

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i MAT-INF 1100 — Modellering og
beregninger.

Eksamensdag: Onsdag 7. oktober 2009.

Tid for eksamen: 15:00 – 17:00.

Oppgavesettet er på 6 sider.

Vedlegg: Formelark.

Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: _____

De 10 første oppgavene teller 2 poeng hver, de siste 10 teller 3 poeng hver. Den totale poengsummen er altså 50. Det er 5 svaralternativer for hvert spørsmål, men det er bare ett av disse som er riktig. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på et spørsmål, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" med minuspoeng for å svare feil. *Lykke til!*

Oppgave- og svarark

Oppgave 1. Det binære tallet 1110111_2 er det samme som det desimale tallet

- ☐ 119
- ☐ 121
- ☐ 116
- ☐ 125
- ☐ 117

Oppgave 2. Skrevet i totalssystemet blir det heksadesimale tallet $f4f_{16}$

- ☐ 111100001101_2
- ☐ 111100000011_2
- ☐ 110000001111_2
- ☐ 111101001111_2
- ☐ 111100001111_2

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Desimaltallet 5.3 kan skrives på binær form som

- ☐ 101.0100110011001... der sifrene 1001 gjentas uendelig mange ganger
- ☐ 101.0100110011001101
- ☐ 101.011
- ☐ 101.0101010101010101... der sifrene 01 gjentas uendelig mange ganger
- ☐ 101.0110011001100110... der sifrene 0110 gjentas uendelig mange ganger

Oppgave 4. I åttetallssystemet blir det desimale tallet 40.125

- ☐ 49.1₈
- ☐ 40.1₈
- ☐ 50.3₈
- ☐ 40.11₈
- ☐ 50.1₈

Oppgave 5. I siffersystemet med grunntall $\beta = 4$ blir det desimale tallet 2.4

- ☐ 2.3₄
- ☐ 2.10303₄
- ☐ 2.103₄
- ☐ 2.1₄
- ☐ krever uendelig mange siffer

Oppgave 6. Tallet

$$\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{8}}{5 - \sqrt{8}}$$

er

- ☐ et rasjonalt tall
- ☐ $1 + \sqrt{2}$
- ☐ $\sqrt{2} - 1$
- ☐ $\sqrt{8} + \sqrt{2}$
- ☐ $\sqrt{8} - \sqrt{2}$

Oppgave 7. En følge er definert ved $x_n = e^{-n^2}$ for $n \geq 1$. Hva er største nedre skranke for tallmengden gitt ved $\{x_n \mid n \geq 1\}$?

- ☐ 1/2
- ☐ er ikke definert
- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ e

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 8. Anta at vi multipliserer ut parentesene i uttrykket $(2 - x)^{99}$. Hva blir da koeffisienten foran x^{98} ?

- ☐ 99
- ☐ 1
- ☐ -198
- ☐ -99
- ☐ 198

Oppgave 9. Hva er Taylor-polynomet av grad 2 om $a = -1$ for funksjonen $f(x) = x^4$?

- ☐ $3 + 9x + 7x^2$
- ☐ $3 + 8x + 6x^2$
- ☐ $-x$
- ☐ x^2
- ☐ x^4

Oppgave 10. Hva er Taylor-polynomet av grad 2 om $a = 1$ for funksjonen $f(x) = x^2$?

- ☐ x^2
- ☐ $-1 + x + x^2$
- ☐ $3 - x - x^2$
- ☐ 0
- ☐ x

Vi minner om at dividerte differenser tilfredstiller relasjonene

$$f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_{k-1}, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

og $f[x_k] = f(x_k)$.

Oppgave 11. Vi har funksjonen $f(x) = \sin x$ og punktene $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/2$ og $x_2 = \pi$. Da har den dividerte differansen $f[x_0, x_1, x_2]$ verdien

- ☐ $-4/\pi^2$
- ☐ $4/\pi^2$
- ☐ $2/\pi$
- ☐ $-2/\pi$
- ☐ 0

Oppgave 12. Vi har funksjonen $f(x) = x^4$ og punktene $x_i = i$, for $i = 0, 1, \dots, 5$. Da har den dividerte differansen $f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ verdien

- ☐ 24
- ☐ 6
- ☐ 2
- ☐ 12
- ☐ 0

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 13. Vi interpolerer funksjonen $f(x) = x^3$ med et polynom p_2 av grad 2 i punktene 0, 1, 2. Da er p_2 lik

- ☐ x^2
- ☐ x^3
- ☐ $x + 3x(x - 1)$
- ☐ $x - 3x(x - 1)$
- ☐ $4x^2 - 3x$

Oppgave 14. Du skal tilnærme funksjonen $f(x) = e^x$ med et Taylor-polynom av grad n på intervallet $[0, 1]$, utviklet om $a = 0$. Det viser seg at feilen er begrenset av

$$\frac{3x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Hva er den minste graden n som gjør at feilen blir mindre enn 0.01 for alle x i intervallet $[0, 1]$?

- ☐ $n = 1$
- ☐ $n = 3$
- ☐ $n = 4$
- ☐ $n = 5$
- ☐ $n = 7$

Oppgave 15. Differensligningen

$$x_{n+1} - x_n = (-1)^{n+1}, \quad x_0 = 1/2$$

har løsningen

- ☐ $x_n = (-1/2)^{n+1}$
- ☐ $x_n = (-1)^n/2$
- ☐ $x_n = 1/2$
- ☐ $x_n = (n+1)/2$
- ☐ $x_n = n$

Oppgave 16. Vi har gitt en differensligning med initialbetingelser,

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} - 4x_n = 2, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Hva er løsningen?

- ☐ $x_n = n$
- ☐ $x_n = n2^{n-1}$
- ☐ $x_n = (4^n - 1)/3$
- ☐ $x_n = (1 - (-1)^n)$
- ☐ $x_n = -\sin(5n\pi/3)$

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 17. Vi har en følge definert ved

$$y_n = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

og en annen følge $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ definert ved differensligningen

$$x_{n+1} - x_n = (n+1)^2, \quad x_1 = 1.$$

For $n \geq 1$ er da $y_n - x_n$ gitt ved

☐ $(n-1)^2$

☐ $(n-1)^3$

☐ 0

☐ $(n-1)n^2$

☐ $n2^n$

Oppgave 18. Vi har differensligningen

$$x_{n+1} - \frac{x_n}{3} = 2, \quad x_0 = 2,$$

og simulerer denne med 64-bits flyttall. For alle n over en viss grense vil da den beregnede løsningen \bar{x}_n gi som resultat

☐ 3

☐ 1

☐ 0

☐ $3 - 3^{-n}$

☐ Det blir overflow

Oppgave 19. Vi har differensligningen

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 12x_n = 1, \quad n \geq 1, \quad x_0 = 1/7, \quad x_1 = 1/7$$

og simulerer denne med 64-bits flyttall på datamaskin. For alle n over en viss grense vil da den beregnede løsningen \bar{x}_n gi som resultat:

☐ $1/3$

☐ 5

☐ 0

☐ Det blir overflow

☐ 3^n

(Fortsettes på side 6.)

Oppgave 20. Vi lar P_n betegne påstanden

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \sqrt{n}.$$

Et induksjonsbevis for at P_n er sann for alle heltall $n \geq 1$ kan være som følger:

1. Vi ser lett at P_1 er sann.
2. Anta nå at vi har bevist at P_1, \dots, P_k er sanne. For å fullføre induksjonsbeviset, må vi vise at P_{k+1} også er sann. Siden vi antar at P_k er sann vet vi at

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \sqrt{k},$$

og vi må vise at da er også

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \sqrt{k+1}.$$

Vi har følgende relasjoner

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{\sqrt{i}} &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{i}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\ &\geq \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\ &= \frac{\sqrt{k(k+1)} + 1}{\sqrt{k+1}} \\ &\geq \frac{\sqrt{k^2} + 1}{\sqrt{k+1}} \\ &= \sqrt{k+1}. \end{aligned}$$

Vi ser dermed at om P_k er sann så må også P_{k+1} være sann.

Hvilket av følgende utsagn er sant?

- ☐ Påstanden P_n er sann, men del 2 av induksjonsbeviset er feil
- ☐ Påstanden P_n er feil, og del 2 av induksjonsbeviset er feil
- ☐ Påstanden P_n er feil, og del 1 av induksjonsbeviset er feil
- ☐ Både påstanden P_n og induksjonsbeviset er riktige
- ☐ Beviset er riktig, men det er ikke noe induksjonsbevis

Det var det!