Lineare Algebra I - Vorlesungs-Script

Prof. Andrew Kresch

Basisjahr 08/09 Semester II

Mitschrift:
Simon Hafner

Inhaltsverzeichnis

1 Bilinearformen

Das kanonische Skalarprodukt (oder: Standardskalarprodukt) von $\mathbb{R}^n$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : & \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^n && \to \mathbb{R} \\ & (x, y) && \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

gegeben durch

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

falls $x = (x_1, \cdots, x_n)$ und $y = (y_1, \cdots, y_n)$ sind.

Definition 1 (Konvention)**.** eine $1x1$ Matrix wird mit Eintrag indentifiziert

$$(x) \in M(1 \times 1, K) \leftrightarrow x \in K$$

Dann können wir schreiben:

$$\langle x, y \rangle = (x^t)(y)$$

$$x = \left(x_1, \vdots, x_n \right), y = \left(y_1, \vdots, \right)$$

$$(x_1, \cdots, x_n) \left(y_1, \vdots, y_n \right) = (x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)$$

Bemerkung 1 ($\langle , \rangle$ ist bilinear).

$$\begin{aligned} \langle x + x', y \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle \\ \langle \lambda x, y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle \\ \langle x, y + y' \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle \\ \langle x, \lambda y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

symmetrisch:

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

positiv definit:

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &\geq 0 \\ \langle x, x \rangle &= \Leftrightarrow x = 0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

$$\text{für} \forall x, y, x', y' \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$$

Bemerkung 2 (Hintergrund: euklidische Geometrie).

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Bemerkung 3 (Eigenschaften von $\|.\|$).

$$\begin{aligned} \|x\| \geq 0, \text{mit } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

Dann definieren wir den Abstand von $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$d(x, y) \in \mathbb{R}$$

$$d(x, y) := \|y - x\|$$

Bemerkung 4. Eigenschaften

$$\begin{aligned} d(x, y) \geq 0, \text{mit} d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ d(y, x) = d(x, y) \\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

$$\text{für} x, y, z \in \mathbb{R}^n$$

Wir sind motiviert, Strukturen zu definieren, basierend auf diesen Eigenschaften, so z.B.

- Bilineare Formen (symetrisch, positiv definit)
- Norme
- Metriken

Beweis 1. $\|.\|$ *und d: die Dreiecksungleichung folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung*

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle \leq (?)\,(\|x\| + \|y\|)^2 \\ &\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \leq \|x\|\,\|y\| \end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung: für $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle \langle y,y\rangle$$

mit Gleichheit genau dann, wenn x *und* y *linear abhängig sind.*

$$\Leftrightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} --- & x & --- \\ --- & y & --- \end{pmatrix} \in M(2\times n, \mathbb{R})$$

A hat Rang ≤ 1

Beweis 2.

$$\begin{aligned} A\cdot A^t = & \quad = \begin{pmatrix} \langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle \\ \langle x,y\rangle & \langle y,y\rangle \end{pmatrix} \in M(2\times 2), \mathbb{R} \\ \det(A\cdot A^t) = & \quad = \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2 \end{aligned}$$

Es gibt eine Gleichung von Determinanten:

$$\begin{aligned} & A, B \in M(k\times n, K) \\ \det(A\cdot B^t) = & \sum_{1\leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k \leq n} \det(A^{s_1,\cdots,s_k})\det(B^{s_1,\cdots,s_k}) \\ \textit{wobei } A^{s_1,\cdots,s_k} &:= (a_i, s_j)_{1\leq i,j\leq k}, B^{s_1,\cdots,s_k} = (b_i, s_j)_{1\leq i,j\leq k} \end{aligned}$$

Beweis-Skizze: Reduktion zum Fall, dass die Zeilen von A und B Standardbasiselemente sind; direkte Berechnung in diesem Fall.
Es folgt:

$$\det(A\cdot A^t) = \sum_{1\leq i<j\leq n} \det(A^{i,j})^2 \geq 0$$

und ist $= 0 \Leftrightarrow$ *alle* 2×2 *Minoren von A sind 0* $\Leftrightarrow$ *rang(A)* ≤ 1

Korollar 1. *Wir können definieren*

$$\angle(x,y) := \cos^{-1} \underbrace{\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}}_{\in[-1,1]\in\mathbb{R}} \in [0,\pi] \in \mathbb{R}$$

$$\textit{für}$$

$$0 \neq x \in \mathbb{R}^n$$

$$0 \neq y \in \mathbb{R}^n$$

Korollar 2. *x, y Vektoren, θ Winkel zwischen den beiden*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|y-x\|^2\right)$$

und deshalb:

$$\cos\theta = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|y-x\|^2}{2\,\|x\|\,\|y\|}$$

$\Longrightarrow$ *Winkel eines Dreiecks ist nur von den Seitenlängen abhängig.*

Beispiel 1.

$$\angle(x,y) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$$

$$\underbrace{\{y | \langle x, y\rangle = 0\} = 0}_{\text{Untervektorraum}} \cup \{0 \neq y \in \mathbb{R}^n | \angle(x,y) = \frac{\pi}{2}\}$$

Man nennt x und y senkrecht falls $\langle x, y\rangle = 0$

Fazit 1.

$\langle .,. \rangle \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$	bilinear form
$\|.\| \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$	Norm
$d(.,.)\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{>0}$	Metrik

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sqrt{\langle x, x\rangle} \\ d(x,y) &= \|y-x\| \\ \langle x, y\rangle &= \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|y-x\|^2}{2} \end{aligned}$$

1.1 Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to & \qquad \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \mapsto & \qquad x \times y \end{aligned}$$

für $y = (y_1, y_2, y_3)$ und $y = (y_1, y_2, y_3)$ ist

$$x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_2, x_1y_2 - x_2y_1)$$

oder:

$$x \times y = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

wobei (e_1, e_2, e_3) die Standardbasis ist. Es ist deshalb klar, dass

$$0 = \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \langle x, x \times y\rangle$$

$$0 = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \langle y, x \times y\rangle$$

$x \times y$ liegt auf der Gerade von Vektoren senkrecht zu x und y. weiter:

$$\det\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \langle x \times y, x \times y\rangle$$

$$\begin{aligned} &= \|x \times y\|^2 = (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\ &= \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2 = \|x\|^2\|y\|^2\left(1 - \frac{\langle x, y\rangle^2}{\|x\|^2\|y\|^2}\right) \\ &= \|x\|^2\|y\|^2(1 - \cos^2\angle(x,y) = \|x\|^2\|y\|^2\sin^2\angle(x,y) \end{aligned}$$

Fazit 2. Wenn das Ergebnis $= 0$, folgt daraus, dass x und y linear abhängig sind. Falls x und y linear unabhängig sind, dann folgt dass $(x \times y, x, y)$ zu derselben Orientierungsklasse gehört wie (e_1, e_2, e_3). Insgesamt bedeutet dies, dass $x \times y$ folgende Eigenschaften hat:

- ist senkrecht zu x und y
- ist $0 \Leftrightarrow x$ und y sind linear abhängig
- hat Länge $\|x\| \, \|y\| \sin \angle(x, y)$
- und hat die Richtung, die mit x und y die gleiche Orientierungsklassse wie die Standardbasis hat.

1.2 Skalarprodukt über $\mathbb{C}^n$

Sei $z = (z_1, \cdots, z_n)$ und $w = (w_1, \cdots, w_n) \in \mathbb{C}^n$

Bemerkung 5. Der Ausdruck macht Sinn.

$$\begin{aligned} \langle z, w \rangle &:= z_1 w_1 + \cdots + z_n w_n \\ \langle z, z \rangle &:= z_1^2 + \cdots + z_n^2 \end{aligned}$$

Dann kann die Länge nicht mehr interpretiert werden, z.B. für $z = (1, i, 0, \cdots, 0)$ haben wir $\langle z, z \rangle = 1^2 + i^2 = 0$. Isotropische Untervektorräume von $\mathbb{C}^n$ werden nicht in in diesem Kurs behandelt. ($V \subset \mathbb{C}^n$ s.d. $\langle v, w \rangle = 0 \; \forall v, w \in V$). Für die Physik, die Geometrie usw. ist eine Interpretation in Zusammenhang mit Länge wichtig, deshalb brauchen wir eine neue Definition.

Definition 2 (Das kanonische Skalarprodukt)**.** von $\mathbb{C}^n$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle ., . \rangle_c : \mathbb{C}^n \mathbb{C}^n &\to \mathbb{C} \\ (z, w) &\mapsto z_1 \bar{w_1} + \cdots + z_n \bar{w_n} \end{aligned}$$

Eigenschaften 1 (von $\langle ., \rangle_c$).

$$\begin{aligned} \langle z + z', w \rangle &= \langle z, w \rangle_c + \langle z', w \rangle_c \\ \langle \lambda z, w \rangle_c &= \lambda \langle z, w \rangle_c \\ \langle z, w + w' \rangle_c &= \langle z, w \rangle_c + \langle z, w' \rangle_c \\ \langle z, \lambda w \rangle_c &= \bar{\lambda} \langle z, w \rangle_c \end{aligned}$$

für $z, z', w, w' \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$
$\langle ., . \rangle_c$ ist sesquilinear

$$\begin{aligned} \langle w, z \rangle_c &= \overline{\langle z, w \rangle_c} && \text{hermitesch} \\ \langle z, z \rangle_c &\in \mathbb{R}_{\geq 0} && \text{positiv definit} \\ \langle z, z \rangle = 0 &\Leftrightarrow z = 0 \end{aligned}$$

Fazit 3. $\langle ., . \rangle_c$ ist sesquilinear, hermitesch und positiv definit.

Beweis 3. *Bei Bedarf sonstwo nachschauen (Zu viele Zeichen und zu wenig Sinn). Es läuft auf eine Sammlung von Quadraten heraus.*

Definition 3 (Norm von $\mathbb{C}^n$)**.**

$$\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle_c}$$

Bemerkung 6. Sei $w = (x_1' + xy_1', \cdots, x_n' + iy_n')$. Dann:

$$\begin{aligned} \langle z, w \rangle_c &= (x_1 + iy_1)(x_1' - iy_1') + \cdots + (x_n + iy_n)(x_n' - iy_n') \\ &= (x_1 x_1' + y_1 y_1' + \cdots + x_n x_n' + y_n y_n') + i(x_1' y_1 - x_1 y_1' + \cdots + x_n' x_y - x_n y_n') \end{aligned}$$

Auf diese Weise ist $\langle .,. \rangle_c$ eine Erweiterung von reellen Skalarprodukt.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{2n} &\to \mathbb{C}^n && \mathbb{R}\text{-linear} \\ e_1 &\mapsto (1, 0, \cdots, 0) \\ e_2 &\mapsto (i, 0, \cdots, 0 \\ &\cdots \\ e_{2n} &\mapsto (0, \cdots, 0, i) \end{aligned}$$

$$\langle .,. \rangle_c = \left(\langle .,. \rangle \text{ von } \mathbb{R}^{2n}\right) + i(\text{neues})$$

$\mathrm{Re} \langle .,. \rangle_c = \langle .,. \rangle$ von $\mathbb{R}^{2n}$ unter diesem Isomorpismus.
Sei $\omega := \mathrm{Im} \langle .,. \rangle$:

$$\begin{gathered} \omega : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{R} \\ \text{oder } \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R} \end{gathered}$$

Eigenschaften 2 (von ω (Imaginärteil des kanonischen Skalarproduktes))**. bilinear**

schiefsymmetrisch $\omega(w, z) = -\omega(z, w)$

$\omega(z, z) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C}^n$ (oder $\mathbb{R}^{2n}$)

1.3 Bilinearform

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

Definition 4 (Bilinearform)**.** Eine bilineare Form auf V ist eine Abbildung

$$s : V \times V \to K$$

so dass:

$$\begin{aligned} s(v + v', w) &= s(v, w) + s(v', w) \\ s(\lambda v, w) &= \lambda s(v, w) \\ s(v, w + w') &= s(v, w) + s(v, w') \\ s(v, \lambda w) &= \lambda s(v, w) \end{aligned}$$

$\forall v, v', w, w' \in V, \lambda \in K$
Und: s heisst symmetrisch, falls $s(w, v) = s(v, w)$ und schiefsymmetrisch, falls $s(w, v) = -s(v, w)$.

Beispiel 2.

- $\langle .,. \rangle := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine symmetrische bilineare Form
- ω ist eine schiefsymmetrisch bilineare Form
- ($\langle .,. \rangle_c$ nicht)
- $V = \{\text{stetige Abbildung}[0, 1] \to \mathbb{R}\}$ über $\mathbb{R}$: $f, g \in V$

  $$s(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

  ist eine symmetrisch bilineare Form auf V

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, mit $\dim_K V < \infty$, und $s : V \times V \to K$ eine bilineare Form.

Definition 5. darstellende Matrix Ist $B = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ eine Basis von V, so setzen wir

$$M_B(s) := (s(v_i, v_j))_{1 \leq i,j \leq n} \in M(n \times n, K)$$

die darstellende Matrix

Korollar 3. *für $x, y \in V$*

$$x = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$$
$$y = y_1v_1, + \cdots + y_nv_n$$

und

$$M_B(s) = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}, d.h. a_{ij} = s(v_i, v_j)$$

haben wir:

$$\begin{aligned} s(x,y) &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j a_{ij} \\ &= (x_1 \cdots x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= x^t M_B(s) \cdot y \end{aligned}$$

Proposition 1. *Sei V ein endlich-dim. Vektorraum über K mit Basis $B = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$. Es gibt eine Bijektion zwischen der Menge von Bilinearformen und $M(n \times n, K)$, gegeben durch*

$$(s : V \times V \to K) \mapsto M_B(s)$$

Beweis 4. *Wir schreiben einen Vektor $x \in V$ als $(x_1, \cdots, x_n)$ falls $x = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$. Ähnlich für y. Dann ist*

$$\begin{aligned} A \in M(n \times n, K) \mapsto & V \times V \to K \\ & (x,y) \mapsto x^t \cdot A \cdot y \end{aligned}$$

inverses zu der obigen Abbildung.

Bemerkung 7. Sei $(s : V \times V \to K)$ eine bilineare Forum und $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ die darstellende Matrix. Wir erinnern uns an die Notation

$$\begin{aligned} \Phi_B : & K^n \to V \\ & e_1 \mapsto v_i \end{aligned}$$

Dann:

$$K^n \times K^n \xrightarrow{\Phi_B \times \Phi_B} V \times V \xrightarrow{s} K$$

ist gegeben durch

$$(x,y) \longmapsto t_x A \cdot y$$

Sei $A = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ eine andere Basis.

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[d, "T = \Phi_B^{-1} \circ \Phi_A"'] \arrow[dr, "\Phi_A"] & \\ K^n \arrow[r, "\Phi_B"'] & V \end{tikzcd}$$

Proposition 2. *Transforationsformel Mit dieser Notation haben wir:*

$$M_A(s) = T^t \cdot M_B(s) \cdot T$$

Beweis 5.

$$K^n \times K^n \xrightarrow{\Phi_B \times \Phi_B} V \times V \xrightarrow{s} K$$

$$(x,y) \longmapsto t_x \cdot M_B(s) \cdot y$$

Es folgt:

$$
\begin{tikzcd}
 & K\times K \arrow[r, "\Phi_A\times\Phi_A"] \arrow[dr, "T\times T"'] & V\times V \arrow[r, "s"] & K & \\
(x,y) \arrow[ur, phantom, "\in"] \arrow[rrrr, bend left=50, "\mapsto"] \arrow[drr, mapsto] & & K\times K \arrow[u, "\Phi_B\times\Phi_B"'] & & x^tM_A(s)y = \arrow[ul, phantom, "\in"] \\
 & & (T_x,T_y) \arrow[u, phantom, "\in"] \arrow[urr, mapsto] & &
\end{tikzcd}
$$

$$= x^tT^tM_B(s)Ty = (T_x)^tM_B(s)(T_y)$$

Es folgt aus der oberen Proposition (Vor der Transf.):

$$T^tM_B(s)T = M_a(s)$$

Beispiel 3. $V = K^n$, mit Standardskalaprodukt $< .,. >$. Ist $B = (e_1, \cdots, e_n)$, so ist

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = M_{\text{Standardbasis}}(< .,. >)$$

Sei

$$\begin{aligned} A =&(e_1, e_2 - e_1, e_3 - e_2, \cdots, e_n - e_{n-1}) \\ =:&(u_1, u_2, \cdots, u_n) \end{aligned}$$

Direkt aus der Definition:

$$< u_i, u_j >= \begin{cases} 1 & i = j = 1 \\ 2 & i = j > 1 \\ -1 & |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

oder mit der Transformationsformel

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \cdots & & \\ \cdots & & 1 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \text{ und } T^tE_NT''$$

Bemerkung 8. Ist A die darstellende Matrix bezügloich einer Basis, so haben wir:

- symmetrisch $\Leftrightarrow A = A^t$
- schiefsymmetrisch $\Leftrightarrow A = -A^t$

Das stimmt überein mit (vgl. Übungsblatt 3): $A \in M(n \times n)$ ist symmetrisch $\Leftrightarrow A = A^t$. A ist schiefsymmetrisch oder antisymmetrisch (oder alternierend wenn $\mathrm{char}(K) \neq 2$) $\Leftrightarrow A = -A^t$

1.4 Bilineare und quadratische Formen

Eine quadratische Form $V \to K$ wird zu einer Bilinearform assoziert. Falls $\dim_K V < \infty$: "quadratische Form" bedeutet $q : V \to K$ bezüglich einem Koordinatensystem gegeben als homogenes quadratisches Polynom. Ist $s : V \times V \to K$ eine bilineare Form, dann heisst

$$\begin{aligned} q :&V \to K \\ &v \mapsto q(v) = s(v, v) \end{aligned}$$

die zu s gehörige quadratische Form.

Beispiel 4. $< v, v >= v_1^2 + \cdots + v_n^2$ für $v \in K^n$
Für $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ eine symmetrische Matrix mit $s : V \times V \to K$, $(x, y) \mapsto x^t A y$, haben wir

$$\begin{aligned} s(x,x) &= x^t A x \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

Ist $\mathrm{char}(K) \neq 2$, so haben wir:

$$\begin{aligned} \{\text{symm. bilineare Formen in } K^n\} &\leftrightarrow \{\text{quadr. Formen auf } K^n\} \\ s &\mapsto q(v) := s(v,v) \\ &\leftarrow\!\shortmid \text{(Polarisierungsformel)} \end{aligned}$$

1.4.1 Polarisierungsformel

Ist s eine symmetrische Bilinearform und q die zu s gehörende quadratische Form über einem Vektorraum V über K mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$, dann gilt:

$$\begin{aligned} s(v,w) &= \frac{1}{2}\left(q(v+w) - q(v) - q(w)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(q(v) + q(w) - q(v+w)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(q(v+w) - q(v-w)\right) \end{aligned}$$

1.5 Sesquilineare Form

Definition 6. Sei V ein komplexer Vektorraum. Eine Abbildung

$$s : V \times V \to \mathbb{C}$$

heisst sesquilinear falls:

$$\begin{aligned} s(v+v', w) &= s(v,w) + s(v',w) \\ s(\lambda v, w) &= \lambda s(v,w) \\ s(v, w+w') &= s(v,w) + s(v,w') \\ s(v, \lambda w) &= \bar{\lambda} s(v,w) \end{aligned}$$

für $v, v', w, w' \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Beispiel 5. $\langle ., . \rangle$ auf $\mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned} s(f,g) &= \int_0^1 f(x) g(x) dx \\ &\text{auf } V := \{\text{stetige Abb.}[0,1] \to \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

Definition 7. hermitesch Eine sesquilineare Form heisst hermitesch, falls

$$s(w,v) = s(v,w) \; \forall v, w \in V$$

Beispiel 6. $\langle ., . \rangle_c$ auf $\mathbb{C}^n$ ist hermitesch.

Bemerkung 9. hermitesche Form Man spricht von hermiteschen Form, diese sind immer sesquilinear

Definition 8. darstellende Matrix Sei $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$, und $B := (V_i)_{1 \leq i \leq n}$ eine Basis. Ist s eine sesquilineare Form, so definieren wir

$$M_B(s) := (s(v_i, v_j))_{1 \leq i \leq n}$$

die darstellende Matrix. Sind $z, w \in V$

$$z = z_1 v_1 + \cdots + z_n v_n$$
$$w = w_1 v_1 + \cdots + w_n v_n$$

dann haben wir

$$\begin{aligned} s(z,w) &= \sum_{i,j=1}^{n} z_i \bar{w_j} a_{ij} \text{wobei} a_{ij} = s(v_i, v_j) \\ &= (z_1 \cdots z_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w_1} \\ \vdots \\ \bar{w_n} \end{pmatrix} \qquad = z^t M_B(s) \cdot \bar{w} \end{aligned}$$

Proposition 3. *Sei V ein endlich dim. $\mathbb{C}$ Vektorraum und $B = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$. Wir haben eine Bijektion*

$$\{\textit{sesquilineare Form auf } V\} \leftrightarrow M(n \times n, \mathbb{C})$$

Unter dieser Bijektion haben wir:

$$\{\textit{hermitesche Formen}\} \leftrightarrow \{A \in M(n \times n, \mathbb{C}) : A^t = \bar{A}\}$$

Man sagt: eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ mit $A^t = \bar{A}$ ist <u>*hermitesch*</u>*.*

Satz 1. *Transformationsformel Sei $A = (u_1, \cdots, u_n)$ eine andere Basis mit Transformationsmatrix T:*

TODO: hier einfügen

Dann gilt:

$$M_A(s) = T^t \cdot M_B(s) \cdot \bar{T}$$

Mit $g(v) := s(v,v)$ gilt die Polarisierungsformel

$$s(v,w) = \frac{1}{4}\left(q(v+w) - q(v-w) + iq(v+iw) - iq(v-iw)\right)$$

Definition 9. positiv definit Sei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, V ein K-Vektorraum und $s : V \times V \to K$ eine Billinearform $\begin{cases} \text{symmetrisch} & K = \mathbb{R} \\ \text{hermitesch} & K = \mathbb{C} \end{cases}$ heisst positiv definit, falls $s(v; v) > 0 \ \forall 0 \neq v \in V$

Beispiel 7. $\langle ., . \rangle$ ist positiv definit auf $\mathbb{R}^n$
$\langle ., . \rangle_c$ ist psoitiv definit auf $\mathbb{C}^n$

Definition 10. Skalarprodukt
Ein Skalarprodukt ist $\begin{cases} \text{positiv definite symetrische bilineare Form} & K = \mathbb{R} \\ \text{eine positiv definite hermetische Form} & K = \mathbb{C} \end{cases}$

Definition 11. Skalarprodukt oft $\langle ., . \rangle$, Norm $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$

Definition 12. Euklidischer Vektorraum Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt

Definition 13. Untärer Vektorraum Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit Skalarprodukt

Beispiel 8.

$$V = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ stetig}\} \text{ mit } \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$
$$V = \{f : [0,1] \to \mathbb{C} \text{ stetig}\} \text{ mit } \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$$

in beiden Fällen

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx}$$

"L^2-Norm"

Bemerkung 10. In einem beliebigen euklidischen bzw. unitären Vektorraum gilt die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichtung

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \, \|w\| \ \ \forall v, w \in V$$

mit = genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Beweis 6. *(Skizze) klar falls $v = 0$ oder $w = 0$, also nehmen wir an, dass $v \neq 0$ und $w \neq 0$ 1. Reduktion: zum Fall $\|v\| = \|w\| = 1$.*

$$v_1 := \frac{v}{\|v\|} w_1 := \frac{w}{\|w\|}$$
$$\|v_1\| = 1 \, \|w_1\| = 1$$

2. Reduktion: Es reicht aus, zu zeigen: $\operatorname{Re} \langle v, w \rangle \leq 1$ = *genau dann wenn* $V = W$

$$\begin{aligned} |\langle v, w \rangle| &= \mu \langle v, w \rangle & \mu \in \mathbb{C}, |\mu| = 1 \\ &= \langle \mu v, w \rangle \in \mathbb{R}_{\geq} \\ &= \operatorname{Re} \langle v', w \rangle \ wobei v' := \mu v \end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung $\leq$, Gleichheit: v, w linear unabhängig $\implies$ v', w linear unabhängig $\implies$ $v' \neq w$

Eigenschaften 3.

$$\begin{aligned} & & &= \text{falls} \\ \langle v - w, v - w \rangle &\geq 0 & v - w &= 0 \\ \langle v, v \rangle - \langle v, w \rangle - \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle &\geq 0 & v &= w \\ 1 - \langle v, v \rangle - \overline{\langle v, w \rangle} + 1 &\geq 0 & v &= w \end{aligned}$$

Beispiel 9. Ist $T : V \to \mathbb{R}^n$ oder $T : V \to \mathbb{C}^n$ ein Isomorphismus, dann ist $s : V \times V \to \mathbb{R}$ (bzw. $s : V \times V \to \mathbb{C}$) gegeben durch

$$s(x, y) = \langle T_x, T_y \rangle$$

bzw.

$$s(x, y) = \langle T_x, T_y \rangle_c$$

ein Skalarprodukt.

Definition 14. Sei V ein exklusiver, bzw. unitärer Vektorraum

- $v, w \in V$ heisst orthogonal, falls $\langle v, w \rangle = 0$
- $U, W \subset V$ heissen orthogonal (geschrieben $U \perp V$) falls $U \perp W$ $\forall u \in U$, $w \in W$
- $U \subset W$ das orthagonale Koplement ist $U^\perp = \{v \in V : u \perp v \forall u \in U\}$
- $v_1, \cdots, v_n$ sind orthogonal, falls $v_i \perp v_j$ $\forall i \neq j$

- $v_1, \cdots, v_n$ sind orthonormal, falls $v_i \perp v_j \ \forall i \neq j$ und $\|v_i\| = 1 \ \forall i$
- V ist orthagonale direkte Summe von Untervektorräumen $V_1, \cdots, V_r$ falls

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$
$$V_i \perp V_j \ \forall i \neq j$$

$$C([-1,1],\mathbb{R}) := \{f : [-1;1] \to \mathbb{R}\text{stetig}\}$$

dann ist $C([-1,1]\mathbb{R})$ die orthogonale direkte Summe von $C([-1,1]\mathbb{R})_{\text{gerade}}$ und $C([-1,1]\mathbb{R})_{\text{ungerade}}$. gerade: $f(-x) = f(x)$ und ungerade: $f(-x) = -f(x)$

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{gerader Teil}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{ungerader Teil}}$$

g gerade, h ungerade $\implies$ gh ungerade $\implies$ $\langle g, h\rangle = \int_{-1}^{1} g(x)h(x) = 0$

Bemerkung 11. Ist $v_1, \cdots, v_n$ eine orthonormale Familie mit $v_i \neq 0 \forall i$, so gilt

1. $(i)(v_1, \cdots, v_n)$ ist linear unabhängig ($c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0 \implies c_i < v_i, v-i > + \cdots + c_i < v_i, v_i > + \cdots + c_n < v_n, v_i >= 0 \implies c_i \|v_i\|^2 = 0 \implies c_i = 0$)
2. $\left(\frac{v_1}{\|v_i\|}, \cdots, \frac{v_n}{\|v_i\|}\right)$ ist orthonormal

Satz 2. *Ist $(v_1, \cdots, v_n)$ eine orthonormale Basis von V, so gilt folgendes für beliebiges $v \in V$*

$$v = \sum_{i=1}^{n} < v_i, v_j > v_i$$

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^{b} c_i v_i \\ < v, v_j > &= \sum_{i=1}^{n} c_i < v_i, v_j > \\ &= c_j < v_i, v_j > = c_j \end{aligned}$$

Proposition 4. *Sei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $(V, < .,. >)$ ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum über K*

1. *Ist $n := \dim_K V < \infty$ und $(v_1, \cdots, v_d)$ eine orthonormale Familie von Vektoren von V, so existieren $v_{d+1}, \cdots, v_n$, so dass $(v_1, \cdots, v_n)$ eine orthonormale Basis von V ist.*
2. *Ist $U \subset V$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum, so gilt $V = U \bigoplus U^\perp$, orthonormal direkte Summe.*

Beweis 7. *Es gibt triviale Fälle: $d = n$ in 1., $U = 0$ in 2. Auch: der Fall $(d = 0)$ in 1. $\Leftarrow d = 1$: $0 \neq v \in V$ beliebiger Vektor, wir nehmen $b_1 = \frac{v}{\|v\|}$*
Beweis durch Induktion nach N mit Indunktionsannahme 1. gilt für $n \leq N$ $N = 1$ okay.

Plan: *Wir zeigen IA $\implies$ 2. für $\dim_K U \leq N$ und IA $\implies$ 1. für $n \leq N + 1$.*
IA $\xRightarrow{\dim U \leq N}$ $\exists$ orthonormale Basis $(u_1, \cdots, u_d)$ von U $d := \dim U$. Für beliebiges $v \in V$ gilt:

$$v - \sum_{i=1}^{n} < v_i, v_j > u_i \in U^\perp$$

$$\begin{array}{c|c} U: \text{1-dimensional} & U^{\perp}\text{: 2-dim} \\ s(e_1,e_1)=3 & =24 \end{array}$$

denn

$$\left\langle v - \sum_{i=1}^{n} < v_i, u_i > u_i, u_j \right\rangle = < v, u_j > - \sum_{i=1}^{n} < v, u_j >< u_i, u_j > = 0$$

Und: 1. für $\dim V \leq N+1$ *folgt aus IA und 2. für* $U \leq N$

$$1 \leq d < n = \dim V \geq N+1$$
$$\implies 1 \leq d \leq N und 1 \leq \dim V - d \geq N$$

Sei $U := span(v_1, \cdots, v_d)$ *Aus 2. haben wir* $V = U \bigoplus U^{\perp}$ *Nach IA,* $\exists$ *orthonormale Basis* $(v_{d+1}, \cdots, v_n)$ *von* $U^{\perp}$ *Es folgt, dass* $(v_1, \cdots, v_n)$ *ist eine orthonormale Basis von* V*.*

Eigenschaften 4. Praktisches Verfahren zu testen ob ein symmetrisch bilineare bzw. hermetische Form ein Skalaprodukt ist (falls $\dim_K V < \infty$). Verfahren:

- wählen $U \subset V$ nicht trivialer Untervektorraum (z.B. $U = span(v), 0 \neq v \in V$)
- Berechnen $U^{\perp}$
- Testen:
  - Ist $V = U \bigoplus U^{\perp}$?
  - Ist die Einschränkung von der Form auf U ein Skalarprodukt?
  - Ist die Einschränkung von der Form auf $U^{\perp}$ ein Skalarprodukt?

Beispiel 10. $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$M := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die entsprechende Bilinearform

$$(x,y) \mapsto t_x \cdot M \cdot y$$

$$\begin{aligned} U &= && (e_1) \\ U^{\perp} &= && \{(x_1, x_2, x_3 : 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\} \\ &= && ((1,-3,0),(0,2,-1)) \end{aligned}$$

Die darstellende Matrix:

$$s|_{U^{\perp}} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 24 & -21 \\ -21 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} U &\cong && \mathbb{R}^2 \\ W &= && (e_1) \in \mathbb{R}^2 \\ W^{\perp} &= && \{(x_1, x_2) | 24x_1 - 21x_2 = 0\} \\ &= && (21, 24) \end{aligned}$$

W 1-dim, $W^{\perp}$ 1-dim

$$(s|_{U^{\perp}})(e_1, e_2) = 24$$
$$\begin{pmatrix} 21 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 & -21 \\ -21 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 18 \end{pmatrix} = -216$$

$\implies$ kein Skalarprodukt

1.6 Volumen

Definition 15. Volumen $\begin{array}{ccccc} \text{Skalarprodukt} & \rightsquigarrow & \text{Norm} & \rightsquigarrow & \text{Metrik} \\ <.,.> & & \|v\| := \sqrt{<v,v>} & & d(x,y) = \|y,x\| \end{array}$
$K = \mathbb{R} \rightsquigarrow$ Volumen ($\dim V < \infty$)

1.6.1 Spat

Definition 16. Spat $u_1, \cdots, u_n$ orthonormale Basis. Dann ist der von $(u_1, \cdots, u_n)$ aufgespannte Spat definiert als (wobei c_i := von $(u_1, \cdots, u_n)$ aufgespannten Spat)

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i u_i | 0 \leq c_i \leq 1 \ \forall i \right\}$$

Vol(Spat):=1
Falls $v_1, \cdots, v_n \in V$ beliebig sind, dann hat der von $(v_1, \cdots, v_n)$ aufgespannte Spat

$$\text{Vol} = \left| \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right| \quad v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_i$$

Sei $b_ij := < v_i, v_j >$ und $B := \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ Wir haben $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk}$, also $B = A \cdot A^t$. Es folgt:

$$\text{Vol} = \sqrt{(\det A)^2} = \sqrt{\det B}$$

Vorteile:

- keine Wahl von orthonormaler Basis nötig
- auch sinnvoll für eine Kollektion $v_1, \cdots, v_m$ evzl. $m \neq n$

Beispiel 11. $m = 1$

$$\begin{aligned} \det B = & \quad \|v_1\|^2 \\ \sqrt{\det B} = & \quad \|v_1\| \end{aligned}$$

Definition 17. Grammsche Determinante Im m-dim Volumen := $\sqrt{G(v_1, \cdots, v_m)}$ wobei

$$G(v_1, \cdots, v_m) := \det \big(< v_i, v_j > \big)_{1 \leq i,j \leq m}$$

die sogenannte <u>Grammsche Determinante</u> ist.

Bemerkung 12. Es gilt $G(v_1, \cdots, v_m) = 0 \Leftrightarrow v_1, \cdots, v_m$ lineare abhängig, weil

$$A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{R})$$

mit

$$G(v_1, \cdots, v_m) = \det(A, A^t) = \sum (m \times m\text{Minor})$$

Bemerkung 13.

$$\text{Vol}(v_1, \cdots, v_m) := \sqrt{G(v_1, \cdots, v_m)}$$

ist 0 falls $\exists i : v_i = 0$
sonst:

$$\text{Vol}(v_1, \cdots, v_m) = \|v_1\| \cdots \|v_m\| \,\text{Vol}(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \cdots, \frac{v_m}{\|v_m\|}$$

Satz 3. *Hadamard'sche Ungleichung*

$$Vol(v_1, \cdots, v_m) \leq \|v_1\| \cdots \|v_m\|$$

für $0 \neq v_i \in V$, $i = 1, \cdots, m$. Mit Gleichheit genau dann wenn $v_1, \cdots, v_m$ orthogonal sind.

Beweis 8. *Durch fallende Induktion nach*

$$\max \{|I| : I \subset \{1, \cdots, m\} \,|(v_i)_{i \in I} \text{ orthogonal}\}$$

Fall $\max\{\cdots\} = m$ *das bedeutet,* $v_1, \cdots, v_m$ *sind orthogonal. Dann:*

$$G(v_1, \cdots, v_m) = \det \begin{pmatrix} \|v_1\|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \|v_m\|^2 \end{pmatrix} = \|v_1\|^2 \cdots \|v_m\|^2$$

Die ist der Induktionsanfang.
Sei $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq r < m$. *Induktionsanahme: Ungleichung für den Fall*

$$\max\{|I| : (v_i)_{i\in I} \text{ orthogonal}\} > r$$

Sei $v_1, \cdots, v_m$, *so dass* $\max\{\cdots\} = r$. *o.B.d.A:* $v_1, \cdots, v_r$ *orthagonal. Wir schreiben:*

$$v_m = \underbrace{v_m - \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle v_m, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle} v_i}_{\tilde{v}_m \in \operatorname{span}(v_1, \cdots, v_r)^\perp} + \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \frac{\langle v_m, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle} v_i}_{\tilde{\tilde{v}}_m \in \operatorname{span}(v_1, \cdots, v_r)}$$
$$< \tilde{v_m}, \tilde{\tilde{v_m}} = 0$$

- $v = \tilde{v} + \tilde{\tilde{v}}$
- $< \tilde{v}, \tilde{\tilde{v}} >= 0$
- $\|v\|^2 = \|\tilde{v}\|^2 + \left\|\tilde{\tilde{v}}\right\|^2$

Das ist eine Orthogonale Projektion *Wir haben*

$$G(v_1, \cdots, v_m) = G(v_1, \cdots, v_{m-1}, \tilde{v_m})$$

weil (Spalten- und Zeilenumforumgen...). Es folgt:

$$\begin{aligned} Vol(v_1, \cdots, v_m) = Vol(v_1, \cdots, v_{m-1}, \tilde{v_m}) &\leq \|v_1\| \cdots \|v_{m-1}\| \|\tilde{v_m}\| \\ &< \|v_1\| \cdots \|v_{m-1}\| \|\tilde{v_m}\| \end{aligned}$$

Definition 18. Gram-Schmidt-Orthagonalisierungsverfahren

$$\tilde{v_r} := v_r - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{< v_r, \tilde{v_i} >}{< \tilde{v_i}, \tilde{v_i} >} \tilde{v_i}, \text{für} 1, 2, \cdots$$

gegeben: eine Kollektion $(v_1, \cdots, v_n)$ oder abzählbar unendlich $(v_1, v_2, \cdots)$. Das Verfahren produziert $(\tilde{v_1}, \tilde{v_2}, \cdots)$, mit:

$$\begin{aligned} (\tilde{v_1}, \tilde{v_2}, \cdots \quad &= \quad (v_1, v_2, \cdots) \\ (\tilde{v_1}, \cdots, \tilde{v_m}) \quad &= (v_1, \cdots, v_m)\ \forall m \\ (\tilde{v_1}, \tilde{v_2}, \cdots) \quad &\text{sind orthogonal} \end{aligned}$$

Beispiel 12. $C([-1, 1], \mathbb{R})$ mit $< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x) \,\mathrm{d}\, x$

$$(1, x, x^2, \cdots)$$
$$\xrightarrow{\text{GS}} \frac{< x^2, 1 >}{< 1, 1 >} = \frac{2/3}{2}$$
$$(1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3}{5} \cdots)$$

Bis auf Normalisierung bekommen wir die Legendre-Polynome.

Fazit 4. $\begin{matrix} \text{Bilinearform} & \xrightarrow{\text{+ def, symm}} & \text{Norm} & \to & \text{Metrik} \\ \text{Sesquilinearform} & \xrightarrow{\text{+ def, hermitesch}} & & & \end{matrix}$ Norm:

$$\begin{aligned} \|.\| : V &\to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \|x\| = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \\ \|\lambda x\| &= |\lambda| \|x\| \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

Metrik:

$$\begin{aligned} d : V \times V &\to \mathbb{R}_{\leq 0} \\ d(x,<) = 0 &\Leftrightarrow x = y \\ d(x,y) &= d(y,x) \\ d(x,z) &\leq d(y,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

Aber: nicht jede Metrik, nicht einmal jede transinvariante Metrik kommt von einer Norm.

Bemerkung 14. Eine Norm kommt von einer +def, symm Bilinearform

$$\Leftrightarrow \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \ \forall x, y \in V$$

Definition 19. ausgeartete Bilinearform Eine Bilinearform $s : V \times V \to K$ ist ausgeartet (oder: entartet), falls eine oder beide der induzierten Abbildungen $V \to V^*$ <u>nicht</u> injektiv ist.

$$\begin{aligned} v &\mapsto (w \mapsto s(v,w)) \\ v &\mapsto (w \mapsto s(w,v)) \end{aligned}$$

Bemerkung 15. Falls $\dim_K V < \infty$, dann:

$$\begin{aligned} & v \mapsto (w \mapsto s(v,w)) && \text{injektiv} \\ & \Updownarrow \\ & v \mapsto (w \mapsto s(w,v)) && \text{injektiv} \\ & \Updownarrow \\ & s \text{ ist nicht ausgeartet} \\ & \Updownarrow \\ & \text{die darstennelde Matrix ist invertierbar} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(v,w) &= v^t \cdot A \cdot w \\ &= \left(A^t \cdot v\right)^t \end{aligned}$$

¡++¿

Satz 4. *Sei V ein K-Vektorraum, $s : V \times V \to K$ eine symmetrische oder schiefsymmetrische Bilinearform. Für $U \subset V$ Untervektorraum, schreiben wir noch*

$$U^\perp := \{v \in V : s(u,v) = 0 \ \forall u \in U\}$$

($s(v,u) = 0 \Leftrightarrow s(u,v) = 0$ weil s symm. bzw. schiefsymm.)

Proposition 5. *Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $s : V \times V \to K$ eine nicht ausgeartete symmetrische oder schiefsymmetrische Bilinearform. Sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Dann gilt:*

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V$$

Beweis 9. *Sei $(v_i)_{i=1,\cdots n}$ eine Basis mit $n := \dim V$, und A die darstellende Matrix von s bzw. (v_i). Wir haben dann:*

$$s(x,y) = x^t \cdot A \cdot y$$

und $A^t = \pm A$, $\det A \neq 0$

$$U^\perp = \left\{x \in V_i | x^t \cdot A \cdot y = 0 \ \forall y \in U\right\} \quad = \left\{x \in V_i | (x \cdot A)^t \cdot y = 0 \ \forall y \in U\right\}$$

Sei $F : V \to V$ lin.Abb. $\leftrightarrow A$. Dann:

$$F(U^\perp) = \{Ax | (Ax)^t y = 0 \ \forall y \in U\} \qquad = \{Ax | \tilde{x}^t y = 0 \ \forall y \in U\}$$

Es folgt: mit

$$B := \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_d \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$(u_1, \cdots, u_d)$ *Basis von* U, *dann ist* $F(U^\perp) = \operatorname{Ker} B$. *Jetzt:*

$$\dim U^\perp = \dim F(U^\perp) = \dim \operatorname{Ker} B = n - \dim U$$

Korollar 4. $\dim U < \infty$, $s : V \times V \to K$ *nicht ausgeartet, (schief-) symm.*

$$U \subset \implies \left(U^\perp\right)^\perp = U$$

Bemerkung 16. Es ist <u>nicht</u> immer der Fall, dass $V = U \bigoplus U'$, weil es ist möglich, dass $U \cup U^\perp \neq 0$. 2 Extremfälle:

- U ist isotropisch ($s|_{U'}$ ist trivial) $\Leftrightarrow U \subset \underbrace{U^\perp}_{\dim V - \dim U}$
- $s|_U$ ist auch nicht ausgeartet $\Leftrightarrow U \cup U^\perp = 0 \Leftrightarrow V = U \bigoplus U^\perp$

Aus 1. ist klar:

$$\dim U \leq \frac{1}{2} \dim V \ \forall \text{isotrop} U \subset V$$

1.7 Orthogonale und unitäre Endomorphismen

$K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

Definition 20. orthogonaler bzw. unitärer Endomorphismus Sei $V, \langle , \rangle$ ein ortho. bzw. unitärer Vektorraum. Ein Endomprhismus $F : V \to V$ heisst <u>orthogonal</u> bzw. <u>unitär</u> falls

$$\langle F(v), F(w) \rangle = \langle v, w \rangle \ \ \forall v, w \in V$$

Bemerkung 17. Das ist äquivalent zu

$$\|F(v)\| = \|v\| \ \ \forall v \in V$$

Eigenschaften 5. orthogonaler bzw. unitärer Endomorphismus Sei F ein ortho. bzw. unitärer Endomorphismus. Dann:

- F ist injektiv
- Falls $\dim_K V < \infty$, F ist bijektiv, und F' ist auch ortho. bzw. unitär
- Für jeden Eigenwert $\lambda \in K$ gilt $|\lambda| = 1$. Eigenvektor v:

$$\|v\| = \|F(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$$

Falls $V = \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ mit Standardskalarprodukt

$$\langle v, w \rangle = v^t w \text{bzw} \qquad \langle v, w \rangle_c = v^t \bar{w}$$

Ist F zur Matrix A entsprechend, dann

$$\begin{aligned} \langle F(v), F(w) \rangle = \langle v, w \rangle \ \Leftrightarrow & \qquad (Av)^t Aw = v^t w \\ & \qquad \text{bzw.} (Av)^t \overline{Aw} = v^t w \\ \Leftrightarrow \ v^t A^t A w = v^t w \Leftrightarrow & \qquad A^t A = E_n \\ \text{bzw} \Leftrightarrow \ v^t A^t \bar{A} \bar{w} = v^t \bar{w} \Leftrightarrow & \qquad A^t \bar{A} = E_n \end{aligned}$$

Definition 21. ortho. bzw. unitäre Matrix $O(n) := A \in GL_n(\mathbb{R})$ heisst orthogonal falls $A^tA = E_n$
$U(n) := A \in GL_n(\mathbb{C})$ heisst unitär falls $A^t\bar{A} = E_n$

Not 1.

$$O_n := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | A \text{ orthogonal}\}$$
$$O_n := \{A \in GL_n(\mathbb{C}) | A \text{ unitär}\}$$

Weil

$$A, B \in O(n) \implies (AB)^t(AB) = B^tA^tAB = B^tB = E_n \implies AB \in O(n)$$

haben wir $O(n) \subset GL_n(\mathbb{R})$ ist eine Untergruppe. Ähnlich: $U(n) \subset GL_n(\mathbb{C})$ ist eine Untergruppe.

Not 2.

$$SO(n) = O(n) \cap SL_n(\mathbb{R})$$
$$SU(n) = U(n) \cap SL_n(\mathbb{C})$$

Not 3. ortho. bzw. unitärer Vektorraum

$$O(V) = \{F \in GL(V) | \text{ortho.}\}$$
$$U(V) = \{F \in GL(V) | \text{unitär}\}$$

Bemerkung 18.

$$A \in O(n) \implies \det A \in \{\pm 1\}$$
$$A \in U(n) \implies \det A \in \{\pm z \in \mathbb{C} : |Z| = 1\}$$

Eigenschaften 6. Charakterisierungen von ortho. bzw. unitären Matrizen Äquivalente Charakterisierungen von orthogonalen bzw. unitären Matrizen $A \in GL_n(\mathbb{R})$:
A ist orthogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t \Leftrightarrow A^tA = E_n \Leftrightarrow AA^t = E_n \Leftrightarrow$ die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$.
Ähnlich:
A ist unitär $\Leftrightarrow A^{-1} = \bar{A}^t \Leftrightarrow A^t\bar{A} = E_n \Leftrightarrow \bar{A}A^t = E_n \Leftrightarrow$ die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n \Leftrightarrow$ die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$.
Für $n = 1$

$$O(1) = \{\pm 1\} \qquad U(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \cong S^1$$
$$SO(1) = \{1\} \qquad SU(1) = \{1\}$$

Für $n = 2$: $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a^2 + b^2 = 1$

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} | \theta \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} | \theta \in \mathbb{R} \right\}$$
$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} | \theta \in \mathbb{R} \right\} \cong S^1$$

$(z, w) \in \mathbb{C}^2$, $|z|^2 + |w|^2 = 1$, $(-\bar{w}, \bar{z}) \perp (z, w)$

$$U(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z & -\lambda\bar{w} \\ w & \lambda\bar{z} \end{pmatrix} | (z, w) \in \mathbb{C}^2, |z|^2 + |w|^2 = 1, \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1 \right\} \cong S^3 \times S^1$$

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} | (z, w) \in \mathbb{C}^2, |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\} \cong S^3$$

$SO(3)$ eine explizite Beschreibung ist möglich (später)

Proposition 6. *Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle , \rangle$, und sei $F : V \to V$ ein unitärer Endomorphismus. Dann besitzt V eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren von F.*

Beweis 10. *Durch Indunktion nach* $\dim V$. $\dim V = 0, 1$ *trivial.* $\dim V \geq 2$ *Weil $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, gibt es einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Sei $v \in V$ ein Eigenvektor, mit $\|v\| = 1$. Weil F untär ist, haben wir $F(v^\perp) = v^\perp$. Wir haben* $\dim v^\perp = \dim V - 1$

$$\begin{aligned} w \in v^\perp \langle v, w \rangle &\implies \langle v, w \rangle = 0 \\ \lambda \langle v, F(w) \rangle = \langle \lambda v, F(w) \rangle &= \langle F(v), F(w) \rangle = 0 \\ &\implies F(v^\perp) \subset v^\perp \end{aligned}$$

Aus der Induktionsannahme folgt, dass $\exists$ Orthonormalbasis von $v^\perp$ von Eigenvektoren von F. Zusammen mit $v \overset{V = \mathrm{span} \bigoplus v^\perp}{\rightsquigarrow}$ Orthonormalbasis von V

Korollar 5. *Sei $A \in U(n)$. Dann $\exists S \in U(n)$, $\theta_1, \cdots, \theta_n \in \mathbb{R}$ so dass*

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

Proposition 7. *Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle , \rangle$, und sei $F : V \to V$ ein orthogonaler Endomorphismus. Dann besitzt V eine Orthonormalbasis $\left(v_1^+, \cdots, v_r^+, v_1^-, \cdots, v_s^-, w_1, w_1', \cdots, w_t, w_t'\right)$*

- $F(v_i^+) = v_i^+$
- $F(v_i^-) = -v_i^-$
- $F(w_i) = (\cos\theta_i) w_i + (\sin\theta_i) w_i'$
- $F(w_i') = (-\sin\theta w_i) + (\cos\theta_i) w_i'$

mit $\theta_i \in \mathbb{R}$, $0 < |\theta| < \phi$, $i = 1, \cdots, t$

Beweis 11. *Durch Induktion nach* $\dim V$*:* $\dim V = 0, 1, 2$ *trivial.* $\dim > 2$ *(nächstes mal)*

Fazit 5. $\dim_{\mathbb{R}} V$ $\quad$ $\langle ., . \rangle$ Skalarprodukt
$F : V \to V$ orthogonaler Endomorphismus
$\implies \exists$ orthogonale Basis $\quad$ +1 oder -1 Eigenvektoren

$$F(\alpha w_i + \beta w_i') = (\alpha \cos\Theta_i - \beta \sin\Theta_i)\, w_i + (\alpha \sin\Theta_i \beta \cos\Theta_i)\, w_i', \ \Theta_i \in \mathbb{R}$$

Beweis 12. *Fortsetzung Durch Induktion nach* $\dim V$*, Induktionsanfang:* $\dim V \leq 2$ $\dim V = 2$ *bezüglich beliebiger Basis (w_1, w_1').*

$$V : \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \textit{oder} \begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ -\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}$$

Matrix 1: w_1, w_2 ist wie oben, Matrix 2: chaakteristisches Polynom $t^2 - 1 = (t-1)(t+1) \to$ (+1-Eigenvektor, -1-Eigenvektor)

1. *Fall: $\exists$ reeller Eigenwert*

   $$\lambda \in \mathbb{R}, \ |\lambda| = 1 \ v \in V \ F(v) = \lambda v$$

   wir zeigen, dass $F(v^\perp) = v^\perp$ genau wie im Fall einees unitären Endomorphismus

   $$\begin{aligned} \dim(v^\perp) = \dim V - 1 &\overset{IA}{\rightsquigarrow} v^\perp : \textit{orthonormale Basis} \\ V = &(v) \bigoplus v^\perp \end{aligned}$$

2. Fall: $\nexists$ reeller Eigenwert

$$\implies P_F(t) = \prod_{i=1}^{(\dim V)/2} Q_i(t)$$

$Q_i(t)$ irreduzibles quadratisches Polynom. Aus dem Satz von Cayley-Hamilton folgt:

$$\implies \exists \overbrace{v}^{\neq 0} \in V,\ imitQ_i(F)v = 0$$

Sei $0 \neq v_0 \in V$ beliebigen Vektor $P_F(F)v_0 = 0$

$$\begin{aligned} Q_1(F)Q_2(F)\cdots +_{\frac{\dim V}{2}} (F)v_0 = 0 \\ \implies \exists j : Q_j(F)Q_{j+1}(F)\cdots +_{\frac{\dim V}{2}} (F)v_0 = 0 \\ aber\ Q_{j+1}(F)\cdots Q_{\dim V}2(F)v_0 \neq 0 \end{aligned}$$

$\implies$ wir nehmen $i := j$ und $v := Q_{j+1}(F)\cdots Q_{\frac{\dim V}{2}(F)v_0}$.
Beh: $U := \operatorname{span}(v, F(v))$ ist ein F-invariante Vektorraum. $Q_i(F)_v = 0 \implies \exists a, b \in \mathbb{R}$ mit $F(F(v)) = av + bF(V)$. Es folgt: $U^\perp$ ist auch F-invariant. $V = U \bigoplus U^\perp \overset{IA}{\rightsquigarrow}$ Basen von U und von $U^\perp$ wie oben. Die Vereinigung dieser Basen ist wie erwünscht.

Korollar 6. *Sei $A \in O(n)$. Dann gibt es ein $S \in O(n)$ und $r, s, t \in \mathbb{N}$, $\Theta_1, \cdots, \Theta_t \in \mathbb{R}$ mit*

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} E_r & & & & 0 \\ & -E_s & & & \\ & & D_{\Theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & D_{\Theta_t} \end{pmatrix}$$

wobei

$$D_\Theta := \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}$$

Beispiel 13.

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix} \in U(n)$$

$$\begin{aligned} A(z_1, \cdots, z_n) &= (z_2, \cdots, z_n, z_1) \\ A(1, S, S^2, \cdots, S^{n-1}) &= (S, S^2, \cdots, S^{n-1}, 1) \\ S &:= e^{2\pi i/n}\ S^n = 1 \end{aligned}$$

$\implies (1, S, S^2, \cdots, S^{n-1})$ ist Eigenvektor zum Eigenwert S. Ähnlich: für $0 \leq j \leq n-1$ haben wir $(1, S^j, S^{2j}, \cdots, S^{(n-1)j})$ ist Eigenvektor zum Eigenwert S^j. $1, S, S^2, \cdots, S^{n-1}$ sind paarweise verschieden $\implies (1, S^j, S^{2j}, \cdots, S^{(n-1)j})$ ist eine Basis von Eigenvektoren. Normalisierung:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left(1, S^j, S^{2j}, \cdots, S^{(n-1)j}\right)\right)_{j=0,1,\cdots,n-1}$$

ist eine orthonormale Basis von Eigenvektoren

Fazit 6. $(K = \mathbb{C})$ unitärer Endomorpismus von V
$(K = \mathbb{R})$ orthogonaler Endormophismus von V
$\implies V = \bigoplus_{\text{Eigenwerte}\lambda} \operatorname{Eig}(F; \lambda)$ orthogonale direkte Summe

Beispiel 14.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{4}{5} & \frac{36}{65} \\ \frac{4}{13} & -\frac{3}{5} & \frac{48}{65} \\ \frac{12}{13} & 0 & -\frac{5}{13} \end{pmatrix} \in O(3)$$

$\det A = 1$ 2 komplex konjugierte + 1 reller oder 3 reelle Eigenwerte $\implies$ +1 ist ein Eigenwert. ... $\rightsquigarrow$ Eigenvektor $(6,3,4)$ zum Eigenwert 1. $\to$ v mit $\|v\| = 1$ $v = \frac{1}{\sqrt{61}}(6,3,4)$ — $v^\perp = \operatorname{span}((1,-2,0),(2,0,-3)) \xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}}$

$$(1,-2,0), (\frac{8}{5}, \frac{4}{5}, -3)$$

Normalisieren:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0), \sqrt{1}\sqrt{305}(8,4,-15)$$

Und wir berechnen

$$S := \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{61}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{8}{\sqrt{305}} \\ \frac{3}{\sqrt{61}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{305}} \\ \frac{4}{\sqrt{61}} & 0 & -\frac{15}{\sqrt{305}} \end{pmatrix}$$

bekommen wir

$$\underbrace{S^{-1}}_{=S^t} AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{57}{65} & \frac{4\sqrt{61}}{65} \\ 0 & -\frac{4\sqrt{61}}{65} & -\frac{57}{65} \end{pmatrix}$$

1.8 Beschreibung von $SO(3)$ und $O(3)$

Eigenschaften 7. Sei $A \in SO(3)$. Dann: entweder es gibt 1 reelle und 2 komplex konjugierte Eigenwerte oder 3 reelle Eigenwerte. $\lambda \in \mathbb{C} \implies \lambda \cdot \bar{\lambda} = 1$. Eigenwerte $+1(\times 3) \Leftrightarrow A = E_3$ oder $-1(\times 2)$ / $+1$. Wenn $\not\Leftrightarrow A = E^3$, dann ist $\dim \operatorname{Eig}(A,1) = 1$.

$$A : \operatorname{Eig}(A,1)^\perp \to \operatorname{Eig}(A,1)^\perp$$

ist eine Drehung durch einen Winkel $\Theta \in (0, 2\phi)$. Bezüglich Basis (v_1, v_2, v_3), $v_1 \in \operatorname{Eig}(A,1)$, $\|v_1\| = 1$ sieht A aus wie

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & -\sin\Theta \\ 0 & \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}$$

Eigenschaften 8. Sei $A \in O(3)$ Falls $\det A = 1$, haben wir $A \in SO(3)$
Falls $\det A = -1$, haben wir $-A \in SO(3)$
Dann bekommen wir die folgende Beschreibung von $A \in O(3)$ mit $\det A = -1$:

- $A = -E_3$
- oder $\dim \operatorname{Eig}(A,-1) = 1$
  $v_1 \in \operatorname{Eig}(A,-1)$, $\|v_1\| = 1$
  $A : \operatorname{Eig}(A,-1)^\perp \to \operatorname{Eig}(A,-1)^\perp$ ist eine Drehung um den Winkel $\Theta - \pi \in (-\pi, \pi)$ (Spiegelung oder Spiegelung mit Drehung)

1.9 Selbstadjugierte Endomorphismen

V,$\langle,\rangle$, K-Vektorraum mit Skalaprodukt. (K=$\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Ist $F : V \to V$ ein Endomorphismus, so heisst $F^* : V \to V$ adjugierter Endomorpismus falls

$$\langle F(v), w\rangle = \langle v, F^*(w)\rangle \ \forall v, w \in V$$

Definition 22. $F : V \to V$ ist adjugiert falls

$$\langle F(v), w\rangle = \langle v, F(w)\rangle \ \forall v, w \in V$$

Eigenschaften 9. Falls $V = \mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt, so zu F ist eine assoziierte Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$, dann ist A^t zu F^* assoziiert. Falls $V = \mathbb{C}^n$, dann ist

$$F \leftrightarrow A \in M(n \times n, \mathbb{C})$$
$$F^* \leftrightarrow \bar{A}^t \in M(n \times n, \mathbb{C})$$

Beweis 13.

$$\langle Av, w \rangle = (Av)^t \bar{w} = v^t A^t \bar{w} = v^t \bar{\bar{A}}^t w = \left\langle v, \bar{w}^t w \right\rangle$$

Bemerkung 19. F^* ist eindeutig falls für $\tilde{F}^*$ gilt

$$\langle F(v), w \rangle = \left\langle v, \tilde{F}^*(w) \right\rangle$$

dann ist

$$0 = \left\langle v, \tilde{F}^*(w) - F^*(w) \right\rangle$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \tilde{F}^*(w) - F^*(w), \tilde{F}^*(w) - F^*(w) \right\rangle \\ &= \left\| \tilde{F}^*(w) - F^*(w) \right\|^2 \\ &\Longrightarrow \tilde{F}^*(w) = F^*(w) \end{aligned}$$

Fazit 7. Im Fall $V = \mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ mit Standardskalarprodukt ist ein selbstadjungierter Endomorphismus durch eine symmetrische bzw. hermitesche Matrix gegeben.

Lemma 1. *Jeder Eigenwert eines selbstadjugierten Endomorphismus ist reell.*

Beweis 14. *Ist $F(v) = \lambda v$ mit $v \neq 0$, so gilt*

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle F(v), v \rangle = \langle v, F(v) \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle \implies \lambda = \bar{\lambda}$$

Bemerkung 20. Prä-Hilbertraum bezeichnet einen K-Vektorraum (K=$\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) mit Skalarprodukt. Euklidische bzw. unitäre Vektorräume sind endlichdimensional,

Proposition 8. *Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und $F : V \to V$ ein selbstadjugierter Endomorphismus. Dann gibt es eine orthonormale Basis von Eigenvektoren.*

Beweis 15. *Falls V ein unitärer Vektorraum ist: durch Induktion nach* $\dim V$*, $\exists$ Eigenwert λ, Eigenvektor v, oBdA haben wir $\|v\| = 1$. Wir behaupten:*

$$F(v^\perp) \in V^\perp$$

$$\langle v, w \rangle = 0 \implies \langle v, F(w) \rangle = \langle F(v), w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle = 0$$

IA $\Longrightarrow$ $\exists$ orthonormale Basis von $v^\perp$. Dies, zusammen mit v, gibt eine Basis von V. Fall eines euklidischen Vektorraums: Das gleiche Argumente ist gültig, sobald wir wissen, dass F einen Eigenwert besitzt. Man wählt eine Basis von V, so:

$$F \leftrightarrow A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \quad [n = \dim V]$$

mit $A = A^t$. Wir betrachten A als komplexe Matrix, so dass

$$A = \bar{A} \implies \bar{A}^t = A^t = A \implies A \textit{ ist hermetisch}$$

Sei λ ein (komplexer) Eigenwert von A. Weil A hermetisch ist, haben wir $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir haben

$$\det(A - \lambda E_n) = 0$$

Dann:

$$\det(F - \lambda id_V) = 0$$

also λ ist Eigenwert von F.

Korollar 7. *Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Dann $\exists\ S \in O(n)$ mit*

$$S^t AS = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n),\ \ \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ hermetisch. Dann $\exists\ S \in U(n)$ mit

$$\bar{S}^t AS = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n),\ \ \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

Korollar 8. *Sei $F : V \to V$ wie in der Proposition oben. Dann ist V die orthogonale direkte Summe von diesen Eigenräumen:*

$$V = \bigoplus_{Eigenwerte \lambda} \operatorname{Eig}(F; \lambda)$$

Fazit 8. $\rightsquigarrow$ Praktisches Verfahren: A symmetrisch bzw. hermetische Matrix
$\hookrightarrow$ berechnen $\operatorname{Eig}(A; \lambda)$
$\hookrightarrow$ wählen von jedem eine orthonormale Basis

Beispiel 15.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3+3i \\ 3 & 5 & -3-3i \\ 3-3i & -3+3i & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = \det(tE_3 - A) = (t-5)^2(t-2) + \cdots = t^3 - 12t^2 + 256 = (t+4)(t-8)^2$$

$$\operatorname{Eig}(A; -4) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3+3i \\ 3 & 9 & -3-3i \\ 3-3i & -3+3i & 6 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1+i \end{pmatrix} \right\}$$

$$\operatorname{Eig}(A; \delta) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3+3i \\ 3 & -3 & -3+3i \\ 3-3i & -3+3i & -6 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1-i \end{pmatrix} \right\} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix}$$

Wir bekommen:

$$S := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{-1+i}{2} & 0 & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix}$$

dann:

$$\bar{S}^t AS = \operatorname{diag}(-4, 8, 8)$$

Bemerkung 21. Das Resultat von der Proposition oben im Fall eines euklidischen Vektorraums ist klar, auch aus geometrischem Grund.

$$\text{symm. Matrizen} \setminus \mathbb{R} \ \rightsquigarrow\ \text{quadratische Formen}$$

(Prop aktuelle-7) $S^t AS$ aus der Transformationsformel.
... und man kann auch einen alternativen Beweis in diesem Fall geben.

$$A \in M(n \times n, \mathbb{R}), A^t = A \ \rightsquigarrow\ q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, q(v) := v^t Av$$

(Faktum aus der Analysis)

$$\exists x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1 \text{ mit} q(x) \geq g(x')\ \forall x' \in \mathbb{R}n^n, \|x'\| = 1$$

Dann für $v \in \mathbb{R}^n, v \perp x$ haben wir $Av \perp x$. In der Tat haben wir

$$(Av - q(x)v) \perp x\ \forall v \in \mathbb{R}^n$$

denn

$$\langle Av - q(x)v, v \rangle + 2\lambda \langle Av - q(x)v, x \rangle = (v + \lambda x)^t (A - q(x)E_n)(v + \lambda x) \leq 0\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

(Details im Buch, 5.6.4)

Bemerkung 22. F selbstadjugiert, $\dim V < \infty \implies \exists$ orthonromale Basis von Eigenvektoren $\implies$

$$V = \bigoplus_{\lambda} \mathrm{Eig}(F;\lambda)$$

orthogonale direkte Summe $\rightsquigarrow$ orthogonalte Projektion

$$P_\lambda V \to \mathrm{Eig}(F,\lambda)$$

Dann können wir schreiben

$$F = \sum_{\text{Eigenwerte}\lambda} \lambda P_\lambda$$

$$= \{\text{Eigenwerte von } F\} = \text{"Spektrum"}$$

Geschrieben mit Matrizen:

$$A \in (n \times n, \mathbb{R}) \text{ symmetrisch } \implies \exists S \in O(n)$$

so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.
Interpretation: der zu A assoziierte Endomorphismus ist Diagonalisierbar.
S^tAS ist eine Diagonalmatrix
Interpretation: $A \leftrightarrow s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Bilinearform.

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \leftrightarrow (x,y) \mapsto x^t \,\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) y$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i$$

Fragen

- Zu einer symmetrischen Bilinearform gibt es eine bestimmte Normalform?
- Wie kann man das praktisch berechnen?

Proposition 9. *Hauptachsentransofrmation symmetrischer Matrizen Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch und $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die entsprechende symmetrische Bilinearform. Dann:*

1. *Ist $B = (w_1, \cdots, w_n)$ eine orthonormale Basis von Eigenvektoren von A, so ist $M_B(s) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda)$ wobei $\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ die Eigenwerte von A sind.*
2. *Es gibt eine Basis B' mit*

$$M_{B'}(s) = \begin{pmatrix} E_k & & \\ & -E_l & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Blockdiagonalmatrix, wobei

$$k = \#\{i|\lambda_i > 0\}$$
$$l = \#\{i|\lambda_i < 0\}$$

Beweis 16. *1. $\Leftrightarrow \exists S \in O(n)$ mit $S^tAS = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$*

2. $\Leftrightarrow \exists T \in GL_n(\mathbb{R})$ mit $T^tAT = \begin{pmatrix} E_k & & \\ & -E_l & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

oBdA habe wir

$$\lambda_1, \cdots, \lambda_k > 0$$
$$\lambda_{k+1}, \cdots, \lambda_{k+l} < 0$$
$$\lambda_{k+l+1} = \cdots = \lambda_n = 0$$

Wir nehmen $B' = (w'_1, \cdots, w'_n)$ mit

$$w'_i = \begin{cases} \frac{w_i}{\sqrt{|\lambda_i|}} & i \leq k+l \\ w_i, i > l+l \end{cases}$$

$$(w'_i)^t A w'_i = \frac{1}{|\lambda_i|} w_i^t A w_i = \frac{1}{|\lambda_i|} \lambda_i \text{ für } i \leq k+l$$

Bemerkung 23.

$$T^t A T = \underbrace{\begin{pmatrix} E_k & & \\ & -E_n & \\ & & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Sylvester-Form}}$$

. . . Erklärung zum Namen "Hauptachsentransformation". . .

Korollar 9. *Sei $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform mit entsprechender Matrix A. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *s ist positiv definit*
2. *Alle Eigenwerte von A sind positiv*
3. *Die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms haben alternierende Vorzeichen*

Vorzeichenregel von Descartes

Beispiel 16.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = \det(tE_3 - A) = t^3 - ut^2 + 15t \underbrace{+} 3$$

$$P_A(-1) = -21 \; P_a(0) = 3 \implies \exists \lambda : -1 < \lambda < 0$$

Beweis 17. *s ist äquivalent zu*

$$(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i y_i$$

$\implies$ *s positiv definit $\Leftrightarrow \lambda_i > 0 \; \forall i$*

Bemerkung 24. Weitere Begriffe $s : V \times V \to \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform

positiv definit	positiv semidefinit
negativ definit	negativ semidefinit
indefinit:	$\exists x \in V : s(x,x) > 0$ und $y \in V : s(y,y) < 0$

Tabelle 1: Weitere Begriffe

Bemerkung 25. Ausartungsraum Ausartungsraum von einer Bilinearform $s : V \times V \to K$ auf einem Vektorraum über einem beliebigen Körper K ist:

$$U := \{v \in V | s(v, w) = 0 \; \forall w \in V\}$$

und ist ein Untervektorraum. Falls s symmetrisch oder schiefsymmetrisch ist, bekommen wir eine induzierte Bilinearform $\bar{s} : V/U \times V/U \to K$, gegeben durch

$$v + U, w + U) \mapsto s(v, w)$$

und $\bar{s}$ ist nicht ausgeartet.

$$v' = v + u,\ u \in U$$
$$w' = w + \tilde{u},\ \tilde{u} \in U$$

$$s(v', v') = s(v, w) + s(u, w) + s(v, \tilde{u}) + s(u, \tilde{u}) =$$
$$= s(v, w) + s\underbrace{(u, w)}_{=0} \pm \underbrace{s(\tilde{u}, v)}_{=0} + s\underbrace{(u, \tilde{u})}_{=0}$$

$$s(v, w) = 0 \implies v \in U \implies v + U$$

ist Nullvektor von V/U

Korollar 10. *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. dann gibt es eine orthogonale Zerlegung*

$$\mathbb{R}^n = W_+ \oplus W_i \oplus W_0$$

mit

$$s|_{W_+} > 0,\ s|_{W_-} < 0$$

und $W_0 =$ Ausartungsraum von s

Proposition 10. *Trägheitsgesetz/Signatur von Sylvester Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $s : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Sei*

$$V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0$$

eine Zerlegung als orthogonale direkte Summe, mit $s|_{V_+} > 0$, $s|_{V_-} < 0$ und V_0=Ausartungsraum von s. Dann sind

$$r_+ := \dim(V_+),\ r_- = \dim(V_-) \text{ und } r_0 := \dim(V_0)$$

Invarianten von s, charakterisiert durch

$$r_+ = \max\{\dim W | W \subset V \text{ Untervektorraum},\ s|_W > 0\}$$

$$r_- = \max\{\dim W | W \subset V \text{ Untervektorraum},\ s|_W < 0\}$$

Die Invarianten (r_+, r_-, r_0) heisst Trägheitsindex oder Signatur von s

Bemerkung 26. Ist A eine $n \times n$ symmetrische reelle Matrix, heisst Signatur die Signatur von der zu A entsprechender Biliniearform.

Bemerkung 27. Auch $r_+ - r_-$ heisst Signatur.

Dimension	$\dim V = r_+ + r_- + r_0$	
Rang	$r_+ + r_-$	$\leftrightarrow (r_+, r_-, r_0)$
Signatur in diesen Sinn	$r_+ - r_-$	

Beweis 18. *Reduktionsschritt: Es genüngt, das Resultat zu beweisen, im Fall dass s nicht ausgeartete ist.*

$$V \to \bar{V} = V/V_0$$

$$V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0$$
$$\bar{V} = \bar{V}_+ \oplus \bar{V}_-$$

wobei $\bar{V}_\pm$ = Bild von $V_\pm$. Bew. $\bar{V} = \bar{V}_+ + \bar{V}_-$ direkte Summe

$$\Leftrightarrow\ \bar{V}_+ \cap \bar{V}_- = 0$$

$$\bar{v} \leftrightarrow v \in V_+ \oplus V_0$$

und

$$v \in V_- \oplus V_0$$

$\Leftrightarrow v \in V_0$ *Behauptung:* $\bar{s}$ *induzierte Bilinearform auf* $\bar{V}$

$$\max\{\dim W | s|_W > 0\} = \max\{\dim U | U \subset \bar{V}, \bar{s}|_U > 0\}$$

und

$$\max\{\dim W | s|_W < 0\} = \max\{\dim U | U \subset \bar{V}, \bar{s}|_U < 0\}$$

Ist $W \subset V, s|_W > 0$, *und* $\bar{W} :=$ *Bild von* W, *so haben wir*

$$\dim \bar{W} = \dim W$$

und

$$\bar{s}|\bar{W} > 0$$

Dimensionsformel:

$$\dim \bar{W} = \dim W - \dim(\underbrace{W \cap V_0}_{=0}) = \dim W$$

und

$$\bar{s}(\bar{v}, \bar{v}) = s(v, v)$$

wobei $v \in W \mapsto v \in \bar{W}$ *Umgekehrt ist*

$$U \subset \bar{V},\ \bar{s}|_U > 0,\ \dim U = d$$

wählen Basis $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_d)$ *von* $\bar{U}$, *mit* $v_i \mapsto \bar{v}_i\ \forall i$ *dann haben wir* $W := \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_d)$ *hat die Eigenschaft*

$$\dim W = d\ s|_W > 0,\ \mathrm{Im}(W) = U$$

Beweis im Fall s nicht ausgeartet:
Behauptung: Ist

$$W_+ \subset V, s|_{W_+} > 0,\ W_- \subset V, s|_{W_-} < 0$$

so haben wir

$$W_+ \cap W_- = 0$$

Es folgt:

$$\dim W_- + \dim W_+ \leq \dim V$$

mit Gleicheit $\Leftrightarrow V = W_+ \oplus W_-$
Deshalb

$$r_+ + r_- \leq \dim V$$

Und wir haben = aus dem Korollar
(alternativer Beweis ohne Quotientenvektorräume sehe Buch)

Bemerkung 28. Praktische Fragen:

- Wie berechnet man die Signatur einer symmetrischen Bilinearform?
- Wie findet man eine Basis, so dass die darstellden Matrix in Sylversterform ist?

In Matrixen: $A \in (n \times n, \mathbb{R})$ symm.

- Signatur?
- Finden $T \in GL_n(\mathbb{R})$ mit $T^t A T$ in Sylvesterform

Antwort:
Aus der Hauptachsentrasformation:

$$\exists\ S \in O(n),\ S^t AS = S^{-1}AS = \operatorname{diag}(\lambda, \dots, \lambda_n)$$

$\implies$ Signatur

$$r_+ = \#\{i|\lambda_i > 0\}$$
$$r_- = \#\{i|\lambda_i < 0\}$$
$$r_0 = \dim \operatorname{Ker}(A)$$
$$S \overset{\text{Normieren der Spaltenvektoren}}{\rightsquigarrow} S'$$

mit $S'^t AS$ in Sylvesterform.
Alternatives, oft leicheres Verfahren:

- $\operatorname{Ker}(A)$ = Ausartungsraum berechnen
- Vektoren Wählen, wobei $q(v) = s(v, v)$ verschieden von Null ist. $\rightsquigarrow q(v) \in \{\pm 1\} \rightsquigarrow v^\perp$

Beispiel 17. Silvesterform

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$P_A(t) = t^3 - 8t^2 + 3t = t\left(t - (4 + \sqrt{13})\right)\left(t - (4 - \sqrt{13}\right)$$

Signaturen $(2, 0, 1)$ Mit Halbachsentransformation

Eigenwert 0	$\rightsquigarrow$	Eigenvektor $(1, -1, 1)$
Eigenwert $4 + \sqrt{13}$	$\rightsquigarrow$	Eigenvektor $(1, 4 - \sqrt{13}, -3 + \sqrt{13})$
Eigenwert $4 - \sqrt{13}$	$\rightsquigarrow$	Eigenvektor $(1, 4 + \sqrt{13}, -3 - \sqrt{13})$

Normieren...
S' ausrechnen... (ne danke)
haben wir

$$S'^t = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 18. Alternativ

$$e_2 :\ q(e_2) = e_2^t A e_2 = 1$$
$$e_2^\perp = \{(x, y, z)|2x + y + z = 0\}$$
$$(-1, 2, 0)A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$
$$\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$T := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mit T haben wir $T^t AT = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

2 Klassifikation von Bilinearformen auf $\mathbb{R}^n \leftrightarrow$ Signatur

Seien euklidische $(V, \langle , \rangle)$ und symmetrische Bilinearform $s : V \times V \to \mathbb{R}$, so können wir die Bilinearform durch die Hauptachsentransormation verstehen. Seien ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum V und die symmetrische Bilinearform $s : V \times V \to \mathbb{R}$, dann ist s durch die Signatur (r_+, r_-, r_0) klassifiziert.

Eigenschaften 10. $\dim V = 2$

Signatur	$(2,0,0)$	$q(v) := s(v,v)$ Quadratische Schale (positiv)
	$(0,2,0)$	Quadratische Schale (negativ)
	$(1,1,0)$	Sattelpunkt
	$(0,1,1)$	Quadratisches halbes Rohr (positiv)
	$(1,0,1)$	Quadratisches halbes Rohr (negativ)

Eigenschaften 11. $\dim V = 3$ $\{q(v) = 1\}$

(3,0,0)	Sphäre	
(2,1,0)	einschaliges Hyperboloid	+ Fälle s entartet
(1,2,0)	zweischaliges Hyperboloid	
(0,3,0)	$\varnothing$	

Der Fall von Bilinearformen über Vektorräumen über $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ beliebiger Körper.

Proposition 11. *Orthogonalisierungssatz Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper mit char$(K) \neq 2$. Sei s eine symmetrische Bilinearform über V. Dann gibt es eine Basis B von V, so dass die $M_B(s)$ eine Diagonalmatrix ist.*

Beweis 19. *Reduktionsschritt zum Fall s nicht ausgeartet. Sei U = Ausartungsraum. $\bar{V} := V/U$ und $\bar{s}$:= induzierte Bilinearform. Wählen wir ein Komplement $W \subset V$ zu U, so haben wir*

$$V = U \oplus W$$

$$W \xrightarrow{\textit{Isomorphismus}} \bar{V}$$

$$s|_W \textit{ nicht ausgeartet}$$

Wir können deshalb behaupten, dass s nicht ausgeartet ist. Dann beweisen wir dies Aussage durch Induktion nach $\dim V$. $\dim V \leq 1$ *trivial. Induktionsschritt:*

$$s \textit{ nicht ausgeartet} \xRightarrow{\dim(\mathbb{K}) \neq 2} \exists v \in V : s(v,v) \neq 0$$

Sei $V' := V^\perp$ Wir haben $\dim V' = \dim V - 1$, *weil s nicht ausgeartet ist.*
IA $\rightsquigarrow$ Basis B' von V' mit $\underbrace{M_B(s|_{V'})}_{\textit{auch nicht ausgeartet}}$ *diagonal. Dann:*

$$B\&v \rightsquigarrow B \textit{ mit } M_B(s) \textit{ eine Diagonalmatrix}$$

Korollar 11. *Ist char $K \neq 2$, so gibt es zu einer symmetrischen Matrix $A \in (n \times n, \mathbb{K})$ ein $S \in GL_n(\mathbb{K})$ so dass S^tAS eine Diagonalmatrix ist.*

Beispiel 19. $\mathbb{K}$ beliebig, chat $(K) \neq 2$ $V = K^2$

$$s(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1$$
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$s(v_1, v_1) = 2$$
$$v_1^\perp = \text{span}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$s(v_2, v_2) = -2$$
$$B := (v_1, v_2)$$
$$M_B(s) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$S \;\leftrightarrow\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Standardbasis. Mit $S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ haben wir

$$S^t A S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 29. offen bleibt die Frage: Sind symmetrische Bilinearformen s und s' auf V gegeben ($\dim_{\mathbb{K}} < \infty$), können wir entscheiden ob s und s' äquivalent sind?
Oder, in Matrizen: Sind symmetrische $A, A' \in (n \times n, \mathbb{K})$ gegeben, können wir entscheiden, obes ein $S \in GL_N(\mathbb{K})$ gibt, so dass $S^t A S = A'$?
Die Antwort hängt von $\mathbb{K}$ ab.

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ durch die Signatur
- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ durch die Rang
- andere $\mathbb{K}$?

Im Allgemeinen:

- Rang
- Reduktion zum Fall einer nichtausgearteten Form

Wir behaupten: s ist nicht ausgeartet $\Leftrightarrow$ eine darstellende Matrix A ist invertierbar.

$$\det(A) \in \mathbb{K}^*/(\mathbb{K}^*)^2$$

ist eine Invariante von s, wegen der Transformationsform.

$$T \in GL_n(\mathbb{K}) \;\rightsquigarrow\; T^t A T$$

ist eine andere darstellende Matrix. Und

$$\det(T^t A T) = \det(T^t)\det(A)\det(T) = (\det T)^2 \det(A)$$

Definition 23. Diskriminante Sei $s : V \times V \to \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform (mit $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$). Die Diskiminante von s ist 0 falls s ausgeartet ist, sonst ist die Klasse von $\det(A)$ in $\mathbb{K}^*/(\mathbb{K}^*)^2$, wobei A eine darstellende Matrix von s ist. Die Diskriminante ist eine Invariante von s

- Rang
- Diskriminante

Bemerkung 30. Noch offen: sind s,s' nicht ausgeartet, mit derselben Diskriminante, zu entscheiden, ob s und s' äquivalent sind.

Beispiel 20. $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, z.B. $V = \mathbb{Q}^2$, s Standardskalarprodukt $s(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ und s' symmetrische Bilinearform mit $\mathrm{disc}(s) = +1$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix} \overset{\text{Basiswechsel}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

mit $aa' = b^2, b \in \mathbb{Q}$

$$\Longrightarrow\; a = \frac{b^2}{a'} = a' \left(\frac{b}{a'}\right)^2$$

$a = 2$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a = 3$

$$s' \;\leftrightarrow\; q'(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2$$

Beh:

$$q'(x) \neq 1 \;\forall x \in \mathbb{Q}^2$$

Konsequenz: s' ist nicht äquivalent zu s. Ist $3x_1^2 + 3x_2^2 = 1$ so schreiben wir $x_1 = \frac{r_1}{s_1}, x_2 ? \frac{r_2}{s_2}$, $r_1, r_2, s_1, s_2 \in \mathbb{Q}$, $s_1, s_2 \neq 0$

$$3r_1^2 s_2^2 + 3r_2^2 s_1^2 = s_1^2 s_2^2$$

$$\text{oder } 3r^2 + 3s^2 = t^2 \text{ wobei } r = r_1 s_2,\ \ s = r_2 s_1,\ \ \overbrace{t}^{\neq 0} = s_1 s_2 \tag{1}$$

$$3^{\text{ungerade}}(3k_1 + 1) + 3^{\text{ungerade}}(3k_2 + 1)$$
$$\implies \text{Widerspruch zu (1)}$$

Fazit 9. $\mathbb{K}$: Körper, $\operatorname{char}(\mathbb{K}) \neq 2$
V:endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum
s: $V \times V \to \mathbb{K}$ symmetrische Bilinearform

Rang Rang ¡ $\dim V \Leftrightarrow s$ ist ausgeartet. U:=Ausartungsraum. $\bar{s}$ induzierte Bilinearform auf $\bar{V} := V/U$ (nicht ausgeartet)

Diskriminiante für s nicht ausgeartet: $\operatorname{disc}(s) \in \mathbb{K}^*/(K^*)^2$

Beispiel 21. $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}^2$ Bilinear entsprechend zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

- Beide: Rang 2, Diskriminante 1
- nicht äquivalent

Bemerkung 31. Die Frage, ob eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf $V := \mathbb{Q}^2$ der Diskriminante 1 äquivalent zum Standardskalarprodukt ist, können wir nur beantworten mittels einem Resultat aus der Zahlentheorie.

Satz 5. *s nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf* $\mathbb{Q}^2$ $\operatorname{disc}(s) = 1 \implies$ *$\exists B$ Basis mit*

$$M_B(s) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$$

Dann: s ist äquivalent zum Standardskalarprodukt $\Leftrightarrow$

$$\exists v \in V,\ s(v,v) = 1 \text{ d.h. } \exists x, y \in \mathbb{Q}:\ ax^2 + ay^2 = 1$$

$\Leftrightarrow$

$$\exists x, y \in \mathbb{Q} \text{ mit } x^2 + y^2 = a$$

Bemerkung 32. Ein Resultat aus der Zahlentheorie gibt uns eine Charakterisierung von Summen zweier Quadrate in $\mathbb{Q}$: für $a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$:

$$\exists x, y \in \mathbb{Q} : x^2 + y^2 = a\ \Leftrightarrow x, y \in \mathbb{Z} : x^2 + y^2 = a$$

$\Leftrightarrow a > 0$ und jede Primzahl $p = 4k + 3$ ($k \in \mathbb{N}$) kommt mit gerader Vielfachheit in der Primzahlzerlegun von a vorkommen. Der Beweis nutzt

$$(x_1 x_1' - x_2 x_2')^2 + (x_1 x_2' + x_2 x_1')^2 = (x_1^2 + x_2^2)(x_1'^2 + x_2'^2)$$

Satz von Fermat: p Primzahl

$$\exists x, y \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 = p\ \Leftrightarrow\ p = 2 \vee 4|(p-1)$$

Argument vom letzten Mal (auszuschliessen $a = 3$)

Fazit 10. Zurück zum Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
Wir wissen: eine symmetrische Bilinearform $s : V \times V \to \mathbb{R}$ ($\dim_{\mathbb{R}} V < \infty$) ist durch die Signatur (r_+, r_-, r_0) charaktertisiert.

$$A : M_B(s)\ P_A(t) = \prod_{i=1}^{n} (t - \lambda_i)$$

$$\begin{aligned} r_+ &= \#\{i|\lambda_i > 0\} \\ r_- &= \#\{i|\lambda_i < 0\} \\ r_0 &= \#\{i|\lambda_i = 0\} \end{aligned}$$

und

$s > 0 \Leftrightarrow$ Signatur $(n, 0, 0) \Leftrightarrow \lambda_i > 0 \forall i \Leftrightarrow$ Koeff. $P_A(t)$ hat alternierende Vorzeichen

Definition 24. Hauptminor Sei $A = (a_{ij}) \in (n \times n, \mathbb{K})$. Wir schreiben A_k für die Teilmatrix $(A_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$, für $1 \leq k \leq n$. Der k-te Hauptminor von A ist $\det(A_k)$

Bemerkung 33. $\dim_{\mathbb{R}} < \infty$, $s : V \times V \to \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform. Wann ist s positiv? Es ist notwendig, aber nicht hinreichend, dass $\det(A) > 0$ für eine darstellende Matrix A.

Proposition 12. *Hauptminorenkriterium von Jacobi-Sylvester Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $s : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform und A eine darstellende Matrix. Dann ist s positiv definit* $\Leftrightarrow \det(A_K) > 0,\ k = 1, \cdots, n\ n = \dim V$

Beweis 20. $\Rightarrow$ *Ist $s > 0$, so ist $s|_W > 0$ für alle Untervektorräume $S \subset V$. Sei $B = (v_1, \cdots, v_n)$ eine Basis mit $A = M_B(s)$. Sei $V_k := \operatorname{span}(v_1, \cdots, v_k)$ für $1 \leq k \leq n$. Dann haben wir:*

$$M_{(v_1, \cdots, v_k)}(s|_{V_k}) = (s(v_i, v_j))_{1 \leq i,j \leq k} = (A_K)$$

Weil $s|_{V_k} > 0$, folgt: $\det(A_k) > 0$.
$\Leftarrow$ *Durch eine Induktion nach n:*
IA: $n = 1$
IS: Wir nehmen das Resultat an für einen Vektorraum der Dimension $n - 1$. Seien $B = (v_1, \cdots, v_n)$ eine Basis von V und $A = (a_{ij})_{i \leq i,j \leq n}$ $A = M_B(s)$. Wir haben

- *aus* $\det(A) > 0$ *folgt: s ist nicht ausgeartet*
- *aus* $\det(A_1) > 0$ *folgt $a_{11} > 0$*

Wir haben $V = \operatorname{span}(v_1) \oplus V_1^\perp$. Es genügt zu zeigen, dass $s|_{v_1^\perp}$ positiv definit ist. Eine Basis von $v_1^\perp$ sieht so aus: Sei $c_i := \frac{a_{1i}}{a_{11}}$ und $\tilde{v}_i := v_i - c_i v_1$ für $i = 2, \cdots, n$.

$$s(v_1, \tilde{v}_1) = s(v_1, v_i) - c_i s(v_1, v_1) = a_{1i} - c_i a_{11} = 0$$

$$(\tilde{v}_2, \cdots, \tilde{v}_n) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -c_2 & 1 & & \\ -c_3 & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ -c_n & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\tilde{a}_{ij})_{2 \leq i,j \leq n}\ \tilde{a}_{ij} = s(\tilde{v}_i, \tilde{v}_j) = a_{ij} - c_i a_{i1} + c_i c_j a_{11} = a_{ij} - c_i a_{1j}$$

$$\textit{weil } c_i c_j a_{11} = \frac{a_{1i}}{a_{11}} a_{1j} = c_j a_{i1}$$

Wir haben für $s \leq k \leq n$:

$$\begin{pmatrix} -c_2 & 1 & & \\ -c_3 & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ -c_k & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{k1} & & & a_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} - c_2 a_{12} & \cdots & a_{2k} - c_2 a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{2k} - c_k a_{12} & \cdots & a_{kk} - c_k a_{1k} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{k2} & \cdots & \tilde{a}_{kk} \end{pmatrix}$$

$$\implies \det(A_k) = a_{11} \det(\tilde{a}_{ij})_{2 \leq i,j \leq k}$$

Aus $\det(A_k) > 0$ *und* $a_{11} > 0$ *folgt:*

$$\det(\tilde{a}_{ij})_{2\leq i,j\leq k} > 0, \text{ für } k = 2, \cdots, n$$

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt $s|_{v_1^\perp} > 0$

3 Multilineare Algebra

3.1 Dualvekttorräume

Definition 25. Dualvektorraum / Linearformen Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualvektorraum ist $V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$. Elemente vo V^* heissen Linearformen. V^* ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, mit Addition von Abbildungen und Multiplikation durch Skalare.

Eigenschaften 12. Sei $B = (v_i)_{i\in I}$ eine Basis von V.

- Koeffizient von v_i
$$v_i^* : v = \sum_{j\in I} a_j v_j \mapsto a_i$$
- Summe von Koeffizienten
$$\sum v_i^* : v = \sum_{j\in I} a_j v_j \mapsto \sum a_i$$
wohldefiniert, weil nur endlich viele a_j sind $\neq 0$
- Operationen auf Funktionsräumen, z.B. $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$
- Standardkoordinaten: $n \in \mathbb{N}_{>0}$, $V = \mathbb{K}^n$, Standardbasis $e_1, \cdots, e_n$
$$e_i^* : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_i$$

Bemerkung 34. Ist $B = (v_1, \cdots, v_n)$ eine Basis von V, so ist $B^* = (v_1^*, \cdots, v_n^*)$ eine Basis von V^*. Denn zu $f : V \to \mathbb{K}$ haben wir $c_i := f(v_i)$, dann

$$f \text{ linear} \implies f(\sum_{i=1}^n a_i v_i) = \sum_{i=1}^n c_i a_i$$

Das zeigt, dass V^* ist von $v_1^*, \cdots, v_n^*$ aufgespannt. Lineare Unabhängigkeit von $v_1^*, \cdots, v_n^*$ ist klar. Deshalb haben wir einen Isomorphismus $V \to V^*$, gegeben durch $v_i \mapsto v_i^*\ \forall i$. Falls $\dim V = \infty$ mit Basis $(v_i)_{i\in I}$, dann ist V^* nicht von den $v_i^*, i \in I$ aufgespannt, z.B.

$$\sum_{i\in I} \notin \mathrm{span}(v_i^*)_{i\in I}$$

$\phi : V \to \mathbb{K}$ mit $\phi(v_i) \neq 0$ nur für endlich viele $i \in I$

Beispiel 22. $V = \mathbb{K}$ mit Standardbasis $(e_1, \cdots, e_n)$. Dann hat V^* die Standardbasis $(e_1^*, \cdots, e_n^*)$ und wir haben den Isomorphismus

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n &\to (\mathbb{K})^* \\ e_i &\mapsto e_i^*\ \forall i \end{aligned}$$

Bemerkung 35. Es ist nicht überraschend, dass der Isomorphismus $V \to V^*$ assoziert zu einer Basis $B = (v_1, \cdots, v_n)$ abhängig von der Basis ist.

Bemerkung 36. Sei $V \subset \mathbb{K}^n$ ein Untervektorraum. V kann durch eine Basis gegeben werden, oder durch Gleichungen.

$$V = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \middle| x - y + z = 0\right\}$$

ist eine Linearform auf $\mathbb{K}^n$

Definition 26. orthogonaler Raum Sei W ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $V \subset W$ ein Untervektorraum. Der Untervektorraum

$$V^0 = \{\phi \in W^* : \phi(v) = 0 \ \forall v \in V\} \subset W^*$$

heisst der zu V orthogonale Raum. Falls $\dim V < \infty$, dann haben wir $\dim V^0 = \dim W - \dim V$. Basis von

$$W^* = \overbrace{\underbrace{W_1, \cdots, W_d}_{\text{von } V}, \cdots, W_n}^{W}$$

Dann:

$$V^0 = \operatorname{span}\left(w_{d+1}^*, \cdots, w_n^*\right)$$

Definition 27. duale Abbildung Sei $V \to W$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Dann gibt es eine lineare Abbildung $F^* : W^* \to V^*$, die duale Abbildung, gegeben durch Komposition mit F

$$\psi : V \to K \mapsto F^*(\psi) := \psi \circ F$$

Dann

$$V^0 = \ker\left(W^* \to V^*\right)$$

Aus der Dimensionsformel bekommt man nochmals

$$\dim V^0 = \dim W^* - \dim V^*$$

Eigenschaften 13. duale Abbildung

- falls $W = V$, gilt $(id_V)^* = \mathrm{Id}_{V^*}$
- Ist auch $G : U \to V$ gegeben, so haben wir

$$G^* F^* \psi = (F \circ G)^* \psi$$

Das nennt man Funktorialität.

Bemerkung 37. Man kann zeigen, dass zu $U \subset V$ bekommt man eine surjektive duale Abbildung $V^* \to U^*$

$$(\psi : V \to \mathbb{K}) \mapsto \psi|_U$$

Proposition 13. *Seien V und W endlich dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Basen $A = (v_1, \cdots, v_n)$ und $B = (w_1, \cdots, w_m)$. Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung mit darstellender Matrix M. Dann ist $F^* : W^* \to V^*$ bezüglich der dualen Basen $A^* = (v_1^*, \cdots, v_n^*), B^* = (w_1^*, \cdots, w_m^*)$ durch die Matrix M^t dargestellt. Wir schreiben $M = (a_{ij})$. Das bedeutet:*

$$F(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

Es folgt

$$F^*(w_i^*)(v_j) = \text{ i-te Komonent von } F(v_j) = a_{ij}$$

Das ist zu sagen, die darstellende Matrix von F^* ist die Matrix (a_{ji})

$$F^*(w_i^*) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} v_j^*$$

Eigenschaften 14. $F : V \to W$

- $$\underbrace{(\operatorname{Im} F)^0}_{\text{alle } W \xrightarrow{\phi} \mathbb{K} \text{ mit } \phi|_{\operatorname{Im} F}=0} = \underbrace{\operatorname{Ker} F^*}_{\text{alle } W \xrightarrow{\phi} \mathbb{K} \text{ mit } \phi \circ F=0}$$

  Da

  $$\phi|_{\operatorname{Im} F} = 0 \;\Leftrightarrow\; \phi \circ F = 0$$

  haben wir die Gleichung.

- $$(\operatorname{Ker})^0 = \operatorname{Im}(F^*)$$

  $\supset$ offensichtlich
  $\subset$ folgt aus der Surjektivität von $W^* \to (\operatorname{Im} F)^*$

Wir betrachten $\phi : V \to \mathbb{K}$ mit $\phi|_{\operatorname{Ker} F} = 0$

$$w \to W, w = F(v) \text{ für ein } v \in V$$

$$w \rightsquigarrow \bar{\phi}(w) = \phi(v)$$

Ist

$$w = F(v')$$

dann ist

$$v' - v \in \operatorname{Ker} F$$

und

$$\phi(v') - \phi(v) = \phi(v' - v) = 0$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr] & & K \\ & \operatorname{Im} F \arrow[ur, "\bar{\phi}"] & \end{tikzcd}$$

$$\exists \underbrace{\psi}_{\in W^*} \mapsto \underbrace{\bar{\phi}}_{\in (\operatorname{Im} F)^*}$$

d.h.

$$\psi : W \to \mathbb{K}$$

mit

$$\psi|_{\operatorname{Im} F} = \bar{\phi}$$

Das zeigt:

$$F^*(\psi) = \phi$$

Bemerkung 38. An dem Diagramm haben wir eine Bijektion zwischen $\phi \in V^*$ mit $\phi|_{\operatorname{Ker} F} = 0$ und $\bar{\phi} \in (\operatorname{Im} F)^*$

$$\xRightarrow{\dim W < \infty} \dim(\operatorname{Im} F) = \dim(\operatorname{Im} F)^* = \dim(\operatorname{Ker} F)^0 = \dim \operatorname{Im}(F^*)$$

$$\xRightarrow{\dim V, \dim W < \infty} \operatorname{rang}(F) = \operatorname{rang}(F^*)$$

Keine Überraschung! $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^t)$

Beispiel 23.

$$\mathbb{R}[x]^{\leq 2} \xrightarrow{(ev_{-1}, ev_1)} \mathbb{R}$$

surjektiv

$$\implies (\operatorname{Im} F)^0 = 0$$

Interpretation:

$$\alpha f(-1) + \beta f(1) = 0 \;\forall f \in \mathbb{R}[x]^{\leq 2} \;\Leftrightarrow\; \alpha = \beta = 0$$

$$\operatorname{Ker}((\alpha, \beta) \mapsto (f \mapsto \alpha f(-1) + \beta f(1)))$$

$$\operatorname{Ker}(ev_{-1}, ev_1) = \operatorname{span}(x^2 - 1)$$

$$\implies \operatorname{Ker}(ev_{-1}, ev_1)^0 = \left\{\mathbb{R}[x]^{\leq 2} \xrightarrow{\phi} \mathbb{R},\ \phi(x^2-1) = 0\right\} = \operatorname{span}\left(\frac{1}{2}ev_0'' + ev_0, ev_0'\right)$$

und

$$= \operatorname{Im}\,(ev_{-1}, ev_1)^* = \operatorname{span}(ev_{-1}, ev_1)$$

weil

$$\begin{aligned} ev_{-1} &= \frac{1}{2}ev_0'' - ev_0' + ev_0 \\ ev_1 &= \frac{1}{2}ev_0'' + ev_0' + ev_0 \end{aligned}$$

3.2 Der Bidualraum $V \rightsquigarrow V^* \rightsquigarrow V^{**}$

Definition 28. kanonische lineare Abbildung $\dim V < \infty \implies$ ein Isomorphismus $V \to V^*$ wird durch die Auswahl einer Basis bestimmt. Dagegen haben wir eine Abbildung $V \to V^{**}$ unabhängig von der Basis, so:

$$v \mapsto \begin{pmatrix} V^* \xrightarrow{ev_v} \mathbb{K} \\ (\phi : V \to \mathbb{K}) \mapsto \phi(v) \end{pmatrix}$$

Dies heisst kanonische lineare Abbildung und ist ein Isomorphismus falls $\dim V < \infty$

Bemerkung 39. Im Allgemeinen ist die kanonische Abbildung $V \to V^{**}$ injektiv:

$$\begin{aligned} [\text{Sei } v \in V \text{ mit } v \neq 0] &\overset{\operatorname{span}(v)\subset V}{\rightsquigarrow} V^* \twoheadrightarrow \operatorname{span}(V)^* \\ &\qquad \phi \mapsto \psi : v \mapsto 1 \ (\text{d.h. } \phi(v) = 1) \\ &\implies ev_1(\phi) \neq 0 \end{aligned}$$

$$\dim V < \infty \implies \dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$$

Dann:

$$\implies V \to V^{**} \text{ injektiv } \Leftrightarrow \text{bijektiv}$$

Oft schreibt man $V = V^{**}$ für V ein Vektorraum mit $\dim V < \infty$. Das bedeutet immer, dass V und V^{**} identifiziert wird, durch den kanonischen Isomorphismus.

Beispiel 24. $V = \mathbb{K}^n$ mit Standardbasis $e_1, \cdots, e_n$.
$V^* = (\mathbb{K}^n)^*$ hat die duale Basis $e_1^*, \cdots, e_n^*$
$V \to V^{**}$ mit einer Abbildung

$$e_i \mapsto \begin{pmatrix} \phi : (\mathbb{K}^n)^* \to \mathbb{K} \mapsto \phi(e_i) \\ e_j^* \mapsto \delta_{ij} \end{pmatrix} = e_i^{**}$$

Bemerkung 40. Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung von endlichdimensionalen Vektorräumen. Dann ist $F^*{*} = F$, im folgenden Sinn:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\sim"] & W \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\sim"] & W^* \arrow[r, "F^*"] \arrow[dl, dashed] & V^* \\ V^{**} \arrow[r, "F^{**}"] & W^{**} \end{tikzcd}$$

Wobei $\sim$ einen kanonischen Isomorphismus darstellt.
Daraus folgt, dass

$$V \xrightarrow{F} W \rightsquigarrow W^* \xrightarrow{F^*} V^* \rightsquigarrow V^{**} \xrightarrow{F^{**}} W^{**}$$

kommutativ ist.

Bemerkung 41.

$$\begin{tikzcd}
v \in V \arrow[rrr, bend left, "\mapsto"] & V \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[d] & F(v) \in V \arrow[d, mapsto] & \\
& V^{**} \arrow[r] & W^{**} & \psi \arrow[r, mapsto] & \psi(F(v)) \arrow[d, equal] \\
\phi \arrow[r, mapsto] & \phi(v) \in V^{**} \arrow[rrr, bend right, "\mapsto"'] & & \psi \arrow[r, mapsto] & F^*(\psi)(v)
\end{tikzcd}$$

Falls $\dim W < \infty$ und $V \subset W$, dann haben wir $V^{00} = V$ im folgenden Sinn

$$\overbrace{V^0}^{\dim=\dim W-\dim V} \subset W^*$$

$$\overbrace{V^{00}}^{\dim=\dim W-(\dim W-\dim V)\dim V} \subset W^{**} \xleftarrow{\sim} W \supset V$$

Das Bild von V unter dem kanonischen Isomorphismus ist V^{00}.
Sei $v \in V$ $ev_1 \in V^{00}$

$$\phi \in W^*,\ \phi(v)0\ \forall \phi \in V \implies \phi(v) = 0$$

Beispiel 25.

$$W = \mathbb{R}^3$$

$$V = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right) \implies V^0 = \operatorname{span}(e_1^* - e_2^* - e_3^*) = \operatorname{span}(e_1 + e_3, -e_2 + e_3)$$
$$V^{00} = \operatorname{span}(e_1^{**} + e_2^{**}, e_1^{**} + e_3^{**})$$

3.3 Zusammenhang zwischen Dualraum und bilinearen Abbildungen

- schon gesehen, z.B. bei der Definition "nicht ausgeartet"
- jetzt explizit

Definition 29. bilineare Abbildung Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, v und W Vektorräume über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $b : V \times W \to \mathbb{K}$ heisst bilinear falls

$$w \mapsto b(v, w) \text{ ist linear } \forall v \in V$$

und

$$v \mapsto b(v, w) \text{ ist linear } \forall w \in W$$
$$[(w \mapsto b(v, w)) \in W^*]$$

Bemerkung 42. Im Fall $W = V$ ist dies genau zu sagen, dass b eine Bilinearform ist. Also haben wir Abbildungen

$$b' : V \to W^*$$

und

$$b'' : W \to V^*$$

Aus der Definition folgt, dass b' und b'' sind linear.

Definition 30. nicht ausgeartet Eine bilineare Abbildung $b : V \times W \to \mathbb{K}$ ist nicht ausgeartet, falls $b' : V \to W^*$ und $b'' : W \to V^*$ injektiv sind.

Bemerkung 43. Falls V und W endlich dimensional sind, ist es nur möglich, eine nicht ausgeartete bilineare Abbildung zu haben, wenn $\dim V = \dim W$. Falls $\dim V = \dim W$: "injektiv" oben ist äquivalent zu "bijektiv".

Beispiel 26.
- V beliebig, dann ist
$$\begin{aligned} V \times V^* &\to \mathbb{K} \\ (v, \phi) &\mapsto \phi(v) \end{aligned}$$
stets nicht ausgeartet.
$$\begin{aligned} b' : V &\to V^{**} \\ v &\mapsto ev_v \end{aligned}$$
ist die kanonische Abbildung, ist injektiv
$$\begin{aligned} b'' : V^* &\to V^* \\ \phi &\mapsto \phi \end{aligned}$$
ist id_{V^*} ist ein Isomorpismus
- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\langle , \rangle$ Skalarprodukt auf V.
$$b(v, w) := \langle v, w \rangle$$
b' und b'' sind gleich, definiert als Ψ
$$\rightsquigarrow \Psi : V \to V^*$$
injektiv

Bemerkung 44. Das zeigt, dass jedes Skalarprodukt nicht ausgeartet ist. Und: falls $\dim_{\mathbb{R}} V < \infty$ ist Ψ ein Isomorphismus. Ψ heisst kanonisch. (kanonische Abbildung bzw. kanonischer Isomorphismus)

Eigenschaften 15. V, $\dim V = n$, mit Skalarprodukt, kanonischer Isomorphismus Ψ

- Für $U \subset V$ Untervektorraum gilt
$$\Psi(U^\perp) = U^0$$
- Für $B = (v_1, \cdots, v_n)$ eine orthonormal Basis haben wir
$$\Psi(v_i) = V_i^*$$
für $i = 1, \cdots, n$, wobei $(v_1^*, \cdots, v_n^*)$ die duale Basis ist.
zeigen:
$$\underbrace{\Psi(U^\perp)}_{\dim = \dim V - \dim U} \subset \underbrace{U^0}_{\dim = \dim v - \dim U} \quad \text{klar}$$
$$\left\langle v_i, \sum_{j=1}^n a_j v_j \right\rangle = a_i$$
$$v_i^* \left(\sum_{j=1}^n a_j v_j \right) = a_i$$

Beispiel 27. Graphiker gesucht ;)

Bemerkung 45. Wir haben zwei kanonische Abbildungen:
$$V \to V^{**} \text{ für beliebiges } V \ / \ \mathbb{K}$$
$$V \xrightarrow{\Psi} V^* \text{ für } V/\mathbb{R} \text{ mit Skalarprodukt}$$

Definition 31. adjugierte Abbildung V, W euklidische Vektorräume

$$F : V \to W \text{ lineare Abbildung}$$

adjugiert: $F^{ad} : W \to V$ ist adjugiert zu F falls gilt

$$\langle F(v), w\rangle = \left\langle v, F^{ad}(w)\right\rangle \ \forall v \in V, w \in W$$

Bemerkung 46.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "\Phi"] & W \arrow[l, "F^{ad}"'] \arrow[d, "\Psi"] \\ V^* & W^* \arrow[l, "F^*"'] \end{tikzcd}$$

$$F^*(\Psi(w))(v) = \Psi(w)\left(F(v)\right) = \Phi\left(F^{ad}(w)\right)(v)$$
$$\implies F^*\left(\Phi(w)\right) = \Phi\left(F^{ad}(w)\right) \text{ in } V^*$$

Daraus folgt, dass das Diagramm kommutiert

Bemerkung 47. Seien $v_1, \cdots, v_n$ orthonormale Basen von V, $w_1, \cdots, w_m$ für W $\rightsquigarrow$ duale Basen $v_1^*, \cdots, v_n^*$ und $w_1^*, \cdots, w_m^*$ Bezüglich orthonormaler Basen ist F^{ad} durch die transponierte Matrix gegeben: Sei

$$F \ \leftrightarrow \ A \in M(m \times n, \mathbb{R})$$

dann, aus Prop 49 (13?):

$$F^* \ \leftrightarrow \ A^t \in M(m \times n, \mathbb{R}) \implies F^{ad} \ \leftrightarrow A^t \text{ weil} \Phi(v_i) = v_i^*, \ \Psi(w_i) = w_i^* \ \forall i$$

Beispiel 28. $V = \mathbb{R}^2$ mit Skalarprodukt, $W = \mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ mit

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$F : V \to W$$
$$(\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta x + \alpha x^2$$

Basis von W $1, x, x^2$

$$V^* = (\mathbb{R}^2)^* \text{ mit Basis } e_1^*, e_2^*$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "\Phi"] & W \arrow[l, "F^{ad}"'] \arrow[d, "\Psi"] \\ V^* & W^* \arrow[l, "F^*"'] \end{tikzcd}$$

$$V \xrightarrow{\Psi} V^*$$
$$e_1 \mapsto e_1^*$$
$$e_2 \mapsto e_2^*$$

W^* hat die duale Basis $1^*, x^*, {x^2}^*$.
Wir berechnen Ψ explizit:

$$\Psi(1) = \left(f \mapsto \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}\,x\right)$$

$$\begin{aligned} W &\xrightarrow{\Phi} W^* \\ 1 &\mapsto 2(1^*) + \frac{2}{3}\left(x^{2^*}\right) \\ x &\mapsto \cdots \\ x^2 &\mapsto \cdots \end{aligned}$$

Dann:

$$F^*\left(\psi(1)\right) = \left((\alpha,\beta) \int_{-1}^{1} \alpha + \beta x + \alpha x^2 \,\mathrm{d}\,x = 2\alpha + \frac{2}{3}\alpha = \frac{8}{3}\alpha\right)$$

d.h.

$$\frac{8}{3}e_1^* \overset{\Phi^{-1}}{\mapsto} \left(\frac{8}{3}, 0\right)$$

Ähnlich:

$$F^*\left(\Psi(x)\right) = \left((\alpha,\beta) \mapsto \int_{-1}^{1} \alpha x + \beta x^2 + \alpha x^3 \,\mathrm{d}\,x = \frac{2}{3}\beta\right)$$

und

$$F^*\left(\Psi(x^2)\right) = \left((\alpha,\beta) \mapsto \int_{-1}^{1} \alpha x^2 + \beta x^3 + \alpha x^4 \,\mathrm{d}\,x = \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{5}\alpha = \frac{16}{15}\alpha\right)$$

d.h.

$$\begin{aligned} F^{ad}(1) &= \left(\frac{8}{3}, 0\right) \\ F^{ad}(x) &= \left(0, \frac{2}{3}\right) \\ F^{ad}(x^2) &= \left(\frac{16}{15}, 0\right) \end{aligned}$$

$$F^{ad}\left(a + bx + cx^2\right) = \left(\frac{8}{3}a + \frac{16}{5}c, \frac{2}{3}b\right)$$

Check:

$$\int_{-1}^{1} \left(\alpha + \beta x + \alpha x^2\right)\left(a + bx + cx^2\right) \mathrm{d}\,x \overset{?}{=} \left\langle (\alpha,\beta), \left(\frac{8}{3}a + \frac{16}{15}c, \frac{2}{3}b\right)\right\rangle$$

Skalarprodukt:

$$\alpha\left(\frac{8}{3}a + \frac{16}{15}c\right) + \beta\left(\frac{2}{3}b\right)$$

Integral:

$$\int_{-1}^{1} a\alpha + (b\alpha + c\beta)x + (c\alpha + b\beta + a\alpha)x^2 + (c\beta + \alpha b)\,x^3 + c\alpha x^4 \,\mathrm{d}\,x =$$

$$= 2a\alpha + \frac{2}{3}\left(a\alpha + b\beta + c\alpha\right) + \frac{2}{5}c\alpha$$

stimmt.

Bemerkung 48. Wir könnten F^{ad} auch durch die Wahl einer orthonormalen Basis von W berechnen.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{5}{2}}\sqrt{\frac{-1+3x^2}{2}}$$

Dann:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} & \end{pmatrix}$$

und so

$$A^t = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{pmatrix} \to F^{ad}$$

Bemerkung 49. Jetzt betrachen wir den Fall $W = V$, also $b : V \times V \to \mathbb{K}$ eine Bilinearform. Da b' und b'' genau durch das "Umtauschen" von V und W unterschieden

$$b' : V \to V^*,\ v \mapsto (w \mapsto b(v,w))$$
$$b'' : V \to V^*,\ w \mapsto (v \mapsto b(v,w))$$

haben wir Interpretation von Bedingungen über b:

- b symmetrisch $\Leftrightarrow b'' = b'$
- b schiefsymmetrisch $\Leftrightarrow b'' = -b'$

Bemerkung 50. Sei jetzt $\dim_{\mathbb{K}} < \infty$. Dann haben wir $b'' = (b')^*$ in folgendem Sinne: Dual zu $b' : V \to V^*$ ist

$$\begin{tikzcd} V^{**} \arrow[r, "(b')^*"] & V^* & ev_V \arrow[r, mapsto] & ev_V \circ b' \\ V \arrow[u, "\sim"] & & v \arrow[u, mapsto] & \end{tikzcd}$$

(ev_V = Auswertungsabbildung an $v \in V$)
Wobei:

$$ev_V \circ b'(v') = ev_V\,(w \mapsto b(v',w)) = b(v',v)$$

Da

$$b'' : V \to V^*$$

durch

$$v \mapsto (v' \mapsto b(v',v))$$

definiert ist, haben wir Gleichheit.

Eigenschaften 16.

$$b \text{ symmetrisch} \iff b'' = b' \iff (b')^* = b'$$

$$b \text{ schiefsymmetrisch} \iff b'' = -b' \iff (b')^* = -b'$$

Bemerkung 51. Falls $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$, s symmetrisch und nicht ausgeartet führt zu

$$b'(= b'')\ V \xrightarrow{\sim} V^*$$

Bemerkung 52. Spezialfall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, V euklidisch, dann ist des gerade das, was Ψ hiess:
Untevektorraum $U \subset V, U^\perp \subset V$ sowie $U^0 \subset V^*$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\sim"] & V^* \\ U^\perp \arrow[u, dash, "\cup"'] & U^0 \arrow[u, dash, "\cup"'] \end{tikzcd}$$

Bemerkung 53. Was passiert, falls $K = \mathbb{C}$? Dann sind wir an sesquilinearen Abbildungen interessiert.

$$s : V \times W \to \mathbb{C}$$

Dann gibt es immer noch eine Abbildung

$$s'' : W \to V^*\ w \mapsto (v \mapsto s(v,w))$$

aber diese ist nicht mehr linear.

Beispiel 29. $V = \mathbb{C}[x], s : V \times V \to \mathbb{C}$

$$s(f,g) = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}\,x$$

Dann z.B.

$$1 \xmapsto{s''} \left(f \mapsto \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x\right)$$

also: Durchschnittswert auf $[0,1]$
aber:

$$i \xmapsto{s''} \left(f \mapsto -i\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x\right)$$

also: $(-i)\cdot$ Durchschnittswert auf $[0,1]$
Damit ist s'' semilinear.

Definition 32. semilinear Eine Abbildung $t : V \to W$ zwischen $\mathbb{C}$-Vektorräumen heisst semilinear, falls:

- $t(v+v') = t(v) + t(v')\ \forall v, v' \in V$
- $t(\lambda v) = \bar{\lambda}(v)\ \forall v \in V,\ \lambda \in \mathbb{C}$

Definition 33. kanonischer Semi-Isomorphismus Falls V ein unitärer Vektorraum ist, mit Skalarprodukt

$$s : V \times V \to \mathbb{C}$$

so erhalten wir (was oben s'' heisst, nennen wir hier Ψ)

$$\Psi : V \to V^* \text{ kanonischer } \underbrace{\text{Semi}}_{\text{semilinear}}\ \underbrace{\text{-Isomorphismus}}_{\text{bijektiv}}$$

Bemerkung 54. Wie vorher haben wir zu einem Endomorphismus

$$F : V \to V$$

den adjugierten Endomorphismus

$$F^{ad} : V \to V$$

gegeben durch

$$F^{ad} := \Psi^{-1} \circ F^* \circ \Psi$$

Eigenschaften 17. adjugierter Endomorphismus

- $$s\left(F(v), w\right) = s\left(v, F^{ad}(w)\right)\ \forall v, w \in V$$
- $$\operatorname{Im} F^{ad} = (\operatorname{Ker} F)^{\perp}$$
- $$\operatorname{Ker} F^{ad} =< (\operatorname{Im} F)^{\perp}$$
- Ist B eine Orthonormalbasis von V und A die darstellende Matrix von F bezüglich B, dann ist $\bar{A}^t$ die darstellende Matrix von F^{ad}

Satz 6.

$$F \textit{ ist unitär diagonalisierbar} \iff F \circ F^{ad} = F^{ad} \circ F$$

Definition 34. F normal F heisst normal, falls

$$F \circ F^{ad} = F^{ad} \circ F$$

3.4 Anwendung des Dualraums

das duale Polytop $\mathbb{K} = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^n$

Definition 35. konvexe Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft $\forall s, t \in S$: s und t sind wegzusammenhängend.

Definition 36. konvexe Hülle konvexe Hülle von $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$\cap_{S \subset \mathbb{R}^n, S \text{ konvex}, \ \Gamma \subset S} S$$

"kleinste konvexe Menge, in der Γ enthalten ist"

Definition 37. konvexes Polytop die konvexe Hülle von einer endlichen Menge in $\mathbb{R}^n$

Definition 38. innerer Punkt Das Polytop P hat $O \in \mathbb{R}$ als inneren Punkt falls:

- $O \in \mathbb{R}$
- $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(0) \subset P$

Definition 39. Ist ein Polytop mit $O \in \mathbb{R}$ als inneren Punkt, so definieren wir

$$P^* = \left\{ \phi \in (\mathbb{R}^n)^* : \phi(v) \leq 1 \ \forall v \in P \right\}$$

Definition 40. duales Polytop P^* ist ein konvexes Polytop $O \in (\mathbb{R}^n)^*$ als innerem Punkt. P^* heisst duales Polytop.

Bemerkung 55.

$$P^* * = P$$

Bemerkung 56. Konstruktion des dualen Polytops: l Hyperebene, so dass P auf einer Seite von l liegt (inklusive l selbst) $\rightsquigarrow$ Gleichung von l schreiben als

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 1$$

$$P \subset \{(x_1, \cdots, x_n) \,|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \leq 1\}$$

$\rightsquigarrow$

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in P^*$$

(Skizze (Freiwilliger gesucht }:-))

$$\text{Facetten von } P \ \rightsquigarrow \ \text{Ecken in } P^*$$

(P^*) konvexe Hülle

Beispiel 30.

- Der Tetraeder ist selbstdual.
- Der Würfel dual zum Oktaeder.
- Der Dodekaeder ist dual zum Ikosaeder.

3.5 Das Tensorprodukt

$$V \ \rightsquigarrow \ V^* \text{ Linearformen}$$

Wir möchten eine Redeweise haben, genug flexibel für solche Situationen. Eine nützliche Konstruktion dafür ist das Tensorprodukt.

Definition 41. Tensorprodukt Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V und W Vektorräume über $\mathbb{K}$. Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum heisst Tensorprodukt von V und W, geschrieben $V \otimes W$, falls, eine bilineare Abbildung

$$\eta : V \times W \to V \otimes W$$

gegeben ist, die folgende universelle Eigenschaften erfüllt:

Zu jedem $\mathbb{K}$-Vektorraum U mit bilinearer Abbildung

$$\xi : V \times W \to U$$

gibt es eine eindeutige lineare Abbildung

$$\xi' : V \otimes W \to U$$

so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[d, "\eta"] \arrow[dr, "\xi"] & \\ V \otimes W \arrow[r, "\xi'"] & U \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Bemerkung 57. Es ist noch unklar, wie die Elemente von $V \otimes W$ aussehen, oder ob $V \otimes W$ gar existiert. Auch unklar: warum.

Korollar 12. *Aus der Definition folgt: $V \otimes W$, falls es existiert, ist eindeutig bis auf Isomorphismus.*

Bemerkung 58. Seien

$$\eta : V \times W \to V \otimes W$$

und

$$\tilde{\eta} : V \times W \to \widetilde{V \otimes W}$$

gegeben, beide erfüllen die universellen Eigenschaften. Wir wenden die universelle Eigenschaft an, mit $U := \widetilde{V \otimes W}$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[d, "\eta"] \arrow[dr, "\tilde{\eta}"] & \\ V \otimes W \arrow[r, "\zeta"] & \widetilde{V \otimes W} \end{tikzcd}$$

Wir wenden die universelle Eigenschaft an mit $U := V \otimes W$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[d, "\tilde{\eta}"] \arrow[dr, "\eta"] & \\ \widetilde{V \otimes W} \arrow[r, "\tilde{\zeta}"] & V \otimes W \end{tikzcd}$$

Wir wenden die universelle Eigenschaft an mit $U := V \otimes W$

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[d, "\eta"] \arrow[dr, "\eta"] & \\ V \otimes W \arrow[r, "\tilde{\zeta} \circ \zeta"] & V \otimes W \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \times W \arrow[d, "\eta"] \arrow[dr, "\eta"] & \\ V \otimes W \arrow[r, "1_{V \otimes W}"] & V \otimes W \end{tikzcd}$$

Beide Diagramme kommutieren

$$\tilde{\zeta} \circ \zeta \circ \eta = \tilde{\zeta} \circ \tilde{\eta} = \eta$$

$$1_{V \otimes W} \circ \eta = \eta$$

Es folgt aus der universellen Eigenschaft, dass

$$\tilde{\zeta} \circ \zeta = 1_{V \otimes W}$$

Wir wenden die universelle Eigenschaft an, mit $U := \widetilde{V \otimes W}$

$$\begin{tikzcd} V \tilde{\times} W \arrow[d, "\tilde{\eta}"] \arrow[dr, "\tilde{\eta}"] & \\ \widetilde{V \otimes W} \arrow[r, "\tilde{\zeta} \circ \zeta"] & V \otimes W \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \times W \arrow[d, "\tilde{\eta}"] \arrow[dr, "\tilde{\eta}"] & \\ \widetilde{V \otimes W} \arrow[r, "1_{\widetilde{V \otimes W}}"] & \widetilde{V \otimes W} \end{tikzcd}$$

Beide Diagramme kommutieren

$$\zeta \circ \tilde{\zeta} \circ \tilde{\eta} = \zeta \circ \eta = \tilde{\eta}$$

$$1_{\widetilde{V \otimes W}} \circ \tilde{\eta} = \tilde{\eta}$$

Es folgt aus der universellen Eigenschaft, dass

$$\zeta \circ \tilde{\zeta} = 1_{\widetilde{V \otimes W}}$$

Ergebnis:

$$V \otimes W \xrightarrow{\zeta} \widetilde{V \otimes W}$$

ist Isomorphismus, inverse zu

$$\tilde{\zeta} : \widetilde{V \otimes W} \to V \otimes W$$

Fazit 11. universelle Eigenschaft $\rightsquigarrow$ Eindeutigkeit bis auf Isomorphismus

Not 4. Tensorprodukt $V \otimes W$ oder $V \otimes_{\mathbb{K}} W$

3.5.1 Existenz vom Tensorprodukt

Bemerkung 59. Es gibt zwei Methoden

- Durch Auswahl von Basen
- Beschreibung als Quotientenvektorraum

Heute: Methode 1

- braucht die Existenz von Basen
- klar fall $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$

oder im Allgemeinen für die, die das Auswahlaxiom gesehen haben.

Proposition 14. *Sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von V und $(w_j)_{j\in J}$ eine Basis von W. Dann existiert das Tensorprodukt $V \otimes W$, mit Basis $(v_i \otimes w_j)_{(i,j)\in I\times J}$ und*

$$\eta : V \times W \to V \otimes W$$

$$\left(\sum_{i\in I} a_i v_i \sum_{j\in J} b_j w_j \right) \mapsto \sum_{(i,i)\in I\times J} a_i b_j \left(v_i \otimes w_j\right)$$

mit $a_i \neq 0$ für endlich viele i und $b_j \neq 0$ für endlich viele j
Das bedeutet, dass die Elemente von $V \otimes W$

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} c_{ij} \left(v_i \otimes w_j\right) \;\; c_{ij} \in \mathbb{K}$$

nur endlich viele $c_{ij} \neq 0$.

Beweis 21. *Zu verifizieren:*

- *dass η bilinear ist*
- *und erfüllt die universelle Eigenschaft*

η ist bilinear:

$$\begin{aligned}
\eta\left(\sum_{i\in I} a_i v_i,\ \sum_{j\in J} b_j w_j\right) + \eta\left(\sum_{i\in I} a_i' v_i,\ \sum_{j\in J} b_j w_j\right) &= \\
= \sum_{i\in I} a_i b_j\left(v_i \otimes w_j\right) + \sum_{(i,\ j)\in I\times J} a_i' b_j\left(v_i \otimes w_j\right) &= \\
= \sum_{(i,\ j)\in I\times J} \left(a_i b_j + a_i' b_j\right)\left(v_i \otimes w_j\right) &= \\
= \sum_{(i,\ j)\in I\times J} \left(a_i + a_i'\right) b_j\left(v_i \otimes w_j\right) &= \\
= \eta\left(\sum_{i\in I}(a_i 1 a_i')v_i,\ \sum_{j\in J} b_j w_j\right) & \\
= \eta\left(\sum_{i\in I} a_i v_i + \sum_{i\in I} a_i' v_j,\ \sum_{j\in J} b_j w_j\right) &
\end{aligned}$$

Beispiel 31. $V = \mathbb{K}^2$, $W = \mathbb{K}[t]$
V hat die Standardbasis (e_1, e_2)
W hat die Basis $(1, t, t^2, \cdots)$
$\implies$ $V \otimes W$ hat die Basis $e_1 \otimes 1, e_1 \otimes t, \cdots, w_2 \otimes 1, e_2 \otimes t, \cdots$

$$\begin{aligned}
\eta : \mathbb{K}^2 \times K[t] &\to K^2 \otimes K[t] \\
\big((1,0), t^2\big) &\mapsto e_1 \otimes t^2 \\
\big((0,1), t^3\big) &\mapsto e_2 \otimes t^3 \\
\big((2,3), t^4\big) &\mapsto 2e_1 \otimes t^4 + 3e_2 \otimes t^4
\end{aligned}$$

Typisches Element von $\mathbb{K}^2 \otimes \mathbb{K}[t]$

$$e_1 \otimes t^2 + e_2 \otimes t^3 + 2e_1 \otimes t^4 + 3e_2 \otimes t^4$$

Mit anderer Schreibweise:

$$(t^2, 0) + (0, t^3) + (2t^4, 0) + (0, 3t^4)$$

oder:

$$(t^2 + 2t^4, t^3 + 3t^4)$$

Definition 42. Sei U ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und

$$\xi : V \times W \to U$$

eine bilineare Abbildung. Wir definieren

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[d, "\eta"] \arrow[dr, "\xi"] & \\
V \otimes W \arrow[r, "\xi'"] & U
\end{tikzcd}$$

$$\xi' : V \otimes W \to U$$

durch

$$\xi'(v_i \otimes w_j) := \xi(v_i, w_j)$$

für $i \in I$, $j \in J$, und deshalb:

$$\xi'\left(\sum_{(i,j)\in I\times J} c_{ij} v_i \otimes w_j\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} c_{ij}(v_i, w_j)$$

Das Diagram kommutiert (aus der Bilinearität von ξ)
Die Eindeutigkeit ist durch die identischen Basenvektoren gegeben.

Bemerkung 60.

$$\dim V \otimes W = (\dim V)(\dim W)$$

Not 5. Für $v \in V$, $w \in W$ schreibt man oft $v \otimes w$ für $\eta(v,w)$

Bemerkung 61. Weil

$$(v,w) \mapsto v \otimes w := \eta(v,w)$$

eine bilineare Abbildung ist, haben wir

$$\begin{aligned} v \otimes w + v' \otimes w &= (v \times v') \otimes w \\ v \otimes w + v \otimes w' &= v \otimes (w' \times w) \\ (\lambda v) \otimes w = \lambda(v \otimes w) &= v \otimes (\lambda w)) \end{aligned}$$

Rechenregeln für Tensoren

Not 6. Letztes Mal: für Basiselemente v_i, w_j bezeichnet $v_i \otimes w_j$ ein Basiselement von $V \otimes W$

Bemerkung 62. Die Abbildung lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} V \times W &\xrightarrow{\eta} V \otimes W \\ (v_i, w_j) &\mapsto v_i \otimes w_j \end{aligned}$$

Bemerkung 63. Jetzt für beliebige $v \in V$, $w \in W$ bezeichnet $v \otimes w$ das Element

$$\eta(v,w) \in V \otimes W$$

Weil in der Konstruktion wir η durch

$$\eta(v_i, w_j) := v_i \otimes w_j$$

definiert haben, stimmen die beiden Bedeutungen von $v_i \otimes w_j$ überein.

Beispiel 32. Isomorphismus von Vektorräumen über $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t] &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}[t] \oplus \mathbb{R}[t] \\ e_1 \otimes t^j &\mapsto \left(t^j, 0\right) \\ e_2 \otimes t^j &\mapsto \left(0, t^j\right) \end{aligned}$$

Ganz ähnlich

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t] &\xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[t] \\ 1 \otimes t^j &\mapsto t^j \\ i \otimes t^j &\mapsto it^j \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ für $\gamma \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\gamma \otimes t^j \mapsto \gamma t^j$$

weil:

$$\gamma = \alpha + \beta i \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

haben wir

$$\begin{aligned} \gamma \otimes t' &= (\alpha + \beta i) \otimes t^j \\ &= \alpha \otimes t^j + \beta i \otimes t^j \\ &= \alpha\left(1 \otimes t^j\right) + \beta\left(i \otimes t^j\right) \\ &\mapsto \alpha\left(t^j\right) + \beta(it^j) \\ &= (\alpha + \beta i)\, t^j \\ &= \gamma t^j \end{aligned}$$

Proposition 15. *Sei $\mathbb{K} \to \mathbb{L}$ eine Körpererweiterung und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann hat $K \otimes_{\mathbb{K}} V$ die Struktur von L-Vektorraum, mit*

$$\alpha(\beta \otimes v) = (\alpha\beta) \otimes v \quad \textit{für } \alpha, \beta \in L \textit{ und } v \in V$$

Beweis 22. *Wir müssen verifizieren, dass*

$$(\alpha, \beta \otimes v) \mapsto (\alpha\beta) \otimes v$$

eine Abbildung von $L \times (L \otimes_{\mathbb{K}} V)$ *nach* $L \otimes_{\mathbb{K}} V$ *beschreibt. D.h. für jedes* $\alpha \in L$, $\exists$ *eine Abbildung* $L \otimes V \to L \otimes V$

$$\begin{tikzcd}
L \times V \arrow[r, "(\beta,\alpha) \mapsto (\alpha\beta, v)"] \arrow[d, "\eta"] \arrow[dr, "(\alpha,\beta) \mapsto (\alpha\beta) \otimes v"] & L \times V \arrow[d, "\eta"] \\
L \otimes V \arrow[r, dashed, "\text{Aus der u.E.}"'] & L \otimes V
\end{tikzcd}$$

$$(\alpha, \beta) \mapsto (\alpha\beta) \otimes v$$

ist bilinear:

$$\begin{aligned}
(\beta + \beta', v) \mapsto (\alpha(\beta + \beta')) \otimes v = \\
&= (\alpha\beta + \alpha\beta') \otimes v && \textit{Körpereigenschaft} \\
&= \alpha\beta \otimes v + \alpha\beta' \otimes v && \textit{Rechenregeln für Tensoren}
\end{aligned}$$

So bekommen wir

$$\begin{aligned}
L \times (L \otimes V) &\to L \otimes V \\
(\alpha, \beta \otimes v) &\mapsto (\alpha\beta) \otimes v
\end{aligned}$$

Wir müssen auch die Axiome für den Vektorraum über L *verifizieren, d.h.:*

$$\begin{aligned}
\alpha(w + w') &= \alpha w + \alpha w' && \text{für } \alpha \in L,\ w, w' \in L \otimes V \\
\alpha(\alpha' w) &= (\alpha\alpha') w && \text{für } \alpha, \alpha' \in L,\ w \in L \otimes V
\end{aligned}$$

Die erste Gleichung gilt weil $L \otimes V \dashrightarrow L \otimes V$ *über* $\mathbb{K}$*-linear ist. Die zweite folgt aus der ersten, falls wir nur den Fall verifizieren, wobei* $w = \beta \otimes v$*. Dafür benutzen wir*

- $L \otimes_{\mathbb{K}} V$ *ist von Elementen* $\beta \otimes v$ $(\beta \in L,\ v \in V)$ *aufgespannt, als* $\mathbb{K}$*-Vektorraum (Klar von der Konstruktion)*
- *Dann können wir schreiben*

$$w = \beta_1 \otimes v_1 + \cdots + \beta_\gamma \otimes v_\gamma \qquad \gamma \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned}
\alpha(\alpha'(\beta_1 \otimes v_1 + \cdots + \beta_\gamma \otimes v_\gamma)) &= \alpha(\alpha'(\beta_1 \otimes v_1) + \cdots + \alpha'(\beta_\gamma \otimes v_\gamma)) \\
&= \alpha(\alpha'(\beta_1 \otimes v_1)) + \alpha(\alpha'(\beta_\gamma)) \\
&= (\alpha\alpha')(\beta_1 \otimes v_1) + \cdots + (\alpha\alpha')(\beta_\gamma \otimes v_\gamma) \\
&= (\alpha\alpha')(\beta_1 \otimes v_1 + \cdots + \beta_\gamma \otimes v_\gamma)
\end{aligned}$$

für $w := \beta \otimes v$:

$$\begin{aligned}
\alpha(\alpha'(\beta \otimes v)) &= \alpha((\alpha'\beta) \otimes v) \\
&= (\alpha(\alpha'\beta)) \otimes v \\
&= ((\alpha\alpha')\beta) \otimes v \\
&= (\alpha\alpha')(\beta \otimes v)
\end{aligned}$$

Satz 7.

$$\underbrace{\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t]}_{\mathbb{C}-\ Vektorraum} \to \mathbb{C}[t]$$

Beh: dies ist ein Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen. Nur noch zu verifzieren: die $\mathbb{C}$-Linearität. Im allgemeinen haben wir

$$L \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[t] \xrightarrow{\sim} L[t]$$

L-linearer Isomorphismus

Beweis 23. *Sei $\gamma \in \mathbb{C}$*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t] \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\gamma \cdot (\ )"] & \mathbb{C}[t] \arrow[d, "\gamma \cdot (\ )"] \\
\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t] \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{C}[t]
\end{tikzcd}$$

Bemerkung 64. Ganz ähnlich

$$L \otimes \mathbb{K}^n \xrightarrow{\sim} L^n$$

L-linearer Isomorphimsus. ($n \in \mathbb{N}$) Insbesondere:

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n$$

Definition 43. Komplexifizierung Ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, so heisst der $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ die Komplexifizierung von V

3.5.2 Tensorprodukt von linearen Abbildungen

Definition 44. Tensorprodukt von linearen Abbildungen Sei V, W, $V \otimes_{\mathbb{K}} W$, $V \times W \xrightarrow{\eta} V \otimes_{\mathbb{K}} W$ und V', W', $V' \otimes_{\mathbb{K}} W'$, $V' \times W' \xrightarrow{\eta'} V' \otimes_{\mathbb{K}} W'$ gegeben, mit linearen Abbildungen

$$V \xrightarrow{\phi} V'$$
$$W \xrightarrow{\psi} W'$$

Dann haben wir:

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "\phi \times \psi"] \arrow[d, "\eta"] & V' \times W' \arrow[d, "\eta'"] \\
V \otimes W \arrow[r, dashed, "\text{neu}"] & V' \otimes W'
\end{tikzcd}$$

Beh: die Komposition ist bilinear

$$(v, w) \mapsto \psi(v) \otimes \psi(w)$$

neu aus der universellen Eigenschaft das Tensorprodukt von linearen Abbildungen

Not 7. Tensorprodukt von linearen Abbildungen

$$\phi \otimes \psi$$