

# Analysis I - Vorlesungs-Script

Prof. Alberto Cattaneo

Basisjahr 08/09 Semester II

**Mitschrift:**

Simon Hafner

---

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Integralrechnung

**Ziel** mathematisch präzise Formulierung des “Flächeninhalts” unter dem Graphen einer Funktion

## Fragen

- Welche Funktionen sind zulässig?
- Wie definiert man das Integral für diese Funktionen?

## Idee

1. def. Integral für spezielle Funktionen (Treppenfunktionen)
2. betrachte Folgen von Treppenfunktionen und führe geeigneten Konvergenzbegriff ein (gleichmässige Konvergenz),  $\rightarrow$  mögliche Limiten sind Relfunktionen
3. falls  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  (Folge von Treppenfunktionen), setze  $\int_a^b f \, dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b f_n \, dx \right)$

$$f_n \rightarrow f \text{ folgt } \left( \int_a^b f_n \, dx \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergent}$$
$$f_n \& g_n \rightarrow f \text{ zwei Folgen } \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b f_n \, dx \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b g_n \right)$$

## 1.1 Treppenfunktionen

- $a < b, a, b \in \mathbb{R} \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  Zerlegung von  $[a, b] \Leftrightarrow a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$
- $\phi[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  Treppenfunktion (auf  $[a, b]$ )  $\Leftrightarrow \exists$  Zerlegung  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  von  $[a, b]$  so dass  $\phi|_{(x_{k-1}, x_k)}$  konstant  $\forall k = 1, \dots, n$

*Bemerkung 1.* • keine Aussage über  $\phi(x_0), \dots, \phi(x_n)$

- nicht verboten zu feine Zerlegungen zu betrachten
- $\tau([a, b])$  (ein Vektorraum über  $\mathbb{C}$ ,  $\phi, \psi$  Treppenfunktionen) Menge aller Treppenfunktionen auf  $[a, b]$

**Definition 1.** Integral von Treppenfunktionen  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  Teppenfunktion mit Zerlegung  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

- $c_k =$  Funktionswert von  $\phi$  auf  $(x_{k-1}, x_k)$
- $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

$$\int_a^b \phi(x) \, dx = \sum_{k=1}^n (c_k \cdot \Delta x_k)$$

**Lemma 1.** Das Integral einer Treppenfunktion ist unabhängig von der gewählten Zerlegung

**Beweis 1.**

$$\begin{aligned} Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \& Z' = \{y_0, y_1, \dots, y_m\} && \text{Zerlegungen von } [a, b] \\ \phi|_{(x_{k-1}, x_k)} \& \phi|_{(y_{k-1}, y_k)} && \text{konstant} \\ \rightsquigarrow I(Z) \rightsquigarrow I(Z') && \leftarrow \text{Summen } \sum_{k=1}^n c_k \Delta x_k \& \sum_{k=1}^m c'_k \Delta y_k \end{aligned}$$

**Frage**  $I(Z) = I(Z')$

**Zeige**  $I(Z) = I(Z \cup Z') = I(Z')$

$Z \cup Z'$  entsteht aus  $Z$  durch Hinzufügen von endlich vielen Punkten.

Angenommen  $Z \cup Z' = Z \cup \{y\}, y \notin Z$ . Leicht zu sehen:  $I(Z) = I(Z \cup \{y\})$

$$I(Z) = I(Z \cup \{y\}) \xrightarrow{\text{Ind}} I(Z) = I(Z \cup \{y_1\}) = I(Z \cup \{y_1\} \cup \{y_2\}) = \dots = I(Z \cup Z')$$

**Lemma 2.**

$$\int_a^b dx \tau([a, b]) \rightarrow \mathbb{C}$$

1.  $\int_a^b dx$  ist linear, d.h.

$$\forall \phi, \psi \in \tau([a, b]), \alpha, \beta \in \mathbb{C} : \int_a^b \alpha \phi + \beta \psi dx = \alpha \left( \int_a^b \phi dx \right) + \beta \left( \int_a^b \psi dx \right)$$

2.

$$\left| \int_a^b \phi dx \right| \leq \int_a^b |\phi| dx \leq (b-a) \underbrace{\|\phi\|}_{\text{Supremum}}$$

3. für  $\phi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\phi(x) \leq \psi(x) \forall x \in [a, b] \implies$

$$\int_a^b \phi dx \leq \int_a^b \psi dx$$

**Beweis 2.**  $\phi$  und  $\psi$  Treppenfunktionen mit Zerlegung  $Z$  bzw.  $Z' \implies Z \cup Z'$   
Zerlegung für  $\phi$  und  $\psi$

$$\int_a^b \alpha \phi + \beta \psi dx = (\alpha \phi)|_{(x_{k-1}, x_k)} = \alpha (\phi|_{(x_{k-1}, x_k)})$$

wobei  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ .

Wert von  $\phi$  auf  $(x_{k-1}, x_k) =: c_k$ , Wert von  $\psi$  auf  $(x_{k-1}, x_k) =: d_k$

$$\sum_{i=1}^n (\alpha c_k + \beta d_k) \Delta x_k = \alpha \left( \sum_{i=1}^n \right) + \beta \left( \sum_{i=1}^n d_k \Delta x_k \right) = \alpha \int_a^b \phi dx + \beta \int_a^b \psi dx$$

**Bemerkung 2.**  $\int_a^b dx : \tau([a, b]) \rightarrow \mathbb{C}$  linear,  $\ker(\int_a^b dx) \subset \tau([a, b])$  Untervektorraum

**Bemerkung 3.** lineares erzeugendes System von  $\tau([a, b])$   $A \subset \mathbb{R}$

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\{1_{[c,d]} \text{ mit } a < c \leq d < b\}$  erzeugendes System

## 1.2 Regelfunktionen

**Definition 2.** Regelfunktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  Regelfunktionen (auf  $[a, b]$ )  $\Leftrightarrow$

•

$$\forall y \in (a, b) : \exists \lim_{x \searrow y} f(x) \ \& \ \lim_{x \nearrow y} f(x)$$

$$(\text{nicht nötig: } \lim_{x \searrow y} f(x) = \lim_{x \nearrow y} f(x))$$

•

$$\exists \lim_{x \nearrow y} f(x) \ \& \ \exists \lim_{x \searrow y} f(x)$$

Bemerkung 4.

$$\lim_{x \searrow y} f(x) = c : \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \rho \forall 0 < x - y < \rho : |f(x) - c| < \varepsilon$$

$\mathcal{R}([a, b])$  Menge aller Regelfunktionen auf  $[a, b]$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}([a, b]) & \text{ Vektorraum über } \mathbb{C} \\ \mathcal{T}([a, b]) & \subset \mathcal{R}([a, b]) \text{ Untervektorraum} \end{aligned}$$

**Frage**  $\mathcal{R}([a, b])/\mathcal{T}([a, b])$  Vektorraum über  $\mathbb{C}$ , Dimension?

**Beispiel 1.** jede stetige Funktion ist eine Regelfunktion

**Beispiel 2.** jede monotone Funktion auf  $[a, b]$  ist eine Regelfunktion (siehe Seite 78)

Bemerkung 5.

$$f, g \in \mathcal{R}([a, b]) \implies \lambda f_{\lambda \in \mathbb{C}}, f + g, |f|, f \cdot g, \max(f, g), \min(f, g)$$

sind in  $\mathcal{R}([a, b])$

**Definition 3.** gleichmässige Konvergenz  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folge von Funktionen auf  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $f$  Funktion auf  $D$ .

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert gleichmässig gegen } f \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\|f - f_n\|}_{\sup_{x \in D} |f(x) - f_n(x)|} = 0$$

Bemerkung 6. falls  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gleichmässig  $\implies$  Limes ist eindeutig

Bemerkung 7.  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gleichmässig gegen  $f \implies f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in D$

$$(|f(x) - f_n(x)| \leq \sup_{x \in D} |f(x) - f_n(x)| \rightarrow 0)$$

Bemerkung 8. Die Umkehrung gilt NICHT  $D = (0, 1]$

$$\begin{aligned} f = 0, f_n(x) &= \begin{cases} 1 - nx & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \\ \forall x \in D : f_n(x) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \|f - f_n\| &= \sup_{x \in D} |f(x) - f_n(x)| = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| &= 1 \end{aligned}$$

### 1.2.1 Zusammenfassung

- $\tau([a, b]) =$  Vektorraum der Treppenfunktionen auf  $[a, b]$
- $\int : \tau[a; b] \rightarrow \mathbb{C}$  lineare Abbildung
- Eigenschaften:
  - lineare Abbildung
  - Monotonie:  $f \leq g \implies \int_a^b f \cdot dx \leq \int_a^b g \cdot dx$
  - Beschränktheit:  $\left| \int_a^b f \cdot dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \cdot dx \leq (b-a) \|f\| = \sup_{x \in [a; b]} |f(x)| \cdot (b-a)$
- Regelfunktionen:  $\mathcal{R}([a, b]) =$  Vektor nach der Regel  $f \supset \tau([a; b])$
- gleichmässige Konvergenz  $f_n \rightarrow f \stackrel{\text{def}}{\iff} \|f_n - f\| \rightarrow 0$

**1.2.2 Vorgehen**

1. Jede Regelfunktion kann man gleichmässig durch Treppenfunktionen approximieren.
2. Damit kann man das Integral von Regelfunktionen definieren.
3. Regenregeln (insbesondere Hauptsatz)
4. Riemannsche Summen

**Satz 1.** *Approximationssatz*

$$f \in \mathcal{R}a; b \Leftrightarrow \exists \text{ Folge } \phi_n \in \tau[a; b] : \phi_n \rightarrow f \text{ gleichmässig}$$

ist per Definition äquivalent mit

$$\exists \text{ Folge } \phi_n \in \tau[a; b] : \|\phi_n - f\| \rightarrow 0$$

wobei

$$\|\phi_n - f\| = \sup_{x \in [a; b]} |\phi_n(x) - f(x)|$$

Dieser Grenzwert ist wiederum äquivalent mit

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \phi \in \tau[a; b] : \|f - \phi\| \leq \varepsilon$$

(eine  $\varepsilon$ -approximierende Treppenfunktion)**Beweis 3.**  $\Rightarrow$  d.h.  $f \in \mathcal{R} \Rightarrow \exists \varepsilon$ -approx. Treppen. Widerspruchsbeweis:

$$f \in \mathcal{R}[a; b]$$

$$\exists \varepsilon > 0 : f \text{ besitzt keine } \varepsilon\text{-approx. Treppenfunktion}$$

Wir konstruieren eine Intervallschachtelung  $I_n = [a_n; b_n]$  s.d.  $\forall_n f|_{I_n}$  besitzt keine  $\varepsilon$ -approx. Treppenfunktion

$$I_1 = [a; b]$$

rekursiv:  $M = \frac{b_n + a_n}{2} + a_n$  Mittelpunkt

$$I_{n+1} := \begin{cases} [a_n; M] & \text{falls } f|_{[a_n; M]} \text{ keine } \varepsilon\text{-approx. Treppenfunktion besitzt} \\ [M, b_n] & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Sei  $\xi \in I_n \forall n$ 

$$c_e := \lim_{x \uparrow \xi} f(x)$$

$$c_r := \lim_{x \downarrow \xi} f(x)$$

 $\Rightarrow$ 

$$\begin{aligned} \exists \delta : |f(x) - c_e| < \varepsilon : & \quad x \in [\xi - \delta; \xi) \\ |f(x) - c_r| < \varepsilon : & \quad x \in (\xi; \xi + \delta] \end{aligned}$$

Auf  $[\xi - \delta; \xi + \delta]$  definieren wir eine Treppenfunktion:

$$\phi(x) := \begin{cases} c_e & \xi - \delta \leq x < \xi \\ f(\xi) & x = \xi \\ c_r & \xi + \delta \leq x < \xi + \delta \end{cases}$$

Fall 1  $\Rightarrow \phi$  ist eine  $\varepsilon$ -approx. Treppenfunktion auf  $[\xi - \delta, \xi + \delta]$ . Fall 2  $\Rightarrow \phi$  ist eine  $\varepsilon$ -approx. Treppenfunktion auf  $[\xi - \delta, \xi + \delta]$ , alle  $I_n \subset [\xi - \delta; \xi + \delta]$  $\Psi$

**Beweis 4.**  $\Leftarrow f$  Regelfunktion  $\Leftarrow f$  besitzt  $\varepsilon$ -approx. Treppenfunktion  $\forall \varepsilon > 0$ .  
Sei  $x_0 \in [a; b]$ . Zu zeigen:  $\exists \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \phi \in \tau[a; b] : \|f - \phi\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sei  $\beta > x_0 : \phi$  konstant auf  $(x_0, \beta)$

$$\begin{aligned} \forall x, x' \in (x_0, \beta) \\ |f(x) - f(x')| &\leq |f(x) - \phi(x)| + |\phi(x) (= \phi(x')) - f(x')| \\ &\leq \|f - \phi\| + \|\phi - f\| < \varepsilon \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \beta : \text{Cauchyeigenschaft gilt auf } (x_0, \beta) \implies \exists \lim_{x \uparrow x_0} f(x)$ . Ähnlich:  
 $\exists \lim_{x \uparrow x_0} f(x) \forall x_0 \in (a; b]$ .

**Korollar 1.**

$$f \in \mathcal{R}[a; b] \Leftrightarrow \exists \text{Folge } \Psi_b \in \tau[a; b] : \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k = f$$

konvergiert konstant

**Korollar 2.**  $f$  Regelfunktion auf  $I \implies f$  fast überall stetig. d.h.  $\exists A \subset I$  s.d.

- $f|_{I \setminus A}$  stetig
- $A$  höchstens abzählbar  $x \in [a; b]$

**Beweis 5.**

$$\begin{aligned} \Psi_k &\in \tau[I] \\ f &= \sum \phi_k \text{ normal} \end{aligned}$$

Ist  $\phi_k$  stetig in  $x \forall k \implies f$  stetig in  $x$ .

Ist  $x$  Unstetigkeitsstelle von  $f$ ,  $\exists k : \phi_k$  unstetig in  $x$ , höchstens abzählbare viele  $k$ .

- Eine Treppenfunktion hat endlich viele Unstetigkeitsstellen

$\{ \text{Unstetigkeitsstellen von } f \} \subset (\text{höchstens abzählbare Vereinigung von endlichen Mengen}) \implies \text{höchstens abzählbar}$

$$I = \overbrace{U_\alpha}^{\text{höchstens abzählbar}} \overbrace{I_\alpha}^{\text{kompakt}}$$

**Satz 2.**

$$f \in \mathcal{R}([a; b]) \implies f \text{ beschränkt auf } [a; b]$$

**Beweis 6.**

$$\varepsilon = 1$$

$$\begin{aligned} &\exists \overbrace{\phi}^{\text{beschränkt}} \in \tau([a; b]) : \|f - \phi\| \leq 1 \\ \implies \|f\| &= \|f - \phi + \phi\| \leq \|f - \phi\| + \|\phi\| \leq 1 + \|\phi\| \end{aligned}$$

**Definition 4.** Integration von Regelfunktionen ... auch bekannt als "Regelintegral"

Sei  $f \in \mathcal{R}[a; b]$

$$\int_a^b f(x) dx : \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \phi_n(x) dx$$

wobei  $\phi_n$  eine approximierende Folge von Treppenfunktionen ist (d.h.  $\|\phi_n - f\| \rightarrow 0$ )

**zu zeigen:**

1. Die Folge  $I_n := \int_a^b \phi_n(x) \, dx$  konvergiert  $\forall \|\phi_n - f\| \rightarrow 0$
2. Der Grenzwert ist von der Wahl der approximierenden Folge unabhängig

**Beweis 7. von 1**

$$|I_n - I_m| \stackrel{\text{Linearität}}{=} \left| \int_a^b (\phi_n(x) - \phi_m(x)) \, dx \right| \stackrel{\text{beschränkt}}{\leq} (b-a) \|\phi_n - \phi_m\|$$

$$\|\phi_n - f\| \rightarrow 0 \stackrel{\text{Dreiecksungleichung}}{\implies} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \|\phi_n - \phi_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m > N$$

$$\implies I_n \text{ Cauchyfolge} \implies I_n \text{ konvergiert}$$

**Beweis 8. von 2** Seien  $\phi_n, \psi_n \in \tau[a; b]$

$$\|\phi_n - f\| \rightarrow 0$$

$$\|\psi_n - f\| \rightarrow 0$$

$$\{X_n\} = \psi_1, \phi_1, \psi_2, \phi_2, \psi_3, \phi_3, \dots$$

$$X_n := \begin{cases} \phi_{\frac{n}{2}} & \text{n gerade} \\ \psi_{\frac{n+1}{2}} & \text{n ungerade} \end{cases}$$

$$\implies I_n(\phi) \text{ und } I_n(\psi) \text{ Teilfolgen von } I_n(X)$$

$$\implies \|X_n - f\| \rightarrow 0$$

$$I_n(x) = \int x_n$$

$$I_n(\phi) = \int \phi_n$$

$$I_n(\psi) = \int \psi_n$$

$$\implies$$

$$\lim I_n(\phi) = \lim I_n(X) = \lim I_n(\psi)$$

**Beispiel 3.** Dirichlet eine Funktion, die keine Regelfunktion ist.

$$f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$f \text{ unstetig } \forall x \text{ intuitiv: } \int_0^1 f(x) \, dx = 0$$

**Beispiel 4.** Riemann sog. modifizierte Dirichlet-Funktion

$$g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}, p, q \text{ teilerfremd}, q > 0 \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$g \in \mathcal{R}[0; 1] \text{ und } \int_a^b g(x) \, dx = 0$$



**1.2.3 Eigenschaften****Satz 3.**

$$\forall f, g \in \mathcal{R}[a; b] \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ gelten}$$

**Linearität**

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) \, dx = \alpha \int_a^b f \, dx + \beta \int_a^b g \, dx$$

**Beschränktheit**

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx \leq (b-a) \|f\|$$

**Monotonie**

$$f \leq g \implies \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$$

 $(f, g \text{ reellwertig } f(x) \leq g(x) \forall x)$ **Satz 4. Additivität** Sei  $f \in \mathcal{R}[a; b]$  und sei  $c \in (a; b)$ 

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

**Beweis 9.**  $f = \phi$  Treppenfunktion trivial

$$f = \lim \phi_n \text{ gleichmässig}$$

$$\begin{aligned} \phi_n \in \tau[a; c] \phi_n^l &:= & \phi_n|_{[a; b]} &\in \tau[a; b] \\ \phi_n^r &:= & \phi_n|_{[b; c]} &\in \tau[b; c] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_a^c \phi_n(x) \, dx &= \int_a^b \phi_n^l(x) \, dx + \int_b^c \phi_n^r(x) \, dx \\ \|\phi_n - f\| &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\|\phi_n^l - f\|_{[a; b]} \leq \|\phi_n - f\| \geq \|\phi_n^r - f\|_{[b; c]}$$

$$\begin{aligned} \int_a^c \phi_n(x) \, dx &= \int_a^b \phi_n^l(x) \, dx + \int_b^c \phi_n^r(x) \, dx \\ &= \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx \\ &= \int_a^c f(x) \, dx \end{aligned}$$

 $\implies$ 

$$\begin{aligned} \phi_n^l &\rightarrow f|_{[a; b]} \\ \phi_n^r &\rightarrow f|_{[b; c]} \end{aligned}$$

**Definition 5.**  $f \in \mathcal{R}[a; b]$ ,  $b > a$ 

$$\begin{aligned} \int_b^a f(x) \, dx &:= \int_a^b f(x) \, dx \\ \int_a^a f(x) \, dx &:= 0 \end{aligned}$$

**Satz 5.**  $f \in \mathcal{RI}() : \forall a, b, c \in I$ 

$$\int_a^c f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx$$

**Bemerkung 9. Linearität****Beschränktheit :**

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)| \, dx \right| \leq |b-a| \|f\|$$

**Monotonie**

$$f \leq g; b > a \\ \int_a^b f(x) \, dx \geq \int_a^b g(x) \, dx$$

**Bemerkung 10.**  $f$  stetig  $([a; b]) \implies \|f\| = \max |f|$   
 reellwertig  $\xRightarrow{\text{ZWS}} f$  nimmt alle Werte zwischen 0 und  $\max |f|$

$$\exists \xi \in [a; b] :$$

$$\int_a^b f(x) \, dx = (b-a)f(\xi)$$

**Satz 6. Mittelwertsatz** Sei  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Sei  $p : [a; b] \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{R}$  mit  $p \geq 0$ . Dann  $\exists \xi \in [a; b]$  s.d.

$$\int_a^b f(x)p(x) \, dx = f(\xi) \int_a^b p(x) \, dx$$

Falls  $\int p \neq 0$

$$\frac{\int f(x)p(x) \, dx}{\int p(x) \, dx} = f(\xi) = \int_a^b f(x)\tilde{p}(x) \, dx \\ \tilde{p}(x) = \frac{p(x)}{\int_a^b p(x) \, dx} \\ \implies \int_a^b \tilde{p}(x) \, dx = 1$$

**Beweis 10.**  $f$  besitzt ein Maximum  $M$  und ein Minimum  $m$

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a; b] \\ mp(x) \leq f(x)p(x) \leq Mp(x)$$

Monotonie  
 $\implies$

$$\int_a^b mp(x) \, dx \leq \int_a^b f(x)p(x) \, dx \leq \int_a^b Mp(x) \, dx \\ = m \int_a^b p(x) \, dx \qquad \qquad \qquad = M \int_a^b p(x) \, dx \\ \implies \exists \mu \in [m; M]:$$

$$\int_a^b f(x)p(x) \, dx = \mu \int_a^b p(x) \, dx$$

ZWS  $\implies \exists \xi \in [a; b]:$

$$\mu = f(\xi)$$

**Satz 7.** Sei  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{R}$  mit  $f \geq 0$  und  $\int_a^b f(x) \, dx = 0$ . Dann ist  $f(x_0) = 0$  an jeder Stetigkeitsstelle  $x_0$ . Ferner gilt:  $f = 0$  fast überall.

**Beweis 11.** (Widerspruchsbeweis) Sei  $x_0$  eine Stetigkeitsstelle mit  $f(x_0) > 0$ .  
 $f$  stetig in  $x_0 \implies \exists x_0 \in [a : b] \subset [a : b]$  s.d.

$$f(x) > \frac{1}{2}f(x_0) \quad \forall x \in [\alpha : \beta]$$

Sei

$$\phi(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}f(x_0) & x \in [\alpha; \beta] \\ 0 & x \notin [\alpha; \beta] \end{cases}$$

Treppenfunktion, deshalb Regelfunktion

$$\implies f \geq \phi \implies \underbrace{\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx}_{=0} \geq \int_{\alpha}^{\beta} \phi(x) \, dx = \frac{\beta - \alpha}{2} f(x_0) > 0$$

$\Psi$

**Satz 8.**  $f \in \mathcal{R} \implies f$  besitzt höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen  
 $\implies f = 0$  fast überall

**Korollar 3.**  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $f \geq 0$ ,  $\int_a^b f(x) \, dx = 0 \implies$   
 $f(x) = 0 \quad \forall x \in [a; b]$

### 1.3 Fundamentalsatz der Analysis

**Satz 9.** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{C} \in \mathcal{R}$  und sei  $a \in I$ . Für jedes  $x \in I$  definiert man

$$F(x) := \int_a^x f(t) \, dt \quad F : I \rightarrow \mathbb{C}$$

Dann ist  $F$  eine Stammfunktion zu  $f$  (d.h.  $F$  ist stetig und fast überall differenzierbar (und  $F' = f$  fast überall)) mit

$$\begin{aligned} F'_+(x_0) &= f_+(x_0) \\ F'_-(x_0) &= f_-(x_0) \end{aligned}$$

$\forall x_0 \in I$

**Beweis 12.**  $\forall x_1, x_2 \in I$  gilt

$$\begin{aligned} F(x_2) - F(x_1) &= \int_a^{x_2} f(t) \, dt - \int_a^{x_1} f(t) \, dt = \\ &= \int_a^{x_2} + \int_{x_1}^a = \int_{x_1}^{x_2} f(t) \, dt \end{aligned}$$

Sei  $\tau \subset I$  Teilintervall.  $\forall x_1, x_2 \in \tau$

$$|f(x_2) - F(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) \, dt \right| \stackrel{\text{Bijektivität}}{\leq} |x_2 - x_1| \|f\|_{\tau}$$

$\implies F|_{\tau}$  Lipschitz-stetig  $\implies F|_{\tau}$  stetig  $\forall \tau \implies F$  stetig auf  $I$ .

Wir berechnen  $F'_+(x_0)$ .  $f \in \mathcal{R} \implies \exists f_+(x_0)$ .  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$

$$|f(x) - f_+(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

Für  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f_+(x_0) \right| = \\ & \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) \, dt - \frac{f_+(x_0)}{x - x_0} \int_{x_0}^x 1 \, dt \right| < \text{Fehltdanichtwas?} \\ & \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f_+(x_0)) \, dt \right| \leq \\ & \frac{1}{|x - x_0|} |x - x_0| \|f(x) - f_+(x_0)\|_{x_0; x} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

**Korollar 4.** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{CR}$  und sei  $\Phi$  eine Stammfunktion zu  $f$ . Dann  $\forall a, b \in I$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \, dx &= \Phi(b) - \Phi(a) \\ &=: \Phi|_a^b \end{aligned}$$

**Beweis 13.**  $\Phi$  und  $F$  sind Stammfunktionen zu  $f$ , insbesondere  $\Phi' = F'$  fast überall. Eindeutigkeitssatz  $\implies \exists c$  konstant s.d.

$$\Phi(x) = F(x) + c \quad \forall x \in I$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \, dx &= F(b) = F(b) - \underbrace{F(a)}_{=0} = \\ &= (\Phi(b) - c) - (\Phi(a) - c) = \Phi(b) - \Phi(a) \end{aligned}$$

**Korollar 5.** Jede Regelfunktion besitzt eine Stammfunktion

**Definition 6.** Eine Funktion heisst fast überall stetig differenzierbar, wenn sie die Stammfunktion zu einer Regelfunktion ist. (Wo sie nicht stetig differenzierbar ist, besitzt sie linke und Rechte Grenzwerte)

**Beispiel 5.**

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases}$$

$f$  ist in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  differenzierbar.  $f'$  besitzt linke und rechte Grenzwerte, in 0 nicht. Also keine Regelfunktion.

*Bemerkung 11.* Mit dem Lebesgue-Integral kann man solche Funktionen aus einem Integral erhalten.

*Eigenschaften 1.* Charakterisierung  $f$  fast überall stetig differenzierbar auf  $I \implies \exists A \subset I$ ,  $A$  höchstens abzählbar s.d.

1.  $f$  ist auf  $I \setminus A$  differenzierbar
2.  $f'$  ist auf  $I \setminus A$  stetig
3.  $\forall x \in A$  existieren  $f'_+(x)$  und  $f'_-(x)$

**Definition 7.** unbestimmtes Integral Das unbestimmte Integral der Regelfunktion  $f$  ist die Gesamtheit aller Stammfunktionen zu  $f$ .

*Notation 1.* unbestimmtes Integral

$$\int f(x) \, dx$$

In Tabellen wird oft

$$\int x \, dx = \frac{x^2}{2}$$

geschrieben

**Beispiel 6.**

$$\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C$$

*Eigenschaften 2.*

$$\begin{aligned}\int x^a \, dx &= \frac{x^{a+1}}{a+1} \quad a \in \mathbb{C} \setminus \{-1\} \\ \int \frac{1}{x} \, dx &= \ln |x| \\ \int e^{cx} \, dx &= \frac{1}{c} e^{cx}, \quad c \neq 0 \\ \int \sin x \cdot dx &= -\cos x \\ \int \cos x \cdot dx &= \sin x\end{aligned}$$

**Satz 10.** Seien  $f_1$  und  $f_2$  Regelfunktionen auf  $I$

$$f_1 = f_2 f.ü. \implies \int f_1 \, dx = \int f_2 \, dx$$

Insbesondere  $\forall a, b \in I$

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f_2(x) \, dx$$

**Beweis 14.** Sei  $F_1 / F_2$  Stammfunktion zu  $f_1 / f_2$

$$\begin{aligned}\implies F_1' &= F_2' f.ü. \\ \implies F_1 &= F_2 + C\end{aligned}$$

*Bemerkung 12.* Anwendung

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}, p, q \text{ teilerfremd} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
$$\int_a^b f(x) \, dx = 0$$

**Definition 8.** Sei  $f$  eine fast überall differenzierbare Funktion, so bezeichnet  $f'$  irgendeine Regelfunktion, die fast überall gleich zur Ableitung von  $f$  ist.

**Satz 11.** Hauptsatz Sei  $f$  eine fast überall stetig differenzierbare Funktion auf  $I$ . Dann

$$\begin{aligned}\int f'(x) \, dx &= f \\ \int_a^b f'(x) \, dx &= f(b) - f(a) \quad a, b \in I\end{aligned}$$

*Notation 2.* Leibnitz-Notation

$$\begin{aligned}f' &= \frac{df}{dx} \\ \int \frac{df}{dx} \, dx &= f \\ \int df &= f \\ \int_a^b df &= \Delta F := f(b) - f(a)\end{aligned}$$

## 1.4 Integrationstechniken

*Eigenschaften 3.* Integrationstechniken

1. Linearität
2. Partielle Integration
3. Substitutionsregel

**1.4.1 Partielle Integration**

**Satz 12.** Seien  $U$  und  $V$  fast überall stetig differenzierbar Funktionen auf  $I$ , so ist auch  $UV$  fast überall stetig differenzierbar und

$$\int uv' \, dx = uv - \int u'v \, dx$$

$$\int_a^b uv' \, dx = (uv)|_a^b - \int_a^b u'v \, dx$$

**Beweis 15.**  $u, v$  stetig und  $u, v \in \mathcal{R} \implies u'v + uv' \in \mathcal{R}$ . Fast überall:  $u'v + uv' = (uv)'$  Kettenregel.

$$\int (u'v + uv') \, dx = \int (uv)' \, dx = uv$$

**Beispiel 7.**

$$\begin{aligned} \int \ln x \, dx &= \int 1 \cdot \ln x \, dx = \int \frac{dx}{dx} \ln x \, dx = \\ &= x \ln x - \int x \frac{d \ln x}{dx} \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x \end{aligned}$$

**Beispiel 8.**

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \int \cos x \cdot \cos x \, dx = \int \left( \frac{d}{dx} \sin x \right) \cos x \, dx = \\ &= \sin x \cos x - \int \sin x \frac{d}{dx} \cos x \, dx = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \\ &\quad \int (\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx = \sin x \cos x \\ &\quad \int (\cos^2 x + \sin^2 x) \, dx = x \\ &\quad \int \cos^2 x \, dx = \frac{\sin x \cos x + x}{2} \end{aligned}$$

**Beispiel 9.**

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+x^2} \, dx &= \int \frac{dx}{dx} \sqrt{1+x^2} \, dx = x \sqrt{1+x^2} - \int x \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \, dx = \\ &= x \sqrt{1+x^2} - \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} \, dx + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \\ &= x \sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} \, dx + \operatorname{arcsinh} x \\ &\quad \int \sqrt{1+x^2} \, dx = \frac{x \sqrt{1+x^2} + \operatorname{arcsinh} x}{2} \end{aligned}$$

**1.4.2 Substitutionsregel**

**Satz 13.** Substitutionsregel Sei  $f \in \mathcal{R}$  auf  $I$ ,  $F$  eine Stammfunktion zu  $f$ ,  $t : [a; b] \rightarrow I$  stetig differenzierbar und streng monoton. Dann ist  $F \circ t$  eine Stammfunktion zu

$$(f \circ t)t' \text{ auf } [a; b]$$

und

$$\int_a^b f(t(x))t'(x) \, dx = \int_{t(a)}^{t(b)} f(t) \, dt$$

$$(I = [t(a); t(b)] \text{ oder } [t(b); t(a)])$$

*Notation 3.*

$$f \frac{dt}{dx} \, dx = \int f \, dt$$

**Beweis 16.** Kettenregel:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(F \circ t) &= (F' \circ t)t' \stackrel{f.\ddot{u}.}{=} (f \circ t)t' \\ \int_a^b f(t(x))t'(x) dx &= \int_a^b \frac{d}{dx}(F \circ t) dx = F \circ t \Big|_a^b = F(t(b)) - F(t(a)) \\ &= \int_{t(a)}^{t(b)} f(t) dt = F \Big|_{t(a)}^{t(b)} = F(t(b)) - F(t(a))\end{aligned}$$

**Beispiel 10.**

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x+c) dx &\stackrel{t(x)=x+c}{=} \int_a^b f(x+c)t' dx = \\ &= \int_{a+c}^{b+c} f(t) dt\end{aligned}$$

**Beispiel 11.**

$$\int_a^b f(cx) dx \stackrel{t(x)=cx}{=} \frac{1}{c} \int_a^b f(cx)t' dx = \frac{1}{c} \int^{cb} caf(t) dt$$

$c = -1$

$$\int_a^b f(-x) dx = - \int_{-a}^{-b} f(x) dx = \int_{-b}^{-a} f(x) dx$$

**Korollar 6.**

$$\begin{aligned}f(-x) &= -f(x) \\ \int_{-a}^a f(x) &= 0\end{aligned}$$

**Beweis 17.**

$$\int_{-a}^a f(-x) dx = - \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^a f(x) dx$$

**Beispiel 12.**

$$\begin{aligned}\int \frac{t'(x)}{t(x)} dx &\stackrel{f=\frac{1}{t}}{=} \int f(t) dt = \\ &= \int \frac{1}{t} dt = \ln |t|\end{aligned}$$

### 1.4.3 Rationale Funktionen

→ Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x+a} &= \ln |x+a| \\ \int \frac{Bx+C}{x^2+2bx+c} dx &= \dots\end{aligned}$$

Wobei  $x^2 + 2bx + c$  keine reellen Lösungen ergeben darf.

**Satz 14.** Eine rationale Funktion kann man mittels rationaler Funktionen, des Logarithmus sowie des Arcustangens integrieren.

## 1.5 Reihenintegration

**Satz 15.** Sei  $f_n$  eine Folge Regelfunktionen auf  $[a; b]$ . Konvergiert die Reihe  $\sum f_n$  normal, so ist

$$f : \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

eine Regelfunktion und

$$\int_a^b f(x) \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) \, dx$$

$$(\int \sum = \sum \int)$$

Insbesondere gilt der Satz für Potenzreihen in ihren Konvergenzintervallen.

**Beweis 18.**  $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ :

$$\sum_{n=N}^{\infty} \|f_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\forall p \geq N$

$$\left\| f - \sum_{n=1}^p f_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$f_n \in \mathcal{R} \implies \sum_{n=1}^p f_n \in \mathcal{R} \implies \exists$  Treppenfunktion  $\phi$  mit

$$\left\| \sum_{n=1}^p f_n - \phi \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\implies$

$$\|f - \phi\| \leq \left\| f - \sum_{n=1}^p f_n \right\| + \left\| \sum_{n=1}^p f_n - \phi \right\| < \varepsilon$$

$\implies f \in \mathcal{R}$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \, dx - \sum_{n=1}^p \int_a^b f_n(x) \, dx \right| &\leq \\ &\leq \int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=1}^p f_n(x) \right| \, dx \leq \\ &\leq |b-a| \left\| f - \sum_{n=1}^p f_n \right\| < \\ &< |b-a| \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

**Beispiel 13.**

$$\begin{aligned} \arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \, dt &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \, dt \stackrel{|x| \leq 1}{=} \\ &\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$



## 1.6 Reimannsche Summen

- alte Definition des Regelintegrals (äquivalent)
- Approximationstechnik
- Man kann Resultate über Summen erweitern (z.B. Höldersche Ungleichung, Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

**Definition 9.** Zerlegung  $[a; b]$  kompaktes Intervall

Eine Zerlegung von  $[a; b]$  ist die Wahl  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  s.d.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

*Notation 4.*  $Z := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

**Definition 10.** Feinheit der Zerlegung

$$\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$$

Die Feinheit der Zerlegung ist  $\max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$

**Definition 11.** Die Riemannsche Summe von  $f$  bezüglich der Zerlegung  $Z$  und der Wahl von Stützstellen  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$

$$\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$$

ist die Summe

$$S(f; Z; \xi) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

**Satz 16.** Sei  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine Regelfunktion. Dann gilt folgendes:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$$

s.d. für jede Zerlegung  $Z$  der Feinheit  $\leq \delta$  und für jede Wahl Stützstellen  $\xi$  gilt

$$\left| S(f; Z; \xi) - \int_a^b f(x) \, dx \right| < \varepsilon$$

**Beweis 19.** (Idee)

1. Satz gilt, falls  $f$  eine Treppenfunktion ist. Beweis durch Induktion nach der Anzahl Sprungstellen

2.  $\exists \phi$  Treppenfunktion s.d.

$$\|f - \phi\| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

1)  $\implies \exists Z, \xi$

$$\left| S(\phi; Z; \xi) - \int_a^b \phi(x) \, dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

3-Ecks Ungleichung

**Korollar 7.** Sei  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C} \in \mathcal{R}$ . Sei  $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$  Folge Zerlegungen von  $[a; b]$  mit Feinheit  $(Z_n) \rightarrow 0$ . Für jede Wahl Stützstellen  $\xi_m$  aus  $Z_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(f; Z_n; \xi_m) = \int_a^b f(x) \, dx$$

**Definition 12.**  $p$ -Norm Sei  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C} \in \mathcal{R}$ . Die  $p$ -Norm von  $f$  (mit  $p \geq 1$ )

$$\|f\|_p := \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p \, dx}$$

**Satz 17.** Seien  $f, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{C} \in \mathcal{R}$ . Seien  $p, q \geq 1$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Dann haben wir

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

*Höldersche Ungleichung*

*Spezialfall:  $p = q = 2$  Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*

**Beweis 20.** (Idee)

1. Man approximiert die 3 Integrale durch Riemannsche Summen
2. Man benützt die Höldersche Ungleichung für Summen
3. Man nimmt die Grenzwerte

## 1.7 Das uneigentliche Integral

**Satz 18.** Seien  $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$

$$-\infty \leq a < b \leq +\infty$$

Sei  $I$  ein Intervall mit Randwerten  $a$  und  $b$  (z.B.  $I = [a; b]$ ,  $I = [a; b)$ ). Sei  $f$  eine Regelfunktion auf  $I$ . Wir wollen  $\int_a^b f(x) \, dx$  definieren, wenn möglich.

**Fall 0**

$$a, b \in \mathbb{R}, I = [a; b]$$

$$\int_a^b f(x) \, dx \text{ Regelintegral}$$

**Fall 1**

$$b \in \bar{\mathbb{R}}, I = [a; b)$$

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\beta \uparrow b} \int_a^\beta f(x) \, dx$$

Falls der Grenzwert existiert.

**Fall 2**

$$a \in \bar{\mathbb{R}}, b \in \mathbb{R}, b > a, I = (a; b]$$

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\alpha \downarrow a} \int_\alpha^b f(x) \, dx$$

Falls der Grenzwert existiert.

**Fall 3**

$$a, b \in \bar{\mathbb{R}}, a < b, I = (a; b)$$

$$\int_a^b f(x) \, dx := \overbrace{\int_a^c f(x) \, dx}^{\text{Fall 2}} + \overbrace{\int_c^b f(x) \, dx}^{\text{Fall 1}}$$

Sei  $c \in (a; b)$  falls beide Integrale auf der rechten Seite existieren!

**Definition 13.** Wert eines Integrals Existiert das uneigentliche Integral von  $f$ , so heisst  $\int_a^b f(x) \, dx$  konvergent so heisst der Grenzwert Wert des Integrals

**Definition 14.** absolut konvergentes Integral Konvergiert das Integral von  $|f|$ , so heisst das Integrals absolut konvergent

**Beispiel 14.**  $I = (0; +\infty)$

$$F_s(x) := \int \frac{1}{x^s} dx = \begin{cases} \ln x & s = 1 \\ \frac{x^{1-s}}{1-s} & s \neq 1 \end{cases}$$
$$F_s(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow s > 1, \text{divergiert sonst}$$
$$F_s(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \Leftrightarrow s < 1, \text{divergiert sonst}$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^s} dx$$

existiert genau dann, wenn  $a > 0$  und  $s > 1$  und hat den Wert  $\frac{a^{1-s}}{s-1}$

$$\int_0^a \frac{1}{x^s} dx$$

existiert genau dann, wenn  $s < 1$  und hat den Wert  $\frac{a^{1-s}}{1-s}$

**Beispiel 15.**  $e^{-x} \in R(\mathbb{R})$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a e^{-x} dx =$$
$$= \lim_{a \rightarrow +\infty} (e^{-x})|_0^a = \lim_{a \rightarrow +\infty} [-e^{-a} + e^0] = 1$$

**Beispiel 16.**  $f(x) = \frac{x}{1+x^2} \in R(\mathbb{R})$

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

divergiert  $x \rightarrow \pm\infty$ . Deshalb existieren

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx \text{ und } \int_{-\infty}^0 f(x) dx$$

nicht. Aber:

$$\int_{-R}^R f(x) dx = 0$$
$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx = 0$$

**Beispiel 17.** Sei  $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ . Sei  $f = F' \in R(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  aber keine Regelfunktion auf  $\mathbb{R}$   $x >$

$$\int_0^\pi f(x) dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^\pi f(x) dx =$$
$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} F(x)|_\varepsilon^\pi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (F(x) - F(\varepsilon)) = F(x)$$

## 1.8 Majorantenkriterium

**Satz 19.** *Majorantenkriterium* Seien  $f$  und  $g$  Regelfunktionen  $[a; b)$  mit  $|f| \leq g$ . Existiert  $\int_a^b g(x) dx$ , so existiert auch  $\int_a^b f(x) dx$

**Beweis 21.** *Sei*

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_a^u f(x) \, dx \\ G(u) &= \int_a^u g(x) \, dx \\ \forall u, v &\in [a; b) \\ |F(u) - F(v)| &= \left| \int_b^u f(x) \, dx \right| \leq |f_v^u| |f(x)| \, dx \leq \\ &\leq \left| \int_v^u g(x) \, dx \right| = |G(u) - G(v)| \end{aligned}$$

$G(u) \, u \rightarrow 0 \text{ existiert} \implies G \text{ erfüllt das Cauchy Kriterium.} \implies F \text{ erfüllt das Cauchy Kriterium} \implies \lim_{n \rightarrow b} F(u) \text{ existiert}$

## 2 Kurven (Kapitel 12)

$$\begin{aligned} \gamma : I &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \gamma : t &\mapsto (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned}$$

$x_i : I \rightarrow \mathbb{R}$  Komponentenfunktionen

**Definition 15.** parametrisierte Kurve Eine parametrisierte Kurve (kurz: Kurve) ist eine Abbildung  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , deren Komponentenfunktionen stetig sind.

**Definition 16.** differenzierbare Kurve Eine Kurve heisst differenzierbar, wenn jede Komponentenfunktion differenzierbar ist. Analog für stetig differenzierbar.

**Definition 17.** Spur Das Bild  $\gamma(I) \in \mathbb{R}^n$  heisst die Spur von  $\gamma$ .

$$\text{Spur}(\gamma)$$

*Bemerkung 13.* Eine Kurve ist eine Abbildung und ihre Spur ist eine Teilmenge

**Beispiel 18.** Sei  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \gamma_k : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto e^{ikt} \end{aligned}$$

$|\gamma(t)| = 1 \, \forall t$  Spur  $\gamma_k = S^1 \, k > 0$ : Gegenuhrzeigersinn  
 $k < 0$ : Uhrzeigersinn

**Beispiel 19.** Schraubenlinie  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$t \mapsto (r \cos t, r \sin t, ht)$$

**Definition 18.** Tangentialvektor einer Kurve Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar.

$$\dot{\gamma} := (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots)$$

$\dot{\gamma}$  heisst der Tangentialvektor oder Geschwindigkeitsvektor zur Stelle  $t$ .

**Definition 19.** Geschwindigkeit einer Kurve  $\|\dot{\gamma}(t)\|$  heisst Geschwindigkeit. Der Geschwindigkeitsvektor hängt vom Parameter ab, nicht von der Stelle in  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition 20.** reguläre Kurve Eine stetig differenzierbare Kurve  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heisst regulär an der Stelle  $t_0 \in I$ , wenn  $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0$ . Sie heisst regulär, wenn sie an allen Stellen regulär ist.

**Beispiel 20.**  $\gamma(t) = (t^3, t^3), t \in \mathbb{R}$  Spur  $\gamma = (y = x)$   $\dot{\gamma}(t) = (3t^2, 3t^2)$   $\dot{\gamma} = (0, 0)$  nicht regulär! Aber der Punkt  $(0, 0)$  ist nicht singulär.

**Definition 21.** Tangentialeinheitsvektor Ist  $\gamma$  an der Stelle  $t_0$  regulär, so definiert man

$$T\gamma(t_0) := \frac{\dot{\gamma}(t_0)}{\|\dot{\gamma}(t_0)\|}$$

als Tangentialeinheitsvektor.  $\|T_\gamma\| = 1$

**Definition 22.** Parametrisierte Kurve Sei  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Der parametrisierte Graph von  $f$  ist die Kurve

$$\begin{aligned} \gamma_f : J &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t, f(t)) \end{aligned}$$

$$\text{Spur}(\gamma_f) = \text{Graph}(f)$$

$$\dot{\gamma}_f(t) = (1, f'(t)) \neq 0 \quad \forall t$$

*Eigenschaften 4.* parametrisierter Graph Ein parametrisierter Graph ist regulär

**Satz 20.** Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto (x(t), y(t))$  stetig differenzierbar. Wenn  $\dot{x}(t)$  keine Nullstellen hat, gibt es eine stetig differenzierbare Funktion

$$f : J \rightarrow \mathbb{R}^2$$

wobei

$$J := x(I)$$

s.d.

$$\text{Graph } f = \text{Spur } \gamma$$

*Bemerkung 14.*  $\dot{y} \neq 0 \rightsquigarrow \text{Graph von } x(y)$

**Satz 21.** Sei  $t_0 \in I$ ,  $x_0 := x(t_0)$

$$f'(x_0) = \frac{y(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$$

$$y = \frac{df}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Ist  $\gamma$   $w$ -mal stetig differenzierbar, so ist es  $f$  auch und

$$f''(x_0) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$$

**Beweis 22.**  $\dot{x} \neq 0 \implies x(t)$  streng monoton  $\implies$  invertierbar.  $\exists$  Umkehrabbildung

$$\tau : J \rightarrow I$$

$$\tau(x(t)) = t \quad \forall t$$

stetig differenzierbar

$$\tau = \frac{1}{\dot{x}}$$

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (x(t), y(t)) = (x(t), y(\tau(x(t)))) \\ &= (x(t), (y \circ \tau)(x(t))) \\ &= (x(t), f(x(t))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f &:= y \circ \tau \\
\gamma_f : x &\mapsto (x, f(x)) \\
\text{Spur } \gamma &= \text{Spur } \gamma_f = \text{Graph } f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \dot{y}t(t_0)\tau'(x_0) = \dot{y}(t_0)\frac{1}{\dot{x}(t_0)} \\
f'' &= \left(\frac{d}{dx}\dot{y}\right)\frac{1}{\dot{x}} + \dot{y}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\dot{x}}\right) = \\
&= (\ddot{y}\tau')\frac{1}{\dot{x}} + \dot{y}\left(-\frac{1}{\dot{x}^2}\ddot{x}\tau'\right) = \\
&= \ddot{y}\frac{1}{\dot{x}}\frac{1}{\dot{x}} - \dot{y}\frac{1}{\dot{x}^2}\ddot{x}\frac{1}{\dot{x}} = \\
&= \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}
\end{aligned}$$

Eigenschaften 5.

$$\begin{aligned}
\dot{x} \neq 0 &\rightsquigarrow y = f(x) \\
\dot{y} \neq 0 &\rightsquigarrow x = g(y) \\
\gamma \text{ regulär} &\implies \forall t \exists \text{ Umgebung } I \text{ von } t \text{ s.d.} \\
&\dot{x}(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \in I \\
&\dot{y}(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \in I
\end{aligned}$$

## 2.1 Die Bogenlänge

**Definition 23.** Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sei  $Z = (t_0, t_1, \dots, t_n)$   $t_i \in I$   $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  Länge des Sehnepolygons.

$$S(Z) := \sum_{i=1}^m \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

Gilt  $Z^* \supset Z$ , dann  $S(Z^*) \geq S(Z)$

$$Z_1 \subset Z^*, Z_2 \subset Z^* \implies S(Z^*) \geq \max(S(Z_1), S(Z_2))$$

Idee:  $s(\gamma) := \sup_Z S(Z)$

**Definition 24.** rektifizierbare Kurve Eine Kurve  $\gamma$  heisst rektifizierbar, wenn die Menge der Längen aller einbeschriebenen Sehnepolygone beschränkt ist.

**Satz 22.** Sei  $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  fast überall stetig differenzierbar, (d.h. jede Komponente ist fast überall stetig differenzierbar). Dann ist  $\gamma$  rektifizierbar (1) und

$$s(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \geq 0 \quad (2)$$

*Bemerkung 15.* Ist  $\gamma_f$  der parametrisierte Graph von  $f$

$$\gamma_f(t) = (t, f(t))$$

so ist

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}_f(t) &= (1, f'(t)) \\
\|\dot{\gamma}_f\| &= \sqrt{1 + f'^2} \\
s(\gamma_f) &= \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt
\end{aligned}$$

*Notation 5.* Sei  $f = (f_1, \dots, f_n)$  ein  $n$ -Tupel Funktionen

$$\int f(x) dx := \left( \int f_1 dx, \int f_2 dx, \dots, \int f_n dx \right)$$

**Lemma 3.**

$$\left\| \int_a^b f(x) \, dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\| \, dx$$

*Beweis*

1. Lemma gilt für Treppenfunktionen

2. Approximationssatz

**Beweis 23.** Sei  $Z = (t_0, \dots, t_m)$  eine Zerlegung von  $[a; b]$ 

$$\begin{aligned} S(Z) &= \sum_{i=1}^m \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \\ &= \sum \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\gamma}(t) \, dt \right\| \\ &\stackrel{\text{Lemma}}{\leq} \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}\| \, dt \\ &= \int_a^b \|\dot{\gamma}\| \, dt \end{aligned}$$

 $(\|\dot{\gamma}\| \in \mathcal{R})$  Diese Abschätzung gilt für alle Zerlegungen.  $\implies \gamma$  rektifizierbar.

$$s(\gamma) \leq \int_a^b \|\dot{\gamma}\| \, dt$$

= für (2)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists Z : S(Z) \geq f(\|\dot{\gamma}\|) - \varepsilon$$

*Treppenfunktionen + Approximationssatz***Beispiel 21.** Länge des Kreisbogens

$$\begin{aligned} \gamma : [0, \phi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (r \cos t, r \sin t) = \gamma(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= (-r \sin t, r \cos t) \\ \|\dot{\gamma}(t)\|^2 &= r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t = r^2 \\ s(\gamma) &= \int_0^\phi r \, dt = rt|_0^\phi = r\phi \end{aligned}$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\begin{aligned} \gamma : [a; r] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto \left( x, \sqrt{r^2 - x^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &:= r \cos \phi \\ s(\gamma) &= \int_a^r \sqrt{1 + f'^2} \, dx \\ \sqrt{1 + f'^2} &= \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r \int_a^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} \\ \xi &= \frac{x}{r} = r \int_{\frac{a}{r}}^1 \frac{r \, d\xi}{\sqrt{r^2 - r^2 \xi^2}} = r \int_{\frac{a}{r}}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \\ &= -r \arccos \xi \Big|_{\frac{a}{r}}^1 = -r(\arccos 1 - \arccos \cos \phi) = r\phi \end{aligned}$$

## 2.2 Parameterwechsel

**Definition 25.**  $C^k$ -Parametertransformation Sei  $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$ . Eine Abbildung  $\sigma : I \rightarrow J$  heisst  $C^k$ -Parametertransformation, wenn

1.  $\sigma \in C^k(I; J)$
2.  $\sigma$  ist umkehrbar
3.  $\sigma^{-1} \in C^k(J; I)$

Sei

$$\begin{array}{l} \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \underbrace{\beta}_{\gamma \circ \sigma^{-1}} : J \rightarrow \mathbb{R}^n \end{array}$$

**Beispiel 22.** Gegenbeispiel

$$\begin{array}{l} \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{array}$$

$\sigma$  umkehrbar,  $\sigma \in C^1$ .  $\sigma \notin C^1$   $\sigma$  ist eine  $C^0$ -Parametertransformation, aber keine  $C^0$ -Parametertransformation.

**Definition 26.** Umparametrisierung Sei

$$\begin{array}{l} \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \underbrace{\beta}_{\gamma \circ \sigma^{-1}} : J \rightarrow \mathbb{R}^n \end{array}$$

Ist  $\gamma$   $C^k$ -Kurve,  $\sigma$   $C^k$  Parametertransformation, dann  $\beta$   $C^k$ -Kurve.  $\beta$  heisst die Umparametrisierung von  $\gamma$  mittels  $\sigma$ .

*Notation 6.*

$$\gamma : \underbrace{I}_{t \in} \text{ to } \underbrace{\Sigma}_{\sigma \in}$$

**Beispiel 23.**

$$\begin{array}{l} \gamma : [0; \phi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (r \cos t, r \sin t) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sigma : [0; \phi] \rightarrow [a; 1] \\ t \mapsto r \cos t =: x \end{array}$$

$$\beta(x) = \left( x; \sqrt{r^2 - x^2} \right)$$

orientierungsumkehrend

**Definition 27.** orientierungstreu/-umkehrend Eine Parametertransformation  $\sigma : I \rightarrow J$  heisst orientierungstreu ( $\dot{\sigma} > 0$ ), wenn sie streng monoton wächst oder orientierungsumkehrend, ( $\dot{\sigma} < 0$ ) wenn sie streng monoton fällt.

*Bemerkung 16.* Ist  $\gamma$  rektifizierbar, so ist  $\beta = \gamma \circ \sigma^{-1}$  und  $S(\gamma) = S(\beta)$

**Beweis 24.**  $S(0) = \sup S(2)$  das hängt von der Parametrisierung nicht ab.



**Beweis 25.**

$$\begin{aligned}
& S(\gamma) \int_a^b \|\dot{\gamma}\| \, dt \\
& \dot{\beta} = \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\sigma}} \\
& \sigma : [a; b] \rightarrow [c; d] \\
& \int_a^b \|\dot{\gamma}\| \, dt = \int_c^d \left\| \frac{d\sigma}{d\sigma} \right\| \frac{d\sigma}{\dot{\sigma}} = \\
& \begin{cases} \int_c^d \|\dot{\beta}\| \, d\sigma & \dot{\sigma} > 0 (c > d) \\ -\int_c^d \|\dot{\beta}\| \, d\sigma & \dot{\sigma} < 0 (|\dot{\sigma}| = -\dot{\sigma}) (d > c) \end{cases} \\
& \begin{cases} \int_c^d \|\dot{\beta}\| \, d\sigma & \dot{\sigma} > 0 (c > d) \\ \int_d^c \|\dot{\beta}\| \, d\sigma & \dot{\sigma} < 0 (|\dot{\sigma}| = -\dot{\sigma}) (d > c) \end{cases} \\
& = S(\beta)
\end{aligned}$$

**Definition 28.** Umorientierung

$$\begin{aligned}
\sigma : [a; b] &\mapsto [-a; -b] \\
t &\mapsto -t
\end{aligned}$$

*Notation 7.*

$$\begin{aligned}
\gamma : [a; b] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\
\gamma^- : [-a; -b] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\
\gamma^-(t) &:= \gamma(-t)
\end{aligned}$$

**Definition 29.** Umparametrisierung auf Bogenlänge Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  regulär und fast überall stetig differenzierbar. Sei  $t_0 \in I$ 

$$S(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| \, d\tau, t \in I$$

$$\begin{aligned}
S : I &\rightarrow J = S(I) \\
\dot{S}(T) &= \|\dot{\varphi}(t)\| > 0
\end{aligned}$$

 $\implies s$  orientierungstreu.

$$\begin{aligned}
\beta &:= \gamma \circ s^{-1} \\
\beta'(s) &= \dot{\gamma}(t(s)) \frac{1}{\dots(t(s))} = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}(t(s)) \\
\|\beta'(s)\| &= 1 \quad \forall s \in J
\end{aligned}$$

### 2.3 Sektorfläche einer ebenen Kurve

**Definition 30.** Sektorfläche  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ .  $F_i$  = orientierte Fläche des  $i$ -ten Dreiecks.

$$F(Z) := \sum_i F_i$$

**Lemma 4.** Seien  $(0, 0), (x, y), (\tilde{x}, \tilde{y})$  die Ecken eines Dreiecks in  $\mathbb{R}^2$ . Die orientierte Fläche des Dreiecks ist

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{2} (x\tilde{y} - \tilde{x}y) \\
&= (x, y) \times (\tilde{x}, \tilde{y}) \\
&= \det \begin{pmatrix} x & \tilde{x} \\ y & \tilde{y} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & y \\ \tilde{x} & \tilde{y} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

**Beweis 26.**

$$\rho := \|(x, y)\|$$

$$\tilde{\rho} := \|(\tilde{x}, \tilde{y})\|$$

$$F = \frac{1}{2}\rho h$$

$$h = \tilde{\rho} \sin \psi$$

$$F = \frac{1}{\rho} \tilde{\rho} \sin \psi$$

$$z = x + iy = \rho e^{i\phi}$$

$$w = \tilde{x} + i\tilde{y} = \tilde{\rho} e^{i\tilde{\phi}}$$

$$\psi = \tilde{\phi} - \phi$$

$$\bar{z}w = \rho \tilde{\rho} e^{i(\tilde{\phi} - \psi)}$$

$$\operatorname{Im}(\bar{z}w) = \rho \tilde{\rho} \sin \psi = 2F$$

$$\bar{z}w = (x - iy)(\tilde{x} + i\tilde{y}) =$$

$$= (x\tilde{x} + \tilde{y} + i(x\tilde{y} - \tilde{x}y))$$

$$\operatorname{Im} \bar{z}w = x\tilde{y} - \tilde{x}y$$

*Notation 8.*

$$\Delta x := \tilde{x} - x$$

$$\Delta y := \tilde{y} - y$$

$$F = \frac{1}{2} [x(y + \Delta y) - (x + \Delta x)y]$$

$$F = \frac{1}{2} (x\Delta y - y\Delta x)$$

**Beweis 27.** Sei  $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  Kurve,  $Z := \underbrace{t_0}_{=a} < t_1 < \dots < \underbrace{t_n}_{=b}$  Zerlegung.

$$(x; y_i) := \gamma(t_i)$$

$$\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$$

$$\Delta y_i := y_i - y_{i-1}$$

$\implies$

$$F_i = \frac{x_{i-1}\Delta y_i - y_{i-1}\Delta x_i}{2}$$

$$F(Z) := \sum_{i=1}^n F_i$$

**Definition 31.** Der Fahrstrahl an die Kurve  $\gamma$  überstreicht den orientierten Flächeninhalt  $F(\gamma)$ , wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.d. } \forall \text{Zerlegung } Z \text{ des Fahrstrahls } \leq \delta$$

gilt

$$|F(Z) - F(\delta)| \leq \varepsilon$$

**Satz 23.** Sektorformel von Leibniz Sei  $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  fast überall stetig differenzierbar. Dann

$$F(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b (x\dot{y} - \dot{x}y) dt$$

**Beweis 28.**

$$\begin{aligned}
\Delta x_i &= x(t_i) - x(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{x}(t) \, dt \\
\Delta y_i &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{y}(t) \, dt \\
2F_i &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x_{i-1}\dot{y} - y_{i-1}\dot{x}) \, dt \\
&= \left| 2F_i - \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x\dot{y} - \dot{x}y) \, dt \right| = \\
&= \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} [(x_{i-1} - x)\dot{y} - (y_{i-1} - y)\dot{x}] \, dt \right| \leq \\
&\leq \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x_{i-1} - x)\dot{y} \, dt \right| + \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (y_{i-1} - y)\dot{x} \, dt \right|
\end{aligned}$$

$\gamma$  fast überall stetig differenzierbar  $\implies \gamma$  stetig und fast überall differenzierbar  
verallgemeinerter Schrankensatz  $\implies \exists L : |\dot{x}| < L, |\dot{y}| < L$  fast überall und

$$\begin{aligned}
&|x(t) - x_{i-1}| = \\
&|x(t) - x(t_{i-1})| \leq L(t - t_{i-1}) \\
&|y(t) - y_{i-1}| \leq L(t - t_{i-1}) \\
J_i &\leq 2L^2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_{i-1}) \, dt = \\
&= 2L^2 \frac{1}{2} (t - t_{i-1})^2 \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} = \\
&= L^2 (t_i - t_{i-1})^2
\end{aligned}$$

Ist die Feinheit  $\leq \delta$ , so ist  $t_i - t_{i-1} \leq \delta$

$$J_i \leq L^2 \delta (t_i - t_{i-1})$$

$$\begin{aligned}
&\left| F(Z) - \frac{1}{2} \int_a^b (x\dot{y} - \dot{x}y) \, dt \right| = \\
&= \left| \sum_{i=1}^n F_i(Z) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x\dot{y} - \dot{x}y) \, dt \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n J_i \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n L^2 \delta (t_i - t_{i-1}) = \\
&= \frac{1}{2} L^2 \delta (t_1 - t_0 + t_2 - t_1 + \dots) = \\
&= \frac{1}{2} L^2 \delta (b - a) \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

für

$$\delta = \frac{2\varepsilon}{L^2(b-a)}$$

**Beispiel 24.**

$$\begin{aligned}
&\gamma : [0, \phi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\
&t \mapsto (r \cos t, r \sin t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma} &= (-r \sin t, r \cos t, r \cos t) \\
F &= \frac{1}{2} \int_0^\phi (r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t) dt = \\
&= \frac{r^2}{2} \int_0^\phi dt = \frac{r^2 \phi}{2} \\
\phi &= 2\phi \implies \pi r^2
\end{aligned}$$

*Eigenschaften 6. Sektorformel*

1. Additivität:  $c \in (a; b)$

$$F(\gamma) = F(\gamma|_{[a;c]}) + F(\gamma|_{[c;b]})$$

2. Orientierungsumkehrung

$$F(\gamma^-) = -F(\gamma)$$

$$\gamma(t) := \gamma(-t)$$

3.

$$\begin{aligned}
A : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} ex + fy \\ gx + hy \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$(A\gamma)(t) = A\gamma(t)$$

$$d(A\gamma) = A\dot{\gamma}$$

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \det(\gamma \mid \dot{\gamma}) = \det \begin{pmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \end{pmatrix}$$

$$F(\gamma) = \frac{1}{2} \det(\gamma \mid \dot{\gamma}) dt$$

$$\det(A\gamma \mid A\dot{\gamma}) = \det(A(\gamma \mid \dot{\gamma})) = \det A \det(\gamma \mid \dot{\gamma})$$

$$F(A\gamma) = \det A \cdot F(\gamma)$$

insbesondere

$$\det A = 1 (\text{d.h. } A \in SL(2; \mathbb{R}))$$

$$F(A\gamma) = F(\gamma)$$

**Definition 32.** Geschlossene Kurve Eine Kurve  $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heisst geschlossen, wenn

$$\gamma(a) = \gamma(b)$$

gilt.

**Definition 33.** umschlossener orientierter Flächeninhalt Sei  $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  geschlossen und so dass  $F(\gamma)$  existiert, so heisst  $F(\gamma)$  der umschlossene orientierte Flächeninhalt.

*Bemerkung 17.*  $\gamma(a) = \gamma(b)$

$$\begin{aligned}
\int_a^b d(xy) dt &= (xy)|_a^b = 0 \\
F(\gamma) &= \int_a^b x\dot{y} dt = - \int_a^b \dot{x}y dt
\end{aligned}$$

(wenn  $\gamma$  geschlossen)

Bemerkung 18. Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}(x, y) &\in \mathbb{R}^2 \\ \rho e^{i\phi} &= x + iy =: z \in \mathbb{C} \\ \gamma : [a; b] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \dot{z} &= \dot{\rho} e^{i\phi} + i\rho \dot{\phi} e^{i\phi} \\ t &\mapsto (x(t), y(t)) \\ t &\mapsto z(t) \\ t &\mapsto \rho(t) e^{i\phi(t)}\end{aligned}$$

Man erlaubt  $\rho(t) < 0$

Bemerkung 19. Länge

$$\begin{aligned}L &= \int_a^b \|\dot{\gamma}\| \, dt = \int_a^b \sqrt{\dot{z}\bar{z}} \, dt \\ \bar{z} &= \rho e^{-i\phi}, \quad \dot{\bar{z}} = \dot{\rho} e^{-i\phi} - i\rho \dot{\phi} e^{-i\phi} \\ z &= x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \\ \dot{z} &= \dot{x} + i\dot{y}, \quad \dot{\bar{z}} = \dot{x} - i\dot{y} \\ \bar{z}\dot{z} &= (x\dot{x} + y\dot{y}) + i(x\dot{y} - \dot{x}y) \\ &= \frac{1}{2} \int \operatorname{Im}(\bar{z}\dot{z}) \, dt \\ \bar{z}\dot{z} &= \rho e^{-i\phi} (\dot{\rho} e^{i\phi} + \rho \dot{\phi} e^{i\phi}) = \rho \dot{\phi} + i\rho^2 \dot{\phi} = \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \rho^2 \dot{\phi} \, dt\end{aligned}$$

Beispiel 25.

$$\begin{aligned}y : [0; 2\pi] &\mapsto \mathbb{R}^2 \\ \phi &\mapsto a \cos(3\phi) e^{i\phi}\end{aligned}$$

$$\rho(\phi) = a \cos(3\phi)$$

$\rho$  kann auch negativ sein

$$\begin{aligned}F(\gamma) &= \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} a^2 \cos^2(3\phi) \, d\phi = \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} a^2 \cos^2(\phi) \frac{d\phi}{3} = \\ \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)}{2} \, d\phi &= \frac{a^2}{4} 2\pi = \frac{a^2 \pi}{2} \\ \int_0^{2\pi} \cos^2 &= \int_0^{2\pi} \sin^2\end{aligned}$$

### 3 Taylor [Kap 14]

Wir wollen eine Funktion durch Polynom approximieren.

**Definition 34.** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$   $n$ -mal differenzierbar. Das  $n$ -te Taylorpolynom von  $f$  im Punkt  $a \in I$  ist das Polynom  $T(x)$  des Grades  $\leq n$  mit

$$\begin{aligned}T(a) &= f(a) \\ T'(a) &= f'(a) \\ T''(a) &= f''(a) \\ \dots T^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a)\end{aligned}$$

*Notation 9.*  $I_n f(x; a)$

**Beispiel 26.**  $n = 1$

$$T_1 f(x; a) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

*Bemerkung 20.* Sei  $I_n f(x; a)$  das  $n$ -te Taylorpolynom von  $f$

$$T(x) = I_n f(x; a) = \sum_{k=0}^n a_k (x - a)^k$$

$$f(a)T'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k (x - a)^{k-1}$$

$$f(a)T''(x) = \sum_{k=2}^n k(k-1) a_k (x - a)^{k-2}$$

$$f(a)T'''(x) = \sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2) a_k (x - a)^{k-3}$$

...

$$T(a) = a_0$$

$$T'(a) = a_1$$

$$T''(a) = 2a_2$$

$$T'''(a) = 3 \cdot 2a_3$$

Übung  $l \leq n$  (Induktion)

$$T_{(x)}^{(l)} = \sum_{k=l}^n k(k-1)(k-2) \cdots (k-l+1) a_k (x - a)^{k-l}$$

$$T^{(l)}(a) = l! a_l = f^{(l)}(a)$$

$$a_l = \frac{f^{(l)}(a)}{l!}$$

*Eigenschaften 7.*

$$T_n f(x; a) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

**Definition 35.** Fehler

$$R_{n+1}(x; a) := f(x) - T_n f(x; a)$$

**Lemma 5.**

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_{n+1}(x; a)}{(x - a)^n} = 0$$

$$R_2 = f(x) - T_1 f(x, a)$$

$$T_1 f(x; a) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$R_2 = \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} \xrightarrow{\text{f differenzierbar}} 0$$

**Beweis 29.**  $T = T_n f$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T(x)}{(x - a)^n} =$$

$$(L'Hopital) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - T'(x)}{n(x - a)^{n-1}} =$$

$$(L'Hopital) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x) - T''(x)}{n(n-1)(x - a)^{n-2}} = \dots$$

$$\dots = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x) - T^{(n)}(x)}{n!} = 0$$

denn  $f^{(n)}(a) = T^{(n)}(a)$

**Korollar 8.** *Qualitative Taylorformel* Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $n$ -mal differenzierbar. Dann

$$\exists r; I \rightarrow \mathbb{C}$$

stetig mit

$$r(a) = 0$$

s.d.

$$f(x) = I_n f(x; a) + (x - a)^n r(x)$$

**Beweis 30.**

$$r(x) := \frac{f(x) - I_n f(x; a)}{(x - a)^n}$$

$x \neq a$  stetig auf  $I \setminus \{a\}$

$$\lim_{x \rightarrow a} r(x)$$

Wir erweiter  $r$  auf  $I$  mit  $r(a) = 0$

*Notation 10.* Landau-Symbol Seien  $f$  und  $g$  komplexe Funktionen in einer punktierten Umgebung von  $a$ . Man schreibt

$$f = o(g), x \rightarrow a$$

falls

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Gilt zusätzlich

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

so sagt man:  $f$  geht für  $x \rightarrow a$  schneller gegen 0 als  $g$ .

$f : I \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $a \in I$   $n$ -mal differenzierbar:

$$f(x) = T_n f(x; a) + o((x - a)^n), x \rightarrow a$$

**Beispiel 27.**  $T_4(x; 0)$

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x$$

$$T_4 f(x; 0) = x - \frac{1}{3!} x^3$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

**Beispiel 28.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x^3} = \\ &= -\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^4)}{x^3} = \\ &= -\frac{1}{6} + 0 \cdot 0 = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

**Satz 24.** *Integralform von  $R_{n+1}$*  Sei  $f \in \Phi^{n+1}(I, \mathbb{C})$  ( $\Phi$  differenzierbare Funktionen). Dann

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

**Beweis 31.** *Durch Induktion*

$n = 0$

$$\begin{aligned} R_1(x) &= f(x) - T_0 f(x; a) \\ T_0 f(x; a) &= f(a) \\ R_1(x) &= f(x) - f(a) \\ \frac{1}{1!} \int_a^x f'(t) \, dt &= f(x) - f(a) \end{aligned}$$

$n + 1$

$$\begin{aligned} f - T_{n-1} f &= R_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) \, dt \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int \frac{d}{dt} \frac{(x-t)^n}{-n} f^{(n)}(t) \, dt \\ &= -\frac{1}{n!} \left[ (x-1)^n f^{(n)}(t) \right] \Big|_a^x + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) \, dt \\ &= \frac{1}{n!} (x-a)^n f^{(n)}(a) + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) \, dt \\ \implies f - T_n f &= \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) \, dt \end{aligned}$$

**Korollar 9.** *Lagrange-Form für  $R_{n+1}$*  Sei  $f \in \Phi^{n+1}(I; \mathbb{R})$   $a \in I$ .

$$\forall x \in I \exists \xi \in I : R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

**Beispiel 29.**

$$\begin{aligned} f &= \sin x \\ T_n f(x; 0) &= x - \frac{x^3}{6} \\ f^{(5)}(x) &= \cos x \\ \exists \xi : \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{5!} \cos \xi x^5 \end{aligned}$$

**Beweis 32.**  $f \in \mathcal{R}^{n+1}(I : \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) \, dt = \sigma \int_a^x p(t) f^{(n+1)}(t) \, dt = \dots \\ (t) &:= \frac{|x-t|^n}{n!} \geq 0 \\ \sigma &= \begin{cases} 1 & a < x \\ (-1)^n & a > x \end{cases} \\ \dots &\stackrel{MWS}{=} \sigma f^{(n+1)}(\xi) \int_a^x p(t) \, dt \\ \int_a^x p(t) \, dt &= \sigma \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n \, dt = \sigma \frac{1}{(n+1)!} (x-t)|_a^x = \sigma \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \\ R_{n+1} &\underbrace{\stackrel{\sigma^2}{=}}_1 f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

### 3.1 Lokale Extrema

**Satz 25.** Sei  $f \in \mathcal{R}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ . Sei  $a \in I$  und es gelte

$$\begin{aligned} f'(a) &= f''(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0 \\ f^{(n+1)}(a) &\neq 0 \end{aligned}$$

Dann



1.  $n$  gerade  $\implies f$  hat in  $a$  kein Extrema
2.  $n$  ungerade,  $f^{(n+1)}(a) > 0 \implies f$  hat in  $a$  ein strenges lokale Minimum
3.  $n$  ungerade,  $f^{(n+1)}(a) < 0 \implies f$  hat in  $a$  ein strenges lokale Maximum

Hint: Beweis anschauen > auswendig lernen

**Beweis 33.**  $T_n f(x; a) = f(a)$

$$\begin{aligned} f(x) &= T_n f(x; a) + R_{n+1}(x) \\ &= f(a) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} \text{ stetig} &\implies \exists \text{ Umgebung von } a \text{ mit } f^{(n+1)} \neq 0 \\ f^{(n+1)}(a) &\neq 0 \end{aligned}$$

Man ersetze  $\neq$  durch  $<$  und  $>$ .

$n$  gerade  $\implies (n+1)$  ungerade. Das Vorzeichen  $(x-a)^{n+1}$  verändert sich

$n$  ungerade  $\implies (n+1)$  gerade  $(x-a)^{n+1}$  positiv

### 3.2 Taylorreihen

**Definition 36.** Taylorreihe Sei  $f \in \mathcal{R}^\infty(I, \mathbb{C})$ . Man definiert

$$Tf(x; a) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

Taylorreihe von  $f$  im Punkt  $a$

**Bemerkung 21.** 1. Es kann passieren, dass die Reihe nicht konvergiert

2. Es kann auch passieren, dass die Reihe in einer Umgebung von  $a$  konvergiert, aber nicht gegen  $f$ !

**Beispiel 30.**

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f^{(k)}(0) &= 0 \quad \forall k \\ \implies Tf(x; 0) &= 0 \neq f(x) \end{aligned}$$

**Definition 37.** Konvergiert  $Tf$  gegen  $f$  in einer Umgebung  $U$  von  $a$ , so sagt man:

$f$  besitzt in  $U$  eine Taylorentwicklung mit  $a$  als Entwicklungspunkt.

oder

$f$  ist reell analytisch in  $U$

**Beweis 34.** Ist  $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$  mit  $|x-a| < R$  (Konvergenzradius)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sum &= \sum \frac{d}{dx} \\ f^{(k)}(a) &= k! a_k \\ \implies Tf &= \sum a_k (x-a)^k \end{aligned}$$

**Definition 38.** Sei  $f : \overset{\in \mathbb{C}}{U} \rightarrow \mathbb{C}$  Sei  $a \in U$ . Man sagt,  $f$  ist analytisch in  $a \in U$  wenn  $\exists r > 0$  mit  $K_r(a) \subset U$  und  $\exists$  Potenzreihe  $\sum a_k z^k$  mit Konvergenzradius  $> r$  s.d.

$$f(z) = \sum a_k (z-a)^k \quad \forall z \in K_r(a)$$

| Struktur                     | Definitionsbereich                 | Zielmenge  |
|------------------------------|------------------------------------|--|
| stetige Funktionen           | $U \subset \mathbb{R}, \mathbb{C}$ | $\mathbb{R}, \mathbb{C}$                                 |
| differenzierbare Funktionen  | $I \in \mathbb{R}$                 | $\mathbb{R}, \mathbb{C}$                                 |
| integrierbare Funktionen     | $I \in \mathbb{R}$                 | $\mathbb{R}, \mathbb{C}$                                 |
| Kurven                       | $I \in \mathbb{R}$                 | $\mathbb{R}^n$   |
| stetige Abbildungen          | $U \in \mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m$ | $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$                             |
| differenzierbare Funktionen  | $U \in \mathbb{R}^n$               | Grenzwerte in $\mathbb{R}^m$<br>$\mathbb{R}, \mathbb{C}$ |
| differenzierbare Abbildungen | $U \in \mathbb{R}^n$               | partielle Ableitung<br>$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$      |
| integrierbare Abbildungen    | $U \in \mathbb{R}^n$               | $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$                             |

Tabelle 1: Übersicht über Funktionen / Abbildungen

## 4 Elemente der Topologie [Band 2, Kap 1]

Konvergenz, Abgeschlossenheit, Stetigkeit, Häufungspunkte

**Definition 39.** euklidische Norm Die euklidische Norm auf  $\mathbb{R}^n$  ist

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

*Eigenschaften 8.*

$$\|x\| > 0 \quad \forall x \neq 0, \quad \|0\| = 0 \quad (1)$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad (3)$$

**Definition 40.** euklidischer Abstand Der euklidische Abstand zweier Punkte  $a, b \in \mathbb{R}^n$  ist

$$d(a, b) = \|b - a\|$$

**Definition 41.** offene Kugel Die offene Kugel in  $\mathbb{R}^n$  mit Mittelpunkt  $a$  und Radius  $r > 0$  ist die Menge

$$K_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) < r\}$$

**Definition 42.** Konvergenz Eine Folge  $(x_k)$  in  $\mathbb{R}^n$  heisst konvergent, wenn  $\exists a \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, a) &= 0 \\ x_k &\in \mathbb{R}^n \quad \forall k \\ x_k &= (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}) \\ x_{ki} &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ist das der Fall, so schreibt man

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$$

*Bemerkung 22.* (geometrisch)

$$x_k \rightarrow a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$$

$k_\varepsilon(a)$  fast alle Folgenglieder enthält

**Lemma 6.**

$$x_k \rightarrow a \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow x_{ki} \rightarrow a_i \quad \forall i = (1, \dots, n)$$

*Konvergenz      komponentenweise Konvergenz*

**Beweis 35.**  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \forall i \quad |x_{ki} - a_i| &\leq \|x_k - a\| \rightarrow 0 \\ \implies x_{ki} &\rightarrow a_i \quad \forall i \end{aligned}$$

$\Leftarrow$

$$\begin{aligned} \|x_k - a\| &\leq \sum_{i=1}^n |x_{ki} - a_i| \rightarrow 0 \\ \implies \|x_k - a\| &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

**Definition 43.** Eine Folge  $(x_k) \in \mathbb{R}^n$  heisst:

**beschränkt** wenn  $\exists r > 0$  mit  $x_k \in K_r(0) \quad \forall k$

**Cauchyfolge** wenn  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$

$$\|x_k - x_l\| < \varepsilon \quad \forall k, l > N$$

**Satz 26.** Bolzano-Weierstrass

1. Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge
2. Jede Cauchyfolge konvergiert

**Beweis 36.** 1. durch Induktion nach  $n$

$n = 1$  Beweis in  $\mathbb{R}$

Annahme: Beweis gilt in  $\mathbb{R}^n$   $(x_k)$  beschränkt in  $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{aligned} \implies (x_{k1}, \dots, x_{kn}) &\text{ beschränkt in } \mathbb{R} \\ \implies \exists l_k : (x_{kl1}, \dots, x_{kln}) &\text{ konvergiert} \\ x_{k_{l_m}n+1} &\text{ beschränkt in } \mathbb{R} \\ \implies \exists l_m : x_{k_{l_m}n+1} &\text{ konvergiert} \\ \implies (x_{k_{l_m}}) &\text{ konvergiert} \end{aligned}$$

2.

$$|x_{ki} - x_{li}| \leq \|x_k - x_l\| \quad \forall i$$

$$(x_k) \text{ Cauchy} \implies x_{ki} \text{ Cauchy } \forall i \implies x_{ki} \text{ konvergiert} \implies x_k \text{ konvergiert}$$

**Definition 44.** Umgebungen

- Die offene Kugel  $K_\varepsilon(a), \varepsilon > 0$  heisst  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a \in \mathbb{R}^n$
- Eine Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  heisst Umgebung von  $a \in \mathbb{R}^n$ , wenn sie eine  $\varepsilon$ -Umgebung enthält.

*Eigenschaften 9.* Umgebungen

1. Seien  $U, V$  Umgebungen von  $a \implies U \cap V$  und  $U \cup V$  sind Umgebungen von  $a$
2.  $U$  Umgebung von  $a$ ;  $V \subset U \implies V$  Umgebung von  $a$
3. Hausdorffsche Trennungseigenschaft:  $\forall a \neq b \quad \exists U$  von  $a$  und  $\exists V$  von  $b$  mit  $U \cap V = \emptyset$

**Beispiel 31.**  $U = K_\varepsilon(a), V = K_\varepsilon(b) \quad \varepsilon = \frac{1}{3} \|b - a\|$

Zu beweisen mit der Dreiecksungleichung

**Definition 45.** offene Menge Eine Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  heisst offen, wenn sie eine Umgebung von  $\forall x \in U$  ist. D.h.

$$\forall x \in U \quad \exists \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(x) \subset U$$

**Beispiel 32.** 1.  $\mathbb{R}^n$  ist offen

2.  $\emptyset \in \mathbb{R}^n$  ist offen

3.  $K_r(a)$  ( $r > 0, a \in \mathbb{R}^n$ ) ist offen

*Bemerkung 23.* Rechenregeln

1. Der Durchschnitt endlich vieler offener Menge ist offen.

2. Die Vereinigung beliebig vieler offener Menge ist offen.

**Definition 46.** abgeschlossene Menge Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  heisst abgeschlossen, wenn ihr Komplement offen ist.

**Beispiel 33.** •  $\emptyset$

•  $\mathbb{R}^n$

•

$$\overline{K_r(a)} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}$$

$$K_r(a) := \{\|x - a\| > r\} \text{ offen}$$

*Eigenschaften 10.* • Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

• Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

**Beispiel 34.** Gegenbeispiel (wichtig!) in  $\mathbb{R} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$  offen

$$\cap_n \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\} \text{ abgeschlossen}$$

Dabei erinnert man sich:  $\cap$  endlich offen = offen

**Satz 27.**  $A \subset \mathbb{R}^n$

$A$  abgeschlossen  $\Leftrightarrow \forall$  konvergente Folge  $(a_k)$  mit  $a_k \in A \forall k$  konvergiert gegen  $a \in A$

**Beweis 37.**  $\Rightarrow$  Widerspruchsbeweis

Annahme:  $A$  abgeschlossen,  $(a_k), a_k \in A \forall k, a_k \rightarrow a, a \notin A$

$A$  abgeschlossen  $\Rightarrow A^C = \mathbb{R}^b \setminus A$  offen

$a \notin A \Rightarrow a \in A^C$

$\Rightarrow A^C$  ist eine Umgebung von  $a \Rightarrow A^C$  enthält unendlich viele  $a_k$  Widerspruch, denn  $a_k \notin A^C \forall k$

$\Leftarrow$  Kontrapositionsbeweis

Sei  $A$  nicht abgeschlossen, dann ist  $A^C$  nicht offen.

$$\Rightarrow a \in A^C : \forall \varepsilon > 0$$

$$K_\varepsilon(a) \not\subset A^C$$

insbesondere  $\varepsilon = \frac{1}{k} \quad k \in \mathbb{N}$

Sei

$$a_k \in K_{\frac{1}{k}}(a), \quad a_k \notin A^C$$

1.  $a_k \in A \forall k$

2.  $a_k \rightarrow a$  (da  $\|a_k - a\| < \frac{1}{k}$ )

3.  $a \notin A$

**Definition 47.** Randpunkt von  $M$  Sei  $M \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$   $x$  heisst Randpunkt von  $M$ , wenn jede Umgebung von  $x$  Punkte aus  $M$  und aus  $M^C$  enthält.

*Notation* 11. Randpunkte von  $M$

$$\partial M : \{\text{Randpunkte von } M\}$$

*Bemerkung* 24.

$$\partial(M^C) = \partial M$$

**Beispiel 35.**

$$\partial K_r(a) = S_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| = r\} = \overline{\partial K_r(a)}$$

Übung: zeigen Sie das. Tipp:  $x \in S_r(a) \iff K_\varepsilon(x), \varepsilon < r$

**Beispiel 36.**  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$$\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

**Satz 28.** Sei  $M \in \mathbb{R}^n$

1. (a)  $U \subset M$ ,  $U$  offen  $\implies U \subset M \setminus \partial M$   
 (b)  $M \setminus \partial M$  ist offen
2. (a)  $A \supset M$ ,  $A$  abgeschlossen  $\implies A \supset M \cup \partial M$   
 (b)  $M \cup \partial M$  abgeschlossen
3. (a)  $\partial M$  abgeschlossen

**Beweis 38.** 1. (a) zu zeigen:  $\partial M \cap U = \emptyset$ . Widerspruchsbeweis: Sei  $\partial M \cap U \neq \emptyset$  Sei  $x \in \partial M \cap U \implies U$  Umgebung von  $x$  und  $x \in \partial M \implies U$  enthält aus  $M^C$  Widerspruch, denn  $U \subset M$

(b) Sei  $a \in M \setminus \partial M$ . Dann gibt es eine Umgebung  $U$  von  $a$  mit  $U \subset M$  sonst wäre  $a \in \partial M$  1a  $\implies U \subset M \setminus \partial M$

2. (a) Komplement  
 (b) Komplement
3. (a) Durchschnitt zweier abgeschlossener Mengen

$$\partial M = (M \cup \partial M) \cap (M^C \cup \partial M^C)$$

**Korollar 10.**

$$U \text{ abgeschlossen} \iff U \text{ alle ihre Randpunkte enthält}$$

*Notation* 12. offener Kern/Innere, abgeschlossene Hülle  $M^0 := M \setminus \partial M$  der offene Kern von  $M$  oder das Innere von  $M$ . Die grösste offene Menge, die in  $M$  liegt.

$\overline{M} := M \cup \partial M$  die abgeschlossene Hülle von  $M$ . Die kleinste abgeschlossene Menge, die  $M$  umfasst.

**Definition 48.** Häufungspunkt Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$   $x$  heisst Häufungspunkt von  $M$  wenn jede Umgebung von  $x$  ein  $y \in M$  enthält mit  $y \neq x$ .

äquivalent: Jede punktierte Umgebung von  $x$  enthält Punkte aus  $M$

$$\mathcal{H}(M) := \{\text{Häufungspunkte}\}$$

$$\mathcal{H}(K_r(a)) = \mathcal{H}(\overline{K_r(a)}) = S_r(a) = \partial K_r(a)$$

im Allgemeinen:  $\partial M \neq \mathcal{H}(M)$

**Beispiel 37.**  $M = \mathbb{R} \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{H}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \qquad \partial \mathbb{R} = \emptyset$$

**Beispiel 38.**  $M = \{a\} \subset \mathbb{R}$

$$\mathcal{H}(\{a\}) = \emptyset \qquad \partial \{a\} = a$$

**Lemma 7.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$

$$M \cup \mathcal{H}(M) = M \cup \partial M = \overline{M}$$

**Beweis 39.** zu zeigen:

$$1. \mathcal{H} \setminus M \subset \partial M$$

$$2. \partial M \setminus M \subset \mathcal{H}(M)$$

$$1. \text{ Sei } x \in \mathcal{H} \setminus M \implies \text{Jede Umgebung von } x \text{ enthält ein } y \text{ mit } y \in M, x \neq y$$

$$U \ni x \in M^C$$

$$\implies \text{Jede Umgebung von } x \text{ enthält Punkte in } M \text{ und aus } M^C \implies x \in \partial M$$

$$2. x \in \partial M \setminus M. \text{ Jede Umgebung von } x \text{ enthält ein } y \in M$$

$$x \in M^C \implies y \neq x \implies x \in \mathcal{H}(M)$$

**Korollar 11.**  $A$  abgeschlossen  $\Leftrightarrow A$  enthält alle ihre Häufungspunkte.

#### 4.1 Verallgemeinerung: Normierte Räume

**Definition 49.** Norm Sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  als Körper.

Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$  Eine Norm auf  $V$  ist eine Abbildung

$$\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$$

s.d.

1.

$$\|0\| = 0, \|x\| > 0, \forall x \in V \setminus \{0\}$$

2.

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in V$$

3.

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in V$$

**Definition 50.** normierter Raum Das Paar  $(V, \| \cdot \|)$  heisst normierter Raum.

**Beispiel 39.**  $\mathbb{R}^n$  mit der euklidischen Norm

**Beispiel 40.**  $p$ -Norm  $\mathbb{K}^n$  mit der  $p$ -Norm  $p \geq 1$

$$\|x\|_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$$

( $p = 2$  euklidisch)

**Beispiel 41.** Maximumsnorm  $\mathbb{K}^n$  mit der Maximumnorm

$$\|x\|_\infty := \max \{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

Lemma:

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p$$

**Beispiel 42.**  $L^p$ -Norm  $\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{K})$  mit der  $L^p$ -Norm,  $p \geq 1$

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p dx}$$

$p = 2$  ist für die Quantenmechanik interessant

**Beispiel 43.** Supremumsnorm  $\mathcal{C}([a; b], \mathbb{K})$  mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_{\infty} := \sup \{|f(x)|, x \in [a; b]\}$$

**Beispiel 44.** Sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt auf  $V$ . Dann ist

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

eine Norm.

*Bemerkung 25.* Alles was wir bisher bewiesen haben, gilt auf beliebigen normierten Räumen.

## 4.2 Verallgemeinerung: Metrische Räume

**Definition 51.** Abstand, metrischer Raum Sei  $X$  eine Menge. Eine Metrik auf  $X$  ist eine Abbildung

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

s.d.

1.  $d(x, x) = 0, d(x, y) > 0 \forall x, y \in x \text{ mit } x \neq y$
2.  $d(x, y) = d(y, x)$
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \forall x, y, z \in x$ 
  - Die Zahl  $d(x, y)$  heisst Abstand der Punkte  $x$  und  $y$ .
  - Das Paar  $(X, d)$  heisst metrischer Raum.

**Beispiel 45.**  $(V, \|\cdot\|)$  normierter Raum

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

**Beispiel 46.**  $M$  nicht leere Menge

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

**Beispiel 47.** Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  fast überall differenzierbar und regulär

$$M = I, d(x, y) := \left| \int_x^y \|\dot{\gamma}(t)\| dt \right|$$

Länge zwischen  $\gamma(x)$  und  $\gamma(y)$ .

**Definition 52.**

$$K_r(a) := \{x \in M : d(x, a) < r\}$$

offene Kugel

- $K_{\varepsilon}(a)$   $\varepsilon$ -Umgebungen von  $a$
- Umgebungen
- ...

*Bemerkung 26.* Es gelten die gleichen Rechenregeln für offene Mengen

**Definition 53.** Durch  $d$  erzeugte Topologie  $U \subset X$  heisst offen, wenn  $U$  eine Umgebung von jedem  $x \in U$  ist.

$$\mathcal{O}(d) := \{\text{offene Mengen von } X \text{ bez. } d\} \subset P(X)$$

die durch  $d$  erzeugte Topologie.

**Definition 54.**  $A$  ist abgeschlossen, wenn  $A^c$  offen ist.

**Definition 55.** Eine Folge  $(x_k)$  in  $(X, d)$  heisst konvergent, wenn  $\exists x \in X$  mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, x) = 0$$

**Lemma 8.** Eine Folge besitzt höchstens einen Grenzwert.

**Beweis 40.** Seien  $x, x' \in X$

$$\begin{aligned} \lim d(x, x_k) &= 0 \\ \lim d(x', x_k) &= 0 \\ 0 \leq d(x, x') &\leq d(x, x_k) + d(x_k, x') \\ &\implies x = x' \end{aligned}$$

**Satz 29.**  $A \subset X, d$

$A$  abgeschlossen  $\Leftrightarrow \forall$  konvergente Folge  $(x_k)$  mit  $x_k \in A \forall k$  gegen ein Element von  $A$  konvergiert

### 4.3 Teilraumtopologie

**Definition 56.** induzierte Metrix / Spurmetrik Sei  $(X, d)$  metrischer Raum. Sei  $X_0 \subset X$ . Man definiert

$$d_0 := X_0 \times X_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d_0 := d|_{X_0 \times X_0}$$

$$\forall x, y \in X_0$$

$$d_0(x, y) = d(x, y)$$

**Lemma 9.**  $d_0$  ist eine Metrik.

**Definition 57.** Spurtopologie  $a \in X_0$

$$K_r^{d_0}(a) := \{x \in X_0 : d_0(x, a) < r\}$$

$$K_r^{d_0}(a) := K_r(a) \cap X_0$$

$\implies$

$$\mathcal{O}d_0 = \{U \cap X_0, U \in \mathcal{O}(d)\}$$

*Notation 13.*  $X_0$ -offen bedeutet  $X_0$  bezüglich der Spurtopologie

*Bemerkung 27.*  $X_0$ -offen  $\not\Rightarrow$  offen in  $X$

**Beispiel 48.**  $X = \mathbb{R}$  (euklidisch),  $X_0 = \mathbb{Q}$ .  $\mathbb{Q} \subset X_0$  ist  $X_0$ -offen.  $\mathbb{Q}$  ist  $\mathbb{Q}$ -offen, aber nicht offen in  $\mathbb{R}$ .

**Lemma 10.**  $U \subset X_0$  Ist  $X_0$  offen in  $X$ , dann  $U$  ist  $X_0$ -offen  $\Leftrightarrow U$  offen in  $X$

**Beweis 41.**  $U \subset X_0$  offen  $\implies \exists V \subset X$ , offen s.d.  $U = V \cap X_0 \implies U$  offen

### 4.4 Produkttopologie

**Definition 58.** Produkttopologie  $(X, d_x), (Y, d_y)$  metrische Räume. Man definiert  $d$  auf  $X \times Y$

$$d : (X \times Y) \times (X \times Y)$$

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max\{d_x(x_1, x_2), d_y(y_1, y_2)\}$$

$$x_1, x_2 \in X \quad y_1, y_2 \in Y$$

**Lemma 11.**  $d$  ist eine Metrik auf  $X \times Y$



*Bemerkung 28.* offene Kugeln

$$\begin{aligned} K_r^d((x, y)) &:= \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y : \max\{d_x(\tilde{x}, x), d_y(\tilde{y}, y)\}\} < r \\ &= \left\{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y : d_x(\tilde{x}, x) < r \text{ und } d_y(\tilde{y}, y) < r\right\} \\ K_r^d((x, y)) &= K_r^{d_x}(x) \times K_r^{d_y}(y) \end{aligned}$$

$\implies$

$$W \subset X \times Y \text{ offen} \Leftrightarrow \forall (x, y) \in W \exists$$

Umgebung  $U$  von  $x$  in  $X$  und Umgebung  $V$  von  $y$  in  $Y$  s.d

$$W \subset U \times V$$

**Beispiel 49.** Sind  $U \subset X$  und  $V \subset Y$  offen, dann ist  $U \times V$  offen in  $X \times Y$

## 4.5 Äquivalenz Metriken und Normen

**Definition 59.** äquivalente Metriken Seien  $d$  und  $d^*$  Metriken auf  $X$ . Sie heissen äquivalent, wenn

$$\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d^*)$$

**Lemma 12.** Zwei Metriken  $d$  und  $d^*$  sind genau dann äquivalent, wenn jede  $d$ -Kugel eine  $d^*$ -Kugel enthält mit demselben Mittelpunkt und umgekehrt.

**Beweis 42.**  $\Rightarrow$  trivial

$\Leftarrow$  Eine  $d$ -Umgebung  $U$  enthält eine  $d$ -Kugel, deshalb enthält sie eine  $d^*$ -Kugel, deshalb ist sie eine  $d^*$ -Umgebung

**Definition 60.** äquivalente Normen Zwei Normen  $\|\cdot\|$  und  $\|\cdot\|^*$  auf  $V$  heissen äquivalent, wenn sie äquivalente Metriken erzeugen.

**Lemma 13.**  $\|\cdot\|$  und  $\|\cdot\|^*$  sind genau dann äquivalent, wenn

$$\exists c > 0 \text{ und } C > 0 \text{ s.d. } \forall x \in V$$

$$c\|x\| \leq \|x\|^* \leq C\|x\|$$

*Notation 14.*  $K$  offene Kugel bezüglich  $\|\cdot\|$   $K^*$  offene Kugel bezüglich  $\|\cdot\|^*$

**Beweis 43.**  $\Rightarrow$   $\|\cdot\|$  und  $\|\cdot\|^*$  äquivalent. Lemma 12  $\implies K_1(0)$  enthält eine Kugel  $K_r^*(0), r > 0$

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ x \neq 0, y &:= \frac{rx}{2\|x\|^*} \\ \|y\|^* &= \frac{r}{2} < 1 \\ \implies y &\in K_r^*(0) \implies y \in K_1(0) \implies \|y\| < 1 \\ \|y\| &= \frac{r}{2} \frac{\|x\|}{\|x\|^*} \\ \|x\|^* &> \frac{r}{2} \|x\| \\ c &:= \frac{r}{2} \end{aligned}$$

$\Leftarrow$

$$K_{cr}^*(a) \subset K_r(a) \subset K_{Cr}^*(a)$$

$\implies$  Metriken sind äquivalent.

**Satz 30.** Je zwei Normen auf einem endlichdimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum sind äquivalent.

**Beweis 44.** Sei  $V = \mathbb{R}^n$  mit Norm  $\| \cdot \|$ . wir zeigen,  $\| \cdot \|$  äquivalent zu  $\| \cdot \|_2$  euklidisch.

1.

$$\exists C > 0 : \|x\| \leq C \|x\|_2$$

Sei  $\{e_\nu\}_{\nu=1, \dots, n}$  Standardbasis von  $\mathbb{R}^n$

$$x \in V : x = \sum_{\nu=1}^n x_\nu e_\nu, \quad x_\nu \in \mathbb{R}$$

$$\|x\| \leq \sum_{\nu=1}^n |x_\nu| \|e_\nu\|$$

$$|x_\nu| \leq \|x\|_2$$

$\implies$

$$\|x\| \leq \|x\|_2 \underbrace{\sum_{\nu=1}^n \|e_\nu\|}_{=: C}$$

2.

$$\exists c > 0 : -c \|x\|_2 \leq \|x\|$$

Sei  $S := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$  (euklidische Einheitssphäre)

$$c := \inf \{\|x\| : x \in S\}$$

$$x \neq 0, y := \frac{x}{\|x\|_2} \implies y \in S$$

$$\implies c \leq \|y\| = \frac{\|x\|}{\|x\|_2}$$

$$\implies c \|x\|_2 \leq \|x\|$$

zu zeigen:  $c > 0$

**Lemma 14.**  $c > 0$

**Beweis 45.** Widerspruchsbeweis Annahme  $c = 0$

$$\implies \exists (x_k), x_k \in S < \|x_k\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$(x_k)$  beschränkt bezüglich  $\| \cdot \|_2$  BW  $\implies \exists$  bez.  $\| \cdot \|_2$  konvergente Teilfolge  $x_{k_l}$   
d.h.  $\exists a \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|x_{k_l} - a\|_2 = 0$$

$$\implies a_\nu = \lim_{l \rightarrow \infty} x_{k_l, \nu}$$

Konvergenz bez.  $\| \cdot \|_2 \Leftrightarrow$  komponentenweise Konvergenz

$$\|a\|_2^2 \sum_{\nu} a_\nu^2 = \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{\nu} (x_{k_l, \nu})^2 = 1$$

$$\implies a \in S$$

$$\|a\| \leq \|a - x_{k_l}\| + \|x_{k_l}\|$$

$$\stackrel{a}{\leq} \underbrace{C \|a - x_{k_l}\|_2}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|x_{k_l}\|}_{\rightarrow 0}$$

$$\implies \|a\| = 0 \implies a = 0$$

Widerspruch, denn  $0 \notin S$

**Beweis 46.** Sei  $(V, \|\cdot\|)$  normierter endlichdimensionaler Vektorraum  $\dim V = n$

$$\exists \phi : \mathbb{R}^n \rightarrow V \text{ Isomorphismus}$$

$$\|x\|_\phi := \|\phi(x)\|$$

$\|\cdot\|^*$  eine zweite Norm auf  $V$

$$\|x\|_\phi^* := \|\phi(x)\|^*$$

**Korollar 12.** Für jede  $\|\cdot\|$  auf  $\mathbb{R}^n$

$$\|x_k - a\| \rightarrow 0 \Leftrightarrow x_{k,\nu} \rightarrow a_\nu \forall \nu$$

## 5 Stetigkeit

**Definition 61.** stetig Seien  $(X, d_x)$  und  $(Y, d_y)$  metrische Räume. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt stetig im Punkt  $a \in X$ , wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : d_y(f(x), f(a)) < \varepsilon \quad \forall x \in X \text{ mit } d_x(x, a) < \delta$$

*Notation 15.* Sind  $X \subset \mathbb{R}$  und  $Y \subset \mathbb{R}$  dann sind die durch irgend eine Norm erzeugten Symmetriken zu nehmen.

**Definition 62.** Lipschitz-Stetigkeit  $f : X \rightarrow Y$  heißt Lipschitz-stetig, wenn

$$\exists L \geq 0 : \forall x, x' \in X : d_y(f(x), f(x')) \leq L d_x(x, x')$$

**Lemma 15.** Lipschitz-stetig  $\implies$  stetig.

**Beispiel 50.** Folgende Abbildungen sind Lipschitz-stetig und deshalb stetig.

1.  $f : V \rightarrow W$   $V, W$  normierte Vektorräume,  $f$  linear und  $V$  endlich dimensional
2.  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$
3. Abstandsfunktion: Sei  $(x, d)$  metrischer Raum  $\emptyset \neq A \subset X$ ,  $x \in X$  Abstand zwischen  $x$  und  $A$ :

$$d_A(x) := \inf \{d(x, a) : a \in A\}$$

$d_A : x \rightarrow \mathbb{R}$  ist Lipschitz-stetig.

1. Sei  $\{e_1, \dots, e_n\}$  eine Basis von  $V$ , seien  $x, y \in V$

$$x = \sum_{i=0}^n x_i e_i, \quad y = \sum_{i=0}^n y_i e_i,$$

$$f(x) - f(y) \stackrel{\text{linear}}{=} f(x - y) = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) f(e_i)$$

$$\|f(x) - f(y)\|_W \leq \sum_{i=0}^n |x_i - y_i| \|f(e_i)\|_W$$

$$M := \max \{\|f(e_i)\|_W, \dots, \|f(e_n)\|_W\}$$

$$\|f(x) - f(y)\|_W \leq M \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

$$\|y\|_V^* := \sum_{i=1}^n |y_i| \text{ eine Norm auf } V$$

$$\|f(x) - f(y)\|_W \leq M \|x - y\|_V^*$$

Je zwei Normen auf einem endlich dimensionalen Vektorraum sind äquivalent.

$$\begin{aligned} &\implies \exists C > 0 : \|y\|_v^* \leq C \|y\|_V \\ &\implies \|f(x) - f(y)\|_W \leq L \|x - y\|_V \\ &\quad L = MC \end{aligned}$$

□

**Definition 63.** Folgenstetigkeit  $f : X \rightarrow Y$  metrischer Räume heisst folgenstetig in  $x \in X$ , wenn

$$x_k \rightarrow x \implies f(x_k) \rightarrow f(x)$$

**Lemma 16.**  $f$  stetig  $\Leftrightarrow f$  folgenstetig.

**Beispiel 51.** Gegenbeispiel Sei  $V = C^1([a; b], \mathbb{R})$ ,  $W = \mathbb{R}$ ,  $a < 0 < b$

$$\begin{aligned} D : V &\rightarrow W \\ f &\mapsto f'(0) \end{aligned}$$

$D$  ist linear, aber nicht stetig. eigentlich  $D$  nicht folgenstetig. Sei

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{n} \sin(nx) \in V \quad \forall n \\ \|f_n\| &= \sup |f_n| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \\ &\implies f_n \rightarrow 0 \\ Df_n &= \cos(nx)|_{x=0} = 1 \\ Df_n &\not\rightarrow D0 = 0 \end{aligned}$$

**Satz 31.** (Königsberger, 1.3.V) Seien  $V, W$  normierte Vektorräume,  $f : V \rightarrow W$  linear

$$f \text{ stetig} \Leftrightarrow \exists C : \|f(x)\|_W \leq C \|x\|_V \quad \forall x \in V$$

$f$  heisst beschränkt.

**Bemerkung 29.** Ist  $V$  endlichdimensional, dann ist  $f$  automatisch beschränkt.

$$\|f(x)\|_W = \left\| f \left( \sum x_i e_i \right) \right\| \leq \sum |x_i| \|f(e_i)\|_W \leq M \sum |x_i| = M \|x\|_V^* \leq MC \|x\|_V$$

**Beweis 47.**  $\Rightarrow f \text{ stetig} \implies f \text{ stetig in } 0$

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|f(\xi) - f(0)\| &\leq \varepsilon \\ \|\xi - 0\|_W &< 1 \end{aligned}$$

insbesondere

$$\varepsilon = 1 \quad \exists \delta : \|f(\xi)\|_W < 1 \quad \forall \xi \quad \|\xi\| \leq \delta$$

Sei  $x \in V \setminus \{0\}$ ,  $y := \delta \frac{x}{\|x\|_V}$

$$\begin{aligned} \|y\|_V = \delta &\implies \|f(y)\|_W \leq 1 \\ \|f(y)\|_W &= \left\| \frac{\delta}{\|x\|_V} f(x) \right\|_W = \frac{\delta}{\|x\|_V} \|f(x)\|_W \\ &\implies \|f(x)\|_W \leq \frac{1}{\delta} \|x\|_V, \quad C = \frac{1}{\delta} \end{aligned}$$

$\Leftarrow$

$$\|f(x) - f(y)\|_W = \|f(x - y)\|_W \leq C \|x - y\|_V \implies f \text{ Lipschitzstetig} \implies f \text{ stetig}$$

**Bemerkung 30.** Rechenregel I Seien  $f_1, f_2 : a \in X \rightarrow W$   $X$  metrischer Raum und  $W$  normierter Vektorraum. Sind  $f_1$  und  $f_2$  stetig in  $a$ , so ist  $f_1 + f_2$  stetig in  $a$ .

1. Ist zusätzlich  $W = \mathbb{R}$ ,  $f_1, f_2$  stetig in  $a \implies f_1 \cdot f_2$  stetig in  $a$ .
2. Ist zusätzlich  $f_2(a) \neq 0$ , dann  $\frac{f_1}{f_2}$  stetig in  $a$

**Definition 64.** Polynomfunktion Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heisst Polynomfunktion, wenn sie durch endliche Addition und Multiplikation der Koordinaten erzeugt wird. Eine Polynomfunktion ist immer stetig.

**Definition 65.** rationale Funktion  $f : \mathbb{K}_{\mathbb{C}\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}$  heisst rational, wenn sie als Quotient von Polynomfunktionen geschrieben werden kann.

**Korollar 13.** Jede rationale Funktion ist ihrem Definitionsbereich stetig.

*Bemerkung 31.* Rechenregel II Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  Sei  $f$  stetig in  $a \in X$  und  $g$  stetig in  $f(a) \in Y$ , dann ist  $g \circ f$  stetig in  $a$

*Bemerkung 32.* Rechenregel III Seien  $f_1 : X \rightarrow Y_1$  und  $f_2 : X \rightarrow Y_2$  und  $X, Y_1, Y_2$  metrische Räume. Man definiert

$$f := f_1 \times f_2 : X \rightarrow Y_1 \times Y_2$$

$$x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$$

$$f \text{ stetig in } a \in X \Leftrightarrow f_1 \text{ und } f_2 \text{ stetig in } a \in X$$

**Korollar 14.**  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig in  $a \Leftrightarrow$  Alle Komponentenfunktionen  $f_1, \dots, f_n$  stetig in  $a$

**Beispiel 52.** Kurven  $I \rightarrow \mathbb{R}^n$

*Bemerkung 33.* (wichtig!) Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  Die Stetigkeit aller Einschränkung von  $f$  auf den Koordinatenachsen impliziert die Stetigkeit von  $f$  nicht

**Beispiel 53.**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = 0 \end{cases}$$

$f$  ist nicht stetig in 0

$$f(t, t) = \frac{2t^2}{t^2 + t^2} = 1$$

$t \neq 0, x = y = t$

$$\|f(t, t) - f(0, 0)\| = 1 \quad \forall t \neq 0$$

Sei

$$\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \rightarrow 0 \neq f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \rightarrow 1$$

$\implies f$  nicht stetig.

$f(x, 0) = 0 \forall x, f(y, 0) = 0 \forall y$  sind stetig  
 $c \in \mathbb{R}$

$$f_c(x) := f(x, c)$$

$$\tilde{f}_c(y) := f(c, y)$$

$\forall c \ f_c, \tilde{f}_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig  $\forall c$

**Beispiel 54.**

$$x = r \cos \phi, \ y = r \sin \phi$$

$$f(x, y) = \frac{2r^2 \sin \phi \cos \phi}{r^2}$$

$$f(x, y) = \sin 2\phi, \ (x, y) \neq 0$$

In jeder Umgebung von 0 nimmt die Funktion all seine Werte an.

**Satz 32.** Seien  $X, Y$  metrische Räume  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f$  stetig in  $a \Leftrightarrow \forall$  Umgebung  $V$  von  $f(a) \exists$  Umgebung  $U$  von  $a$  mit  $f(U) \subset V$

**Korollar 15.**  $f : X \rightarrow Y$  metrische Räume. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $f$  ist stetig auf  $X$
2. das Urbild jeder offenen Menge aus  $Y$  ist offen in  $X$
3. das Urbild jeder abgeschlossenen Menge aus  $Y$  ist abgeschlossen in  $X$

**Korollar 16.**  $f : x \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, sei  $c \in \mathbb{R}$

$U := \{x \in Y : f(x) < c\}$  ist offen

$A := \{x \in Y : f(x) \leq c\}$  ist abgeschlossen

*Bemerkung 34.* Das Bild einer offenen Menge kann nicht offen sein.

**Beispiel 55.**  $\sin(0; 2\pi) \rightarrow \mathbb{R} \sin(0; 2\pi) = [-1; 1]$

*Bemerkung 35.* Die Umkehrung einer stetigen Funktion ist im Allgemeinen nicht stetig.

**Beispiel 56.**

$$\begin{aligned} f : [0; 2\pi) &\rightarrow S^1 \\ x &\mapsto e^{ix} \end{aligned}$$

bijektiv und stetig.

$$g : S^1 \rightarrow [0; 2\pi)$$

ist nicht stetig.

$$g(e^{ix}) = x \quad e^{ix} \neq 1 \quad g(1) = 0$$

$$x_k = e^{(2\pi - \frac{1}{k})i}$$

$$x_k \rightarrow 1 \in S^1$$

$$g(x_k) = 2\pi - \frac{1}{k}$$

$$g(x_k) \not\rightarrow 0 = g(1)$$

**Definition 66.** Homöomorphismus  $f : X \rightarrow Y$  heisst

1.  $f$  stetig
2.  $f$  ist umkehrbar
3.  $f^{-1}Y \rightarrow X$  stetig

*Eigenschaften 11.* Homöomorphismus In diesem Falle sind auch die Bilder offener Mengen offen.

**Beispiel 57.**  $V, W$  endlich dimensionale Vektorräume,  $f : V \rightarrow W$  linear umkehrbar  $\implies f$  Homöomorphismus

**Definition 67.** homöomorphe Räume Zwei metrische Räume  $X, Y$  heissen homöomorph, wenn es einen Homöomorphismus  $X \rightarrow Y$  gibt.

*Bemerkung 36.*  $\phi : X \rightarrow Y$  und  $\psi : Y \rightarrow Z$  Homöomorphismus  $\psi \circ \phi$  Homöomorphismus.

**Beispiel 58.** Zwei endlich dimensionale Vektorräume der gleichen Dimension sind homöomorph.

*Bemerkung 37.* Man kann zeigen: Zwei endlich dimensionale Vektorräume sind genau dann homöomorph, wenn sie die gleiche Dimension haben. Im Allgemeinen  $\nexists$  Homöomorphismus  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$   $m \neq n$

**Beispiel 59.**  $K_1(0) \in \mathbb{R}^n$  sind Homöomorph.

$$\begin{aligned} f : K_1(0) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \frac{x}{1 - \|x\|} \\ g : \mathbb{R}^n &\rightarrow K_1(0) \\ y &\mapsto \frac{y}{1 + \|y\|} \end{aligned}$$

*Bemerkung 38.* Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \phi) &\mapsto (r \cos \phi, r \sin \phi) \end{aligned}$$

stetig, nicht bijektiv

$r > 0$ ,  $\phi \in (-\pi, \pi)$ , Bild:  $\mathbb{R}^2 \setminus S$ ,  $S = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2, x \leq 0\}$

$$\begin{aligned} P_2 : \mathbb{R}_*^+ \times (-\pi, \pi) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus S \\ (r, \phi) &\mapsto (r \cos \phi, r \sin \phi) \end{aligned}$$

Homöomorphismus

Umkehrabbildung:  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\phi = \text{sign}(y) \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

*Bemerkung 39.* 3d

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 = r \cos \phi_1 \cos \phi_2 \\ x_2 = r \sin \phi_1 \cos \phi_2 \\ x_3 = r \sin \phi_2 \end{cases} \\ r > 0 \\ \phi_1 \in (-\pi, \pi) \\ \phi_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Bild  $\mathbb{R}^3 \setminus (S \times \mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \phi_1 \\ r \sin \phi_1 \end{pmatrix} \cos \phi_2 = P_2(r, \phi_1) \cos \phi_2$$

Im allgemeinen definiert man Polarkoordinaten rekursiv

$$\begin{aligned} P_n : \mathbb{R}_*^+ \times \prod_{n-1} &\rightarrow \mathbb{R}^n \setminus (S \times \mathbb{R}^{n-2}) \\ \prod_{n-1} &= (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^{n-2} \end{aligned}$$

$$P_n(r, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-1}) = \begin{pmatrix} P_{n-1}(r, \phi_1, \dots, \phi_{n-2}) \cos \phi_{n-1} \\ r \sin \phi_{n-1} \end{pmatrix}$$

**Definition 68.** stetige Erweiterung/Grenzwert Seien  $X, Y$  metrische Räume,  $D \in X$ ,  $f : D \rightarrow Y$ ,  $a \in X$  Häufungspunkt  $D$ ,  $b \in Y$ . Man definiert

$$\begin{aligned} F : D \cup \{a\} &\rightarrow Y \\ F(x) &:= \begin{cases} f(x) & x \in D \setminus \{a\} \\ b & x = a \end{cases} \end{aligned}$$

- $F$  heisst die stetige Erweiterung von  $f$  in Punkt  $a$  wenn  $F$  stetig in  $a$  ist.
- In diesem Falle heisst  $b$  die Grenzwert von  $f$  in Punkt  $a$

*Notation 16.*

$$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

- Bemerkung 40.*
- Die stetige Erweiterung ist eindeutig bestimmt, wenn sie existiert.
  - Der Grenzwert ist eindeutig bestimmt, wenn er existiert.

**Lemma 17.**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : d_y(f(x), b) < \varepsilon \forall x \in D \setminus \{a\}, d_x(x, a) < \delta$$

**Definition 69.** Sei  $x$  ein metrischer Raum,  $(x_k)$  Folge in  $x$ .  $(x_k)$  heisst Cauchyfolge wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : d_x(x_k, x_l) < \varepsilon \forall x, l \geq N$$

**Definition 70.** vollständiger Raum Ein metrischer Raum  $X$  heisst vollständig, wenn jede Cauchyfolge in  $X$  konvergiert.

**Beispiel 60.**  $\mathbb{R}^n$  mit einer Norm vollständig

- Bemerkung 41.*
- Wir haben die Aussage für die euklidische Norm bewiesen
  - Aber je zwei Normen auf  $\mathbb{R}^n$  sind äquivalent

**Beispiel 61.** Jeder endlich dimensionaler, normierter Raum ist vollständig.

**Lemma 18.** Sei  $(X, d)$  vollständig,  $M \subset X$

$$M \text{ vollständig} \Leftrightarrow M \text{ abgeschlossen}$$

(bezüglich der Spurmetrik)

**Beispiel 62.**  $[a; b] \subset \mathbb{R}$  ist vollständig

**Beweis 48.**  $\Rightarrow$  Sei  $M$  vollständig. Sei  $(x_k)$  konvergente Folge in  $X$  mit  $x_k \in M \forall k$ .  $(a_k)$  konvergiert  $\Rightarrow (x_k)$  Cauchy  $\xrightarrow{M \text{ vollständig}} x_k \rightarrow x \in M \Rightarrow M$  abgeschlossen.

$\Leftarrow$  Sei  $M$  abgeschlossen. Sei  $(x_k)$  eine Cauchyfolge in  $M \Rightarrow (x_k)$  eine Cauchyfolge in  $X \xrightarrow{X \text{ vollständig}} x_k \rightarrow x \in X$ .  $x_k \in M, (x_k)$  konvergiert  $\Rightarrow x \in M \Rightarrow M$  vollständig.

**Korollar 17.** Jede abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{R}^b$  ist vollständig.

*Bemerkung 42.* Vereinbarung  $\mathbb{R}^n$  ist für nun als normierter Raum betrachtet.

**Definition 71.** Banachraum Ein normierter  $\mathbb{K}$ -Vektorraum heisst Banachraum, wenn er vollständig ist.

**Beispiel 63.** Jeder endlich dimensionaler Vektorraum ist ein Banachraum.

*Bemerkung 43.* Nicht jeder unendlich dimensionaler Vektorraum ist ein Banachraum.

**Beispiel 64.** Sei  $V = \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$  mit  $L^1$ -Norm:  $\|f\| = \int_a^b |f| dx$   $V$  ist nicht vollständig.



**Beispiel 65.**  $a = 0, b = 2$

$$f_n(x) := \begin{cases} x^n & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$f_n$  stetig  $\forall n$ ,  $(f_n)$  Folge in  $V$ ,  $(f_n)$  Cauchy  $n > m$

$$\|f_m - f_n\| = \int_0^1 (x^m - x^n) dx = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} < \frac{1}{m+1}$$

$f_n$  konvergiert in  $V$  nicht

$$f_n(x) \rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$f \notin V$

**Beispiel 66.**  $C^0([a; b]; \mathbb{R})$  mit Supremum-Norm ist vollständig.

## 5.1 Vervollständigung

**Satz 33.** Jeder normierte Vektorraum  $(V, \|\cdot\|_V)$  kann vervollständigt werden. D.h.

$$\begin{aligned} &\exists \text{Barnachraum}(W, \|\cdot\|_W) \\ &i : V \hookrightarrow W \text{ lineare Inklusion} \\ &\|i(v)\|_W = \|v\|_V \quad \forall v \in V \text{ s.d. } \overline{i(V)} = W \end{aligned}$$

**Beweis 49.** (Konstruktion)

$$\begin{aligned} W &:= \{ \text{Cauchyfolgen in } V \} \setminus \{ \text{Nullfolgen in } V \} \\ \|[(x_k)]\|_W &:= \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|_V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i : V &\hookrightarrow W \\ v &\mapsto [\text{konstante Folge } x_k = v \quad \forall k] \end{aligned}$$

**Definition 72.** Hilbertraum Ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt der bezüglich der induzierten Norm vollständig ist, heisst Hilbertraum.

**Beispiel 67.**

$$\begin{aligned} l^2 &:= \left\{ (x_k) \text{ in } \mathbb{C} : \sum |x_k|^2 < \infty \right\} \\ (x, y) &:= \sum \overline{x_k} y_k \end{aligned}$$

**Beispiel 68.**

$$C^0([a; b], \mathbb{C}), L^2 \text{ Norm}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx$$

nicht vollständig

Vervollständigung:  $L^2([a; b])$  für die Quantenmechanik

**Definition 73.** folgenkompakt Ein metrischer Raum  $X$  heisst folgenkompakt, wenn jede Folge in  $X$  eine konvergente Teilfolge besitzt. [Bolzano-Weierstrass-Eigenschaft]

**Definition 74.** Eine Teilmenge eines metrischen Raumes heisst folgenkompakt, wenn sie bezüglich der Spurmetrik folgenkompakt ist.

**Beispiel 69.**  $\mathbb{R}$  ist nicht folgenkompakt (Folgen, die gegen  $\infty$  konvergieren)

**Beispiel 70.**  $[a; b]$  ist folgenkompakt (Satz von Bolzano-Weierstrass)

## 5.2 Überdeckung

**Definition 75.** Überdeckung Sei  $X$  eine Menge, sei  $I$  eine Indexmenge und sei  $\{U_i\}_{i \in I}$  Familie von Teilmengen von  $X$ .  $\{U_i\}_{i \in I}$  heisst Überdeckung von  $X$ , wenn  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  d.h.

$$\forall x \in X \exists i \in I : x \in U_i$$

Sei  $X$  ein metrischer Raum. Dann heisst eine Überdeckung  $\{U_i\}_{i \in I}$  offen, wenn  $U_i$  offen  $\forall i$  ist.

**Beispiel 71.**  $x = [0; 1]$

$$\left\{ \left[0; \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3}; 1\right] \right\} \text{ Überdeckung}$$

offen bezüglich der Spurtopologie

**Beispiel 72.**  $x = (0; 1)$

$$\left\{ \left(\frac{1}{n}; 1\right) \right\}_{n \in \mathbb{N}_x} \text{ offen überdeckt}$$

**Beispiel 73.**  $x = [0; 1]$

$$\begin{aligned} U_n &:= \left(\frac{1}{n}; 1\right] & n > 0 \\ U_0 &:= \left[0; \frac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

$\{U_n\}_{n \geq 0}$  offene Überdeckung von  $X$

**Definition 76.** endliche Überdeckung eine Überdeckung  $\{U_i\}_{i \in I}$  heisst endlich, wenn  $I$  eine endliche Menge ist.

**Definition 77.** kompakter metrischer Raum Ein metrischer Raum  $X$  heisst kompakt, wenn aus jeder offenen Überdeckung von  $X$  eine endliche Überdeckung ausgewählt werden kann. d.h.

$$\begin{aligned} \forall \{U_i\}_{i \in I} \quad x = \bigcup_{i \in I} U_i \text{ offen} \\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ und } \exists i_1, i_2, \dots, i_n \in I \\ \text{s.d. } X = U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_n} = \bigcup_{j=1}^n U_{i_j} \end{aligned}$$

**Definition 78.** kompakte Teilmenge Eine Teilmenge eines metrischen Raumes heisst kompakt, wenn sie bezüglich der Spurmetrik so ist.

**Satz 34.**

$$X \text{ kompakt} \Leftrightarrow X \text{ folgenkompakt}$$

**Beweis 50.**  $\Rightarrow$  Sei  $(a_k)$  Folge in  $X$ . Zu zeigen:  $(a_k)$  besitzt eine konvergente Teilfolge.

$$A := \{a_k, k \in \mathbb{N}\}$$

**Fall 1**  $A$  ist endlich  $\Rightarrow (a_k)$  besitzt eine konstante Teilfolge.

**Fall 2**  $A$  unendlich

**Lemma 19.**  $A$  besitzt einen Häufungspunkt.  
 $A$  besitzt keinen Häufungspunkt.

$$\forall x \in X \exists U(x) \text{ Umgebung von } x$$

s.d.

$$U(x) \cap A = \begin{cases} \emptyset & x \notin A \\ \{x\} & x \in A \end{cases}$$

Zudem:

$$\begin{aligned} \forall x \in U(x) \bigcup_{x \in A} U(x) &= X \\ \{U(x)\}_{x \in X} &\text{ ist eine offene \ddot{U}berdeckung von } X \\ &\xrightarrow{\text{X kompakt}} \\ \exists n : \exists x_1, \dots, x_n \in X \text{ s.d. } X &= U(x_1) \cup \dots \cup U(x_n) \\ A = X \cap A &= (U(x_1) \cup \dots \cup U(x_n)) \cap A = \{x_i : x_i \in A\} \subset \{x_i\} \\ &\implies A \text{ endlich} \implies \text{Widerspruch!} \end{aligned}$$

Sei  $a$  Häufungspunkt von  $A \implies$

$$\begin{aligned} \forall \mu \in \mathbb{N} : K_{\frac{1}{\mu}}(a) \ni a_{k_\mu} &\in A \setminus \{a\} \\ (a_{k_\mu}) \text{ Teilfolge, } (a_{k_\mu}) &\in K \implies \lim_{\mu \rightarrow \infty} a_{k_\mu} = a \end{aligned}$$

**Definition 79.** beschränkt Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $\mathbb{K} \subset X$ .  $\mathbb{K}$  heisst beschränkt, wenn

$$\exists x \in X \exists r > 0 : \mathbb{K} \subset K_r(x)$$

**Lemma 20.** Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $\mathbb{K} \subset X$

$$\mathbb{K} \text{ folgenkompakt} \implies \mathbb{K} \text{ beschränkt und abgeschlossen}$$

**Beweis 51.** Sei  $\mathbb{K}$  nicht beschränkt oder nicht abgeschlossen.

**Fall 1**  $\mathbb{K}$  nicht beschränkt

Sei  $x \in \mathbb{K}$ . Da  $\mathbb{K}$  nicht beschränkt

$$\forall k \exists x_k \in \mathbb{K} : d(x_k, x) > k$$

(sonst wäre  $\mathbb{K} \subset K_k(x)$ )  $(x_k)$  besitzt keine konvergente Teilfolge. Sonst:

$$x_{k_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} x \implies d(x_{k_i}, x) \rightarrow 0$$

(was aber nicht möglich ist, da der Abstand immer grösser wird)

**Fall 2**  $\mathbb{K}$  nicht abgeschlossen

$$\exists (x_k), x_k \in \mathbb{K} \forall k \text{ und } x_k \in x \notin X$$

$\implies$  jede Teilfolge von  $(x_k)$  konvergiert gegen  $x \in X$ .

**Bemerkung 44.**  $\mathbb{K}$  folgenkompakt  $\implies \mathbb{K}$  abgeschlossen und beschränkt.  
Im allgemeinen  $\nRightarrow$

**Beispiel 74.**  $X = \mathcal{C}([0; \pi], \mathbb{C})$  mit Supremumsnorm

$$\mathbb{K} = K_1(0) = \left\{ f \in X : \overbrace{\|f\|}^{\sup|f|} \leq 1 \right\}$$

$\mathbb{K}$  ist abgeschlossen

$$\overline{K_1(0)} \subset K_2(0)$$

... und beschränkt.

$$\begin{aligned} e_k(x) &:= e^{ikx} \\ e_k &\in \mathbb{K} \forall k \\ \|e_k - e_l\| &= 2 \forall k, l \end{aligned}$$

**Beweis 52.**

$$|e_k(x) - e_l(x)|^2 = (e^{-ikx} - e^{ilx})(e^{ikx} - e^{ilx}) = \\ = 1 - e^{i(l-k)x} - e^{i(k-l)x} + 1 = 2(1 - \cos(k-l))$$

Maximum 4 wenn  $\cos = -1$ ,  $\sup |e_k - e_l| = 2 \implies$  jede Teilfolge  $e_k$

$$\|e_{ki} - e_{kj}\| = 2 \quad \forall i, j$$

keine Cauchyfolge. Keine Teilfolge ist Cauchy.  $\implies$  keine Teilfolge konvergiert

**Satz 35.** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler normierter Vektorraum, sei  $\mathbb{K} \subset V$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $\mathbb{K}$  ist beschränkt und abgeschlossen
2.  $\mathbb{K}$  kompakt
3.  $\mathbb{K}$  ist folgenkompakt

zu zeigen: 1.  $\implies$  2.

**Satz 36.** Sei  $X$  kompakt und  $A \subset X$  abgeschlossen. Dann ist  $A$  kompakt.

**Beweis 53.** Sei  $\{U_i\}_{i \in I}$  offene Überdeckung von  $A$ .

$U_i$  offen in  $A \implies \exists V_i \subset X$  *textoffen*, mit  $U_i = A \cap V_i$

$$\bigcup_{i \in I} U_i = A \implies \bigcup_{i \in A} V_i \supset A$$

$$X = X \setminus A \cup \bigcup_{i \in I} V_i$$

$X \setminus A, V_i$  Überdeckung von  $X$

$A$  abgeschlossen  $\implies X \setminus A$  offen

$X \setminus A, V_i$  offene Überdeckung

$X$  kompakt  $\implies \exists n : i_1, \dots, i_n : X = X \setminus A \cup V_{i_1} \cup V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_n}$

$\implies U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$  Überdeckung von  $A$

### 5.3 Existenz von Maxima und Minima

**Satz 37.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig ( $X, Y$  metrische Räume)

$$X \text{ kompakt} \implies f(X) \text{ kompakt}$$

**Beweis 54.** Sei  $\{U_i\}_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $f(X)$   $V_i := f^{-1}(U_i) \implies \{V_i\}_{i \in I}$  offene Überdeckung von  $X$ .

$$\implies \exists n : i_1, \dots, i_n \in I \quad X = V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_n} \implies f(X) = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$$

**Satz 38.** von Maxima und Minima Sei  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $X$  kompakt. Dann nimmt  $f$  ein Maximum und ein Minimum an.

**Beweis 55.**  $f$  stetig und  $X$  kompakt  $\implies f(X) \subset \mathbb{R}$  kompakt.  $\implies f(X)$  beschränkt und abgeschlossen.

beschränkt  $\implies f(X)$  besitzt ein Supremum und ein Infimum

abgeschlossen  $\implies \sup, \inf f \in f(X)$

**Definition 80.** gleichmäßig stetig  $f : X \rightarrow Y$ , ( $X, Y$  metrische Räume) heisst gleichmäßig stetig, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \subset X \text{ mit } d_x(x_1, x_2) < \delta$$

gilt

$$d_y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

*Bemerkung 45.*  $f$  gleichmässig stetig  $\implies f$  stetig

**Satz 39.** Sei  $f : X \rightarrow Y$   $X$  kompakt

$$f \text{ stetig} \implies f \text{ gleichmässig stetig}$$

**Beweis 56.** Wie im Falle  $X \subset \mathbb{R}$

**Lemma 21.** *Tubenlemma* Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $\mathbb{K}$  ein kompakter Raum,  $x_0 \in X$ ,  $W \subset X \times \mathbb{K}$  offen mit  $\{x_0\} \times \mathbb{K} \subset W$ .  
Dann  $\exists$  Umgebung von  $x_0$  in  $X$  s.d.

$$U \times \mathbb{K} \subset W$$

**Beweis 57.**  $W$  offen in der Produkttopologie.

$$\forall y, x \in \mathbb{K}, (x_0, y) \in W$$

$\exists$  Umgebung von  $U_y$  von  $x_0$  in  $X$   $\exists$  Umgebung von  $V_y$  von  $x_0$  in  $\mathbb{K}$  mit  $U_y \times V_y \subset W$

$$\begin{aligned} \bigcup_{y \in \mathbb{K}} V_y &= \mathbb{K} \\ y &\in V_y \quad \forall y \\ \{V_y\}_{y \in \mathbb{K}} &\text{ offene Überdeckung von } \mathbb{K} \quad \mathbb{K} \text{ kompakt} \\ \implies \forall n, u_1, \dots, u_n &\in \mathbb{K}, \mathbb{K} = V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n} \\ U &:= U_{y_1} \cap U_{y_2} \cap \dots \cap U_{y_n} \\ U &\ni x_0 \\ U \times \mathbb{K} &\subset W \\ U &\text{ offen} \end{aligned}$$

**Korollar 18.**  $\mathbb{K}$  kompakt und  $L$  kompakt  $\implies \mathbb{K} \times L$  kompakt

*Bemerkung 46.*  $\mathbb{K} = [a; b]$

$$\begin{aligned} f : X \times [a; b] &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in X : f_x : [a; b] &\rightarrow \mathbb{C} \\ y &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

stetig  $\implies \mathcal{R}$  auf  $[a; b]$   $f_x = f \circ i_x$

$$i_x : \{x\} \times [a; b] \rightarrow X \times [a; b]$$

$$F(x) := \int_a^b f(x, t) \, dt : X \rightarrow \mathbb{C}$$

**Satz 40.**  $F$  stetig

**Beweis 58.**  $\forall x_0 \in X$  ist  $F$  stetig in  $x_0$ . Sei  $x_0 \in X$

$$\phi(x, t) := f(x, t) - f(x_0, t)$$

stetig. Sei  $\varepsilon > 0$

$$W := \left\{ (x, t) \in X \times [a; b] : |\phi(x, t)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \right\}$$

$\phi$  stetig  $\implies W$  offen

$$\phi(x_0, t) = 0 \quad \forall t \implies \{x_0\} \times [a; b] \subset W$$

$\implies \exists$  Umgebung  $U$  von  $x_0$  in  $X$  mit

$$U \times [a; b] \subset W$$

$\forall x \in U$  gilt

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^b \phi(x, t) \, dt \right| \leq \int_a^b |\phi(x, t)| \, dt < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} \, dt = \varepsilon$$

Spezialfall  $X = [c; d]$

$$f : [c; d] \times [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$$

stetig

$$F : [c; d] \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig}$$

$\implies$  Regelfunktion

$$\int_c^d F(x) \, dx = \underbrace{\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) \, dy \right) \, dx}_{\text{interiertes Integral}}$$

Notation 17. interiertes Integral

$$\int_{[c; d] \times [a; b]} f(x, y) \, dx \, dy := \int_c^d F(x) \, dx$$

## 5.4 Zwischenwertsatz

**Definition 81.** zusammenhängender metrischer Raum Ein metrischer Raum  $X$  heisst zusammenhängend, wenn es keine Zerlegung  $X = U \cup V$  gibt, mit

1.  $U, V$  disjunkt (d.h.  $U \cap V = \emptyset$ )
2.  $U, V$  offen
3.  $U, V$  nicht leer

**Definition 82.** Eine Teilmenge eines metrischen Raumes heisst zusammenhängend, wenn sie bezüglich der Spurtopologie so ist.

**Beispiel 75.**  $\emptyset$  ist zusammenhängend

**Beispiel 76.**  $\{x\} \subset \mathbb{R}$  zusammenhängend

**Beispiel 77.**  $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}$  nicht zusammenhängend

$$U = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0 \text{ oder } x^2 < 2\} = \mathbb{Q} \cap (-\infty, \sqrt{2})$$

$$V = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ oder } x^2 > 2\} = \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, +\infty)$$

offen

**Satz 41.** Sei  $X \subset \mathbb{R}$  und besitze  $X$  mindestens zwei verschiedene Punkte

$$X \text{ zusammenhängend} \Leftrightarrow X \text{ Intervall}$$

**Beweis 59.**  $\Rightarrow$  Kontrapositionsbeweis: Sei  $X$  kein Intervall

$$\implies \exists u < s < v \text{ mit } u, v \in X, s \notin X$$

$$U := X \cap (-\infty; s), \quad V = X \cap (s; +\infty)$$

$\implies X$  nicht zusammenhängend

$\Leftarrow$  Widerspruchsbeweis: Sei  $X$  nicht zusammenhängendes Intervall

$$\exists U, V \text{ offen in } I$$

$$\begin{array}{ll}
U, V \neq \emptyset & \implies \exists u \in U, v \in V \\
U \cap V = \emptyset & \implies u \neq v \\
U \cup V = X
\end{array}$$

Annahme  $u < v$ :

$$X \text{ Intervall} \implies [u; v] \subset X$$

Sei

$$s = \sup([u; v] \cap U)$$

beschränkt  $\subset [u, v]$

$$\implies s \in [u; v] \quad s \leq v$$

$V$  offen

$$U = X \setminus V$$

$$\implies U \text{ abgeschlossen} \implies s \in U$$

$$U \cap V = \emptyset \implies s < v$$

Sei  $x \in X$  mit  $x > s$  und  $x \leq v$

$$\xrightarrow{s \sup} x \in V \implies (s; v] \subset V$$

$$U \text{ offen} \implies \exists \varepsilon > 0 \text{ mid}(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \cap X \in U$$

$X$  Intervall  $v \in X, s < v$

$$\implies \lambda \in [s; s + \varepsilon) \cap X \in U \text{ mit } \lambda \leq v \implies \lambda \in U$$

$(s; v] \subset V \implies \lambda \in V$  Widerspruch, da  $U \cap V = \emptyset$

**Satz 42.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig

$$X \text{ zusammenhängend} \implies Y \text{ zusammenhängend}$$

**Beweis 60.** Kontrapositionsbeweis: Sei  $Y$  nicht zusammenhängend

$$\implies Y = U \cup V$$

$$U, V \neq \emptyset$$

$$U \cap V = \emptyset$$

$$U, V \text{ offen}$$

$$\tilde{U} := f^{-1}(U), \tilde{V} := f^{-1}(V)$$

$$X = \tilde{U} \cup \tilde{V}$$

$$\tilde{U}, \tilde{V} \neq \emptyset$$

$$\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$$

$$\tilde{U}, \tilde{V} \text{ offen}$$

**Satz 43.** Zwischenwertsatz Sei  $X$  zusammenhängend

$$f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}$$

Für je zwei Punkte  $a$  und  $b \in X$  nimmt  $f$  alle Werte zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  an.

**Beweis 61.** Fall 1:  $f(a) = f(b)$  nichts zu zeigen

Fall 2:  $f(a) \neq f(b)$  und  $f(x)$  zusammenhängend

$$\implies f(x) \text{ Intervall}$$

$$\implies f(x) \text{ enthält alle Punkte zwischen } f(a) \text{ und } f(b)$$

**Definition 83.** wegzusammenhängend Ein metrischer Raum  $X$  heisst wegzusammenhängend, wenn es  $\forall a, b \in X$  eine stetige Kurve

$$\gamma : [\alpha; \beta] \rightarrow X$$

gibt mit  $\gamma(\alpha) = a$  und  $\gamma(\beta) = b$ . Man sagt,  $\gamma$  verbinde  $a$  und  $b$ .

**Beispiel 78.**  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist nicht wegzusammenhängend. Beweis: Zwischenwertsatz.

**Definition 84.** konvex Sei  $V$  Vektorraum,  $X \subset V$  heisst konvex, wenn  $\forall a, b \in X$

$$\{a + t(b - a) : t \in [0; 1]\} \subset X$$

(Strecke, die  $a$  und  $b$  verbindet)

**Lemma 22.** Sei  $V$  ein normierter Vektorraum,  $X \subset V$

$$X \text{ konvex} \implies X \text{ wegzusammenhängend}$$

**Beweis 62.** Die Strecke ist eine stetige Kurve.

**Satz 44.**  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $S^{n-1}$  sind für  $n \geq 2$  wegzusammenhängend.

**Lemma 23.**

$$X \text{ wegzusammenhängend} \implies X \text{ zusammenhängend}$$

**Beweis 63.** Widerspruchsbeweis: Sei  $X$  wegzusammenhängend, nicht zusammenhängend.

$$\begin{aligned} X &= U \cup V \\ U, V &\text{ offen} & \exists u \in U, v \in V \\ U, V &\neq \emptyset & u \neq v \\ U \cap V &= \emptyset \end{aligned}$$

$X$  wegzusammenhängend

$$\implies \gamma : [\alpha; \beta] \rightarrow X$$

$$\gamma(\alpha) = u, \gamma(\beta) = v$$

$$\tilde{U} = \gamma^{-1}(U), \tilde{V} = \gamma^{-1}(V)$$

$$\begin{aligned} [\alpha; \beta] &= \tilde{U} \cup \tilde{V} \\ \tilde{U}, \tilde{V} &\text{ offen} \\ \tilde{U}, \tilde{V} &\neq \emptyset \\ \tilde{U} \cap \tilde{V} &= \emptyset \end{aligned}$$

$$[\alpha; \beta] \text{ nicht zusammenhängend}$$

**Korollar 19.**  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $S^{n-1}$  sind für  $n \geq 2$  zusammenhängend.

**Beweis 64.**  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  nicht zusammenhängend

**Satz 45.** Sei  $V$  ein normierter Vektorraum,  $X \subset V$  offen

$$X \text{ zusammenhängend} \implies X \text{ wegzusammenhängend}$$

Zusätzlich können je zwei Punkte in  $X$  durch einen Streckenzug verbunden werden.

**Bemerkung 47.** Sei

$$X := \left\{ \left( x, \sin \frac{1}{x} \right), x > 0 \right\} \cup \{ (0, y), y \in [-1; 1] \} \subset \mathbb{R}$$



- $X$  ist nicht offen
- $X$  zusammenhängend
- $X$  nicht wegzusammenhängend

**Definition 85.** Gebiet Eine zusammenhängende offene Teilmenge normierten Vektorraumes heisst Gebiet.

**Satz 46.**

$$GL(n; \mathbb{R}) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}), \det A \neq 0\}$$

ist nicht zusammenhängend.

$$GL^+(n; \mathbb{R}) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}), \det A > 0\}$$

ist zusammenhängend.

**Beweis 65.**

$$\det : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ stetig}$$

Wäre  $GL$  zusammenhängend, dann wäre auch  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  zusammenhängend.

**Satz 47.** Seien  $X$  und  $Y$  homöomorph. Dann

$$X \text{ zusammenhängend} \Leftrightarrow Y \text{ zusammenhängend}$$

**Korollar 20.**  $\mathbb{R}^n, n > 1$  ist nicht homöomorph zu  $\mathbb{R}$

**Beweis 66.**  $n > 1$   $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  zusammenhängend.

Widerspruchsbeweis:

$$\exists f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ Homöomorphismus}$$

$$f|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} : \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}_{\text{zusammenhängend}} \rightarrow \underbrace{\mathbb{R} \setminus f(0)}_{\text{nicht zusammenhängend}}$$

## 6 Differenzierbare Funktionen (Kap 2)

**Bemerkung 48.** Sei  $F : \underbrace{U}_{\subset \mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{C}$  oder  $\mathbb{R}$ .  $U$  offen. Die lineare Approximation von  $f$  im Punkt  $a \in U$  ist eine Funktion der Form

$$Tf(x; a) := f(a) + L(x - a)$$

wobei  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  linear s.d. der Rest ( $x = a + h \in U$ )

$$R(\underbrace{h}_{\mathbb{R}^n}) := f(a + h) - Tf(a + h; a)$$

erfüllt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(h)}{\text{Norm} h} = 0$$

(wobei  $\| \cdot \|$  irgendeine Norm auf  $\mathbb{R}^n$  ist)

$U$  offen  $\implies \exists \varepsilon > 0$  s.d.

$$K_\varepsilon(a) \subset U$$

$$\implies a + h \in U \quad \forall h : \|h\| < \varepsilon$$

**Definition 86.** differenzierbar in  $a$   $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U$  offen in  $\mathbb{R}$  heisst differenzierbar in  $a$ , wenn es eine lineare Abbildung  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  gibt s.d.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(h)}{\|h\|} = 0$$

d.h.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a) - Lh}{\|h\|} = 0$$

**Definition 87.** Tangentialhyperebene Der Graph von  $Tf$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C} : y = Tf(x; a)\}$$

heisst die Tangentialhyperebene von  $f$  in  $(a, f(a))$

*Bemerkung 49.*  $h = 1$ : euklidische Definition

*Bemerkung 50.* Wichtig:  $U$  offen!

*Bemerkung 51.* Es spielt keine Rolle, welche Norm verwendet wird.

*Bemerkung 52.*  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  oder  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $L$  linear, d.h.

$$L \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$$

$\mathbb{C}$  wird als reeller Vektorraum betrachtet.

$$L \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) =: \mathbb{R}^{h*}$$

d.h. Linearform

**Definition 88.** Linearisierung Die lineare Abbildung  $L$  heisst Linearisierung von  $f$  im Punkt  $a$ .

**Lemma 24.** Ist  $f$  differenzierbar in  $a$ , so ist ihre Linearisierung eindeutig bestimmt.

**Beweis 67.** Seien  $L$  und  $L^*$  Linearisierungen von  $f$  in  $a$ .

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Lh}{\|h\|} &= 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L^*h}{\|h\|} &= 0 \end{aligned}$$

Differenz:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(L^* - L)(h)}{\|h\|} = 0$$

$h = tv$ ,  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(L^* - L)(tv)}{|t| \|v\|} = 0$$

$L^* - L$  linear  $\xrightarrow{\text{endlichdim}} L^* - L$  stetig

$$(L^* - L) \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tv}{t} \right) = (L^* - L)(v)$$

$$(L^* - L)(v) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1$$

$$\forall h \in \mathbb{R}^n : h = tv, \|v\| = 1$$

$$\implies (L^* - L)(h) = 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \implies L^* = L$$

**Definition 89.** Differenzial Die Linearisierung  $L$  von  $f$  im Punkt  $a$  bezeichnet man auch mit

$$df_a \text{ oder } df(a)$$

Differenzial von  $f$  im Punkt  $a$

$$Tf(x; a) = f(a) + df_a(x - a) + R(x - a), \text{ Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$$

*Bemerkung 53.* Sei  $\{e_1, \dots, e_n\}$  die Standardbasis von  $\mathbb{R}^n$ .  $\forall h \in \mathbb{R}$  Sei

$$f'(a) := (df_a e_1, df_a e_2, \dots, df_a e_n) \in M(n \times 1, \mathbb{C})$$

Dann

$$df_a h := f'(a) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

$$h = \sum_{i=1}^n h_i e_i, \quad h \in \mathbb{R}^n$$

*Bemerkung 54.*  $n = 1$   $f'(a) \in \mathbb{C}$  übliche Ableitung

**Satz 48.** Ist  $f$  differenzierbar im Punkt  $a$ , so ist  $f$  stetig im Punkt  $a$ .

**Beweis 68.**

$$\begin{aligned} f(a+b) - f(a) &= Lh + R(h) \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(h)}{\|h\|} &= 0 \\ \implies \lim_{h \rightarrow 0} R(h) &= 0 \\ L \text{ linear } n \times \infty &\implies L \text{ stetig} \\ \implies \lim_{h \rightarrow 0} Lh &= 0 \\ \implies \lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a)) &= 0 \\ \implies f &\text{ stetig in } a \end{aligned}$$

**Definition 90.** differenzierbar auf  $U$   $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  heisst differenzierbar auf  $U$ , wenn Sie  $\forall a \in U$  differenzierbar ist. In diesem Falle:

$$\begin{aligned} df : U &\rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \\ a &\mapsto df_a \end{aligned}$$

**Beispiel 79.** Sei  $A \in M(n \times 1, \mathbb{R})$ , sei  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(\underbrace{x}_{\in \mathbb{R}^n}) := Ax + b$$

$f$  ist auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar und

$$f'(a) = A \quad \forall a \in \mathbb{R}^n \quad f(a+h) - f(a) = A(x+h) - Ax = Ah$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{\|h\|} = 0$$

$$L(h) = Ah$$

**Beispiel 80.** Sei  $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) := x^T Ax$$

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (x+h)^T A(x+h) - x^T Ax = x^T Ax + x^T Ah + h^T Ax + h^T Ah - x^T Ax = \\ &= \underbrace{x^T Ah + h^T Ax}_{\text{linear in } h} + \underbrace{h^T Ah}_{R(h)} \\ L(h) &= x^T Ah + h^T Ax \end{aligned}$$

Zu zeigen

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(h)}{\|h\|} = 0$$

Sei  $\sigma = \max_{i,j} |a_{ij}|$

$$\begin{aligned} |h^T Ah| &= \left| \sum_{i,j} h_i a_{ij} h_j \right| \leq \sum_{i,j} |h_i| |a_{ij}| |h_j| \leq \\ &\leq \sigma \sum_i |h_i| \sum_j |h_j| = \sigma \|h\|_1^2 \\ \frac{|R(h)|}{\|h\|_1} &\leq \sigma \|h\|_1 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$\implies f$  differenzierbar

$$\begin{aligned} L(h) &= x^T Ah + x^T A^T h = x^T (A + A^T) h \\ \implies f'(x) &= x^T (A + A^T) \end{aligned}$$

Ist  $A$  symmetrisch (d.h.  $A^T = A$ ), so

$$f'(x) = 2x^T A$$

## 6.1 Berechnung von Ableitungen

**Definition 91.** differenzierbar in Richtung eines Vektors Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$ , ( $f$  nicht notwendigerweise differenzierbar), sei  $h \in \mathbb{R}^n$ .  $f$  heisst differenzierbar im Punkt  $a$  in Richtung des Vektors  $h$  wenn der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}$$

existiert.

**Definition 92.** Ableitung in Richtung eines Vektors In diesem Falle heisst dieser Grenzwert die Ableitung von  $f$  im Punkt  $a$  in Richtung des Vektors  $h$

*Notation 18.* Richtungsableitung  $\partial_h f(a)$

*Notation 19.* partielle Ableitung Standardbasis  $\{e_1, \dots, e_n\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \partial_i f(a) := \partial_{e_i} f(a)$$

*Bemerkung 55.*  $\frac{\partial f}{\partial x}$  berechnen:  $x_i$  als Variable,  $x_j$ ,  $j \neq i$  als Konstanten

**Beispiel 81.**  $f(x, y) = y^2 \sin(x + y)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= y^2 \cos(x + y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y \sin(x + y) + y^2 \cos(x + y) \end{aligned}$$

**Definition 93.** partiell differenzierbar  $f$  heisst partiell differenzierbar im Punkt  $a$ , wenn alle partielle Ableitungen  $\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a)$  existieren.

**Satz 49.** Sei  $f$  differenzierbar im Punkt  $a$ . Dann

1.  $f$  besitzt alle Richtungsableitungen in  $a$

$$\partial_h f(a) = df_a(h), \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

2.  $f$  ist partiell differenzierbar in  $a$

- 3.

$$f'(a) = (\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a))$$

**Beweis 69.**

$$f(a + th) = f(a) + df_a(th) + R(th)$$

**Lemma 25.**

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(th)}{t} = 0$$

**Beweis 70.**

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{R(n)}{\|h\|} = 0 \implies R(0) = 0$$

$h \neq 0$ ,  $v = tk$

$$\begin{aligned} \lim \frac{R(v)}{\|v\|} &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(th)}{|t| \|h\|} &= 0 \\ \frac{1}{\|h\|} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(th)}{|t|} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_n f(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{df_a(th) + R(th)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{df_a(th)}{t} \stackrel{\text{linear}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t df_a(h)}{t} = df_a(h)\end{aligned}$$

1  $\implies$  2  
3

$$\partial_i f(a) = \partial_{e_i} f(a) = df_a(e_i) = f'(a) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (f'(a))_i$$

**Bemerkung 56.** differenzierbar  $\implies$  partiell differenzierbar, im Allgemeinen gilt die Umkehrung nicht! Aber die partielle Differenzierbarkeit ist eine notwendige Bedingung für die Differenzierbarkeit.

**Bemerkung 57.**  $Lh = (\partial_1 f_1, \dots, \partial_n f)h$  ist der einzige Kandidat für die Linearisierung.

**Beispiel 82.** von partiell differenzierbaren Funktionen, die nicht differenzierbar sind

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = 0 \end{cases}$$

$f$  nicht stetig in  $(0, 0) \implies f$  nicht differenzierbar in  $(0, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_x f(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f(t, 0)}^{=0} - \overbrace{f(0, 0)}^{=0}}{t} = 0 \\ \partial_y f(0) &= 0\end{aligned}$$

$f$  partiell differenzierbar in  $(0, 0)$

$\partial_n f(0)$  existiert nicht für  $h \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $h \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Beispiel 83.**  $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\partial_n f(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(th_1, th_2) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{t^3 h_1^2 h_2}{t^2 (h_1^2 + h_2^2)} = f(h_1, h_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_x f(0, 0) &= f(1, 0) = 0 \\ \partial_y f(0, 0) &= f(0, 1) = 0\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{f(h_1, h_2) - f(0, 0) - \overbrace{L}^{=0} f}{\|h\|} = 0 ?$$

Nein. z.Z.:  $h_1 = h_2 =: k$

$$\begin{aligned} f(k, k) &= \frac{k^3}{2k^2} = \frac{k}{2} \\ \left\| \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix} \right\|_{\infty} &= |k| \\ \frac{f(k, k)}{\left\| \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix} \right\|_{\infty}} &= \pm \frac{1}{2} \not\rightarrow 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$  nicht differenzierbar in  $(0, 0)$

## 6.2 Differenzierbarkeitskriterium

**Satz 50.** *Differenzierbarkeitskriterium* Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  und sei  $a \in D$ .

1. Es gibt eine Umgebung von  $a$ , s.d.  $\forall x \in U$  ist  $f$  in  $x$  partiell differenzierbar.
2. Alle partiellen Ableitungen sind im Punkt  $a$  stetig

$\Rightarrow f$  ist in  $a$  differenzierbar

**Beweis 71.** *Idee*

$$\frac{f(a+h) - f(a) - Lh}{\|h\|} \rightarrow 0$$

$$f(a+h) - f(a) = [f(a+h) - f(a+h_1)] + [f(a+h_1) - f(a)]$$

Mithilfe des Mittelwertsatzes kann dieser Betrag abgeschätzt werden.

**Definition 94.** Sei  $f : \underbrace{U}_{\subset \mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{C}$ , differenzierbar auf  $U$

$$df : U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$$

$$x \mapsto df_x$$

$f$  heisst stetig differenzierbar auf  $U$  falls  $df : U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  stetig ist.

$$\xrightarrow{\sim} M(n \times 1, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n$$

$$\mapsto (\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x))$$

$$\Rightarrow df : U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \text{ stetig} \iff f' : U \rightarrow M(n \times 1, \mathbb{C}) \iff \partial_i f \text{ stetig} \forall i$$

**Korollar 21.**

$$f \text{ stetig diff} \iff \text{Alle partiellen Ableitungen sind stetig}$$

**Korollar 22.** Sei  $f : \underbrace{U}_{\subset \mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{C}$

$f$  stetig differenzierbar auf  $U \iff$  Alle partiellen Ableitungen in  $U$  existieren und sind stetig

**Definition 95.**

$$\mathcal{C}^1(U) := \{\text{stetig differenzierbar Funktionen auf } U\}$$

Vektorraum. genauer:

$$\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}) = \{\text{reellwertig stetig differenzierbar } f \text{ auf } U\}$$

$$\mathcal{C}^1(U, \mathbb{C}) = \{\text{komplexwertig stetig differenzierbar } f \text{ auf } U\}$$

**Bemerkung 58.** Sei  $f : \underbrace{U}_{\subset \mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}$ , differenzierbar in  $a \in U$

$$df(a) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n*}$$

**Bemerkung 59.** Sei  $\langle, \rangle$  ein Skalarprodukt

$$\phi_{\langle, \rangle} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n*} \quad \text{linear}$$

$$v \mapsto \phi_{\langle, \rangle}(v) \quad \text{Isomorphismus}$$

$$\phi_{\langle, \rangle}(v)(w) := \langle v, w \rangle$$

### 6.3 Gradient

**Definition 96.** Gradient Der Gradient von  $f$  in  $a$  bezüglich  $\langle, \rangle$  ist

$$\begin{aligned}\phi_{\langle, \rangle}^{-1}(\mathrm{d} f_a) &=: \mathrm{grad}(f)(a) \\ \mathrm{grad}(f)(a) &\in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

*Bemerkung 60.*

$$\langle \mathrm{grad}(f)(a), w \rangle = \phi(\mathrm{grad}(f)(a))(w) = \mathrm{d} f_a(w) = \partial_w f(a)$$

*Bemerkung 61.*

$$\partial_w f(a) = \langle \mathrm{grad}(f)(a), w \rangle \quad \forall w \in \mathbb{R}^n$$

*Bemerkung 62.* Spezialfall Standardskalarprodukt  $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$

$$\begin{aligned}\phi_{\langle, \rangle} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^{n*} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &\rightarrow (x_1, \dots, x_n)\end{aligned}$$

*Notation 20.* Gradient Der Gradient bez.  $\langle, \rangle_{\text{Stand.}}$  bezeichnet man als  $\nabla f$

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{pmatrix}$$

*Bemerkung 63.* Zusammenfassung

$$\mathrm{d} f_1 \in \mathbb{R}^{n*}$$

$$\mathrm{grad}(f)(a) \in \mathbb{R}^n$$

Standardbasis  $\mapsto$  Standardskalarprodukt

$f'(a)$   $n$ -Zeilenvektor

$\nabla f(a)$   $n$ -Spaltenvektor

#### 6.3.1 Geometrische Bedeutung des Gradienten

*Bemerkung 64.* Sei  $h \in \mathbb{R}^n$

$$\partial_n f(a) = \langle \mathrm{grad}(f)(a), h \rangle$$

Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}|\partial_n f(a)| &\leq \|\mathrm{grad}(f)(a)\| \|h\| \\ \|w\| &:= \sqrt{\langle w, w \rangle}\end{aligned}$$

die durch  $\langle, \rangle$  induzierte Norm

$$-\|\mathrm{grad}(f)\| \|a\| \leq \partial_n f \leq \|\mathrm{grad}(f)\| \|h\|$$

$$\partial_n f = \|\mathrm{grad}(f)\| \|h\| \xi \quad \xi \in [-1; 1]$$

$$\exists \phi : \xi = \cos \phi$$

$$\partial_n f(a) = \|\mathrm{grad}(f)(a)\| \|h\| \cos \phi$$

*Bemerkung 65.* Sei  $h: \|h\| = 1$

$$\partial_n f(a) = \|\text{grad}(f)(a)\| \cos \phi$$

$$\implies \|\text{grad}(f)(a)\| = \max \left\{ \partial_n f(a), \underbrace{\|h\|}_{\text{hängt von } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ ab}} = 1 \right\}$$

Sei  $\text{grad}(f)(a) \neq 0$  ( $\iff d f_a \neq 0$ )

$$\implies \exists! h \text{ mit } \|h\| = 1 \text{ und } \|\text{grad}(f)(a)\| = \partial_n f(a)$$

Nämlich

$$h = \frac{\text{grad}(f)(a)}{\|\text{grad}(f)(a)\|}$$

d.h.  $\text{grad}(f)(a)$  zeigt die Richtung des stärksten Anstiegs von  $f$  in Punkt  $a$ .

### 6.3.2 Rechenregeln

*Bemerkung 66.* Rechenregeln Sei  $f, g : \underbrace{U}_{\subset \mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{C}$ , differenzierbar in  $a \in U$ .

Dann

1.  $f + g$  und  $fg$  sind differenzierbar in  $a$  und

$$\begin{aligned} d(f + g)_a &= d f_a + d g_a \\ d(fg)_a &= f(a) d g_a + g(a) d f_a \end{aligned}$$

2. Sei zusätzlich  $f(a) \neq 0$ . Dann ist  $\frac{1}{f}$  in  $a$  differenzierbar und

$$d\left(\frac{1}{f}\right)_a = -\frac{d f_a}{f(a)^2}$$

*Bemerkung 67.* Folgerung Jede rationale Funktion ist in ihrem Definitionsbereich stetig differenzierbar.

**Satz 51.** Kettenregel Sei  $U \subset \mathbb{R}$  offen. Seien

$$\begin{array}{ll} \gamma : I \rightarrow U & \text{differenzierbar in } t_0 \in I \\ f : U \rightarrow \mathbb{C} & \text{differenzierbar in } a := f(t_0) \end{array}$$

Dann ist  $f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$  differenzierbar in  $t_0$  und

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt} = d f_a \dot{\gamma}(t_0) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(a) \dot{\gamma}_i(t_0)$$

Ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  vorhanden

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t_0) = \langle \text{grad}(f)(a), \dot{\gamma}(t_0) \rangle$$

*Bemerkung 68.* Kettenregel für partielle Ableitung. Seien

$$\begin{array}{ll} f : U \rightarrow \mathbb{C} & U \subset \mathbb{R}^n \\ g : V \rightarrow UV \subset \mathbb{R}^m \end{array}$$

$$F := f \circ g : V \rightarrow \mathbb{C}$$

$(x_1, \dots, x_n)$  Basen auf  $U$  und  $(y_1, \dots, y_m)$  Basen auf  $V$ . Wir wollen  $\frac{\partial F}{\partial y_i}$ . Seien  $y_j$  mit  $j \neq i$  festgelegt. Sei

$$\begin{aligned} g_{(i)} : y_i &\mapsto g(y_1, \dots, y_n) = (g_+(y \cdots), \dots, g_m(\cdots)) \\ g_{(i)j} : y_i &\mapsto g_j(y \cdots y) \end{aligned}$$



$$\frac{d g_{(i)j}}{d y_i} = \frac{\partial g_j}{\partial y_i}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = \frac{d}{d y_i} (f \circ g_{(i)}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{d g_{(i)j}}{d y_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g_j}{\partial y_i}$$

$$F = f \circ g$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}(y) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(g(y)) \frac{\partial g_j}{\partial y_i}(y)$$

**Beispiel 84.** Polarkoordinaten Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$

$$P_2(r, \phi) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix}$$

$$F = f \circ P_2$$

$$\frac{\partial F}{\partial r} \partial_x f \cos \phi + \partial_y f \sin \phi$$

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} - \partial_x f + \sin \phi + \partial_y f + \cos \phi$$

**Beispiel 85.** Sei  $F : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{C}$  und  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  differenzierbare Funktionen

$$f(x) := F(\|x\|)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = F \frac{\partial \|x\|}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \|x\| = \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} 2x_i$$

$$\frac{\partial \|x\|}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\|x\|}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = F' \frac{x_i}{\|x\|}$$

### 6.3.3 Niveaumengen

**Definition 97.** Niveaumengen Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R} \ni c$ . Die Fasern  $f^{-1}(c)$  heissen Niveaumengen von  $f$ .

**Satz 52.**

$$\gamma(I) \subset f^{-1}(c)$$

Sei  $\langle, \rangle$  Skalarprodukt. Dann

$$\text{grad}(f)(\gamma(t)) \perp \dot{\gamma}(t) \quad \forall t \in I$$

**Beweis 72.**  $f \circ \gamma = c$  konstant

$$\underbrace{\frac{\partial (f \circ \gamma)}{\partial t}}_{=0} = \langle \text{grad}(f), \dot{\gamma} \rangle$$

Der Gradient steht senkrecht auf den Höhenlinien und zeigt in die Richtung des stärksten Anstiegs.