UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Onsdag 10. oktober 2012.
Tid for eksamen:	15:00 – 17:00.
Oppgavesettet er på 6 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Svarene føres på eget svarark.

De 10 første oppgavene teller 2 poeng hver, de siste 10 teller 3 poeng hver. Den totale poengsummen er altså 50. Det er 5 svaralternativer for hvert spørsmål, men det er bare ett av disse som er riktig. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på et spørsmål, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" med minuspoeng for å svare feil. *Lykke til!*

NB. Husk å sjekke at du har ført inn svarene riktig på svararket!

Oppgaveark

Oppgave 1. Det desimale tallet 165 representeres i totallssystemet som

A: $1011\ 0101_2$

B: $1110\ 0101_2$

C: $1010\ 0100_2$

D: $1010\ 0111_2$

✓**E:** $1010\ 0101_2$

Oppgave 2. Skrevet i totallssystemet blir det heksadesimale tallet $a7.5d_{16}$

A: $1010\ 0111.1101\ 1101_2$

✓**B:** $1010\ 0111.0101\ 1101_2$

C: $1110\ 0111.0101\ 1101_2$

D: $1010\ 1111.0101\ 1101_2$

E: $1011\ 0111.0101\ 1111_2$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Det rasjonale tallet 3/5 kan skrives i 2-tallsystemet som

✓**A:** $0.1001\ 1001\ 1001\cdots_2$ der sifrene 1001 gjentas uendelig mange ganger

B: 0.011_2

C: 0.11_2

D: $0.0101\ 0101\ 0101\cdots_2$ der sifrene 01 gjentas uendelig mange ganger

E: $0.1101\ 1101\ 1101\cdots_2$ der sifrene 1101 gjentas uendelig mange ganger

Oppgave 4. Det oktale tallet 56.27_8 representeres i totallsystemet som

A: $11\ 0110.0101\ 11_2$

B: $10\ 1110.1101\ 11_2$

✓**C:** $10\ 1110.0101\ 11_2$

D: $10\ 1010.0111\ 11_2$

E: $10\ 1010.0101\ 01_2$

Oppgave 5. Kun ett av følgende utsagn er sant, hvilket?

✓**A:** Det rasjonale tallet 65/81 kan representeres med en endelig sifferutvikling i 6-tallsystemet

B: Det rasjonale tallet 5/12 kan representeres med en endelig sifferutvikling i 3-tallsystemet

C: Det rasjonale tallet 5/12 kan representeres med en endelig sifferutvikling i 2-tallsystemet

D: Både 1/7 og 1/8 kan representeres med endelige sifferutviklinger i 60-tallsystemet

E: Hvis vi bruker 128 bits flyttall får vi aldri problemer med avrundingsfeil

Oppgave 6. Tallet

$$\frac{\sqrt{32}-1}{\sqrt{2}+1}$$

er det samme som

A: $\sqrt{32}-3$

B: $\sqrt{8}+5$

C: 0

✓**D:** $9-5\sqrt{2}$

E: $\sqrt{32}+1$

Oppgave 7. Hva er minste øvre skranke for mengden

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^6 - 2 < 0\}?$$

A: 2

B: 6

✓**C:** $2^{1/6}$

D: 1

E: $\sqrt{2}$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 8. Hva er Taylor-polynomet av grad 2 om $a = 0$ for funksjonen $f(x) = x^5 + 3x - 1$?

A: $-1 + 3x + 2x^2$

B: $-1 + 2x$

C: $-1 + 3x - x^2$

D: $-1 + 3x + x^2$

✓**E:** $-1 + 3x$

Oppgave 9. Hvilken av følgende differensligninger er lineær?

A: $x_{n+1}^2 - x_n = n$

✓**B:** $x_{n+3} - nx_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = \sin n$

C: $x_{n+2} - \sin x_n = 3^n$

D: $x_{n+2} - x_{n+1}\ x_n = 1$

E: $x_{n+2}x_{n+1} - x_n = n$

Oppgave 10. For hvilken av følgende verdier av c blir Taylor-polynomet av grad 2 om $a = 0$ for funksjonen $f(x) = cx + e^{-x/c}$ lik $1 + x^2/2$?

A: $c = 3$

B: $c = 1/2$

✓**C:** $c = -1$

D: $c = 2$

E: $c = -2$

Oppgave 11. Hva er Taylor-polynomet av grad 3 om $a = \pi/2$ for funksjonen $f(x) = \sin x$?

A: $x - x^3/6$

✓**B:** $1 - (x - \pi/2)^2/2$

C: $1 + (x - \pi/2)^2/2$

D: $1 - (x - \pi/2)^2/3$

E: $1 + x^2$

Oppgave 12. For hvilken verdi av β har vi at $100_\beta = 10_{4\beta}$, med andre ord at 100 i β-tallsystemet er lik 10 i 4β-tallsystemet?

A: $\beta = 8$

B: $\beta = 6$

C: $\beta = 5$

✓**D:** $\beta = 4$

E: $\beta = 2$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 13. Vi tilnærmer funksjonen $f(x) = e^x$ med sitt Taylor-polynom av grad n om $a = 0$. Hva er minste verdi av n som gjør at den absolutte feilen i tilnærmingen er mindre enn 0.001 for alle x i intervallet $[-1, 0]$?

A: $n = 3$

B: $n = 4$

C: $n = 5$

✓**D:** $n = 6$

E: $n = 7$

Oppgave 14. Hvilket av følgende uttrykk vil gi stor relativ feil om det evalueres for negative flyttall med stor absoluttverdi?

A: $x^2 + x^4$

B: $x + e^x$

C: $x + \sin x$

D: $1 + x^2$

✓**E:** $\sqrt{x^2 + 2} + x$

Oppgave 15. Differensligningen

$$x_{n+1} - 3x_n = n,\ n \geq 0$$

med startverdi $x_0 = 0$ har løsningen

✓**A:** $x_n = (3^n - 2n - 1)/4$

B: $x_n = (3^n + 2n - 1)$

C: $x_n = (3^n - 1)/2$

D: $x_n = (3^n + 3n - 1)/6$

E: $x_n = 3^n - 1$

Oppgave 16. En annenordens lineær og homogen differensligning med konstante koeffisienter har den generelle løsningen

$$x_n = C2^n + D3^{-n}.$$

Hva kan da ligningen være?

A: $3x_{n+2} - 7x_{n+1} - 2x_n = 0$

B: $2x_{n+2} + 7x_{n+1} + 2x_n = 0$

C: $3x_{n+2} + 7x_{n+1} + 2x_n = 0$

✓**D:** $3x_{n+2} - 7x_{n+1} + 2x_n = 0$

E: $3x_{n+2} + 5x_{n+1} + 2x_n = 0$

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 17. Vi har gitt en differensligning med tilhørende startverdier,

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 2^n, \quad n \geq 0, \quad x_0 = 1,\ x_1 = -2/3.$$

Hva er løsningen?

A: $x_n = 1 - 5n3^{n-2}$

B: $x_n = 2^n - 8n/3$

C: $x_n = 3^n - 11n2^{n-1}/3$

✓**D:** $x_n = 2^n - 8n3^{n-2}$

E: $x_n = 2^{n+1} - 3^n$

Oppgave 18. Vi har differensligningen

$$3x_{n+2} - 5x_{n+1} = 1/7, \quad x_1 = -1/14$$

og simulerer denne med 64-bits flyttall på datamaskin. For tilstrekkelig store n vil da den beregnede løsningen $\bar{x}_n$ gi som resultat

A: 0

B: $-1/14$

C: $(5/3)^n$

✓**D:** overflow

E: 1

Oppgave 19. Vi har differensligningen

$$5x_{n+2} - 16x_{n+1} + 3x_n = 0.$$

For hvilket par av startverdier vil den eksakte løsningen forbli begrenset mens den simulerte løsningen (med 64 bits flyttall) vil gi overflow?

A: $x_0 = 1, \quad x_1 = 1$

B: $x_0 = 0, \quad x_1 = 1/3$

C: $x_0 = 1, \quad x_1 = 2$

✓**D:** $x_0 = 1, \quad x_1 = 1/5$

E: $x_0 = 1, \quad x_1 = 2/5$

(Fortsettes på side 6.)

Oppgave 20. For hvert naturlig tall n lar vi P_n betegne påstanden

$$P_n : \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Et induksjonsbevis for at P_n er sann for alle naturlige tall kan være som følger:

1. Vi ser lett at P_1 er sann.

2. Anta nå at vi har bevist at P_k er sann for en $k \geq 1$. For å fullføre induksjonsbeviset, må vi vise at da er også P_{k+1} sann. Vi ser at

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k+1}{k+2}.
\end{aligned}$$

Dermed stemmer formelen også for $n = k+1$ om den stemmer for $n = k$, så påstanden P_n er sann for alle naturlige tall n.

Hvilket av følgende utsagn er sant?

A: Påstanden P_n er sann for $n \geq 1$, men del 2 av induksjonsbeviset er feil

B: Påstanden P_n er ikke sann for alle $n \geq 1$, og del 2 av induksjonsbeviset er feil

C: Påstanden P_n er ikke sann for alle $n \geq 1$, og del 1 av induksjonsbeviset er feil

✓**D:** Påstanden P_n er riktig for alle $n \geq 1$ og induksjonsbeviset er riktig

E: Beviset er riktig, men det er ikke noe induksjonsbevis

Det var det!