i intervallet $(0,x)$ og $f(x) = \sin x$. Vi setter inn relasjonen

$$\sin z^2 - T_{2n}(\sin;0)(z^2) = R_{2n}(\sin;0)(z^2)$$

(Fortsettes på side 9.)

i integralet og får dermed

$$
\begin{aligned}
\Big|\int_0^1 \sin(z^2)\,dz - I_n\Big| &= \Big|\int_0^1 \big(\sin z^2 - T_{2n}(\sin;0)(z^2)\big)\,dz\Big| \\
&= \Big|\int_0^1 R_{2n}(\sin;0)(z^2)\,dz\Big| \\
&= \Big|\int_0^1 \frac{(z^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(c)\,dz\Big| \\
&\leq \int_0^1 \frac{z^{4n+2}}{(2n+1)!}\big|f^{(2n+1)}(c)\big|\,dz
\end{aligned}
$$

der c nå ligger i intervallet $(0, z^2)$. Vi bruker den vanlige teknikken for å få orden på slike integraler og tar maksimum av $\big|f^{(2n+1)}(c)\big|$ over intervallet $[0,1]$ (som alltid inneholder intervallet $[0, z^2]$ når $z \in [0,1]$). Dette gir

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{z^{4n+2}}{(2n+1)!}\big|f^{(2n+1)}(c)\big|\,dz &\leq \max_{x\in[0,1]}\big|f^{(2n+1)}(x)\big| \int_0^1 \frac{z^{4n+2}}{(2n+1)!}\,dz \\
&= \frac{1}{(2n+2)!(4n+3)} \max_{x\in[0,1]}\big|f^{(2n+1)}(x)\big|.
\end{aligned}
$$

For å være sikre på at feilen blir mindre enn 10^{-10} observerer vi først at alle deriverte av f alltid er mindre enn 1 i tallverdi. Dermed er

$$
\Big|\int_0^1 \sin(z^2)\,dz - I_n\Big| \leq \frac{1}{(4n+3)(2n+1)!}.
$$

Vi bestemmer derfor n ved betingelsen

$$
\frac{1}{(4n+3)(2n+1)!} \leq 10^{-10}.
$$

Den minste verdien av n som tilfredstiller denne ulikheten er $n = 6$, altså grad 11 for Taylor-polynomet.

I denne oppgaven kan du få bruk for at Taylor-polynomet til $\sin x$ av grad $2n-1$ om $a = 0$ er gitt ved

$$
T_{2n-1}(\sin;0)(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.
$$

Lykke til!