

# Lineare Algebra I - Vorlesungs-Script

Prof. Andrew Kresch

Basisjahr 08/09 Semester II

**Mitschrift:**

Simon Hafner

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Bilinearformen</b>	<b>1</b>
1.1	Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$	3
1.2	Skalarprodukt über $\mathbb{C}^n$	4
1.3	Bilinearform	5
1.4	Bilineare und quadratische Formen	7
1.4.1	Polarisierungsformel	8
1.5	Sesquilineare Form	8
1.6	Volumen	13
1.6.1	Spat	13
1.7	Orthogonale und unitäre Endomorphismen	16
1.8	Beschreibung von $SO(3)$ und $O(3)$	20
1.9	Selbstadjungierte Endomorphismen	20
<b>2</b>	<b>Klassifikation von Bilinearformen auf <math>\mathbb{R}^n \leftrightarrow</math> Signatur</b>	<b>28</b>
<b>3</b>	<b>Multilineare Algebra</b>	<b>32</b>
3.1	Dualvektorräume	32
3.2	Der Bidualraum $V \rightsquigarrow V^* \rightsquigarrow V^{**}$	35
3.3	Zusammenhang zwischen Dualraum und bilinearen Abbildungen	36
3.4	Anwendung des Dualraums	42
3.5	Das Tensorprodukt	42
3.5.1	Existenz vom Tensorprodukt	44
3.5.2	Tensorprodukt von linearen Abbildungen	48

# 1 Bilinearformen

Das kanonische Skalarprodukt (oder: Standardskalarprodukt) von  $\mathbb{R}^n$  ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

gegeben durch

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

falls  $x = (x_1, \dots, x_n)$  und  $y = (y_1, \dots, y_n)$  sind.

**Definition 1** (Konvention). eine  $1 \times 1$  Matrix wird mit Eintrag indentifiziert

$$(x) \in M(1 \times 1, K) \leftrightarrow x \in K$$

Dann können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= (x^t)(y) \\ x &= \begin{pmatrix} x_1, \vdots, x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1, \vdots, y_n \end{pmatrix} \\ (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1, \vdots, y_n \end{pmatrix} &= (x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n) \end{aligned}$$

*Bemerkung 1* ( $\langle, \rangle$  ist bilinear).

$$\begin{aligned} \langle x + x', y \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle \\ \langle \lambda x, y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle \\ \langle x, y + y' \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle \\ \langle x, \lambda y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

symmetrisch:

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

positiv definit:

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &\geq 0 \\ \langle x, x \rangle &= 0 \Leftrightarrow x = 0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

$$\text{für } \forall x, y, x', y' \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$$

*Bemerkung 2* (Hintergrund: euklidische Geometrie).

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

*Bemerkung 3* (Eigenschaften von  $\|\cdot\|$ ).

$$\begin{aligned} \|x\| &\geq 0, \text{ mit } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \|\lambda x\| &= |\lambda| \|x\| \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

Dann definieren wir den Abstand von  $x, y \in \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} d(x, y) &\in \mathbb{R} \\ d(x, y) &:= \|y - x\| \end{aligned}$$

*Bemerkung 4.* Eigenschaften

$$\begin{aligned} d(x, y) &\geq 0, \text{ mit } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ d(y, x) &= d(x, y) \\ d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) \\ \text{für } x, y, z &\in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Wir sind motiviert, Strukturen zu definieren, basierend auf diesen Eigenschaften, so z.B.

- Bilineare Formen (symmetrisch, positiv definit)
- Norme
- Metriken

**Beweis 1.**  $\|\cdot\|$  und  $d$ : die Dreiecksungleichung folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle \leq (?) (\|x\| + \|y\|)^2 \\ &\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|\end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung: für  $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

mit Gleichheit genau dann, wenn  $x$  und  $y$  linear abhängig sind.

$$\Leftrightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} - & - & - & x & - & - & - \\ - & - & - & y & - & - & - \end{pmatrix} \in M(2 \times n, \mathbb{R})$$

$A$  hat Rang  $\leq 1$

**Beweis 2.**

$$\begin{aligned}A \cdot A^t &= \begin{pmatrix} \langle x, x \rangle & \langle x, y \rangle \\ \langle x, y \rangle & \langle y, y \rangle \end{pmatrix} \in M(2 \times 2), \mathbb{R} \\ \det(A \cdot A^t) &= \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2\end{aligned}$$

Es gibt eine Gleichung von Determinanten:

$$\begin{aligned}A, B &\in M(k \times n, K) \\ \det(A \cdot B^t) &= \sum_{1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k \leq n} \det(A^{s_1, \dots, s_k}) \det(B^{s_1, \dots, s_k}) \\ \text{wobei } A^{s_1, \dots, s_k} &:= (a_i, s_j)_{1 \leq i, j \leq k}, B^{s_1, \dots, s_k} = (b_i, s_j)_{1 \leq i, j \leq k}\end{aligned}$$

*Beweis-Skizze: Reduktion zum Fall, dass die Zeilen von  $A$  und  $B$  Standardbasiselemente sind; direkte Berechnung in diesem Fall.*

*Es folgt:*

$$\det(A \cdot A^t) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \det(A^{i,j})^2 \geq 0$$

und  $\det = 0 \Leftrightarrow$  alle  $2 \times 2$  Minoren von  $A$  sind 0  $\Leftrightarrow \text{rang}(A) \leq 1$

**Korollar 1.** Wir können definieren

$$\begin{aligned}\angle(x, y) &:= \cos^{-1} \underbrace{\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}}_{\in [-1, 1] \in \mathbb{R}} \in [0, \pi] \in \mathbb{R} \\ &\text{für} \\ 0 &\neq x \in \mathbb{R}^n \\ 0 &\neq y \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

**Korollar 2.**  $x, y$  Vektoren,  $\theta$  Winkel zwischen den beiden

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \left( \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|y - x\|^2 \right)$$

und deshalb:

$$\cos \theta = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|y - x\|^2}{2 \|x\| \|y\|}$$

$\implies$  Winkel eines Dreiecks ist nur von den Seitenlängen abhängig.

**Beispiel 1.**

$$\angle(x, y) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$$

$$\underbrace{\{y \mid \langle x, y \rangle = 0\}}_{\text{Untervektorraum}} = 0 \cup \{0 \neq y \in \mathbb{R}^n \mid \angle(x, y) = \frac{\pi}{2}\}$$

Man nennt  $x$  und  $y$  senkrecht falls  $\langle x, y \rangle = 0$

*Fazit 1.*

$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	bilinear form
$\ \cdot\  : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$	Norm
$d(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$	Metrik

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sqrt{\langle x, x \rangle} \\ d(x, y) &= \|y - x\| \\ \langle x, y \rangle &= \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|y - x\|^2}{2}\end{aligned}$$

### 1.1 Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & x \times y\end{array}$$

für  $y = (y_1, y_2, y_3)$  und  $y = (y_1, y_2, y_3)$  ist

$$x \times y = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_2, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

oder:

$$x \times y = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

wobei  $(e_1, e_2, e_3)$  die Standardbasis ist. Es ist deshalb klar, dass

$$\begin{aligned}0 &= \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \langle x, x \times y \rangle \\ 0 &= \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \langle y, x \times y \rangle\end{aligned}$$

$x \times y$  liegt auf der Gerade von Vektoren senkrecht zu  $x$  und  $y$ . weiter:

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} &= \langle x \times y, x \times y \rangle \\ &= \|x \times y\|^2 = (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 + (x_3 y_1 - x_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \\ &= \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 \left( 1 - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|x\|^2 \|y\|^2} \right) \\ &= \|x\|^2 \|y\|^2 (1 - \cos^2 \angle(x, y)) = \|x\|^2 \|y\|^2 \sin^2 \angle(x, y)\end{aligned}$$

**Fazit 2.** Wenn das Ergebnis  $= 0$ , folgt daraus, dass  $x$  und  $y$  linear abhängig sind. Falls  $x$  und  $y$  linear unabhängig sind, dann folgt dass  $(x \times y, x, y)$  zu derselben Orientierungsklasse gehört wie  $(e_1, e_2, e_3)$ . Insgesamt bedeutet dies, dass  $x \times y$  folgende Eigenschaften hat:

- ist senkrecht zu  $x$  und  $y$
- ist  $0 \Leftrightarrow x$  und  $y$  sind linear abhängig
- hat Länge  $\|x\| \|y\| \sin \angle(x, y)$
- und hat die Richtung, die mit  $x$  und  $y$  die gleiche Orientierungsklasse wie die Standardbasis hat.

## 1.2 Skalarprodukt über $\mathbb{C}^n$

Sei  $z = (z_1, \dots, z_n)$  und  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$

*Bemerkung 5.* Der Ausdruck macht Sinn.

$$\begin{aligned}\langle z, w \rangle &:= z_1 w_1 + \dots + z_n w_n \\ \langle z, z \rangle &:= z_1^2 + \dots + z_n^2\end{aligned}$$

Dann kann die Länge nicht mehr interpretiert werden, z.B. für  $z = (1, i, 0, \dots, 0)$  haben wir  $\langle z, z \rangle = 1^2 + i^2 = 0$ . Isotropische Untervektorräume von  $\mathbb{C}^n$  werden nicht in diesem Kurs behandelt. ( $V \subset \mathbb{C}^n$  s.d.  $\langle v, w \rangle = 0 \forall v, w \in V$ ). Für die Physik, die Geometrie usw. ist eine Interpretation in Zusammenhang mit Länge wichtig, deshalb brauchen wir eine neue Definition.

**Definition 2** (Das kanonische Skalarprodukt). von  $\mathbb{C}^n$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle_c : \mathbb{C}^n \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{C} \\ (z, w) &\mapsto z_1 \bar{w}_1 + \dots + z_n \bar{w}_n\end{aligned}$$

*Eigenschaften 1* (von  $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$ ).

$$\begin{aligned}\langle z + z', w \rangle_c &= \langle z, w \rangle_c + \langle z', w \rangle_c \\ \langle \lambda z, w \rangle_c &= \lambda \langle z, w \rangle_c \\ \langle z, w + w' \rangle_c &= \langle z, w \rangle_c + \langle z, w' \rangle_c \\ \langle z, \lambda w \rangle_c &= \bar{\lambda} \langle z, w \rangle_c\end{aligned}$$

für  $z, z', w, w' \in \mathbb{C}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$   
 $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$  ist sesquilinear

$$\begin{aligned}\langle w, z \rangle_c &= \overline{\langle z, w \rangle_c} && \text{hermitesch} \\ \langle z, z \rangle_c &\in \mathbb{R}_{\geq 0} && \text{positiv definit} \\ \langle z, z \rangle &= 0 \Leftrightarrow z = 0\end{aligned}$$

**Fazit 3.**  $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$  ist sesquilinear, hermitesch und positiv definit.

**Beweis 3.** Bei Bedarf sonstwo nachschauen (Zu viele Zeichen und zu wenig Sinn). Es läuft auf eine Sammlung von Quadraten heraus.

**Definition 3** (Norm von  $\mathbb{C}^n$ ).

$$\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle_c}$$

*Bemerkung 6.* Sei  $w = (x'_1 + xy'_1, \dots, x'_n + iy'_n)$ . Dann:

$$\begin{aligned}\langle z, w \rangle_c &= (x_1 + iy_1)(x'_1 - iy'_1) + \dots + (x_n + iy_n)(x'_n - iy'_n) \\ &= (x_1 x'_1 + y_1 y'_1 + \dots + x_n x'_n + y_n y'_n) + i(x'_1 y_1 - x_1 y'_1 + \dots + x'_n y_n - x_n y'_n)\end{aligned}$$

Auf diese Weise ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$  eine Erweiterung von reellen Skalarprodukt.

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^{2n} &\rightarrow \mathbb{C}^n && \mathbb{R}\text{-linear} \\ e_1 &\mapsto (1, 0, \dots, 0) \\ e_2 &\mapsto (i, 0, \dots, 0) \\ &\dots \\ e_{2n} &\mapsto (0, \dots, 0, i) \\ \langle \cdot, \cdot \rangle_c &= (\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ von } \mathbb{R}^{2n}) + i(\text{neues})\end{aligned}$$

Re  $\langle \cdot, \cdot \rangle_c = \langle \cdot, \cdot \rangle$  von  $\mathbb{R}^{2n}$  unter diesem Isomorphismus.

Sei  $\omega := \text{Im } \langle \cdot, \cdot \rangle_c$ :

$$\begin{aligned}\omega : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \text{oder } \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} &\rightarrow \mathbb{R}\end{aligned}$$

*Eigenschaften 2* (von  $\omega$  (Imaginärteil des kanonischen Skalarproduktes)). **bilinear**

**schiefsymmetrisch**  $\omega(w, z) = -\omega(z, w)$

$$\omega(z, z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}^n \text{ (oder } \mathbb{R}^{2n})$$

### 1.3 Bilinearform

Sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum.

**Definition 4** (Bilinearform). Eine bilineare Form auf  $V$  ist eine Abbildung

$$s : V \times V \rightarrow K$$

so dass:

$$\begin{aligned}s(v + v', w) &= s(v, w) + s(v', w) \\ s(\lambda v, w) &= \lambda s(v, w) \\ s(v, w + w') &= s(v, w) + s(v, w') \\ s(v, \lambda w) &= \lambda s(v, w)\end{aligned}$$

$$\forall v, v', w, w' \in V, \lambda \in K$$

Und:  $s$  heisst symmetrisch, falls  $s(w, v) = s(v, w)$  und schiefsymmetrisch, falls  $s(w, v) = -s(v, w)$ .

**Beispiel 2.** •  $\langle \cdot, \cdot \rangle := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine symmetrische bilineare Form

- $\omega$  ist eine schiefsymmetrisch bilineare Form
- $(\langle \cdot, \cdot \rangle_c)$  nicht)
- $V = \{\text{stetige Abbildung } [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$  über  $\mathbb{R}$ :  $f, g \in V$

$$s(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

ist eine symmetrisch bilineare Form auf  $V$

Sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum, mit  $\dim_K V < \infty$ , und  $s : V \times V \rightarrow K$  eine bilineare Form.

**Definition 5.** darstellende Matrix Ist  $B = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$  eine Basis von  $V$ , so setzen wir

$$M_B(s) := (s(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in M(n \times n, K)$$

die darstellende Matrix

**Korollar 3.** für  $x, y \in V$

$$\begin{aligned}x &= x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \\ y &= y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n\end{aligned}$$

und

$$M_B(s) = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, \text{ d.h. } a_{ij} = s(v_i, v_j)$$

haben wir:

$$\begin{aligned}s(x, y) &= \sum_{i, j=1}^n x_i y_j a_{ij} \\ &= (x_1 \cdots x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= x^t M_B(s) \cdot y\end{aligned}$$

**Proposition 1.** Sei  $V$  ein endlich-dim. Vektorraum über  $K$  mit Basis  $B = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ . Es gibt eine Bijektion zwischen der Menge von Bilinearformen und  $M(n \times n, K)$ , gegeben durch

$$(s : V \times V \rightarrow K) \mapsto M_B(s)$$

**Beweis 4.** Wir schreiben einen Vektor  $x \in V$  als  $(x_1, \dots, x_n)$  falls  $x = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$ . Ähnlich für  $y$ . Dann ist

$$\begin{aligned}A \in M(n \times n, K) &\mapsto V \times V \rightarrow K \\ (x, y) &\mapsto x^t \cdot A \cdot y\end{aligned}$$

inverses zu der obigen Abbildung.

**Bemerkung 7.** Sei  $(s : V \times V \rightarrow K)$  eine bilineare Form und  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  die darstellende Matrix. Wir erinnern uns an die Notation

$$\begin{aligned}\Phi_B : K^n &\rightarrow V \\ e_i &\mapsto v_i\end{aligned}$$

Dann:

$$K^n \times K^n \xrightarrow{\Phi_B \times \Phi_B} V \times V \xrightarrow{s} K$$

ist gegeben durch

$$(x, y) \mapsto x^t A \cdot y$$

Sei  $A = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$  eine andere Basis.

$$\begin{array}{ccc} & K^n & \\ & \downarrow \Phi_A & \searrow \Phi_B \\ T = \Phi_B^{-1} \circ \Phi_A & & V \\ & \uparrow \Phi_B & \\ & K^n & \end{array}$$

**Proposition 2.** Transformationsformel Mit dieser Notation haben wir:

$$M_A(s) = T^t \cdot M_B(s) \cdot T$$

**Beweis 5.**

$$\begin{aligned}K^n \times K^n &\xrightarrow{\Phi_B \times \Phi_B} V \times V \xrightarrow{s} K \\ (x, y) &\mapsto x^t \cdot M_B(s) \cdot y\end{aligned}$$





**Beispiel 4.**  $\langle v, v \rangle = v_1^2 + \dots + v_n^2$  für  $v \in K^n$

Für  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  eine symmetrische Matrix mit  $s : V \times V \rightarrow K$ ,  $(x, y) \mapsto x^t A y$ , haben wir

$$\begin{aligned} s(x, x) &= x^t A x \\ &= (x_1 \quad \dots \quad x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

Ist  $\text{char}(K) \neq 2$ , so haben wir:

$$\begin{aligned} \{\text{symm. bilineare Formen in } K^n\} &\leftrightarrow \{\text{quadr. Formen auf } K^n\} \\ s &\mapsto q(v) := s(v, v) \\ &\leftrightarrow (\text{Polarisierungsformel}) \end{aligned}$$

#### 1.4.1 Polarisierungsformel

Ist  $s$  eine symmetrische Bilinearform und  $q$  die zu  $s$  gehörende quadratische Form über einem Vektorraum  $V$  über  $K$  mit  $\text{char}(K) \neq 2$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} s(v, w) &= \frac{1}{2} (q(v+w) - q(v) - q(w)) \\ &= \frac{1}{2} (q(v) + q(w) - q(v+w)) \\ &= \frac{1}{4} (q(v+w) - q(v-w)) \end{aligned}$$

### 1.5 Sesquilineare Form

**Definition 6.** Sei  $V$  ein komplexer Vektorraum. Eine Abbildung

$$s : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

heißt sesquilinear falls:

$$\begin{aligned} s(v + v', w) &= s(v, w) + s(v', w) \\ s(\lambda v, w) &= \lambda s(v, w) \\ s(v, w + w') &= s(v, w) + s(v, w') \\ s(v, \lambda w) &= \bar{\lambda} s(v, w) \end{aligned}$$

für  $v, v', w, w' \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$

**Beispiel 5.**  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $\mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned} s(f, g) &= \int_0^1 f(x)g(x)dx \\ \text{auf } V &:= \{\text{stetige Abb. } [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

**Definition 7.** hermitesch Eine sesquilineare Form heißt hermitesch, falls

$$s(w, v) = \overline{s(v, w)} \quad \forall v, w \in V$$

**Beispiel 6.**  $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$  auf  $\mathbb{C}^n$  ist hermitesch.

*Bemerkung 9.* hermitesche Form Man spricht von hermiteschen Form, diese sind immer sesquilinear

**Definition 8.** darstellende Matrix Sei  $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$ , und  $B := (v_i)_{1 \leq i \leq n}$  eine Basis. Ist  $s$  eine sesquilineare Form, so definieren wir

$$M_B(s) := (s(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n}$$

die darstellende Matrix. Sind  $z, w \in V$

$$\begin{aligned} z &= z_1 v_1 + \cdots + z_n v_n \\ w &= w_1 v_1 + \cdots + w_n v_n \end{aligned}$$

dann haben wir

$$\begin{aligned} s(z, w) &= \sum_{i, j=1}^n z_i \bar{w}_j a_{ij} \text{ wobei } a_{ij} = s(v_i, v_j) \\ &= (z_1 \cdots z_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \vdots \\ \bar{w}_n \end{pmatrix} = z^t M_B(s) \cdot \bar{w} \end{aligned}$$

**Proposition 3.** Sei  $V$  ein endlich dim.  $\mathbb{C}$  Vektorraum und  $B = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ . Wir haben eine Bijektion

$$\{\text{sesquilineare Form auf } V\} \leftrightarrow M(n \times n, \mathbb{C})$$

Unter dieser Bijektion haben wir:

$$\{\text{hermitesche Formen}\} \leftrightarrow \{A \in M(n \times n, \mathbb{C}) : A^t = \bar{A}\}$$

Man sagt: eine Matrix  $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$  mit  $A^t = \bar{A}$  ist hermitesch.

**Satz 1.** Transformationsformel Sei  $A = (u_1, \dots, u_n)$  eine andere Basis mit Transformationsmatrix  $T$ :

*TODO: hier einfügen*

Dann gilt:

$$M_A(s) = T^t \cdot M_B(s) \cdot \bar{T}$$

Mit  $g(v) := s(v, v)$  gilt die Polarisierungsformel

$$s(v, w) = \frac{1}{4} (q(v+w) - q(v-w) + iq(v+iw) - iq(v-iw))$$

**Definition 9.** positiv definit Sei  $K = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und

$s : V \times V \rightarrow K$  eine Bilinearform  $\begin{cases} \text{symmetrisch} & K = \mathbb{R} \\ \text{hermitesch} & K = \mathbb{C} \end{cases}$  heisst positiv definit,

falls  $s(v, v) > 0 \forall 0 \neq v \in V$

**Beispiel 7.**  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist positiv definit auf  $\mathbb{R}^n$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_c$  ist positiv definit auf  $\mathbb{C}^n$

**Definition 10.** Skalarprodukt

Ein Skalarprodukt ist  $\begin{cases} \text{positiv definite symmetrische bilineare Form} & K = \mathbb{R} \\ \text{eine positiv definite hermitesche Form} & K = \mathbb{C} \end{cases}$

**Definition 11.** Skalarprodukt oft  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , Norm  $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$

**Definition 12.** Euklidischer Vektorraum Vektorraum über  $\mathbb{R}$  mit Skalarprodukt

**Definition 13.** Unitärer Vektorraum Vektorraum über  $\mathbb{C}$  mit Skalarprodukt

**Beispiel 8.**

$$V = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\} \text{ mit } \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

$$V = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig}\} \text{ mit } \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$$

in beiden Fällen

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}$$

“ $L^2$ -Norm”

*Bemerkung 10.* In einem beliebigen euklidischen bzw. unitären Vektorraum gilt die Cauchy-Schwarz’sche Ungleichung

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\| \quad \forall v, w \in V$$

mit = genau dann, wenn  $v$  und  $w$  linear abhängig sind.

**Beweis 6.** (Skizze) klar falls  $v = 0$  oder  $w = 0$ , also nehmen wir an, dass  $v \neq 0$  und  $w \neq 0$ . 1. Reduktion: zum Fall  $\|v\| = \|w\| = 1$ .

$$v_1 := \frac{v}{\|v\|} w_1 := \frac{w}{\|w\|}$$

$$\|v_1\| = 1 \quad \|w_1\| = 1$$

2. Reduktion: Es reicht aus, zu zeigen:  $\operatorname{Re} \langle v, w \rangle \leq 1 =$  genau dann wenn  $V = W$

$$\begin{aligned} |\langle v, w \rangle| &= \mu \langle v, w \rangle & \mu \in \mathbb{C}, |\mu| &= 1 \\ &= \langle \mu v, w \rangle \in \mathbb{R}_{\geq} \\ &= \operatorname{Re} \langle v', w \rangle \text{ wobei } v' := \mu v \end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz’sche Ungleichung  $\leq$ , Gleichheit:  $v, w$  linear unabhängig  $\implies v', w$  linear unabhängig  $\implies v' \neq w$

*Eigenschaften 3.*

$$\begin{aligned} \langle v - w, v - w \rangle &\geq 0 & \text{= falls } v - w &= 0 \\ \langle v, v \rangle - \langle v, w \rangle - \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle &\geq 0 & v &= w \\ 1 - \langle v, v \rangle - \overline{\langle v, w \rangle} + 1 &\geq 0 & v &= w \end{aligned}$$

**Beispiel 9.** Ist  $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  oder  $T : V \rightarrow \mathbb{C}^n$  ein Isomorphismus, dann ist  $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  (bzw.  $s : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ ) gegeben durch

$$s(x, y) = \langle T_x, T_y \rangle$$

bzw.

$$s(x, y) = \langle T_x, T_y \rangle_c$$

ein Skalarprodukt.

**Definition 14.** Sei  $V$  ein exklusiver, bzw. unitärer Vektorraum

- $v, w \in V$  heisst orthogonal, falls  $\langle v, w \rangle = 0$
- $U, W \subset V$  heissen orthogonal (geschrieben  $U \perp W$ ) falls  $U \perp W \quad \forall u \in U, w \in W$
- $U \subset W$  das orthogonale Komplement ist  $U^\perp = \{v \in V : u \perp v \forall u \in U\}$
- $v_1, \dots, v_n$  sind orthogonal, falls  $v_i \perp v_j \quad \forall i \neq j$

- $v_1, \dots, v_n$  sind orthonormal, falls  $v_i \perp v_j \ \forall i \neq j$  und  $\|v_i\| = 1 \ \forall i$
- $V$  ist orthogonale direkte Summe von Untervektorräumen  $V_1, \dots, V_r$  falls

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$$

$$V_i \perp V_j \ \forall i \neq j$$

$$C([-1, 1], \mathbb{R}) := \{f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$$

dann ist  $C([-1, 1], \mathbb{R})$  die orthogonale direkte Summe von  $C([-1, 1], \mathbb{R})_{\text{gerade}}$  und  $C([-1, 1], \mathbb{R})_{\text{ungerade}}$ . gerade:  $f(-x) = f(x)$  und ungerade:  $f(-x) = -f(x)$

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{gerader Teil}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{ungerader Teil}}$$

$$g \text{ gerade, } h \text{ ungerade} \implies gh \text{ ungerade} \implies \langle g, h \rangle = \int_{-1}^1 g(x)h(x) = 0$$

*Bemerkung 11.* Ist  $v_1, \dots, v_n$  eine orthonormale Familie mit  $v_i \neq 0 \forall i$ , so gilt

1.  $(i)(v_1, \dots, v_n)$  ist linear unabhängig ( $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0 \implies c_i \langle v_i, v - i \rangle + \dots + c_i \langle v_i, v_i \rangle + \dots + c_n \langle v_n, v_i \rangle = 0 \implies c_i \|v_i\|^2 = 0 \implies c_i = 0$ )
2.  $\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\right)$  ist orthonormal

**Satz 2.** Ist  $(v_1, \dots, v_n)$  eine orthonormale Basis von  $V$ , so gilt folgendes für beliebiges  $v \in V$

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v_i, v \rangle v_i$$

$$v = \sum_{i=1}^b c_i v_i$$

$$\langle v, v_j \rangle = \sum_{i=1}^n c_i \langle v_i, v_j \rangle$$

$$= c_j \langle v_i, v_j \rangle = c_j$$

**Proposition 4.** Sei  $K = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  und  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum über  $K$

1. Ist  $n := \dim_K V < \infty$  und  $(v_1, \dots, v_d)$  eine orthonormale Familie von Vektoren von  $V$ , so existieren  $v_{d+1}, \dots, v_n$ , so dass  $(v_1, \dots, v_n)$  eine orthonormale Basis von  $V$  ist.
2. Ist  $U \subset V$  ein endlichdimensionaler Untervektorraum, so gilt  $V = U \oplus U^\perp$ , orthonormal direkte Summe.

**Beweis 7.** Es gibt triviale Fälle:  $d = n$  in 1.,  $U = 0$  in 2. Auch: der Fall ( $d = 0$ ) in 1.  $\Leftarrow d = 1$ :  $0 \neq v \in V$  beliebiger Vektor, wir nehmen  $b_1 = \frac{v}{\|v\|}$   
Beweis durch Induktion nach  $N$  mit Induktionsannahme 1. gilt für  $n \leq N$   
 $N = 1$  okay.

**Plan:** Wir zeigen  $1A \implies 2.$  für  $\dim_K U \leq N$  und  $1A \implies 1.$  für  $n \leq N + 1$ .  
 $1A \xrightarrow{\dim U \leq N} \exists$  orthonormale Basis  $(u_1, \dots, u_d)$  von  $U$   $d := \dim U$ . Für beliebiges  $v \in V$  gilt:

$$v - \sum_{i=1}^d \langle v_i, v \rangle u_i \in U^\perp$$

$$U : 1\text{-dimensional} \quad \left| \quad U^\perp : 2\text{-dim} \right.$$

$$s(e_1, e_1) = 3 \quad \left| \quad = 24 \right.$$

denn

$$\left\langle v - \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i, u_j \right\rangle = \langle v, u_j \rangle - \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle \langle u_i, u_j \rangle = 0$$

Und: 1. für  $\dim V \leq N+1$  folgt aus IA und 2. für  $U \leq N$

$$1 \leq d < n = \dim V \geq N+1$$

$$\implies 1 \leq d \leq N \text{ und } 1 \leq \dim V - d \leq N$$

Sei  $U := \text{span}(v_1, \dots, v_d)$  Aus 2. haben wir  $V = U \oplus U^\perp$  Nach IA,  $\exists$  orthonormale Basis  $(v_{d+1}, \dots, v_n)$  von  $U^\perp$  Es folgt, dass  $(v_1, \dots, v_n)$  ist eine orthonormale Basis von  $V$ .

**Eigenschaften 4.** Praktisches Verfahren zu testen ob ein symmetrisch bilineare bzw. hermetische Form ein Skalarprodukt ist (falls  $\dim_K V < \infty$ ). Verfahren:

- wählen  $U \subset V$  nicht trivialer Untervektorraum (z.B.  $U = \text{span}(v), 0 \neq v \in V$ )
- Berechnen  $U^\perp$
- Testen:
  - Ist  $V = U \oplus U^\perp$ ?
  - Ist die Einschränkung von der Form auf  $U$  ein Skalarprodukt?
  - Ist die Einschränkung von der Form auf  $U^\perp$  ein Skalarprodukt?

**Beispiel 10.**  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$M := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die entsprechende Bilinearform

$$(x, y) \mapsto t_x \cdot M \cdot y$$

$$U = \text{span}(e_1)$$

$$U^\perp = \{(x_1, x_2, x_3) : 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}$$

$$= \text{span}((1, -3, 0), (0, 2, -1))$$

Die darstellende Matrix:

$$s|_{U^\perp} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 24 & -21 \\ -21 & 18 \end{pmatrix}$$

$$U \cong \mathbb{R}^2$$

$$W = \text{span}(e_1) \in \mathbb{R}^2$$

$$W^\perp = \{(x_1, x_2) | 24x_1 - 21x_2 = 0\}$$

$$= \text{span}(21, 24)$$

$W$  1-dim,  $W^\perp$  1-dim

$$(s|_{U^\perp})(e_1, e_2) = 24$$

$$(21 \ 24) \begin{pmatrix} 24 & -21 \\ -21 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 18 \end{pmatrix} = -216$$

$\implies$  kein Skalarprodukt

## 1.6 Volumen

**Definition 15.** Volumen  $\xleftrightarrow{\text{Skalarprodukt}} \langle \cdot, \cdot \rangle \xleftrightarrow{\text{Norm}} \|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle} \xleftrightarrow{\text{Metrik}} d(x, y) = \|y, x\|$   
 $K = \mathbb{R} \rightsquigarrow \text{Volumen } (\dim V < \infty)$

### 1.6.1 Spat

**Definition 16.** Spat  $u_1, \dots, u_n$  orthonormale Basis. Dann ist der von  $(u_1, \dots, u_n)$  aufgespannte Spat definiert als (wobei  $c_i :=$  von  $(u_1, \dots, u_n)$  aufgespannten Spat)

$$\left\{ \sum_{i=1}^n c_i u_i \mid 0 \leq c_i \leq 1 \ \forall i \right\}$$

$\text{Vol}(\text{Spat}) := 1$

Falls  $v_1, \dots, v_n \in V$  beliebig sind, dann hat der von  $(v_1, \dots, v_n)$  aufgespannte Spat

$$\text{Vol} = \left| \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right| \quad v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j$$

Sei  $b_{ij} := \langle v_i, v_j \rangle$  und  $B := \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$  Wir haben  $b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk}$ ,

also  $B = A \cdot A^t$ . Es folgt:

$$\text{Vol} = \sqrt{(\det A)^2} = \sqrt{\det B}$$

Vorteile:

- keine Wahl von orthonormaler Basis nötig
- auch sinnvoll für eine Kollektion  $v_1, \dots, v_m$  evtl.  $m \neq n$

**Beispiel 11.**  $m = 1$

$$\begin{aligned} \det B &= \|v_1\|^2 \\ \sqrt{\det B} &= \|v_1\| \end{aligned}$$

**Definition 17.** Grammsche Determinante Im  $m$ -dim Volumen  $:= \sqrt{G(v_1, \dots, v_m)}$  wobei

$$G(v_1, \dots, v_m) := \det (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq m}$$

die sogenannte Grammsche Determinante ist.

**Bemerkung 12.** Es gilt  $G(v_1, \dots, v_m) = 0 \Leftrightarrow v_1, \dots, v_m$  lineare abhängig, weil

$$A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{R})$$

mit

$$G(v_1, \dots, v_m) = \det(A, A^t) = \sum (m \times m \text{ Minor})$$

**Bemerkung 13.**

$$\text{Vol}(v_1, \dots, v_m) := \sqrt{G(v_1, \dots, v_m)}$$

ist 0 falls  $\exists i : v_i = 0$

sonst:

$$\text{Vol}(v_1, \dots, v_m) = \|v_1\| \cdots \|v_m\| \text{Vol}\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_m}{\|v_m\|}\right)$$

**Satz 3.** Hadamard'sche Ungleichung

$$\text{Vol}(v_1, \dots, v_m) \leq \|v_1\| \cdots \|v_m\|$$

für  $0 \neq v_i \in V$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Mit Gleichheit genau dann wenn  $v_1, \dots, v_m$  orthogonal sind.

**Beweis 8.** Durch fallende Induktion nach

$$\max \{|I| : I \subset \{1, \dots, m\} \mid (v_i)_{i \in I} \text{ orthogonal}\}$$

**Fall**  $\max\{\dots\} = m$  das bedeutet,  $v_1, \dots, v_m$  sind orthogonal. Dann:

$$G(v_1, \dots, v_m) = \det \begin{pmatrix} \|v_1\|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \|v_m\|^2 \end{pmatrix} = \|v_1\|^2 \cdots \|v_m\|^2$$

Die ist der Induktionsanfang.

Sei  $r \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq r < m$ . Induktionsannahme: Ungleichung für den Fall

$$\max\{|I| : (v_i)_{i \in I} \text{ orthogonal}\} > r$$

Sei  $v_1, \dots, v_m$ , so dass  $\max\{\dots\} = r$ . o.B.d.A:  $v_1, \dots, v_r$  orthogonal. Wir schreiben:

$$v_m = \underbrace{v_m - \sum_{i=1}^r \frac{\langle v_m, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i}_{\tilde{v}_m \in \text{span}(v_1, \dots, v_r)^\perp} + \underbrace{\sum_{i=1}^r \frac{\langle v_m, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i}_{\tilde{v}_m \in \text{span}(v_1, \dots, v_r)}$$

$$< \tilde{v}_m, \tilde{v}_m \rangle = 0$$

- $v = \tilde{v} + \tilde{v}$
- $< \tilde{v}, \tilde{v} \rangle = 0$
- $\|v\|^2 = \|\tilde{v}\|^2 + \|\tilde{v}\|^2$

Das ist eine Orthogonale Projektion Wir haben

$$G(v_1, \dots, v_m) = G(v_1, \dots, v_{m-1}, \tilde{v}_m)$$

weil (Spalten- und Zeilenumformungen...). Es folgt:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(v_1, \dots, v_m) &= \text{Vol}(v_1, \dots, v_{m-1}, \tilde{v}_m) \leq \|v_1\| \cdots \|v_{m-1}\| \|\tilde{v}_m\| \\ &< \|v_1\| \cdots \|v_{m-1}\| \|\tilde{v}_m\| \end{aligned}$$

**Definition 18.** Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren

$$\tilde{v}_r := v_r - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\langle v_r, \tilde{v}_i \rangle}{\langle \tilde{v}_i, \tilde{v}_i \rangle} \tilde{v}_i, \text{ für } 1, 2, \dots$$

gegeben: eine Kollektion  $(v_1, \dots, v_n)$  oder abzählbar unendlich  $(v_1, v_2, \dots)$ . Das Verfahren produziert  $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots)$ , mit:

$$\begin{aligned} (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots) &= (v_1, v_2, \dots) \\ (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m) &= (v_1, \dots, v_m) \quad \forall m \\ (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots) &\text{ sind orthogonal} \end{aligned}$$

**Beispiel 12.**  $C([-1, 1], \mathbb{R})$  mit  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$

$$\begin{aligned} (1, x, x^2, \dots) \\ \xrightarrow{\text{GS}} \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{2/3}{2} \\ (1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3}{5} \dots) \end{aligned}$$

Bis auf Normalisierung bekommen wir die Legendre-Polynome.

Fazit 4.  $\begin{array}{ccccc} \text{Bilinearform} & \xrightarrow{+ \text{ def, symm}} & \text{Norm} & \rightarrow & \text{Metrik} \\ \text{Sesquilinearform} & \xrightarrow{+ \text{ def, hermitesch}} & & & \text{Norm:} \end{array}$

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \|x\| = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \\ \|\lambda x\| &= |\lambda| \|x\| \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$



Metrik:

$$\begin{aligned} d : V \times V &\rightarrow \mathbb{R}_{\leq 0} \\ d(x, <) &= 0 \Leftrightarrow x = y \\ d(x, y) &= d(y, x) \\ d(x, z) &\leq d(y, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

Aber: nicht jede Metrik, nicht einmal jede transinvariante Metrik kommt von einer Norm.

*Bemerkung 14.* Eine Norm kommt von einer +def, symm Bilinearform

$$\Leftrightarrow \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x, y \in V$$

**Definition 19.** ausgeartete Bilinearform Eine Bilinearform  $s : V \times V \rightarrow K$  ist ausgeartet (oder: entartet), falls eine oder beide der induzierten Abbildungen  $V \rightarrow V^*$  nicht injektiv ist.

$$\begin{aligned} v &\mapsto (w \mapsto s(v, w)) \\ v &\mapsto (w \mapsto s(w, v)) \end{aligned}$$

*Bemerkung 15.* Falls  $\dim_K V < \infty$ , dann:

$$\begin{array}{ll} v \mapsto (w \mapsto s(v, w)) & \text{injektiv} \\ \Downarrow & \\ v \mapsto (w \mapsto s(w, v)) & \text{injektiv} \\ \Downarrow & \\ s \text{ ist nicht ausgeartet} & \\ \Downarrow & \\ \text{die darstellende Matrix ist invertierbar} & \end{array}$$

$$\begin{aligned} s(v, w) &= v^t \cdot A \cdot w \\ &= (A^t \cdot v)^t \end{aligned}$$

i++i

**Satz 4.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $s : V \times V \rightarrow K$  eine symmetrische oder schiefsymmetrische Bilinearform. Für  $U \subset V$  Untervektorraum, schreiben wir noch

$$U^\perp := \{v \in V : s(u, v) = 0 \quad \forall u \in U\}$$

( $s(v, u) = 0 \Leftrightarrow s(u, v) = 0$  weil  $s$  symm. bzw. schiefsymm.)

**Proposition 5.** Sei  $V$  ein endlich dimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $s : V \times V \rightarrow K$  eine nicht ausgeartete symmetrische oder schiefsymmetrische Bilinearform. Sei  $U \subset V$  ein Untervektorraum. Dann gilt:

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V$$

**Beweis 9.** Sei  $(v_i)_{i=1, \dots, n}$  eine Basis mit  $n := \dim V$ , und  $A$  die darstellende Matrix von  $s$  bzw.  $(v_i)$ . Wir haben dann:

$$s(x, y) = x^t \cdot A \cdot y$$

und  $A^t = \pm A$ ,  $\det A \neq 0$

$$U^\perp = \{x \in V_i | x^t \cdot A \cdot y = 0 \quad \forall y \in U\} = \{x \in V_i | (x \cdot A)^t \cdot y = 0 \quad \forall y \in U\}$$

Sei  $F : V \rightarrow V$  lin. Abb.  $\leftrightarrow A$ . Dann:

$$F(U^\perp) = \{Ax \mid (Ax)^t y = 0 \ \forall y \in U\} = \{Ax \mid \tilde{x}^t y = 0 \ \forall y \in U\}$$

Es folgt: mit

$$B := \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_d \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$(u_1, \dots, u_d)$  Basis von  $U$ , dann ist  $F(U^\perp) = \text{Ker } B$ . Jetzt:

$$\dim U^\perp = \dim F(U^\perp) = \dim \text{Ker } B = n - \dim U$$

**Korollar 4.**  $\dim U < \infty$ ,  $s : V \times V \rightarrow K$  nicht ausgeartet, (schief-) symm.

$$U \subset \implies (U^\perp)^\perp = U$$

*Bemerkung 16.* Es ist nicht immer der Fall, dass  $V = U \oplus U'$ , weil es ist möglich, dass  $U \cup U^\perp \neq 0$ . 2 Extremfälle:

- $U$  ist isotropisch ( $s|_{U'}$  ist trivial)  $\Leftrightarrow U \subset \underbrace{U^\perp}_{\dim V - \dim U}$
- $s|_U$  ist auch nicht ausgeartet  $\Leftrightarrow U \cup U^\perp = 0 \Leftrightarrow V = U \oplus U^\perp$

Aus 1. ist klar:

$$\dim U \leq \frac{1}{2} \dim V \ \forall \text{ isotrop } U \subset V$$

## 1.7 Orthogonale und unitäre Endomorphismen

$K = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$

**Definition 20.** orthogonaler bzw. unitärer Endomorphismus Sei  $V, \langle, \rangle$  ein ortho. bzw. unitärer Vektorraum. Ein Endomorphismus  $F : V \rightarrow V$  heisst orthogonal bzw. unitär falls

$$\langle F(v), F(w) \rangle = \langle v, w \rangle \ \forall v, w \in V$$

*Bemerkung 17.* Das ist äquivalent zu

$$\|F(v)\| = \|v\| \ \forall v \in V$$

*Eigenschaften 5.* orthogonaler bzw. unitärer Endomorphismus Sei  $F$  ein ortho. bzw. unitärer Endomorphismus. Dann:

- $F$  ist injektiv
- Falls  $\dim_K V < \infty$ ,  $F$  ist bijektiv, und  $F'$  ist auch ortho. bzw. unitär
- Für jeden Eigenwert  $\lambda \in K$  gilt  $|\lambda| = 1$ . Eigenvektor  $v$ :

$$\|v\| = \|F(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

Falls  $V = \mathbb{R}^n$  oder  $\mathbb{C}^n$  mit Standardskalarprodukt

$$\langle v, w \rangle = v^t w \text{ bzw. } \langle v, w \rangle_c = v^t \bar{w}$$

Ist  $F$  zur Matrix  $A$  entsprechend, dann

$$\begin{aligned} \langle F(v), F(w) \rangle &= \langle v, w \rangle \Leftrightarrow (Av)^t Aw = v^t w \\ &\text{bzw. } (Av)^t \bar{Aw} = v^t \bar{w} \\ &\Leftrightarrow v^t A^t Aw = v^t w \Leftrightarrow A^t A = E_n \\ \text{bzw. } &\Leftrightarrow v^t A^t \bar{A} \bar{w} = v^t \bar{w} \Leftrightarrow A^t \bar{A} = E_n \end{aligned}$$

**Definition 21.** ortho. bzw. unitäre Matrix  $O(n) := A \in GL_n(\mathbb{R})$  heisst orthogonal falls  $A^t A = E_n$   
 $U(n) := A \in GL_n(\mathbb{C})$  heisst unitär falls  $A^t \bar{A} = E_n$

Not 1.

$$O_n := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | A \text{ orthogonal}\}$$

$$O_n := \{A \in GL_n(\mathbb{C}) | A \text{ unitär}\}$$

Weil

$$A, B \in O(n) \implies (AB)^t(AB) = B^t A^t AB = B^t B = E_n \implies AB \in O(n)$$

haben wir  $O(n) \subset GL_n(\mathbb{R})$  ist eine Untergruppe. Ähnlich:  $U(n) \subset GL_n(\mathbb{C})$  ist eine Untergruppe.

Not 2.

$$SO(n) = O(n) \cap SL_n(\mathbb{R})$$

$$SU(n) = U(n) \cap SL_n(\mathbb{C})$$

Not 3. ortho. bzw. unitärer Vektorraum

$$O(V) = \{F \in GL(V) | \text{ortho.}\}$$

$$U(V) = \{F \in GL(V) | \text{unitär}\}$$

Bemerkung 18.

$$A \in O(n) \implies \det A \in \{\pm 1\}$$

$$A \in U(n) \implies \det A \in \{\pm z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

*Eigenschaften 6.* Charakterisierungen von ortho. bzw. unitären Matrizen Äquivalente Charakterisierungen von orthogonalen bzw. unitären Matrizen  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ :

$A$  ist orthogonal  $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t \Leftrightarrow A^t A = E_n \Leftrightarrow A A^t = E_n \Leftrightarrow$  die Spalten von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$  die Zeilen von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^n$ .

Ähnlich:

$A$  ist unitär  $\Leftrightarrow A^{-1} = \bar{A}^t \Leftrightarrow A^t \bar{A} = E_n \Leftrightarrow \bar{A} A^t = E_n \Leftrightarrow$  die Spalten von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{C}^n \Leftrightarrow$  die Zeilen von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{C}^n$ .

Für  $n = 1$

$$O(1) = \{\pm 1\} \quad U(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \cong S^1$$

$$SO(1) = \{1\} \quad SU(1) = \{1\}$$

Für  $n = 2$ :  $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a^2 + b^2 = 1$

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\} \cong S^1$$

$$(z, w) \in \mathbb{C}^2, |z|^2 + |w|^2 = 1, (-\bar{w}, \bar{z}) \perp (z, w)$$

$$U(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z & -\lambda \bar{w} \\ w & \lambda \bar{z} \end{pmatrix} \mid (z, w) \in \mathbb{C}^2, |z|^2 + |w|^2 = 1, \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1 \right\} \cong S^3 \times S^1$$

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} \mid (z, w) \in \mathbb{C}^2, |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\} \cong S^3$$

$SO(3)$  eine explizite Beschreibung ist möglich (später)

**Proposition 6.** Sei  $V$  ein endlich dimensionaler  $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , und sei  $F : V \rightarrow V$  ein unitärer Endomorphismus. Dann besitzt  $V$  eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren von  $F$ .

**Beweis 10.** Durch Induktion nach  $\dim V$ .  $\dim V = 0, 1$  trivial.  $\dim V \geq 2$  Weil  $\mathbb{C}$  algebraisch abgeschlossen ist, gibt es einen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Sei  $v \in V$  ein Eigenvektor, mit  $\|v\| = 1$ . Weil  $F$  unitär ist, haben wir  $F(v^\perp) = v^\perp$ . Wir haben  $\dim v^\perp = \dim V - 1$

$$\begin{aligned} w \in v^\perp \langle v, w \rangle &\implies \langle v, w \rangle = 0 \\ \lambda \langle v, F(w) \rangle &= \langle \lambda v, F(w) \rangle = \langle F(v), F(w) \rangle = 0 \\ &\implies F(v^\perp) \subset v^\perp \end{aligned}$$

Aus der Induktionsannahme folgt, dass  $\exists$  Orthonormalbasis von  $v^\perp$  von Eigenvektoren von  $F$ . Zusammen mit  $v \overset{V=\text{span}}{\rightsquigarrow} \bigoplus v^\perp$  Orthonormalbasis von  $V$

**Korollar 5.** Sei  $A \in U(n)$ . Dann  $\exists S \in U(n)$ ,  $\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$  so dass

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

**Proposition 7.** Sei  $V$  ein endlich dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , und sei  $F : V \rightarrow V$  ein orthogonaler Endomorphismus. Dann besitzt  $V$  eine Orthonormalbasis  $(v_1^+, \dots, v_r^+, v_1^-, \dots, v_s^-, w_1, w'_1, \dots, w_t, w'_t)$

- $F(v_i^+) = v_i^+$
- $F(v_i^-) = -v_i^-$
- $F(w_i) = (\cos \theta_i)w_i + (\sin \theta_i)w'_i$
- $F(w'_i) = (-\sin \theta_i)w_i + (\cos \theta_i)w'_i$

mit  $\theta_i \in \mathbb{R}$ ,  $0 < |\theta| < \phi$ ,  $i = 1, \dots, t$

**Beweis 11.** Durch Induktion nach  $\dim V$ :  $\dim V = 0, 1, 2$  trivial.  $\dim > 2$  (nächstes mal)

$\dim_{\mathbb{R}} V$   $\langle \cdot, \cdot \rangle$  Skalarprodukt

Fazit 5.  $F : V \rightarrow V$  orthogonaler Endomorphismus +1 oder -1 Eigenvektoren  
 $\implies \exists$  orthogonale Basis

$$F(\alpha w_i + \beta w'_i) = (\alpha \cos \Theta_i - \beta \sin \Theta_i) w_i + (\alpha \sin \Theta_i + \beta \cos \Theta_i) w'_i, \quad \Theta_i \in \mathbb{R}$$

**Beweis 12.** Fortsetzung Durch Induktion nach  $\dim V$ , Induktionsanfang:  $\dim V \leq 2$   $\dim V = 2$  bezüglich beliebiger Basis  $(w_1, w'_1)$ .

$$V : \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta \\ -\sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix}$$

Matrix 1:  $w_1, w_2$  ist wie oben, Matrix 2: charakteristisches Polynom  $t^2 - 1 = (t-1)(t+1) \rightarrow (+1\text{-Eigenvektor}, -1\text{-Eigenvektor})$

1. Fall:  $\exists$  reeller Eigenwert

$$\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| = 1 \quad v \in V \quad F(v) = \lambda v$$

wir zeigen, dass  $F(v^\perp) = v^\perp$  genau wie im Fall eines unitären Endomorphismus

$$\begin{aligned} \dim(v^\perp) &= \dim V - 1 \overset{IA}{\rightsquigarrow} v^\perp : \text{orthonormale Basis} \\ V &= (v) \bigoplus v^\perp \end{aligned}$$

2. Fall:  $\nexists$  reeller Eigenwert

$$\implies P_F(t) = \prod_{i=1}^{(\dim V)/2} Q_i(t)$$

$Q_i(t)$  irreduzibles quadratisches Polynom. Aus dem Satz von Cayley-Hamilton folgt:

$$\implies \exists \overbrace{v}^{\neq 0} \in V, \text{ mit } Q_i(F)v = 0$$

Sei  $0 \neq v_0 \in V$  beliebigen Vektor  $P_F(F)v_0 = 0$

$$\begin{aligned} Q_1(F)Q_2(F)\cdots + \frac{\dim V}{2}(F)v_0 &= 0 \\ \implies \exists j : Q_j(F)Q_{j+1}(F)\cdots + \frac{\dim V}{2}(F)v_0 &= 0 \\ \text{aber } Q_{j+1}(F)\cdots Q_{\dim V/2}(F)v_0 &\neq 0 \end{aligned}$$

$\implies$  wir nehmen  $i := j$  und  $v := Q_{j+1}(F)\cdots Q_{\dim V/2}(F)v_0$ .  
 Beh:  $U := \text{span}(v, F(v))$  ist ein  $F$ -invariante Vektorraum.  $Q_i(F)v = 0$   
 $\implies \exists a, b \in \mathbb{R}$  mit  $F(F(v)) = av + bF(v)$ . Es folgt:  $U^\perp$  ist auch  $F$ -invariant.  $V = U \oplus U^\perp \xrightarrow{IA}$  Basen von  $U$  und von  $U^\perp$  wie oben. Die Vereinigung dieser Basen ist wie erwünscht.

**Korollar 6.** Sei  $A \in O(n)$ . Dann gibt es ein  $S \in O(n)$  und  $r, s, t \in \mathbb{N}$ ,  $\Theta_1, \dots, \Theta_t \in \mathbb{R}$  mit

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} E_r & & & 0 \\ & -E_s & & \\ & & D_{\Theta_1} & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & D_{\Theta_t} \end{pmatrix}$$

wobei

$$D_\Theta := \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix}$$

**Beispiel 13.**

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix} \in U(n)$$

$$\begin{aligned} A(z_1, \dots, z_n) &= (z_2, \dots, z_n, z_1) \\ A(1, S, S^2, \dots, S^{n-1}) &= (S, S^2, \dots, S^{n-1}, 1) \\ S &:= e^{2\pi i/n} \quad S^n = 1 \end{aligned}$$

$\implies (1, S, S^2, \dots, S^{n-1})$  ist Eigenvektor zum Eigenwert  $S$ . Ähnlich: für  $0 \leq j \leq n-1$  haben wir  $(1, S^j, S^{2j}, \dots, S^{(n-1)j})$  ist Eigenvektor zum Eigenwert  $S^j$ .  
 $1, S, S^2, \dots, S^{n-1}$  sind paarweise verschieden  $\implies (1, S^j, S^{2j}, \dots, S^{(n-1)j})$  ist eine Basis von Eigenvektoren. Normalisierung:

$$\left( \frac{1}{\sqrt{n}} \left( 1, S^j, S^{2j}, \dots, S^{(n-1)j} \right) \right)_{j=0,1,\dots,n-1}$$

ist eine orthonormale Basis von Eigenvektoren

$(K = \mathbb{C})$  unitärer Endomorphismus von  $V$   
**Fazit 6.**  $(K = \mathbb{R})$  orthogonaler Endomorphismus von  $V$   
 $\implies V = \bigoplus_{\text{Eigenwerte } \lambda} \text{Eig}(F; \lambda)$  orthogonale direkte Summe

**Beispiel 14.**

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{4}{5} & \frac{36}{65} \\ \frac{4}{13} & -\frac{3}{5} & \frac{48}{65} \\ \frac{12}{13} & 0 & -\frac{5}{13} \end{pmatrix} \in O(3)$$

$\det A = 1$  2 komplex konjugierte + 1 reeller oder 3 reelle Eigenwerte  $\implies +1$  ist ein Eigenwert.  $\dots \rightsquigarrow$  Eigenvektor  $(6, 3, 4)$  zum Eigenwert 1.  $\rightarrow v$  mit  $\|v\| = 1$   
 $v = \frac{1}{\sqrt{61}}(6, 3, 4) \rightarrow v^\perp = \text{span}((1, -2, 0), (2, 0, -3)) \xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}}$

$$(1, -2, 0), \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}, -3\right)$$

Normalisieren:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0), \sqrt{1}\sqrt{305}(8, 4, -15)$$

Und wir berechnen

$$S := \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{61}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{8}{\sqrt{305}} \\ \frac{3}{\sqrt{61}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{305}} \\ \frac{4}{\sqrt{61}} & 0 & -\frac{15}{\sqrt{305}} \end{pmatrix}$$

bekommen wir

$$\underbrace{S^{-1}}_{=S^t} AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{57}{65} & \frac{4\sqrt{61}}{65} \\ 0 & -\frac{4\sqrt{61}}{65} & -\frac{57}{65} \end{pmatrix}$$

**1.8 Beschreibung von  $SO(3)$  und  $O(3)$** 

*Eigenschaften 7.* Sei  $A \in SO(3)$ . Dann: entweder es gibt 1 reelle und 2 komplex konjugierte Eigenwerte oder 3 reelle Eigenwerte.  $\lambda \in \mathbb{C} \implies \lambda \cdot \bar{\lambda} = 1$ . Eigenwerte  $+1(\times 3) \Leftrightarrow A = E_3$  oder  $-1(\times 2) / +1$ . Wenn  $\nrightarrow A = E^3$ , dann ist  $\dim \text{Eig}(A, 1) = 1$ .

$$A : \text{Eig}(A, 1)^\perp \rightarrow \text{Eig}(A, 1)^\perp$$

ist eine Drehung durch einen Winkel  $\Theta \in (0, 2\phi)$ . Bezüglich Basis  $(v_1, v_2, v_3)$ ,  $v_1 \in \text{Eig}(A, 1)$ ,  $\|v_1\| = 1$  sieht  $A$  aus wie

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Theta & -\sin \Theta \\ 0 & \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix}$$

*Eigenschaften 8.* Sei  $A \in O(3)$  Falls  $\det A = 1$ , haben wir  $A \in SO(3)$

Falls  $\det A = -1$ , haben wir  $-A \in SO(3)$

Dann bekommen wir die folgende Beschreibung von  $A \in O(3)$  mit  $\det A = -1$ :

- $A = -E_3$
- oder  $\dim \text{Eig}(A, -1) = 1$   
 $v_1 \in \text{Eig}(A, -1)$ ,  $\|v_1\| = 1$   
 $A : \text{Eig}(A, -1)^\perp \rightarrow \text{Eig}(A, -1)^\perp$  ist eine Drehung um den Winkel  $\Theta - \pi \in (-\pi, \pi)$  (Spiegelung oder Spiegelung mit Drehung)

**1.9 Selbstadjungierte Endomorphismen**

$V, \langle, \rangle$ ,  $K$ -Vektorraum mit Skalarprodukt. ( $K = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ). Ist  $F : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus, so heisst  $F^* : V \rightarrow V$  adjugierter Endomorphismus falls

$$\langle F(v), w \rangle = \langle v, F^*(w) \rangle \quad \forall v, w \in V$$

**Definition 22.**  $F : V \rightarrow V$  ist adjugiert falls

$$\langle F(v), w \rangle = \langle v, F(w) \rangle \quad \forall v, w \in V$$

*Eigenschaften 9.* Falls  $V = \mathbb{R}^n$  mit Standardskalarprodukt, so zu  $F$  ist eine assoziierte Matrix  $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ , dann ist  $A^t$  zu  $F^*$  assoziiert. Falls  $V = \mathbb{C}^n$ , dann ist

$$\begin{aligned} F &\leftrightarrow A \in M(n \times n, \mathbb{C}) \\ F^* &\leftrightarrow \bar{A}^t \in M(n \times n, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

**Beweis 13.**

$$\langle Av, w \rangle = (Av)^t \bar{w} = v^t A^t \bar{w} = v^t \bar{A}^t w = \langle v, \bar{w}^t w \rangle$$

*Bemerkung 19.*  $F^*$  ist eindeutig falls für  $\tilde{F}^*$  gilt

$$\langle F(v), w \rangle = \langle v, \tilde{F}^*(w) \rangle$$

dann ist

$$0 = \langle v, \tilde{F}^*(w) - F^*(w) \rangle$$

$\implies$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \tilde{F}^*(w) - F^*(w), \tilde{F}^*(w) - F^*(w) \rangle \\ &= \|\tilde{F}^*(w) - F^*(w)\|^2 \\ &\implies \tilde{F}^*(w) = F^*(w) \end{aligned}$$

*Fazit 7.* Im Fall  $V = \mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{C}^n$  mit Standardskalarprodukt ist ein selbstadjungierter Endomorphismus durch eine symmetrische bzw. hermitesche Matrix gegeben.

**Lemma 1.** Jeder Eigenwert eines selbstadjungierten Endomorphismus ist reell.

**Beweis 14.** Ist  $F(v) = \lambda v$  mit  $v \neq 0$ , so gilt

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle F(v), v \rangle = \langle v, F(v) \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle \implies \lambda = \bar{\lambda}$$

*Bemerkung 20.* Prä-Hilbertraum bezeichnet einen  $K$ -Vektorraum ( $K = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ) mit Skalarprodukt. Euklidische bzw. unitäre Vektorräume sind endlichdimensional,

**Proposition 8.** Sei  $V$  ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und  $F : V \rightarrow V$  ein selbstadjungierter Endomorphismus. Dann gibt es eine orthonormale Basis von Eigenvektoren.

**Beweis 15.** Falls  $V$  ein unitärer Vektorraum ist: durch Induktion nach  $\dim V$ ,  $\exists$  Eigenwert  $\lambda$ , Eigenvektor  $v$ , oBdA haben wir  $\|v\| = 1$ . Wir behaupten:

$$F(v^\perp) \in v^\perp$$

$$\langle v, w \rangle = 0 \implies \langle v, F(w) \rangle = \langle F(v), w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle = 0$$

IA  $\implies \exists$  orthonormale Basis von  $v^\perp$ . Dies, zusammen mit  $v$ , gibt eine Basis von  $V$ . Fall eines euklidischen Vektorraums: Das gleiche Argumente ist gültig, sobald wir wissen, dass  $F$  einen Eigenwert besitzt. Man wählt eine Basis von  $V$ , so:

$$F \leftrightarrow A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \quad [n = \dim V]$$

mit  $A = A^t$ . Wir betrachten  $A$  als komplexe Matrix, so dass

$$A = \bar{A} \implies \bar{A}^t = A^t = A \implies A \text{ ist hermetisch}$$

Sei  $\lambda$  ein (komplexer) Eigenwert von  $A$ . Weil  $A$  hermetisch ist, haben wir  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Wir haben

$$\det(A - \lambda E_n) = 0$$

Dann:

$$\det(F - \lambda \text{id}_V) = 0$$

also  $\lambda$  ist Eigenwert von  $F$ .

**Korollar 7.** Sei  $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$  symmetrisch. Dann  $\exists S \in O(n)$  mit

$$S^t A S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

Sei  $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$  hermetisch. Dann  $\exists S \in U(n)$  mit

$$\bar{S}^t A S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

**Korollar 8.** Sei  $F : V \rightarrow V$  wie in der Proposition oben. Dann ist  $V$  die orthogonale direkte Summe von diesen Eigenräumen:

$$V = \bigoplus_{\text{Eigenwert } \lambda} \text{Eig}(F; \lambda)$$

**Fazit 8.**  $\rightsquigarrow$  Praktisches Verfahren:  $A$  symmetrisch bzw. hermetische Matrix

$\hookrightarrow$  berechnen  $\text{Eig}(A; \lambda)$

$\hookrightarrow$  wählen von jedem eine orthonormale Basis

**Beispiel 15.**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3+3i \\ 3 & 5 & -3-3i \\ 3-3i & -3+3i & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = \det(tE_3 - A) = (t-5)^2(t-2) + \dots = t^3 - 12t^2 + 256 = (t+4)(t-8)^2$$

$$\text{Eig}(A; -4) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3+3i \\ 3 & 9 & -3-3i \\ 3-3i & -3+3i & 6 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1+i \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Eig}(A; \delta) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3+3i \\ 3 & -3 & -3+3i \\ 3-3i & -3+3i & -6 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1-i \end{pmatrix} \right\} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\left( \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \right), \left( \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1-i}{2} \right)$$

Wir bekommen:

$$S := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{-1+i}{2} & 0 & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix}$$

dann:

$$\bar{S}^t A S = \text{diag}(-4, 8, 8)$$

**Bemerkung 21.** Das Resultat von der Proposition oben im Fall eines euklidischen Vektorraums ist klar, auch aus geometrischem Grund.

symm. Matrizen  $\setminus \mathbb{R} \rightsquigarrow$  quadratische Formen

(Prop aktuelle-7)  $S^t A S$  aus der Transformationsformel.

... und man kann auch einen alternativen Beweis in diesem Fall geben.

$$A \in M(n \times n, \mathbb{R}), A^t = A \rightsquigarrow q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, q(v) := v^t A v$$

(Faktum aus der Analysis)

$$\exists x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1 \text{ mit } q(x) \geq q(x') \quad \forall x' \in \mathbb{R}^n, \|x'\| = 1$$

Dann für  $v \in \mathbb{R}^n, v \perp x$  haben wir  $Av \perp x$ . In der Tat haben wir

$$(Av - q(x)v) \perp x \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

denn

$$\langle Av - q(x)v, v \rangle + 2\lambda \langle Av - q(x)v, x \rangle = (v + \lambda x)^t (A - q(x)E_n)(v + \lambda x) \leq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

(Details im Buch, 5.6.4)



*Bemerkung 22.*  $F$  selbstadjugiert,  $\dim V < \infty \implies \exists$  orthonormale Basis von Eigenvektoren  $\implies$

$$V = \bigoplus_{\lambda} \text{Eig}(F; \lambda)$$

orthogonale direkte Summe  $\rightsquigarrow$  orthogonale Projektion

$$P_{\lambda} V \rightarrow \text{Eig}(F, \lambda)$$

Dann können wir schreiben

$$\begin{aligned} F &= \sum_{\text{Eigenwerte } \lambda} \lambda P_{\lambda} \\ &= \{\text{Eigenwerte von } F\} = \text{"Spektrum"} \end{aligned}$$

Geschrieben mit Matrizen:

$$A \in (n \times n, \mathbb{R}) \text{ symmetrisch} \implies \exists S \in O(n)$$

so dass  $S^{-1}AS$  eine Diagonalmatrix ist.

Interpretation: der zu  $A$  assoziierte Endomorphismus ist Diagonalisierbar.

$S^t AS$  ist eine Diagonalmatrix

Interpretation:  $A \leftrightarrow s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Bilinearform.

$$\begin{aligned} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &\leftrightarrow (x, y) \mapsto x^t \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) y \\ &\left( \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)^t \left( \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i \end{aligned}$$

### Fragen

- Zu einer symmetrischen Bilinearform gibt es eine bestimmte Normalform?
- Wie kann man das praktisch berechnen?

**Proposition 9.** *Hauptachsentransformation symmetrischer Matrizen* Sei  $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$  symmetrisch und  $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  die entsprechende symmetrische Bilinearform. Dann:

1. Ist  $B = (w_1, \dots, w_n)$  eine orthonormale Basis von Eigenvektoren von  $A$ , so ist  $M_B(s) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  wobei  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die Eigenwerte von  $A$  sind.
2. Es gibt eine Basis  $B'$  mit

$$M_{B'}(s) = \begin{pmatrix} E_k & & \\ & -E_l & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Blockdiagonalmatrix, wobei

$$\begin{aligned} k &= \#\{i | \lambda_i > 0\} \\ l &= \#\{i | \lambda_i < 0\} \end{aligned}$$

**Beweis 16.** 1.  $\Leftrightarrow \exists S \in O(n)$  mit  $S^t AS = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$2. \Leftrightarrow \exists T \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ mit } T^t AT = \begin{pmatrix} E_k & & \\ & -E_l & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

oder  $BdA$  habe wir

$$\begin{aligned} \lambda_1, \dots, \lambda_k &> 0 \\ \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{k+l} &< 0 \\ \lambda_{k+l+1} &= \dots = \lambda_n = 0 \end{aligned}$$

Wir nehmen  $B' = (w'_1, \dots, w'_n)$  mit

$$w'_i = \begin{cases} \frac{w_i}{\sqrt{|\lambda_i|}} & i \leq k+l \\ w_i, i > k+l \end{cases}$$

$$(w'_i)^t A w'_i = \frac{1}{|\lambda_i|} w_i^t A w_i = \frac{1}{|\lambda_i|} \lambda_i \text{ für } i \leq k+l$$

Bemerkung 23.

$$T^t A T = \underbrace{\begin{pmatrix} E_k & & \\ & -E_n & \\ & & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Sylvester-Form}}$$

... Erklärung zum Namen "Hauptachsentransformation"...

**Korollar 9.** Sei  $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine symmetrische Bilinearform mit entsprechender Matrix  $A$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1.  $s$  ist positiv definit
2. Alle Eigenwerte von  $A$  sind positiv
3. Die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms haben alternierende Vorzeichen

Vorzeichenregel von Descartes

**Beispiel 16.**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = \det(tE_3 - A) = t^3 - ut^2 + 15t \underbrace{+}_{-} 3$$

$$P_A(-1) = -21 \quad P_A(0) = 3 \implies \exists \lambda : -1 < \lambda < 0$$

**Beweis 17.**  $s$  ist äquivalent zu

$$(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda x_i y_i$$

$$\implies s \text{ positiv definit} \Leftrightarrow \lambda_i > 0 \quad \forall i$$

Bemerkung 24. Weitere Begriffe  $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  symmetrische Bilinearform

positiv definit	positiv semidefinit
negativ definit	negativ semidefinit
indefinit:	$\exists x \in V : s(x, x) > 0$ und $y \in V : s(y, y) < 0$

Tabelle 1: Weitere Begriffe

Bemerkung 25. Ausartungsraum von einer Bilinearform  $s : V \times V \rightarrow K$  auf einem Vektorraum über einem beliebigen Körper  $K$  ist:

$$U := \{v \in V \mid s(v, w) = 0 \quad \forall w \in V\}$$

und ist ein Untervektorraum. Falls  $s$  symmetrisch oder schiefsymmetrisch ist, bekommen wir eine induzierte Bilinearform  $\bar{s} : V/U \times V/U \rightarrow K$ , gegeben durch

$$v + U, w + U \mapsto s(v, w)$$

und  $\bar{s}$  ist nicht ausgeartet.

$$\begin{aligned}v' &= v + u, u \in U \\w' &= w + \tilde{u}, \tilde{u} \in U\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s(v', v') &= s(v, w) + s(u, w) + s(v, \tilde{u}) + s(u, \tilde{u}) = \\&= s(v, w) + \underbrace{s(u, w)}_{=0} \pm \underbrace{s(\tilde{u}, v)}_{=0} + \underbrace{s(u, \tilde{u})}_{=0}\end{aligned}$$

$$s(v, w) = 0 \implies v \in U \implies v + U$$

ist Nullvektor von  $V/U$

**Korollar 10.** Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  und  $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine symmetrische Bilinearform. dann gibt es eine orthogonale Zerlegung

$$\mathbb{R}^n = W_+ \oplus W_i \oplus W_0$$

mit

$$s|_{W_+} > 0, s|_{W_-} < 0$$

und  $W_0 = \text{Ausartungsraum von } s$

**Proposition 10.** Trägheitsgesetz/Signatur von Sylvester Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und  $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine symmetrische Bilinearform. Sei

$$V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0$$

eine Zerlegung als orthogonale direkte Summe, mit  $s|_{V_+} > 0$ ,  $s|_{V_-} < 0$  und  $V_0 = \text{Ausartungsraum von } s$ . Dann sind

$$r_+ := \dim(V_+), r_- = \dim(V_-) \text{ und } r_0 := \dim(V_0)$$

Invarianten von  $s$ , charakterisiert durch

$$r_+ = \max \{ \dim W \mid W \subset V \text{ Untervektorraum, } s|_W > 0 \}$$

$$r_- = \max \{ \dim W \mid W \subset V \text{ Untervektorraum, } s|_W < 0 \}$$

Die Invarianten  $(r_+, r_-, r_0)$  heisst Trägheitsindex oder Signatur von  $s$

**Bemerkung 26.** Ist  $A$  eine  $n \times n$  symmetrische reelle Matrix, heisst Signatur die Signatur von der zu  $A$  entsprechender Bilinearform.

**Bemerkung 27.** Auch  $r_+ - r_-$  heisst Signatur.

Dimension	$\dim V = r_+ + r_- + r_0$	
Rang	$r_+ + r_-$	$\leftrightarrow (r_+, r_-, r_0)$
Signatur in diesen Sinn	$r_+ - r_-$	

**Beweis 18.** Reduktionsschritt: Es genügt, das Resultat zu beweisen, im Fall dass  $s$  nicht ausgeartet ist.

$$V \rightarrow \bar{V} = V/V_0$$

$$V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0$$

$$\bar{V} = \bar{V}_+ \oplus \bar{V}_-$$

wobei  $\bar{V}_\pm = \text{Bild von } V_\pm$ . Bew.  $\bar{V} = \bar{V}_+ + \bar{V}_-$  direkte Summe

$$\Leftrightarrow \bar{V}_+ \cap \bar{V}_- = 0$$

$$\bar{v} \leftrightarrow v \in V_+ \oplus V_0$$

und

$$v \in V_- \oplus V_0$$

$\Leftrightarrow v \in V_0$  Behauptung:  $\bar{s}$  induzierte Bilinearform auf  $\bar{V}$

$$\max \{ \dim W | s|_W > 0 \} = \max \{ \dim U | U \subset \bar{V}, \bar{s}|_U > 0 \}$$

und

$$\max \{ \dim W | s|_W < 0 \} = \max \{ \dim U | U \subset \bar{V}, \bar{s}|_U < 0 \}$$

Ist  $W \subset V, s|_W > 0$ , und  $\bar{W} := \text{Bild von } W$ , so haben wir

$$\dim \bar{W} = \dim W$$

und

$$\bar{s}|_{\bar{W}} > 0$$

Dimensionsformel:

$$\dim \bar{W} = \dim W - \underbrace{\dim(W \cap V_0)}_{=0} = \dim W$$

und

$$\bar{s}(\bar{v}, \bar{v}) = s(v, v)$$

wobei  $v \in W \mapsto v \in \bar{W}$  Umgekehrt ist

$$U \subset \bar{V}, \bar{s}|_U > 0, \dim U = d$$

wählen Basis  $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_d)$  von  $\bar{U}$ , mit  $v_i \mapsto \bar{v}_i \forall i$  dann haben wir  $W := \text{span}(v_1, \dots, v_d)$  hat die Eigenschaft

$$\dim W = d \quad s|_W > 0, \quad \text{Im}(W) = U$$

Beweis im Fall  $s$  nicht ausgeartet:

Behauptung: Ist

$$W_+ \subset V, s|_{W_+} > 0, \quad W_- \subset V, s|_{W_-} < 0$$

so haben wir

$$W_+ \cap W_- = 0$$

Es folgt:

$$\dim W_- + \dim W_+ \leq \dim V$$

mit Gleichheit  $\Leftrightarrow V = W_+ \oplus W_-$

Deshalb

$$r_+ + r_- \leq \dim V$$

Und wir haben = aus dem Korollar

(alternativer Beweis ohne Quotientenvektorräume sehe Buch)

Bemerkung 28. Praktische Fragen:

- Wie berechnet man die Signatur einer symmetrischen Bilinearform?
- Wie findet man eine Basis, so dass die darstellende Matrix in Sylvesterform ist?

In Matrixen:  $A \in (n \times n, \mathbb{R})$  symm.

- Signatur?
- Finden  $T \in GL_n(\mathbb{R})$  mit  $T^t A T$  in Sylvesterform

Antwort:

Aus der Hauptachsentransformation:

$$\exists S \in O(n), S^t A S = S^{-1} A S = \text{diag}(\lambda, \dots, \lambda_n)$$

$\implies$  Signatur

$$r_+ = \#\{i | \lambda_i > 0\}$$

$$r_- = \#\{i | \lambda_i < 0\}$$

$$r_0 = \dim \text{Ker}(A)$$

$$S \xrightarrow{\text{Normieren der Spaltenvektoren}} S'$$

mit  $S'^t A S$  in Sylvesterform.

Alternatives, oft leichteres Verfahren:

- $\text{Ker}(A)$  = Ausartungsraum berechnen
- Vektoren Wählen, wobei  $q(v) = s(v, v)$  verschieden von Null ist.  $\rightsquigarrow q(v) \in \{\pm 1\} \rightsquigarrow v^\perp$

**Beispiel 17.** Sylvesterform

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = t^3 - 8t^2 + 3t = t(t - (4 + \sqrt{13}))(t - (4 - \sqrt{13}))$$

Signaturen  $(2, 0, 1)$  Mit Halbachsentransformation

$$\text{Eigenwert } 0 \rightsquigarrow \text{Eigenvektor } (1, -1, 1)$$

$$\text{Eigenwert } 4 + \sqrt{13} \rightsquigarrow \text{Eigenvektor } (1, 4 - \sqrt{13}, -3 + \sqrt{13})$$

$$\text{Eigenwert } 4 - \sqrt{13} \rightsquigarrow \text{Eigenvektor } (1, 4 + \sqrt{13}, -3 - \sqrt{13})$$

Normieren...

$S'$  ausrechnen... (ne danke)

haben wir

$$S'^t = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

**Beispiel 18.** Alternativ

$$e_2 : q(e_2) = e_2^t A e_2 = 1$$

$$e_2^\perp = \{(x, y, z) | 2x + y + z = 0\}$$

$$(-1, 2, 0) A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\text{Ker}(A) = \text{span} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } T \text{ haben wir } T^t A T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

## 2 Klassifikation von Bilinearformen auf $\mathbb{R}^n \leftrightarrow$ Signatur

Seien euklidische  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  und symmetrische Bilinearform  $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , so können wir die Bilinearform durch die Hauptachsentransformation verstehen. Seien ein endlichdimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  und die symmetrische Bilinearform  $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , dann ist  $s$  durch die Signatur  $(r_+, r_-, r_0)$  klassifiziert.

*Eigenschaften* 10.  $\dim V = 2$

Signatur	$(2, 0, 0)$	$q(v) := s(v, v)$	Quadratische Schale (positiv)
	$(0, 2, 0)$		Quadratische Schale (negativ)
	$(1, 1, 0)$		Sattelpunkt
	$(0, 1, 1)$		Quadratisches halbes Rohr (positiv)
	$(1, 0, 1)$		Quadratisches halbes Rohr (negativ)

*Eigenschaften* 11.  $\dim V = 3$   $\{q(v) = 1\}$

$(3, 0, 0)$	Sphäre
$(2, 1, 0)$	einschaliges Hyperboloid
$(1, 2, 0)$	zweischaliges Hyperboloid
$(0, 3, 0)$	$\emptyset$

+ Fälle  $s$  entartet

Der Fall von Bilinearformen über Vektorräumen über  $\mathbb{K}$ ,  $\mathbb{K}$  beliebiger Körper.

**Proposition 11.** *Orthogonalisierungssatz* Sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper mit  $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ . Sei  $s$  eine symmetrische Bilinearform über  $V$ . Dann gibt es eine Basis  $B$  von  $V$ , so dass die  $M_B(s)$  eine Diagonalmatrix ist.

**Beweis 19.** *Reduktionsschritt zum Fall  $s$  nicht ausgeartet.* Sei  $U = \text{Ausartungsraum}$ .  $\bar{V} := V/U$  und  $\bar{s} :=$  induzierte Bilinearform. Wählen wir ein Komplement  $W \subset V$  zu  $U$ , so haben wir

$$\begin{aligned} V &= U \oplus W \\ W &\xrightarrow{\text{Isomorphismus}} \bar{V} \\ s|_W &\text{ nicht ausgeartet} \end{aligned}$$

Wir können deshalb behaupten, dass  $s$  nicht ausgeartet ist. Dann beweisen wir dies Aussage durch Induktion nach  $\dim V$ .  $\dim V \leq 1$  trivial. Induktionsschritt:

$$s \text{ nicht ausgeartet} \xrightarrow{\dim(\mathbb{K}) \neq 2} \exists v \in V : s(v, v) \neq 0$$

Sei  $V' := V^\perp$ . Wir haben  $\dim V' = \dim V - 1$ , weil  $s$  nicht ausgeartet ist.

$IA \rightsquigarrow$  Basis  $B'$  von  $V'$  mit  $\underbrace{M_B(s|_{V'})}_{\text{auch nicht ausgeartet}}$  diagonal. Dann:

$$B \& v \rightsquigarrow B \text{ mit } M_B(s) \text{ eine Diagonalmatrix}$$

**Korollar 11.** Ist  $\text{char } K \neq 2$ , so gibt es zu einer symmetrischen Matrix  $A \in (n \times n, \mathbb{K})$  ein  $S \in GL_n(\mathbb{K})$  so dass  $S^t A S$  eine Diagonalmatrix ist.

**Beispiel 19.**  $\mathbb{K}$  beliebig,  $\text{char}(K) \neq 2$   $V = K^2$

$$s(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_1$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$s(v_1, v_1) = 2$$

$$v_1^\perp = \text{span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$s(v_2, v_2) = -2$$

$$B := (v_1, v_2)$$

$$M_B(s) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$S \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  Standardbasis. Mit  $S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  haben wir

$$S^t A S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

*Bemerkung 29.* offen bleibt die Frage: Sind symmetrische Bilinearformen  $s$  und  $s'$  auf  $V$  gegeben ( $\dim_{\mathbb{K}} < \infty$ ), können wir entscheiden ob  $s$  und  $s'$  äquivalent sind?

Oder, in Matrizen: Sind symmetrische  $A, A' \in (n \times n, \mathbb{K})$  gegeben, können wir entscheiden, ob es ein  $S \in GL_N(\mathbb{K})$  gibt, so dass  $S^t A S = A'$ ?

Die Antwort hängt von  $\mathbb{K}$  ab.

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  durch die Signatur
- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  durch die Rang
- andere  $\mathbb{K}$ ?

Im Allgemeinen:

- Rang
- Reduktion zum Fall einer nichtausgearteten Form

Wir behaupten:  $s$  ist nicht ausgeartet  $\Leftrightarrow$  eine darstellende Matrix  $A$  ist invertierbar.

$$\det(A) \in \mathbb{K}^* / (\mathbb{K}^*)^2$$

ist eine Invariante von  $s$ , wegen der Transformationsform.

$$T \in GL_n(\mathbb{K}) \rightsquigarrow T^t A T$$

ist eine andere darstellende Matrix. Und

$$\det(T^t A T) = \det(T^t) \det(A) \det(T) = (\det T)^2 \det(A)$$

**Definition 23.** Diskriminante Sei  $s : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  eine symmetrische Bilinearform (mit  $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ ). Die Diskriminante von  $s$  ist 0 falls  $s$  ausgeartet ist, sonst ist die Klasse von  $\det(A)$  in  $\mathbb{K}^* / (\mathbb{K}^*)^2$ , wobei  $A$  eine darstellende Matrix von  $s$  ist. Die Diskriminante ist eine Invariante von  $s$

- Rang
- Diskriminante

*Bemerkung 30.* Noch offen: sind  $s, s'$  nicht ausgeartet, mit derselben Diskriminante, zu entscheiden, ob  $s$  und  $s'$  äquivalent sind.

**Beispiel 20.**  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ , z.B.  $V = \mathbb{Q}^2$ ,  $s$  Standardskalarprodukt  $s(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$  und  $s'$  symmetrische Bilinearform mit  $\text{disc}(s) = +1$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Basiswechsel}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

mit  $aa' = b^2, b \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow a = \frac{b^2}{a'} = a' \left( \frac{b}{a'} \right)^2$$

$a = 2$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a = 3$

$$s' \leftrightarrow q'(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2$$

Beh:

$$q'(x) \neq 1 \quad \forall x \in \mathbb{Q}^2$$

Konsequenz:  $s'$  ist nicht äquivalent zu  $s$ . Ist  $3x_1^2 + 3x_2^2 = 1$  so schreiben wir  $x_1 = \frac{r_1}{s_1}, x_2 = \frac{r_2}{s_2}, r_1, r_2, s_1, s_2 \in \mathbb{Q}, s_1, s_2 \neq 0$

$$3r_1^2 s_2^2 + 3r_2^2 s_1^2 = s_1^2 s_2^2$$

$$\text{oder } 3r^2 + 3s^2 = t^2 \text{ wobei } r = r_1 s_2, s = r_2 s_1, \overbrace{t}^{\neq 0} = s_1 s_2 \quad (1)$$

$$3^{\text{ungerade}}(3k_1 + 1) + 3^{\text{ungerade}}(3k_2 + 1)$$

$\implies$  Widerspruch zu (1)

**Fazit 9.**  $\mathbb{K}$ : Körper,  $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$

$V$ : endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum

$s: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  symmetrische Bilinearform

**Rang**  $\text{Rang } s \mid \dim V \Leftrightarrow s$  ist ausgeartet.  $U :=$  Ausartungsraum.  $\bar{s}$  induzierte Bilinearform auf  $\bar{V} := V/U$  (nicht ausgeartet)

**Diskriminante** für  $s$  nicht ausgeartet:  $\text{disc}(s) \in \mathbb{K}^*/(K^*)^2$

**Beispiel 21.**  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, V = \mathbb{Q}^2$  Bilinear entsprechend zu  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

- Beide: Rang 2, Diskriminante 1
- nicht äquivalent

**Bemerkung 31.** Die Frage, ob eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf  $V := \mathbb{Q}^2$  der Diskriminante 1 äquivalent zum Standardskalarprodukt ist, können wir nur beantworten mittels einem Resultat aus der Zahlentheorie.

**Satz 5.**  $s$  nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf  $\mathbb{Q}^2$   $\text{disc}(s) = 1 \implies \exists B$  Basis mit

$$M_B(s) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$$

Dann:  $s$  ist äquivalent zum Standardskalarprodukt  $\Leftrightarrow$

$$\exists v \in V, s(v, v) = 1 \text{ d.h. } \exists x, y \in \mathbb{Q} : ax^2 + ay^2 = 1$$

$\Leftrightarrow$

$$\exists x, y \in \mathbb{Q} \text{ mit } x^2 + y^2 = a$$

**Bemerkung 32.** Ein Resultat aus der Zahlentheorie gibt uns eine Charakterisierung von Summen zweier Quadrate in  $\mathbb{Q}$ : für  $a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$ :

$$\exists x, y \in \mathbb{Q} : x^2 + y^2 = a \Leftrightarrow \exists x, y \in \mathbb{Z} : x^2 + y^2 = a$$

$\Leftrightarrow a > 0$  und jede Primzahl  $p = 4k + 3$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) kommt mit gerader Vielfachheit in der Primzahlzerlegung von  $a$  vor. Der Beweis nutzt

$$(x_1 x'_1 - x_2 x'_2)^2 + (x_1 x'_2 + x_2 x'_1)^2 = (x_1^2 + x_2^2)(x_1'^2 + x_2'^2)$$

Satz von Fermat:  $p$  Primzahl

$$\exists x, y \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 = p \Leftrightarrow p = 2 \vee 4 \mid (p - 1)$$

Argument vom letzten Mal (auszuschließen  $a = 3$ )

**Fazit 10.** Zurück zum Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Wir wissen: eine symmetrische Bilinearform  $s: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\dim_{\mathbb{R}} V < \infty$ ) ist durch die Signatur  $(r_+, r_-, r_0)$  charakterisiert.

$$A: M_B(s) \rightarrow P_A(t) = \prod_{i=1}^n (t - \lambda_i)$$



$$\begin{aligned} r_+ &= \#\{i \mid \lambda_i > 0\} \\ r_- &= \#\{i \mid \lambda_i < 0\} \\ r_0 &= \#\{i \mid \lambda_i = 0\} \end{aligned}$$

und

$s > 0 \Leftrightarrow$  Signatur  $(n, 0, 0) \Leftrightarrow \lambda_i > 0 \forall i \Leftrightarrow$  Koeff.  $P_A(t)$  hat alternierende Vorzeichen

**Definition 24.** Hauptminor Sei  $A = (a_{ij}) \in (n \times n, \mathbb{K})$ . Wir schreiben  $A_k$  für die Teilmatrix  $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ , für  $1 \leq k \leq n$ . Der  $k$ -te Hauptminor von  $A$  ist  $\det(A_k)$

*Bemerkung 33.*  $\dim_{\mathbb{R}} < \infty$ ,  $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  symmetrische Bilinearform. Wann ist  $s$  positiv? Es ist notwendig, aber nicht hinreichend, dass  $\det(A) > 0$  für eine darstellende Matrix  $A$ .

**Proposition 12.** *Hauptminorenkriterium von Jacobi-Sylvester* Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine symmetrische Bilinearform und  $A$  eine darstellende Matrix. Dann ist  $s$  positiv definit  $\Leftrightarrow \det(A_k) > 0$ ,  $k = 1, \dots, n$   $n = \dim V$

**Beweis 20.**  $\Rightarrow$  Ist  $s > 0$ , so ist  $s|_W > 0$  für alle Untervektorräume  $S \subset V$ . Sei  $B = (v_1, \dots, v_n)$  eine Basis mit  $A = M_B(s)$ . Sei  $V_k := \text{span}(v_1, \dots, v_k)$  für  $1 \leq k \leq n$ . Dann haben wir:

$$M_{(v_1, \dots, v_k)}(s|_{V_k}) = (s(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq k} = (A_k)$$

Weil  $s|_{V_k} > 0$ , folgt:  $\det(A_k) > 0$ .

$\Leftarrow$  Durch eine Induktion nach  $n$ :

IA:  $n = 1$

IS: Wir nehmen das Resultat an für einen Vektorraum der Dimension  $n - 1$ . Seien  $B = (v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$  und  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$   $A = M_B(s)$ . Wir haben

- aus  $\det(A) > 0$  folgt:  $s$  ist nicht ausgeartet
- aus  $\det(A_1) > 0$  folgt  $a_{11} > 0$

Wir haben  $V = \text{span}(v_1) \oplus V_1^\perp$ . Es genügt zu zeigen, dass  $s|_{V_1^\perp}$  positiv definit ist. Eine Basis von  $V_1^\perp$  sieht so aus: Sei  $c_i := \frac{a_{1i}}{a_{11}}$  und  $\tilde{v}_i := v_i - c_i v_1$  für  $i = 2, \dots, n$ .

$$\begin{aligned} s(v_1, \tilde{v}_1) &= s(v_1, v_1) - c_1 s(v_1, v_1) = a_{11} - c_1 a_{11} = 0 \\ (\tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_n) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -c_2 & 1 & & \\ -c_3 & & 1 & \\ & & & \ddots \\ -c_n & & & & 1 \end{pmatrix} \\ (\tilde{a}_{ij})_{2 \leq i, j \leq n} \tilde{a}_{ij} &= s(\tilde{v}_i, \tilde{v}_j) = a_{ij} - c_i a_{11} + c_i c_j a_{11} = a_{ij} - c_i a_{1j} \\ \text{weil } c_i c_j a_{11} &= \frac{a_{1i}}{a_{11}} a_{1j} = c_j a_{1i} \end{aligned}$$

Wir haben für  $s \leq k \leq n$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -c_2 & 1 & & \\ -c_3 & & 1 & \\ & & & \ddots \\ -c_k & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{k1} & & & a_{kk} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} - c_2 a_{12} & \dots & a_{2k} - c_2 a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{2k} - c_k a_{12} & \dots & a_{kk} - c_k a_{1k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{k2} & \dots & \tilde{a}_{kk} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \det(A_k) &= a_{11} \det(\tilde{a}_{ij})_{2 \leq i, j \leq k} \end{aligned}$$

Aus  $\det(A_k) > 0$  und  $a_{11} > 0$  folgt:

$$\det(\tilde{a}_{ij})_{2 \leq i, j \leq k} > 0, \text{ für } k = 2, \dots, n$$

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt  $s|_{v_1^\perp} > 0$

### 3 Multilineare Algebra

#### 3.1 Dualvektorräume

**Definition 25.** Dualvektorraum / Linearformen Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Der Dualvektorraum ist  $V^* := \text{Hom}(V, \mathbb{K})$ . Elemente von  $V^*$  heißen Linearformen.  $V^*$  ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, mit Addition von Abbildungen und Multiplikation durch Skalare.

*Eigenschaften 12.* Sei  $B = (v_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $V$ .

- Koeffizient von  $v_i$

$$v_i^* : v = \sum_{j \in I} a_j v_j \mapsto a_i$$

- Summe von Koeffizienten

$$\sum v_i^* : v = \sum_{j \in I} a_j v_j \mapsto \sum a_i$$

wohldefiniert, weil nur endlich viele  $a_j$  sind  $\neq 0$

- Operationen auf Funktionsräumen, z.B.  $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$
- Standardkoordinaten:  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ,  $V = \mathbb{K}^n$ , Standardbasis  $e_1, \dots, e_n$

$$e_i^* : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

*Bemerkung 34.* Ist  $B = (v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$ , so ist  $B^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$  eine Basis von  $V^*$ . Denn zu  $f : V \rightarrow \mathbb{K}$  haben wir  $c_i := f(v_i)$ , dann

$$f \text{ linear} \implies f\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i a_i$$

Das zeigt, dass  $V^*$  ist von  $v_1^*, \dots, v_n^*$  aufgespannt. Lineare Unabhängigkeit von  $v_1^*, \dots, v_n^*$  ist klar. Deshalb haben wir einen Isomorphismus  $V \rightarrow V^*$ , gegeben durch  $v_i \mapsto v_i^* \forall i$ . Falls  $\dim V = \infty$  mit Basis  $(v_i)_{i \in I}$ , dann ist  $V^*$  nicht von den  $v_i^*, i \in I$  aufgespannt, z.B.

$$\sum_{i \in I} \notin \text{span}(v_i^*)_{i \in I}$$

$\phi : V \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $\phi(v_i) \neq 0$  nur für endlich viele  $i \in I$

**Beispiel 22.**  $V = \mathbb{K}$  mit Standardbasis  $(e_1, \dots, e_n)$ . Dann hat  $V^*$  die Standardbasis  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  und wir haben den Isomorphismus

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n &\rightarrow (\mathbb{K})^* \\ e_i &\mapsto e_i^* \quad \forall i \end{aligned}$$

*Bemerkung 35.* Es ist nicht überraschend, dass der Isomorphismus  $V \rightarrow V^*$  assoziiert zu einer Basis  $B = (v_1, \dots, v_n)$  abhängig von der Basis ist.

*Bemerkung 36.* Sei  $V \subset \mathbb{K}^n$  ein Untervektorraum.  $V$  kann durch eine Basis gegeben werden, oder durch Gleichungen.

$$V = \text{span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x - y + z = 0 \right\}$$

ist eine Linearform auf  $\mathbb{K}^n$

**Definition 26.** orthogonaler Raum Sei  $W$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $V \subset W$  ein Untervektorraum. Der Untervektorraum

$$V^0 = \{\phi \in W^* : \phi(v) = 0 \ \forall v \in V\} \subset W^*$$

heisst der zu  $V$  orthogonale Raum. Falls  $\dim V < \infty$ , dann haben wir  $\dim V^0 = \dim W - \dim V$ . Basis von

$$W^* = \overbrace{W_1, \dots, W_d, \dots, W_n}^{\text{von } V}$$

Dann:

$$V^0 = \text{span}(w_{d+1}^*, \dots, w_n^*)$$

**Definition 27.** duale Abbildung Sei  $V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung von  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen. Dann gibt es eine lineare Abbildung  $F^* : W^* \rightarrow V^*$ , die duale Abbildung, gegeben durch Komposition mit  $F$

$$\psi : V \rightarrow K \mapsto F^*(\psi) := \psi \circ F$$

Dann

$$V^0 = \ker(W^* \rightarrow V^*)$$

Aus der Dimensionsformel bekommt man nochmals

$$\dim V^0 = \dim W^* - \dim V^*$$

*Eigenschaften 13.* duale Abbildung

- falls  $W = V$ , gilt  $(id_V)^* = Id_{V^*}$
- Ist auch  $G : U \rightarrow V$  gegeben, so haben wir

$$G^* F^* \psi = (F \circ G)^* \psi$$

Das nennt man Funktorialität.

*Bemerkung 37.* Man kann zeigen, dass zu  $U \subset V$  bekommt man eine surjektive duale Abbildung  $V^* \rightarrow U^*$

$$(\psi : V \rightarrow \mathbb{K}) \mapsto \psi|_U$$

**Proposition 13.** Seien  $V$  und  $W$  endlich dimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume mit Basen  $A = (v_1, \dots, v_n)$  und  $B = (w_1, \dots, w_m)$ . Sei  $F : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung mit darstellender Matrix  $M$ . Dann ist  $F^* : W^* \rightarrow V^*$  bezüglich der dualen Basen  $A^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ ,  $B^* = (w_1^*, \dots, w_m^*)$  durch die Matrix  $M^t$  dargestellt. Wir schreiben  $M = (a_{ij})$ . Das bedeutet:

$$F(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$$

Es folgt

$$F^*(w_i^*)(v_j) = i\text{-te Komponente von } F(v_j) = a_{ij}$$

Das ist zu sagen, die darstellende Matrix von  $F^*$  ist die Matrix  $(a_{ji})$

$$F^*(w_i^*) = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j^*$$

*Eigenschaften 14.*  $F : V \rightarrow W$

•

$$\underbrace{(\operatorname{Im} F)^0}_{\text{alle } W \xrightarrow{\phi} \mathbb{K} \text{ mit } \phi|_{\operatorname{Im} F} = 0} = \underbrace{\operatorname{Ker} F^*}_{\text{alle } W \xrightarrow{\phi} \mathbb{K} \text{ mit } \phi \circ F = 0}$$

Da

$$\phi|_{\operatorname{Im} F} = 0 \Leftrightarrow \phi \circ F = 0$$

haben wir die Gleichung.

•

$$(\operatorname{Ker})^0 = \operatorname{Im}(F^*)$$

 $\supset$  offensichtlich

 $\subset$  folgt aus der Surjektivität von  $W^* \rightarrow (\operatorname{Im} F)^*$ 

 Wir betrachten  $\phi : V \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $\phi|_{\operatorname{Ker} F} = 0$ 

$$w \rightarrow W, w = F(v) \text{ für ein } v \in V$$

$$w \rightsquigarrow \bar{\phi}(w) = \phi(v)$$

Ist

$$w = F(v')$$

dann ist

$$v' - v \in \operatorname{Ker} F$$

und

$$\phi(v') - \phi(v) = \phi(v' - v) = 0$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & K \\ & \searrow & \nearrow \bar{\phi} \\ & \operatorname{Im} F & \\ \exists \underbrace{\psi}_{\in W^*} & \mapsto & \underbrace{\bar{\phi}}_{\in (\operatorname{Im} F)^*} \end{array}$$

d.h.

$$\psi : W \rightarrow \mathbb{K}$$

mit

$$\psi|_{\operatorname{Im} F} = \bar{\phi}$$

Das zeigt:

$$F^*(\psi) = \phi$$

*Bemerkung 38.* An dem Diagramm haben wir eine Bijektion zwischen  $\phi \in V^*$  mit  $\phi|_{\operatorname{Ker} F} = 0$  und  $\bar{\phi} \in (\operatorname{Im} F)^*$

$$\xrightarrow{\dim W < \infty} \dim(\operatorname{Im} F) = \dim(\operatorname{Im} F)^* = \dim(\operatorname{Ker} F)^0 = \dim \operatorname{Im}(F^*)$$

$$\xrightarrow{\dim V, \dim W < \infty} \operatorname{rang}(F) = \operatorname{rang}(F^*)$$

 Keine Überraschung!  $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^t)$ 
**Beispiel 23.**

$$\mathbb{R}[x]^{\leq 2} \xrightarrow{(ev_{-1}, ev_1)} \mathbb{R}$$

surjektiv

$$\implies (\operatorname{Im} F)^0 = 0$$

Interpretation:

$$\alpha f(-1) + \beta f(1) = 0 \quad \forall f \in \mathbb{R}[x]^{\leq 2} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

$$\operatorname{Ker}((\alpha, \beta) \mapsto (f \mapsto \alpha f(-1) + \beta f(1)))$$

$$\begin{aligned} \text{Ker}(ev_{-1}, ev_1) &= \text{span}(x^2 - 1) \\ \implies \text{Ker}(ev_{-1}, ev_1)^0 &= \left\{ \mathbb{R}[x]^{\leq 2} \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}, \phi(x^2 - 1) = 0 \right\} = \text{span} \left( \frac{1}{2} ev_0'' + ev_0, ev_0' \right) \end{aligned}$$

und

$$= \text{Im}(ev_{-1}, ev_1)^* = \text{span}(ev_{-1}, ev_1)$$

weil

$$\begin{aligned} ev_{-1} &= \frac{1}{2} ev_0'' - ev_0' + ev_0 \\ ev_1 &= \frac{1}{2} ev_0'' + ev_0' + ev_0 \end{aligned}$$

### 3.2 Der Bidualraum $V \rightsquigarrow V^* \rightsquigarrow V^{**}$

**Definition 28.** kanonische lineare Abbildung  $\dim V < \infty \implies$  ein Isomorphismus  $V \rightarrow V^*$  wird durch die Auswahl einer Basis bestimmt. Dagegen haben wir eine Abbildung  $V \rightarrow V^{**}$  unabhängig von der Basis, so:

$$v \mapsto \left( \begin{array}{c} V^* \xrightarrow{ev_v} \mathbb{K} \\ (\phi : V \rightarrow \mathbb{K}) \mapsto \phi(v) \end{array} \right)$$

Dies heisst kanonische lineare Abbildung und ist ein Isomorphismus falls  $\dim V < \infty$

*Bemerkung 39.* Im Allgemeinen ist die kanonische Abbildung  $V \rightarrow V^{**}$  injektiv:

$$\begin{aligned} [\text{Sei } v \in V \text{ mit } v \neq 0] &\xrightarrow{\text{span}(v) \subset V} V^* \rightarrow \text{span}(V)^* \\ &\phi \mapsto \psi : v \mapsto 1 \text{ (d.h. } \phi(v) = 1) \\ \implies ev_1(\phi) &\neq 0 \end{aligned}$$

$$\dim V < \infty \implies \dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$$

Dann:

$$\implies V \rightarrow V^{**} \text{ injektiv} \Leftrightarrow \text{bijektiv}$$

Oft schreibt man  $V = V^{**}$  für  $V$  ein Vektorraum mit  $\dim V < \infty$ . Das bedeutet immer, dass  $V$  und  $V^{**}$  identifiziert wird, durch den kanonischen Isomorphismus.

**Beispiel 24.**  $V = \mathbb{K}^n$  mit Standardbasis  $e_1, \dots, e_n$ .

$V^* = (\mathbb{K}^n)^*$  hat die duale Basis  $e_1^*, \dots, e_n^*$

$V \rightarrow V^{**}$  mit einer Abbildung

$$e_i \mapsto \left( \begin{array}{c} \phi : (\mathbb{K}^n)^* \rightarrow \mathbb{K} \mapsto \phi(e_i) \\ e_j^* \mapsto \delta_{ij} \end{array} \right) = e_i^{**}$$

*Bemerkung 40.* Sei  $F : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung von endlichdimensionalen Vektorräumen. Dann ist  $F^{**} = F$ , im folgenden Sinn:

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{F} & W & \dashrightarrow & W^* \xrightarrow{F^*} V^* \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim & \swarrow & \\ V^{**} & \xrightarrow{F^{**}} & W^{**} & & \end{array}$$

Wobei  $\sim$  einen kanonischen Isomorphismus darstellt.

Daraus folgt, dass

$$V \xrightarrow{F} W \rightsquigarrow W^* \xrightarrow{F^*} V^* \rightsquigarrow V^{**} \xrightarrow{F^{**}} W^{**}$$

kommutativ ist.

Bemerkung 41.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \xrightarrow{\quad} & & \\
 v \in V & & \xrightarrow{\quad} & & F(v) \in V \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & V & \longrightarrow & W & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & V^{**} & \longrightarrow & W^{**} & \\
 \phi \mapsto \phi(v) \in V^{**} & & & & \psi \mapsto \psi(F(v)) \\
 & & & & = \downarrow \\
 & & & & \psi \mapsto F^*(\psi)(v)
 \end{array}$$

Falls  $\dim W < \infty$  und  $V \subset W$ , dann haben wir  $V^{00} = V$  im folgenden Sinn

$$\begin{aligned}
 \dim &= \dim W - \dim V \\
 \underbrace{\quad}_{V^0} &\subset W^* \\
 \dim &= \dim W - (\dim W - \dim V) \dim V \\
 \underbrace{\quad}_{V^{00}} &\subset W^{**} \xrightarrow{\sim} W \supset V
 \end{aligned}$$

Das Bild von  $V$  unter dem kanonischen Isomorphismus ist  $V^{00}$ .  
Sei  $v \in V$   $ev_1 \in V^{00}$

$$\phi \in W^*, \phi(v) = 0 \quad \forall \phi \in V \implies \phi(v) = 0$$

Beispiel 25.

$$\begin{aligned}
 W &= \mathbb{R}^3 \\
 V &= \text{span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \implies V^0 = \text{span}(e_1^* - e_2^* - e_3^*) = \text{span}(e_1 + e_3, -e_2 + e_3) \\
 V^{00} &= \text{span}(e_1^{**} + e_2^{**}, e_1^{**} + e_3^{**})
 \end{aligned}$$

### 3.3 Zusammenhang zwischen Dualraum und bilinearen Abbildungen

- schon gesehen, z.B. bei der Definition “nicht ausgeartet”
- jetzt explizit

**Definition 29.** bilineare Abbildung Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper,  $v$  und  $W$  Vektorräume über  $\mathbb{K}$ . Eine Abbildung  $b : V \times W \rightarrow \mathbb{K}$  heisst bilinear falls

$$w \mapsto b(v, w) \text{ ist linear } \forall v \in V$$

und

$$v \mapsto b(v, w) \text{ ist linear } \forall w \in W$$

$$[(w \mapsto b(v, w)) \in W^*]$$

**Bemerkung 42.** Im Fall  $W = V$  ist dies genau zu sagen, dass  $b$  eine Bilinearform ist. Also haben wir Abbildungen

$$b' : V \rightarrow W^*$$

und

$$b'' : W \rightarrow V^*$$

Aus der Definition folgt, dass  $b'$  und  $b''$  sind linear.

**Definition 30.** nicht ausgeartet Eine bilineare Abbildung  $b : V \times W \rightarrow \mathbb{K}$  ist nicht ausgeartet, falls  $b' : V \rightarrow W^*$  und  $b'' : W \rightarrow V^*$  injektiv sind.

*Bemerkung 43.* Falls  $V$  und  $W$  endlich dimensional sind, ist es nur möglich, eine nicht ausgeartete bilineare Abbildung zu haben, wenn  $\dim V = \dim W$ . Falls  $\dim V = \dim W$ : “injektiv” oben ist äquivalent zu “bijektiv”.

**Beispiel 26.** •  $V$  beliebig, dann ist

$$\begin{aligned} V \times V^* &\rightarrow \mathbb{K} \\ (v, \phi) &\mapsto \phi(v) \end{aligned}$$

stets nicht ausgeartet.

$$\begin{aligned} b' : V &\rightarrow V^{**} \\ v &\mapsto ev_v \end{aligned}$$

ist die kanonische Abbildung, ist injektiv

$$\begin{aligned} b'' : V^* &\rightarrow V^* \\ \phi &\mapsto \phi \end{aligned}$$

ist  $id_{V^*}$  ist ein Isomorphismus

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \langle, \rangle$  Skalarprodukt auf  $V$ .

$$b(v, w) := \langle v, w \rangle$$

$b'$  und  $b''$  sind gleich, definiert als  $\Psi$

$$\sim \Psi : V \rightarrow V^*$$

injektiv

*Bemerkung 44.* Das zeigt, dass jedes Skalarprodukt nicht ausgeartet ist. Und: falls  $\dim_{\mathbb{R}} V < \infty$  ist  $\Psi$  ein Isomorphismus.  $\Psi$  heisst kanonisch. (kanonische Abbildung bzw. kanonischer Isomorphismus)

*Eigenschaften 15.*  $V$ ,  $\dim V = n$ , mit Skalarprodukt, kanonischer Isomorphismus  $\Psi$

- Für  $U \subset V$  Untervektorraum gilt

$$\Psi(U^\perp) = U^0$$

- Für  $B = (v_1, \dots, v_n)$  eine orthonormal Basis haben wir

$$\Psi(v_i) = v_i^*$$

für  $i = 1, \dots, n$ , wobei  $(v_1^*, \dots, v_n^*)$  die duale Basis ist. zeigen:

$$\begin{aligned} \underbrace{\Psi(U^\perp)}_{\dim = \dim V - \dim U} &\subset \underbrace{U^0}_{\dim = \dim V - \dim U} \quad \text{klar} \\ \left\langle v_i, \sum_{j=1}^n a_j v_j \right\rangle &= a_i \\ v_i^* \left( \sum_{j=1}^n a_j v_j \right) &= a_i \end{aligned}$$

**Beispiel 27.** Graphiker gesucht ;)

*Bemerkung 45.* Wir haben zwei kanonische Abbildungen:

$$V \rightarrow V^{**} \text{ für beliebiges } V / \mathbb{K}$$

$$V \xrightarrow{\Psi} V^* \text{ für } V/\mathbb{R} \text{ mit Skalarprodukt}$$

**Definition 31.** adjugierte Abbildung  $V, W$  euklidische Vektorräume

$$F : V \rightarrow W \text{ lineare Abbildung}$$

adjugiert:  $F^{ad} : W \rightarrow V$  ist adjugiert zu  $F$  falls gilt

$$\langle F(v), w \rangle = \langle v, F^{ad}(w) \rangle \quad \forall v \in V, w \in W$$

*Bemerkung 46.*

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{F^{ad}} & W \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Psi \\ V^* & \xleftarrow{F^*} & W^* \end{array}$$

$$\begin{aligned} F^*(\Psi(w))(v) &= \Psi(w)(F(v)) = \Phi(F^{ad}(w))(v) \\ \implies F^*(\Psi(w)) &= \Phi(F^{ad}(w)) \text{ in } V^* \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass das Diagramm kommutiert

*Bemerkung 47.* Seien  $v_1, \dots, v_n$  orthonormale Basen von  $V$ ,  $w_1, \dots, w_m$  für  $W$   $\rightsquigarrow$  duale Basen  $v_1^*, \dots, v_n^*$  und  $w_1^*, \dots, w_m^*$  Bezüglich orthonormaler Basen ist  $F^{ad}$  durch die transponierte Matrix gegeben: Sei

$$F \leftrightarrow A \in M(m \times n, \mathbb{R})$$

dann, aus Prop 49 (13?):

$$F^* \leftrightarrow A^t \in M(m \times n, \mathbb{R}) \implies F^{ad} \leftrightarrow A^t \text{ weil } \Phi(v_i) = v_i^*, \Psi(w_i) = w_i^* \quad \forall i$$

**Beispiel 28.**  $V = \mathbb{R}^2$  mit Skalarprodukt,  $W = \mathbb{R}[x]^{\leq 2}$  mit

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) \, dx$$

$$\begin{aligned} F : V &\rightarrow W \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha + \beta x + \alpha x^2 \end{aligned}$$

Basis von  $W$   $1, x, x^2$

$V^* = (\mathbb{R}^2)^*$  mit Basis  $e_1^*, e_2^*$

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{F^{ad}} & W \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Psi \\ V^* & \xleftarrow{F^*} & W^* \end{array}$$

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{\Psi} V^* \\ e_1 &\mapsto e_1^* \\ e_2 &\mapsto e_2^* \end{aligned}$$

$W^*$  hat die duale Basis  $1^*, x^*, x^{2*}$ .

Wir berechnen  $\Psi$  explizit:

$$\Psi(1) = \left( f \mapsto \int_{-1}^1 f(x) \, dx \right)$$



$$\begin{aligned}
W &\xrightarrow{\Phi} W^* \\
1 &\mapsto 2(1^*) + \frac{2}{3}(x^{2*}) \\
x &\mapsto \dots \\
x^2 &\mapsto \dots
\end{aligned}$$

Dann:

$$F^*(\psi(1)) = \left( (\alpha, \beta) \int_{-1}^1 \alpha + \beta x + \alpha x^2 \, dx = 2\alpha + \frac{2}{3}\alpha = \frac{8}{3}\alpha \right)$$

d.h.

$$\frac{8}{3}e_1^* \xrightarrow{\Phi^{-1}} \left( \frac{8}{3}, 0 \right)$$

Ähnlich:

$$F^*(\Psi(x)) = \left( (\alpha, \beta) \mapsto \int_{-1}^1 \alpha x + \beta x^2 + \alpha x^3 \, dx = \frac{2}{3}\beta \right)$$

und

$$F^*(\Psi(x^2)) = \left( (\alpha, \beta) \mapsto \int_{-1}^1 \alpha x^2 + \beta x^3 + \alpha x^4 \, dx = \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{5}\alpha = \frac{16}{15}\alpha \right)$$

d.h.

$$\begin{aligned}
F^{ad}(1) &= \left( \frac{8}{3}, 0 \right) \\
F^{ad}(x) &= \left( 0, \frac{2}{3} \right) \\
F^{ad}(x^2) &= \left( \frac{16}{15}, 0 \right)
\end{aligned}$$

$$F^{ad}(a + bx + cx^2) = \left( \frac{8}{3}a + \frac{16}{5}c, \frac{2}{3}b \right)$$

Check:

$$\int_{-1}^1 (\alpha + \beta x + \alpha x^2) (a + bx + cx^2) \, dx \stackrel{?}{=} \left\langle (\alpha, \beta), \left( \frac{8}{3}a + \frac{16}{15}c, \frac{2}{3}b \right) \right\rangle$$

Skalarprodukt:

$$\alpha \left( \frac{8}{3}a + \frac{16}{15}c \right) + \beta \left( \frac{2}{3}b \right)$$

Integral:

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^1 a\alpha + (b\alpha + c\beta)x + (c\alpha + b\beta + a\alpha)x^2 + (c\beta + \alpha b)x^3 + c\alpha x^4 \, dx = \\
&= 2a\alpha + \frac{2}{3}(a\alpha + b\beta + c\alpha) + \frac{2}{5}c\alpha
\end{aligned}$$

stimmt.

*Bemerkung 48.* Wir könnten  $F^{ad}$  auch durch die Wahl einer orthonormalen Basis von  $W$  berechnen.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{5}{2}}\sqrt{\frac{-1+3x^2}{2}}$$

Dann:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} & \end{pmatrix}$$

und so

$$A^t = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow F^{ad}$$

*Bemerkung 49.* Jetzt betrachten wir den Fall  $W = V$ , also  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  eine Bilinearform. Da  $b'$  und  $b''$  genau durch das “Umtauschen” von  $V$  und  $W$  unterschieden

$$\begin{aligned} b' : V &\rightarrow V^*, v \mapsto (w \mapsto b(v, w)) \\ b'' : V &\rightarrow V^*, w \mapsto (v \mapsto b(v, w)) \end{aligned}$$

haben wir Interpretation von Bedingungen über  $b$ :

- $b$  symmetrisch  $\Leftrightarrow b'' = b'$
- $b$  schiefsymmetrisch  $\Leftrightarrow b'' = -b'$

*Bemerkung 50.* Sei jetzt  $\dim_{\mathbb{K}} < \infty$ . Dann haben wir  $b'' = (b')^*$  in folgendem Sinne: Dual zu  $b' : V \rightarrow V^*$  ist

$$\begin{array}{ccc} V^{**} & \xrightarrow{(b')^*} & V^* \\ \uparrow \sim & & \uparrow \\ V & & v \end{array} \quad ev_V \longmapsto ev_V \circ b'$$

( $ev_V$  = Auswertungsabbildung an  $v \in V$ )

Wobei:

$$ev_V \circ b'(v') = ev_V (w \mapsto b(v', w)) = b(v', v)$$

Da

$$b'' : V \rightarrow V^*$$

durch

$$v \mapsto (v' \mapsto b(v', v))$$

definiert ist, haben wir Gleichheit.

*Eigenschaften 16.*

$$b \text{ symmetrisch} \iff b'' = b' \iff (b')^* = b'$$

$$b \text{ schiefsymmetrisch} \iff b'' = -b' \iff (b')^* = -b'$$

*Bemerkung 51.* Falls  $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ ,  $s$  symmetrisch und nicht ausgeartet führt zu

$$b' (= b'') : V \xrightarrow{\sim} V^*$$

*Bemerkung 52.* Spezialfall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $V$  euklidisch, dann ist das gerade das, was  $\Psi$  hiess:

Untervektorraum  $U \subset V, U^\perp \subset V$  sowie  $U^0 \subset V^*$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\sim} & V^* \\ \downarrow \cup & & \downarrow \cup \\ U^\perp & & U^0 \end{array}$$

*Bemerkung 53.* Was passiert, falls  $K = \mathbb{C}$ ? Dann sind wir an sesquilinearen Abbildungen interessiert.

$$s : V \times W \rightarrow \mathbb{C}$$

Dann gibt es immer noch eine Abbildung

$$s'' : W \rightarrow V^* \quad w \mapsto (v \mapsto s(v, w))$$

aber diese ist nicht mehr linear.

**Beispiel 29.**  $V = \mathbb{C}[x], s : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$

$$s(f, g) = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} \, dx$$

Dann z.B.

$$1 \xrightarrow{s''} \left( f \mapsto \int_0^1 f(x) \, dx \right)$$

also: Durchschnittswert auf  $[0, 1]$

aber:

$$i \xrightarrow{s''} \left( f \mapsto -i \int_0^1 f(x) \, dx \right)$$

also:  $(-i) \cdot$  Durchschnittswert auf  $[0, 1]$

Damit ist  $s''$  semilinear.

**Definition 32.** semilinear Eine Abbildung  $t : V \rightarrow W$  zwischen  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen heisst semilinear, falls:

- $t(v + v') = t(v) + t(v') \quad \forall v, v' \in V$
- $t(\lambda v) = \bar{\lambda} t(v) \quad \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{C}$

**Definition 33.** kanonischer Semi-Isomorphismus Falls  $V$  ein unitärer Vektorraum ist, mit Skalarprodukt

$$s : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

so erhalten wir (was oben  $s''$  heisst, nennen wir hier  $\Psi$ )

$$\Psi : V \rightarrow V^* \text{ kanonischer } \underbrace{\text{Semi}}_{\text{semilinear}} \underbrace{\text{-Isomorphismus}}_{\text{bijektiv}}$$

*Bemerkung 54.* Wie vorher haben wir zu einem Endomorphismus

$$F : V \rightarrow V$$

den adjugierten Endomorphismus

$$F^{ad} : V \rightarrow V$$

gegeben durch

$$F^{ad} := \Psi^{-1} \circ F^* \circ \Psi$$

*Eigenschaften 17.* adjugierter Endomorphismus

•

$$s(F(v), w) = s(v, F^{ad}(w)) \quad \forall v, w \in V$$

•

$$\text{Im } F^{ad} = (\text{Ker } F)^\perp$$

•

$$\text{Ker } F^{ad} = (\text{Im } F)^\perp$$

- Ist  $B$  eine Orthonormalbasis von  $V$  und  $A$  die darstellende Matrix von  $F$  bezüglich  $B$ , dann ist  $\bar{A}^t$  die darstellende Matrix von  $F^{ad}$

**Satz 6.**

$$F \text{ ist unitär diagonalisierbar} \iff F \circ F^{ad} = F^{ad} \circ F$$

**Definition 34.**  $F$  normal  $F$  heisst normal, falls

$$F \circ F^{ad} = F^{ad} \circ F$$

### 3.4 Anwendung des Dualraums

das duale Polytop  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^n$

**Definition 35.** konvexe Menge  $S \subset \mathbb{R}^n$  mit der Eigenschaft  $\forall s, t \in S: s$  und  $t$  sind wegzusammenhängend.

**Definition 36.** konvexe Hülle konvexe Hülle von  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  ist

$$\bigcap_{S \subset \mathbb{R}^n, S \text{ konvex}, \Gamma \subset S} S$$

“kleinste konvexe Menge, in der  $\Gamma$  enthalten ist”

**Definition 37.** konvexes Polytop die konvexe Hülle von einer endlichen Menge in  $\mathbb{R}^n$

**Definition 38.** innerer Punkt Das Polytop  $P$  hat  $O \in \mathbb{R}$  als inneren Punkt falls:

- $O \in \mathbb{R}$
- $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(0) \subset P$

**Definition 39.** Ist ein Polytop mit  $O \in \mathbb{R}$  als inneren Punkt, so definieren wir

$$P^* = \{\phi \in (\mathbb{R}^n)^* : \phi(v) \leq 1 \forall v \in P\}$$

**Definition 40.** duales Polytop  $P^*$  ist ein konvexes Polytop  $O \in (\mathbb{R}^n)^*$  als innerem Punkt.  $P^*$  heisst duales Polytop.

*Bemerkung 55.*

$$P^{**} = P$$

*Bemerkung 56.* Konstruktion des dualen Polytops:  $l$  Hyperebene, so dass  $P$  auf einer Seite von  $l$  liegt (inklusive  $l$  selbst)  $\rightsquigarrow$  Gleichung von  $l$  schreiben als

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 1$$

$$P \subset \{(x_1, \dots, x_n) \mid \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \leq 1\}$$

$\rightsquigarrow$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in P^*$$

(Skizze (Freiwilliger gesucht }:-) )

$$\text{Facetten von } P \rightsquigarrow \text{Ecken in } P^*$$

$(P^*)$  konvexe Hülle

**Beispiel 30.** • Der Tetraeder ist selbstdual.

- Der Würfel dual zum Oktaeder.
- Der Dodekaeder ist dual zum Ikosaeder.

### 3.5 Das Tensorprodukt

$$V \rightsquigarrow V^* \text{ Linearformen}$$

Wir möchten eine Redeweise haben, genug flexibel für solche Situationen. Eine nützliche Konstruktion dafür ist das Tensorprodukt.

**Definition 41.** Tensorprodukt Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und  $V$  und  $W$  Vektorräume über  $\mathbb{K}$ . Ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum heisst Tensorprodukt von  $V$  und  $W$ , geschrieben  $V \otimes W$ , falls, eine bilineare Abbildung

$$\eta : V \times W \rightarrow V \otimes W$$

gegeben ist, die folgende universelle Eigenschaften erfüllt:

Zu jedem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $U$  mit bilinearer Abbildung

$$\xi : V \times W \rightarrow U$$

gibt es eine eindeutige lineare Abbildung

$$\xi' : V \otimes W \rightarrow U$$

so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V \times W & & \\ \downarrow \eta & \searrow \xi & \\ V \otimes W & \xrightarrow{\xi'} & U \end{array}$$

kommutiert.

*Bemerkung 57.* Es ist noch unklar, wie die Elemente von  $V \otimes W$  aussehen, oder ob  $V \otimes W$  gar existiert. Auch unklar: warum.

**Korollar 12.** Aus der Definition folgt:  $V \otimes W$ , falls es existiert, ist eindeutig bis auf Isomorphismus.

*Bemerkung 58.* Seien

$$\eta : V \times W \rightarrow V \otimes W$$

und

$$\tilde{\eta} : V \times W \rightarrow \widetilde{V \otimes W}$$

gegeben, beide erfüllen die universellen Eigenschaften. Wir wenden die universelle Eigenschaft an, mit  $U := \widetilde{V \otimes W}$ , so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & & \\ \downarrow \eta & \searrow \tilde{\eta} & \\ V \otimes W & \xrightarrow{\zeta} & \widetilde{V \otimes W} \end{array}$$

Wir wenden die universelle Eigenschaft an mit  $U := V \otimes W$ , so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & & \\ \downarrow \tilde{\eta} & \searrow \eta & \\ \widetilde{V \otimes W} & \xrightarrow{\tilde{\zeta}} & V \otimes W \end{array}$$

Wir wenden die universelle Eigenschaft an mit  $U := V \otimes W$

$$\begin{array}{ccc} V \times W & & V \times W \\ \downarrow \eta & \searrow \eta & \downarrow \eta & \searrow \eta \\ V \otimes W & \xrightarrow{\tilde{\zeta} \circ \zeta} & V \otimes W & V \otimes W & \xrightarrow{1_{V \otimes W}} & V \otimes W \end{array}$$

Beide Diagramme kommutieren

$$\tilde{\zeta} \circ \zeta \circ \eta = \tilde{\zeta} \circ \tilde{\eta} = \eta$$

$$1_{V \otimes W} \circ \eta = \eta$$

Es folgt aus der universellen Eigenschaft, dass

$$\tilde{\zeta} \circ \zeta = 1_{V \otimes W}$$

Wir wenden die universelle Eigenschaft an, mit  $U := \widetilde{V \otimes W}$

$$\begin{array}{ccc} V \times W & & V \times W \\ \downarrow \tilde{\eta} & \searrow \tilde{\eta} & \downarrow \tilde{\eta} \quad \searrow \tilde{\eta} \\ \widetilde{V \otimes W} & \xrightarrow{\tilde{\zeta} \circ \zeta} & V \otimes W \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V \times W & & V \times W \\ \downarrow \tilde{\eta} & \searrow \tilde{\eta} & \downarrow \tilde{\eta} \quad \searrow \tilde{\eta} \\ \widetilde{V \otimes W} & \xrightarrow{1_{\widetilde{V \otimes W}}} & \widetilde{V \otimes W} \end{array}$$

Beide Diagramme kommutieren

$$\zeta \circ \tilde{\zeta} \circ \tilde{\eta} = \zeta \circ \eta = \tilde{\eta}$$

$$1_{\widetilde{V \otimes W}} \circ \tilde{\eta} = \tilde{\eta}$$

Es folgt aus der universellen Eigenschaft, dass

$$\zeta \circ \tilde{\zeta} = 1_{\widetilde{V \otimes W}}$$

Ergebnis:

$$V \otimes W \xrightarrow{\zeta} \widetilde{V \otimes W}$$

ist Isomorphismus, inverse zu

$$\tilde{\zeta} : \widetilde{V \otimes W} \rightarrow V \otimes W$$

*Fazit 11.* universelle Eigenschaft  $\rightsquigarrow$  Eindeutigkeit bis auf Isomorphismus

*Not 4.* Tensorprodukt  $V \otimes W$  oder  $V \otimes_{\mathbb{K}} W$

### 3.5.1 Existenz vom Tensorprodukt

*Bemerkung 59.* Es gibt zwei Methoden

- Durch Auswahl von Basen
- Beschreibung als Quotientenvektorraum

Heute: Methode 1

- braucht die Existenz von Basen
- klar fall  $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$

oder im Allgemeinen für die, die das Auswahlaxiom gesehen haben.

**Proposition 14.** Sei  $(v_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $V$  und  $(w_j)_{j \in J}$  eine Basis von  $W$ . Dann existiert das Tensorprodukt  $V \otimes W$ , mit Basis  $(v_i \otimes w_j)_{(i,j) \in I \times J}$  und

$$\eta : V \times W \rightarrow V \otimes W$$

$$\left( \sum_{i \in I} a_i v_i \sum_{j \in J} b_j w_j \right) \mapsto \sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j (v_i \otimes w_j)$$

mit  $a_i \neq 0$  für endlich viele  $i$  und  $b_j \neq 0$  für endlich viele  $j$   
Das bedeutet, dass die Elemente von  $V \otimes W$

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} c_{ij} (v_i \otimes w_j) \quad c_{ij} \in \mathbb{K}$$

nur endlich viele  $c_{ij} \neq 0$ .

**Beweis 21.** Zu verifizieren:

- dass  $\eta$  bilinear ist
- und erfüllt die universelle Eigenschaft

$\eta$  ist bilinear:

$$\begin{aligned}
 & \eta \left( \sum_{i \in I} a_i v_i, \sum_{j \in J} b_j w_j \right) + \eta \left( \sum_{i \in I} a'_i v_i, \sum_{j \in J} b_j w_j \right) = \\
 &= \sum_{i \in I} a_i b_j (v_i \otimes w_j) + \sum_{(i, j) \in I \times J} a'_i b_j (v_i \otimes w_j) = \\
 &= \sum_{(i, j) \in I \times J} (a_i b_j + a'_i b_j) (v_i \otimes w_j) = \\
 &= \sum_{(i, j) \in I \times J} (a_i + a'_i) b_j (v_i \otimes w_j) = \\
 &= \eta \left( \sum_{i \in I} (a_i + a'_i) v_i, \sum_{j \in J} b_j w_j \right) \\
 &= \eta \left( \sum_{i \in I} a_i v_i + \sum_{i \in I} a'_i v_i, \sum_{j \in J} b_j w_j \right)
 \end{aligned}$$

**Beispiel 31.**  $V = \mathbb{K}^2$ ,  $W = \mathbb{K}[t]$

$V$  hat die Standardbasis  $(e_1, e_2)$

$W$  hat die Basis  $(1, t, t^2, \dots)$

$\Rightarrow V \otimes W$  hat die Basis  $e_1 \otimes 1, e_1 \otimes t, \dots, e_2 \otimes 1, e_2 \otimes t, \dots$

$$\begin{aligned}
 \eta : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}[t] &\rightarrow \mathbb{K}^2 \otimes \mathbb{K}[t] \\
 ((1, 0), t^2) &\mapsto e_1 \otimes t^2 \\
 ((0, 1), t^3) &\mapsto e_2 \otimes t^3 \\
 ((2, 3), t^4) &\mapsto 2e_1 \otimes t^4 + 3e_2 \otimes t^4
 \end{aligned}$$

Typisches Element von  $\mathbb{K}^2 \otimes \mathbb{K}[t]$

$$e_1 \otimes t^2 + e_2 \otimes t^3 + 2e_1 \otimes t^4 + 3e_2 \otimes t^4$$

Mit anderer Schreibweise:

$$(t^2, 0) + (0, t^3) + (2t^4, 0) + (0, 3t^4)$$

oder:

$$(t^2 + 2t^4, t^3 + 3t^4)$$

**Definition 42.** Sei  $U$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und

$$\xi : V \times W \rightarrow U$$

eine bilineare Abbildung. Wir definieren

$$\begin{array}{ccc}
 V \times W & & \\
 \downarrow \eta & \searrow \xi & \\
 V \otimes W & \xrightarrow{\xi'} & U \\
 \xi' : V \otimes W & \rightarrow & U
 \end{array}$$

durch

$$\xi'(v_i \otimes w_j) := \xi(v_i, w_j)$$

für  $i \in I, j \in J$ , und deshalb:

$$\xi' \left( \sum_{(i, j) \in I \times J} c_{ij} v_i \otimes w_j \right) = \sum_{(i, j) \in I \times J} c_{ij} \xi(v_i, w_j)$$

Das Diagramm kommutiert (aus der Bilinearität von  $\xi$ )

Die Eindeutigkeit ist durch die identischen Basenvektoren gegeben.

*Bemerkung 60.*

$$\dim V \otimes W = (\dim V) (\dim W)$$

*Not 5.* Für  $v \in V$ ,  $w \in W$  schreibt man oft  $v \otimes w$  für  $\eta(v, w)$

*Bemerkung 61.* Weil

$$(v, w) \mapsto v \otimes w := \eta(v, w)$$

eine bilineare Abbildung ist, haben wir

$$\begin{aligned} v \otimes w + v' \otimes w &= (v + v') \otimes w \\ v \otimes w + v \otimes w' &= v \otimes (w + w') \\ (\lambda v) \otimes w &= \lambda(v \otimes w) = v \otimes (\lambda w) \end{aligned}$$

Rechenregeln für Tensoren

*Not 6.* Letztes Mal: für Basiselemente  $v_i, w_j$  bezeichnet  $v_i \otimes w_j$  ein Basiselement von  $V \otimes W$

*Bemerkung 62.* Die Abbildung lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} V \times W &\xrightarrow{\eta} V \otimes W \\ (v_i, w_j) &\mapsto v_i \otimes w_j \end{aligned}$$

*Bemerkung 63.* Jetzt für beliebige  $v \in V$ ,  $w \in W$  bezeichnet  $v \otimes w$  das Element

$$\eta(v, w) \in V \otimes W$$

Weil in der Konstruktion wir  $\eta$  durch

$$\eta(v_i, w_j) := v_i \otimes w_j$$

definiert haben, stimmen die beiden Bedeutungen von  $v_i \otimes w_j$  überein.

**Beispiel 32.** Isomorphismus von Vektorräumen über  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t] &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}[t] \oplus \mathbb{R}[t] \\ e_1 \otimes t^j &\mapsto (t^j, 0) \\ e_2 \otimes t^j &\mapsto (0, t^j) \end{aligned}$$

Ganz ähnlich

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t] &\xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[t] \\ 1 \otimes t^j &\mapsto t^j \\ i \otimes t^j &\mapsto it^j \end{aligned}$$

$\implies$  für  $\gamma \in \mathbb{C}$  gilt:

$$\gamma \otimes t^j \mapsto \gamma t^j$$

weil:

$$\gamma = \alpha + \beta i \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

haben wir

$$\begin{aligned} \gamma \otimes t^j &= (\alpha + \beta i) \otimes t^j \\ &= \alpha \otimes t^j + \beta i \otimes t^j \\ &= \alpha (1 \otimes t^j) + \beta (i \otimes t^j) \\ &\mapsto \alpha (t^j) + \beta (it^j) \\ &= (\alpha + \beta i) t^j \\ &= \gamma t^j \end{aligned}$$

**Proposition 15.** Sei  $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$  eine Körpererweiterung und  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Dann hat  $\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{K}} V$  die Struktur von  $\mathbb{L}$ -Vektorraum, mit

$$\alpha(\beta \otimes v) = (\alpha\beta) \otimes v \quad \text{für } \alpha, \beta \in \mathbb{L} \text{ und } v \in V$$



**Beweis 22.** Wir müssen verifizieren, dass

$$(\alpha, \beta \otimes v) \mapsto (\alpha\beta) \otimes v$$

eine Abbildung von  $L \times (L \otimes_{\mathbb{K}} V)$  nach  $L \otimes_{\mathbb{K}} V$  beschreibt. D.h. für jedes  $\alpha \in L$ ,  
 $\exists$  eine Abbildung  $L \otimes V \rightarrow L \otimes V$

$$\begin{array}{ccc}
 L \times V & \xrightarrow{(\beta, \alpha) \mapsto (\alpha\beta, v)} & L \times V \\
 \downarrow \eta & \searrow (\alpha, \beta) \mapsto (\alpha\beta) \otimes v & \downarrow \eta \\
 L \otimes V & \xrightarrow{\text{Aus der u.E.}} & L \otimes V \\
 & & (\alpha, \beta) \mapsto (\alpha\beta) \otimes v
 \end{array}$$

ist bilinear:

$$\begin{aligned}
 (\beta + \beta', v) &\mapsto (\alpha(\beta + \beta')) \otimes v = \\
 &= (\alpha\beta + \alpha\beta') \otimes v && \text{Körpereigenschaft} \\
 &= \alpha\beta \otimes v + \alpha\beta' \otimes v && \text{Rechenregeln für Tensoren}
 \end{aligned}$$

So bekommen wir

$$\begin{aligned}
 L \times (L \otimes V) &\rightarrow L \otimes V \\
 (\alpha, \beta \otimes v) &\mapsto (\alpha\beta) \otimes v
 \end{aligned}$$

Wir müssen auch die Axiome für den Vektorraum über  $L$  verifizieren, d.h.:

$$\begin{aligned}
 \alpha(w + w') &= \alpha w + \alpha w' && \text{für } \alpha \in L, w, w' \in L \otimes V \\
 \alpha(\alpha' w) &= (\alpha\alpha') w && \text{für } \alpha, \alpha' \in L, w \in L \otimes V
 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung gilt weil  $L \otimes V \dashrightarrow L \otimes V$  über  $\mathbb{K}$ -linear ist. Die zweite folgt aus der ersten, falls wir nur den Fall verifizieren, wobei  $w = \beta \otimes v$ . Dafür benutzen wir

- $L \otimes_{\mathbb{K}} V$  ist von Elementen  $\beta \otimes v$  ( $\beta \in L, v \in V$ ) aufgespannt, als  $\mathbb{K}$ -Vektorraum (Klar von der Konstruktion)
- Dann können wir schreiben

$$w = \beta_1 \otimes v_1 + \cdots + \beta_\gamma \otimes v_\gamma \quad \gamma \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha(\alpha'(\beta_1 \otimes v_1 + \cdots + \beta_\gamma \otimes v_\gamma)) &= \alpha(\alpha'(\beta_1 \otimes v_1) + \cdots + \alpha'(\beta_\gamma \otimes v_\gamma)) \\
 &= \alpha(\alpha'(\beta_1 \otimes v_1)) + \alpha(\alpha'(\beta_\gamma \otimes v_\gamma)) \\
 &= (\alpha\alpha')(\beta_1 \otimes v_1) + \cdots + (\alpha\alpha')(\beta_\gamma \otimes v_\gamma) \\
 &= (\alpha\alpha')(\beta_1 \otimes v_1 + \cdots + \beta_\gamma \otimes v_\gamma)
 \end{aligned}$$

für  $w := \beta \otimes v$ :

$$\begin{aligned}
 \alpha(\alpha'(\beta \otimes v)) &= \alpha((\alpha'\beta) \otimes v) \\
 &= (\alpha(\alpha'\beta)) \otimes v \\
 &= ((\alpha\alpha')\beta) \otimes v \\
 &= (\alpha\alpha')(\beta \otimes v)
 \end{aligned}$$

**Satz 7.**

$$\underbrace{\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t]}_{\mathbb{C}\text{-Vektorraum}} \rightarrow \mathbb{C}[t]$$

Beh: dies ist ein Isomorphismus von  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen. Nur noch zu verifizieren: die  $\mathbb{C}$ -Linearität. Im allgemeinen haben wir

$$L \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[t] \xrightarrow{\sim} L[t]$$

$L$ -linearer Isomorphismus

**Beweis 23.** Sei  $\gamma \in \mathbb{C}$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t] & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}[t] \\
 \downarrow \gamma \cdot () & & \downarrow \gamma \cdot () \\
 \gamma' \oplus t^j & \xrightarrow{\quad} & \gamma t^j \\
 \searrow & & \downarrow \\
 \gamma(\gamma' \otimes t^j) = (\gamma\gamma') \otimes t^j & \mapsto & \gamma\gamma' t^j \\
 \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t] & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}[t]
 \end{array}$$

Bemerkung 64. Ganz ähnlich

$$L \otimes \mathbb{K}^n \xrightarrow{\sim} L^n$$

$L$ -linearer Isomorphismus. ( $n \in \mathbb{N}$ ) Insbesondere:

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n$$

**Definition 43.** Komplexifizierung Ist  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, so heisst der  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$  die Komplexifizierung von  $V$

### 3.5.2 Tensorprodukt von linearen Abbildungen

**Definition 44.** Tensorprodukt von linearen Abbildungen Sei  $V, W, V \otimes_{\mathbb{K}} W, V \times W \xrightarrow{\eta} V \otimes_{\mathbb{K}} W$  und  $V', W', V' \otimes_{\mathbb{K}} W', V' \times W' \xrightarrow{\eta'} V' \otimes_{\mathbb{K}} W'$  gegeben, mit linearen Abbildungen

$$\begin{array}{c}
 V \xrightarrow{\phi} V' \\
 W \xrightarrow{\psi} W'
 \end{array}$$

Dann haben wir:

$$\begin{array}{ccc}
 V \times W & \xrightarrow{\phi \times \psi} & V' \times W' \\
 \downarrow \eta & & \downarrow \eta' \\
 V \otimes W & \xrightarrow{\text{neu}} & V' \otimes W'
 \end{array}$$

Beh: die Komposition ist bilinear

$$(v, w) \mapsto \psi(v) \otimes \psi(w)$$

(neu) aus der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts von linearen Abbildungen

Not 7. Tensorprodukt von linearen Abbildungen

$$\phi \otimes \psi$$