

Lineare Algebra I - Vorlesungs-Script

Prof. Andrew Kresch

Basisjahr 08/09 Semester II

Mitschrift:

Simon Hafner

Inhaltsverzeichnis

1	Bilinearformen	1
1.1	Vektorprodukt in \mathbb{R}^3	3
1.2	Skalarprodukt über \mathbb{C}^n	4
1.3	Bilinearform	5
1.4	Bilineare und quadratische Formen	7
1.4.1	Polarisierungsformel	8
1.5	Sesquilineare Form	8
1.6	Volumen	13
1.6.1	Spat	13
1.7	Orthogonale und unitäre Endomorphismen	16
1.8	Beschreibung von $SO(3)$ und $O(3)$	20
1.9	Selbstadjungierte Endomorphismen	20
2	Klassifikation von Bilinearformen auf $\mathbb{R}^n \leftrightarrow$ Signatur	28
3	Multilineare Algebra	32
3.1	Dualvektorräume	32
3.2	Der Bidualraum $V \rightsquigarrow V^* \rightsquigarrow V^{**}$	35
3.3	Zusammenhang zwischen Dualraum und bilinearen Abbildungen	36
3.4	Anwendung des Dualraums	42
3.5	Das Tensorprodukt	42
3.5.1	Existenz vom Tensorprodukt	44
3.5.2	Tensorprodukt von linearen Abbildungen	48
3.5.3	Spezialfälle	49

1 Bilinearformen

Das kanonische Skalarprodukt (oder: Standardskalarprodukt) von \mathbb{R}^n ist die Abbildung

$$\begin{array}{ll} \langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \end{array}$$

gegeben durch

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

falls $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ sind.

Definition 1 (Konvention). eine 1×1 Matrix wird mit Eintrag indentifiziert

$$(x) \in M(1 \times 1, K) \leftrightarrow x \in K$$

Dann können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= (x^t)(y) \\ x &= \begin{pmatrix} x_1, \vdots, x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1, \vdots, y_n \end{pmatrix} \\ (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1, \vdots, y_n \end{pmatrix} &= (x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n) \end{aligned}$$

Bemerkung 1 (\langle, \rangle ist bilinear).

$$\begin{aligned} \langle x + x', y \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle \\ \langle \lambda x, y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle \\ \langle x, y + y' \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle \\ \langle x, \lambda y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

symmetrisch:

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

positiv definit:

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &\geq 0 \\ \langle x, x \rangle &= 0 \Leftrightarrow x = 0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

$$\text{für } \forall x, y, x', y' \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$$

Bemerkung 2 (Hintergrund: euklidische Geometrie).

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Bemerkung 3 (Eigenschaften von $\|\cdot\|$).

$$\begin{aligned} \|x\| &\geq 0, \text{ mit } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \|\lambda x\| &= |\lambda| \|x\| \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

Dann definieren wir den Abstand von $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} d(x, y) &\in \mathbb{R} \\ d(x, y) &:= \|y - x\| \end{aligned}$$

Bemerkung 4. Eigenschaften

$$\begin{aligned} d(x, y) &\geq 0, \text{ mit } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ d(y, x) &= d(x, y) \\ d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) \\ \text{für } x, y, z &\in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Wir sind motiviert, Strukturen zu definieren, basierend auf diesen Eigenschaften, so z.B.

- Bilineare Formen (symmetrisch, positiv definit)
- Norme
- Metriken

Beweis 1. $\|\cdot\|$ und d : die Dreiecksungleichung folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle \leq (?) (\|x\| + \|y\|)^2 \\ &\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|\end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung: für $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

mit Gleichheit genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

$$\Leftrightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} - & - & - & x & - & - & - \\ - & - & - & y & - & - & - \end{pmatrix} \in M(2 \times n, \mathbb{R})$$

A hat Rang ≤ 1

Beweis 2.

$$\begin{aligned}A \cdot A^t &= \begin{pmatrix} \langle x, x \rangle & \langle x, y \rangle \\ \langle x, y \rangle & \langle y, y \rangle \end{pmatrix} \in M(2 \times 2), \mathbb{R} \\ \det(A \cdot A^t) &= \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2\end{aligned}$$

Es gibt eine Gleichung von Determinanten:

$$\begin{aligned}A, B &\in M(k \times n, K) \\ \det(A \cdot B^t) &= \sum_{1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k \leq n} \det(A^{s_1, \dots, s_k}) \det(B^{s_1, \dots, s_k}) \\ \text{wobei } A^{s_1, \dots, s_k} &:= (a_i, s_j)_{1 \leq i, j \leq k}, B^{s_1, \dots, s_k} = (b_i, s_j)_{1 \leq i, j \leq k}\end{aligned}$$

Beweis-Skizze: Reduktion zum Fall, dass die Zeilen von A und B Standardbasiselemente sind; direkte Berechnung in diesem Fall.

Es folgt:

$$\det(A \cdot A^t) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \det(A^{i,j})^2 \geq 0$$

und $\det = 0 \Leftrightarrow$ alle 2×2 Minoren von A sind 0 $\Leftrightarrow \text{rang}(A) \leq 1$

Korollar 1. Wir können definieren

$$\begin{aligned}\angle(x, y) &:= \cos^{-1} \underbrace{\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}}_{\in [-1, 1] \in \mathbb{R}} \in [0, \pi] \in \mathbb{R} \\ &\text{für} \\ 0 &\neq x \in \mathbb{R}^n \\ 0 &\neq y \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

Korollar 2. x, y Vektoren, θ Winkel zwischen den beiden

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|y - x\|^2 \right)$$

und deshalb:

$$\cos \theta = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|y - x\|^2}{2 \|x\| \|y\|}$$

\implies Winkel eines Dreiecks ist nur von den Seitenlängen abhängig.

Beispiel 1.

$$\angle(x, y) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$$

$$\underbrace{\{y \mid \langle x, y \rangle = 0\}}_{\text{Untervektorraum}} = 0 \cup \{0 \neq y \in \mathbb{R}^n \mid \angle(x, y) = \frac{\pi}{2}\}$$

Man nennt x und y senkrecht falls $\langle x, y \rangle = 0$

Fazit 1.

$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	bilinear form
$\ \cdot\ : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$	Norm
$d(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{> 0}$	Metrik

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sqrt{\langle x, x \rangle} \\ d(x, y) &= \|y - x\| \\ \langle x, y \rangle &= \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|y - x\|^2}{2}\end{aligned}$$

1.1 Vektorprodukt in \mathbb{R}^3

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & x \times y\end{array}$$

für $y = (y_1, y_2, y_3)$ und $y = (y_1, y_2, y_3)$ ist

$$x \times y = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_2, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

oder:

$$x \times y = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

wobei (e_1, e_2, e_3) die Standardbasis ist. Es ist deshalb klar, dass

$$0 = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \langle x, x \times y \rangle$$

$$0 = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \langle y, x \times y \rangle$$

$x \times y$ liegt auf der Gerade von Vektoren senkrecht zu x und y . weiter:

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} &= \langle x \times y, x \times y \rangle \\ &= \|x \times y\|^2 = (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 + (x_3 y_1 - x_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \\ &= \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 \left(1 - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|x\|^2 \|y\|^2} \right) \\ &= \|x\|^2 \|y\|^2 (1 - \cos^2 \angle(x, y)) = \|x\|^2 \|y\|^2 \sin^2 \angle(x, y)\end{aligned}$$

Fazit 2. Wenn das Ergebnis $= 0$, folgt daraus, dass x und y linear abhängig sind. Falls x und y linear unabhängig sind, dann folgt dass $(x \times y, x, y)$ zu derselben Orientierungsklasse gehört wie (e_1, e_2, e_3) . Insgesamt bedeutet dies, dass $x \times y$ folgende Eigenschaften hat:

- ist senkrecht zu x und y
- ist $0 \Leftrightarrow x$ und y sind linear abhängig
- hat Länge $\|x\| \|y\| \sin \angle(x, y)$
- und hat die Richtung, die mit x und y die gleiche Orientierungsklasse wie die Standardbasis hat.

1.2 Skalarprodukt über \mathbb{C}^n

Sei $z = (z_1, \dots, z_n)$ und $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$

Bemerkung 5. Der Ausdruck macht Sinn.

$$\begin{aligned}\langle z, w \rangle &:= z_1 w_1 + \dots + z_n w_n \\ \langle z, z \rangle &:= z_1^2 + \dots + z_n^2\end{aligned}$$

Dann kann die Länge nicht mehr interpretiert werden, z.B. für $z = (1, i, 0, \dots, 0)$ haben wir $\langle z, z \rangle = 1^2 + i^2 = 0$. Isotropische Untervektorräume von \mathbb{C}^n werden nicht in diesem Kurs behandelt. ($V \subset \mathbb{C}^n$ s.d. $\langle v, w \rangle = 0 \forall v, w \in V$). Für die Physik, die Geometrie usw. ist eine Interpretation in Zusammenhang mit Länge wichtig, deshalb brauchen wir eine neue Definition.

Definition 2 (Das kanonische Skalarprodukt). von \mathbb{C}^n ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle_c : \mathbb{C}^n \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{C} \\ (z, w) &\mapsto z_1 \bar{w}_1 + \dots + z_n \bar{w}_n\end{aligned}$$

Eigenschaften 1 (von $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$).

$$\begin{aligned}\langle z + z', w \rangle &= \langle z, w \rangle_c + \langle z', w \rangle_c \\ \langle \lambda z, w \rangle_c &= \lambda \langle z, w \rangle_c \\ \langle z, w + w' \rangle_c &= \langle z, w \rangle_c + \langle z, w' \rangle_c \\ \langle z, \lambda w \rangle_c &= \bar{\lambda} \langle z, w \rangle_c\end{aligned}$$

für $z, z', w, w' \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$
 $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$ ist sesquilinear

$$\begin{aligned}\langle w, z \rangle_c &= \overline{\langle z, w \rangle_c} && \text{hermitesch} \\ \langle z, z \rangle_c &\in \mathbb{R}_{\geq 0} && \text{positiv definit} \\ \langle z, z \rangle &= 0 \Leftrightarrow z = 0\end{aligned}$$

Fazit 3. $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$ ist sesquilinear, hermitesch und positiv definit.

Beweis 3. Bei Bedarf sonstwo nachschauen (Zu viele Zeichen und zu wenig Sinn). Es läuft auf eine Sammlung von Quadraten heraus.

Definition 3 (Norm von \mathbb{C}^n).

$$\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle_c}$$

Bemerkung 6. Sei $w = (x'_1 + xy'_1, \dots, x'_n + iy'_n)$. Dann:

$$\begin{aligned}\langle z, w \rangle_c &= (x_1 + iy_1)(x'_1 - iy'_1) + \dots + (x_n + iy_n)(x'_n - iy'_n) \\ &= (x_1 x'_1 + y_1 y'_1 + \dots + x_n x'_n + y_n y'_n) + i(x'_1 y_1 - x_1 y'_1 + \dots + x'_n y_n - x_n y'_n)\end{aligned}$$

Auf diese Weise ist $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$ eine Erweiterung von reellen Skalarprodukt.

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^{2n} &\rightarrow \mathbb{C}^n && \mathbb{R}\text{-linear} \\ e_1 &\mapsto (1, 0, \dots, 0) \\ e_2 &\mapsto (i, 0, \dots, 0) \\ &\dots \\ e_{2n} &\mapsto (0, \dots, 0, i) \\ \langle \cdot, \cdot \rangle_c &= (\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ von } \mathbb{R}^{2n}) + i(\text{neues})\end{aligned}$$

Re $\langle \cdot, \cdot \rangle_c = \langle \cdot, \cdot \rangle$ von \mathbb{R}^{2n} unter diesem Isomorphismus.

Sei $\omega := \text{Im } \langle \cdot, \cdot \rangle_c$:

$$\begin{aligned}\omega : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \text{oder } \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} &\rightarrow \mathbb{R}\end{aligned}$$

Eigenschaften 2 (von ω (Imaginärteil des kanonischen Skalarproduktes)). **bilinear**

schiefsymmetrisch $\omega(w, z) = -\omega(z, w)$

$$\omega(z, z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}^n \text{ (oder } \mathbb{R}^{2n})$$

1.3 Bilinearform

Sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum.

Definition 4 (Bilinearform). Eine bilineare Form auf V ist eine Abbildung

$$s : V \times V \rightarrow K$$

so dass:

$$\begin{aligned}s(v + v', w) &= s(v, w) + s(v', w) \\ s(\lambda v, w) &= \lambda s(v, w) \\ s(v, w + w') &= s(v, w) + s(v, w') \\ s(v, \lambda w) &= \lambda s(v, w)\end{aligned}$$

$$\forall v, v', w, w' \in V, \lambda \in K$$

Und: s heisst symmetrisch, falls $s(w, v) = s(v, w)$ und schiefsymmetrisch, falls $s(w, v) = -s(v, w)$.

Beispiel 2. • $\langle \cdot, \cdot \rangle := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine symmetrische bilineare Form

- ω ist eine schiefsymmetrisch bilineare Form
- $(\langle \cdot, \cdot \rangle_c)$ nicht)
- $V = \{\text{stetige Abbildung } [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$ über \mathbb{R} : $f, g \in V$

$$s(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

ist eine symmetrisch bilineare Form auf V

Sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum, mit $\dim_K V < \infty$, und $s : V \times V \rightarrow K$ eine bilineare Form.

Definition 5. darstellende Matrix Ist $B = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ eine Basis von V , so setzen wir

$$M_B(s) := (s(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in M(n \times n, K)$$

die darstellende Matrix

Korollar 3. für $x, y \in V$

$$\begin{aligned}x &= x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \\ y &= y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n\end{aligned}$$

und

$$M_B(s) = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, \text{ d.h. } a_{ij} = s(v_i, v_j)$$

haben wir:

$$\begin{aligned}s(x, y) &= \sum_{i, j=1}^n x_i y_j a_{ij} \\ &= (x_1 \cdots x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= x^t M_B(s) \cdot y\end{aligned}$$

Proposition 1. Sei V ein endlich-dim. Vektorraum über K mit Basis $B = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$. Es gibt eine Bijektion zwischen der Menge von Bilinearformen und $M(n \times n, K)$, gegeben durch

$$(s : V \times V \rightarrow K) \mapsto M_B(s)$$

Beweis 4. Wir schreiben einen Vektor $x \in V$ als (x_1, \dots, x_n) falls $x = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$. Ähnlich für y . Dann ist

$$\begin{aligned}A \in M(n \times n, K) &\mapsto V \times V \rightarrow K \\ (x, y) &\mapsto x^t \cdot A \cdot y\end{aligned}$$

inverses zu der obigen Abbildung.

Bemerkung 7. Sei $(s : V \times V \rightarrow K)$ eine bilineare Form und $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ die darstellende Matrix. Wir erinnern uns an die Notation

$$\begin{aligned}\Phi_B : K^n &\rightarrow V \\ e_i &\mapsto v_i\end{aligned}$$

Dann:

$$K^n \times K^n \xrightarrow{\Phi_B \times \Phi_B} V \times V \xrightarrow{s} K$$

ist gegeben durch

$$(x, y) \mapsto x^t A \cdot y$$

Sei $A = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ eine andere Basis.

$$\begin{array}{ccc} & K^n & \\ & \downarrow \Phi_A & \searrow \Phi_B \\ T = \Phi_B^{-1} \circ \Phi_A & & V \\ & \uparrow \Phi_B & \\ & K^n & \end{array}$$

Proposition 2. Transformationsformel Mit dieser Notation haben wir:

$$M_A(s) = T^t \cdot M_B(s) \cdot T$$

Beweis 5.

$$\begin{aligned}K^n \times K^n &\xrightarrow{\Phi_B \times \Phi_B} V \times V \xrightarrow{s} K \\ (x, y) &\mapsto x^t \cdot M_B(s) \cdot y\end{aligned}$$

Beispiel 4. $\langle v, v \rangle = v_1^2 + \dots + v_n^2$ für $v \in K^n$

Für $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ eine symmetrische Matrix mit $s : V \times V \rightarrow K$, $(x, y) \mapsto x^t A y$, haben wir

$$\begin{aligned} s(x, x) &= x^t A x \\ &= (x_1 \quad \dots \quad x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

Ist $\text{char}(K) \neq 2$, so haben wir:

$$\begin{aligned} \{\text{symm. bilineare Formen in } K^n\} &\leftrightarrow \{\text{quadr. Formen auf } K^n\} \\ s &\mapsto q(v) := s(v, v) \\ &\leftrightarrow (\text{Polarisierungsformel}) \end{aligned}$$

1.4.1 Polarisierungsformel

Ist s eine symmetrische Bilinearform und q die zu s gehörende quadratische Form über einem Vektorraum V über K mit $\text{char}(K) \neq 2$, dann gilt:

$$\begin{aligned} s(v, w) &= \frac{1}{2} (q(v+w) - q(v) - q(w)) \\ &= \frac{1}{2} (q(v) + q(w) - q(v+w)) \\ &= \frac{1}{4} (q(v+w) - q(v-w)) \end{aligned}$$

1.5 Sesquilineare Form

Definition 6. Sei V ein komplexer Vektorraum. Eine Abbildung

$$s : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

heißt sesquilinear falls:

$$\begin{aligned} s(v + v', w) &= s(v, w) + s(v', w) \\ s(\lambda v, w) &= \lambda s(v, w) \\ s(v, w + w') &= s(v, w) + s(v, w') \\ s(v, \lambda w) &= \bar{\lambda} s(v, w) \end{aligned}$$

für $v, v', w, w' \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Beispiel 5. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf \mathbb{C}^n

$$\begin{aligned} s(f, g) &= \int_0^1 f(x)g(x)dx \\ \text{auf } V &:= \{\text{stetige Abb. } [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

Definition 7. hermitesch Eine sesquilineare Form heißt hermitesch, falls

$$s(w, v) = \overline{s(v, w)} \quad \forall v, w \in V$$

Beispiel 6. $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$ auf \mathbb{C}^n ist hermitesch.

Bemerkung 9. hermitesche Form Man spricht von hermiteschen Form, diese sind immer sesquilinear

Definition 8. darstellende Matrix Sei $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$, und $B := (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ eine Basis. Ist s eine sesquilineare Form, so definieren wir

$$M_B(s) := (s(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n}$$

die darstellende Matrix. Sind $z, w \in V$

$$\begin{aligned} z &= z_1 v_1 + \cdots + z_n v_n \\ w &= w_1 v_1 + \cdots + w_n v_n \end{aligned}$$

dann haben wir

$$\begin{aligned} s(z, w) &= \sum_{i, j=1}^n z_i \bar{w}_j a_{ij} \text{ wobei } a_{ij} = s(v_i, v_j) \\ &= (z_1 \cdots z_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \vdots \\ \bar{w}_n \end{pmatrix} = z^t M_B(s) \cdot \bar{w} \end{aligned}$$

Proposition 3. Sei V ein endlich dim. \mathbb{C} Vektorraum und $B = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$. Wir haben eine Bijektion

$$\{\text{sesquilineare Form auf } V\} \leftrightarrow M(n \times n, \mathbb{C})$$

Unter dieser Bijektion haben wir:

$$\{\text{hermitesche Formen}\} \leftrightarrow \{A \in M(n \times n, \mathbb{C}) : A^t = \bar{A}\}$$

Man sagt: eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ mit $A^t = \bar{A}$ ist hermitesch.

Satz 1. Transformationsformel Sei $A = (u_1, \dots, u_n)$ eine andere Basis mit Transformationsmatrix T :

TODO: hier einfügen

Dann gilt:

$$M_A(s) = T^t \cdot M_B(s) \cdot \bar{T}$$

Mit $g(v) := s(v, v)$ gilt die Polarisierungsformel

$$s(v, w) = \frac{1}{4} (q(v+w) - q(v-w) + iq(v+iw) - iq(v-iw))$$

Definition 9. positiv definit Sei $K = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} , V ein K -Vektorraum und

$s : V \times V \rightarrow K$ eine Bilinearform $\begin{cases} \text{symmetrisch} & K = \mathbb{R} \\ \text{hermitesch} & K = \mathbb{C} \end{cases}$ heisst positiv definit, falls $s(v, v) > 0 \forall 0 \neq v \in V$

Beispiel 7. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist positiv definit auf \mathbb{R}^n

$\langle \cdot, \cdot \rangle_c$ ist positiv definit auf \mathbb{C}^n

Definition 10. Skalarprodukt

Ein Skalarprodukt ist $\begin{cases} \text{positiv definite symmetrische bilineare Form} & K = \mathbb{R} \\ \text{eine positiv definite hermitesche Form} & K = \mathbb{C} \end{cases}$

Definition 11. Skalarprodukt oft $\langle \cdot, \cdot \rangle$, Norm $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$

Definition 12. Euklidischer Vektorraum Vektorraum über \mathbb{R} mit Skalarprodukt

Definition 13. Unitärer Vektorraum Vektorraum über \mathbb{C} mit Skalarprodukt

Beispiel 8.

$$V = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\} \text{ mit } \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

$$V = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig}\} \text{ mit } \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$$

in beiden Fällen

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}$$

“ L^2 -Norm”

Bemerkung 10. In einem beliebigen euklidischen bzw. unitären Vektorraum gilt die Cauchy-Schwarz’sche Ungleichung

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\| \quad \forall v, w \in V$$

mit = genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Beweis 6. (Skizze) klar falls $v = 0$ oder $w = 0$, also nehmen wir an, dass $v \neq 0$ und $w \neq 0$. 1. Reduktion: zum Fall $\|v\| = \|w\| = 1$.

$$v_1 := \frac{v}{\|v\|} w_1 := \frac{w}{\|w\|}$$

$$\|v_1\| = 1 \quad \|w_1\| = 1$$

2. Reduktion: Es reicht aus, zu zeigen: $\operatorname{Re} \langle v, w \rangle \leq 1 = \text{genau dann wenn } V = W$

$$\begin{aligned} |\langle v, w \rangle| &= \mu \langle v, w \rangle & \mu \in \mathbb{C}, |\mu| &= 1 \\ &= \langle \mu v, w \rangle \in \mathbb{R}_{\geq} \\ &= \operatorname{Re} \langle v', w \rangle \text{ wobei } v' := \mu v \end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz’sche Ungleichung \leq , Gleichheit: v, w linear unabhängig $\implies v', w$ linear unabhängig $\implies v' \neq w$

Eigenschaften 3.

$$\begin{aligned} \langle v - w, v - w \rangle &\geq 0 & \text{= falls } v - w &= 0 \\ \langle v, v \rangle - \langle v, w \rangle - \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle &\geq 0 & v &= w \\ 1 - \langle v, v \rangle - \overline{\langle v, w \rangle} + 1 &\geq 0 & v &= w \end{aligned}$$

Beispiel 9. Ist $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ oder $T : V \rightarrow \mathbb{C}^n$ ein Isomorphismus, dann ist $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ (bzw. $s : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$) gegeben durch

$$s(x, y) = \langle T_x, T_y \rangle$$

bzw.

$$s(x, y) = \langle T_x, T_y \rangle_c$$

ein Skalarprodukt.

Definition 14. Sei V ein exklusiver, bzw. unitärer Vektorraum

- $v, w \in V$ heisst orthogonal, falls $\langle v, w \rangle = 0$
- $U, W \subset V$ heissen orthogonal (geschrieben $U \perp W$) falls $U \perp W \quad \forall u \in U, w \in W$
- $U \subset W$ das orthogonale Komplement ist $U^\perp = \{v \in V : u \perp v \forall u \in U\}$
- v_1, \dots, v_n sind orthogonal, falls $v_i \perp v_j \quad \forall i \neq j$

- v_1, \dots, v_n sind orthonormal, falls $v_i \perp v_j \ \forall i \neq j$ und $\|v_i\| = 1 \ \forall i$
- V ist orthogonale direkte Summe von Untervektorräumen V_1, \dots, V_r falls

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$$

$$V_i \perp V_j \ \forall i \neq j$$

$$C([-1, 1], \mathbb{R}) := \{f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$$

dann ist $C([-1, 1], \mathbb{R})$ die orthogonale direkte Summe von $C([-1, 1], \mathbb{R})_{\text{gerade}}$ und $C([-1, 1], \mathbb{R})_{\text{ungerade}}$. gerade: $f(-x) = f(x)$ und ungerade: $f(-x) = -f(x)$

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{gerader Teil}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{ungerader Teil}}$$

$$g \text{ gerade, } h \text{ ungerade} \implies gh \text{ ungerade} \implies \langle g, h \rangle = \int_{-1}^1 g(x)h(x) = 0$$

Bemerkung 11. Ist v_1, \dots, v_n eine orthonormale Familie mit $v_i \neq 0 \forall i$, so gilt

1. $(i)(v_1, \dots, v_n)$ ist linear unabhängig ($c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0 \implies c_i \langle v_i, v - i \rangle + \dots + c_i \langle v_i, v_i \rangle + \dots + c_n \langle v_n, v_i \rangle = 0 \implies c_i \|v_i\|^2 = 0 \implies c_i = 0$)
2. $\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\right)$ ist orthonormal

Satz 2. Ist (v_1, \dots, v_n) eine orthonormale Basis von V , so gilt folgendes für beliebiges $v \in V$

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v_i, v \rangle v_i$$

$$v = \sum_{i=1}^b c_i v_i$$

$$\langle v, v_j \rangle = \sum_{i=1}^n c_i \langle v_i, v_j \rangle$$

$$= c_j \langle v_i, v_j \rangle = c_j$$

Proposition 4. Sei $K = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} und $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum über K

1. Ist $n := \dim_K V < \infty$ und (v_1, \dots, v_d) eine orthonormale Familie von Vektoren von V , so existieren v_{d+1}, \dots, v_n , so dass (v_1, \dots, v_n) eine orthonormale Basis von V ist.
2. Ist $U \subset V$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum, so gilt $V = U \oplus U^\perp$, orthonormal direkte Summe.

Beweis 7. Es gibt triviale Fälle: $d = n$ in 1., $U = 0$ in 2. Auch: der Fall $(d = 0)$ in 1. $\Leftarrow d = 1$: $0 \neq v \in V$ beliebiger Vektor, wir nehmen $b_1 = \frac{v}{\|v\|}$
Beweis durch Induktion nach N mit Induktionsannahme 1. gilt für $n \leq N$
 $N = 1$ okay.

Plan: Wir zeigen $1A \implies 2.$ für $\dim_K U \leq N$ und $1A \implies 1.$ für $n \leq N + 1$.
 $1A \xrightarrow{\dim U \leq N} \exists$ orthonormale Basis (u_1, \dots, u_d) von U $d := \dim U$. Für beliebiges $v \in V$ gilt:

$$v - \sum_{i=1}^d \langle v_i, v \rangle u_i \in U^\perp$$

$$U : 1\text{-dimensional} \quad \left| \quad U^\perp : 2\text{-dim} \right.$$

$$s(e_1, e_1) = 3 \quad \left| \quad = 24 \right.$$

denn

$$\left\langle v - \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i, u_j \right\rangle = \langle v, u_j \rangle - \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle \langle u_i, u_j \rangle = 0$$

Und: 1. für $\dim V \leq N+1$ folgt aus IA und 2. für $U \leq N$

$$1 \leq d < n = \dim V \geq N+1$$

$$\implies 1 \leq d \leq N \text{ und } 1 \leq \dim V - d \leq N$$

Sei $U := \text{span}(v_1, \dots, v_d)$ Aus 2. haben wir $V = U \oplus U^\perp$ Nach IA, \exists orthonormale Basis (v_{d+1}, \dots, v_n) von U^\perp Es folgt, dass (v_1, \dots, v_n) ist eine orthonormale Basis von V .

Eigenschaften 4. Praktisches Verfahren zu testen ob ein symmetrisch bilineare bzw. hermetische Form ein Skalarprodukt ist (falls $\dim_K V < \infty$). Verfahren:

- wählen $U \subset V$ nicht trivialer Untervektorraum (z.B. $U = \text{span}(v), 0 \neq v \in V$)
- Berechnen U^\perp
- Testen:
 - Ist $V = U \oplus U^\perp$?
 - Ist die Einschränkung von der Form auf U ein Skalarprodukt?
 - Ist die Einschränkung von der Form auf U^\perp ein Skalarprodukt?

Beispiel 10. $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$M := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die entsprechende Bilinearform

$$(x, y) \mapsto t_x \cdot M \cdot y$$

$$U = \text{span}(e_1)$$

$$U^\perp = \{(x_1, x_2, x_3) : 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}$$

$$= \text{span}((1, -3, 0), (0, 2, -1))$$

Die darstellende Matrix:

$$s|_{U^\perp} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 24 & -21 \\ -21 & 18 \end{pmatrix}$$

$$U \cong \mathbb{R}^2$$

$$W = \text{span}(e_1) \in \mathbb{R}^2$$

$$W^\perp = \{(x_1, x_2) | 24x_1 - 21x_2 = 0\}$$

$$= \text{span}(21, 24)$$

W 1-dim, W^\perp 1-dim

$$(s|_{U^\perp})(e_1, e_2) = 24$$

$$(21 \ 24) \begin{pmatrix} 24 & -21 \\ -21 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 18 \end{pmatrix} = -216$$

\implies kein Skalarprodukt

1.6 Volumen

Definition 15. Volumen $\xleftrightarrow{\text{Skalarprodukt}} \langle \cdot, \cdot \rangle \xleftrightarrow{\text{Norm}} \|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle} \xleftrightarrow{\text{Metrik}} d(x, y) = \|y, x\|$
 $K = \mathbb{R} \rightsquigarrow \text{Volumen } (\dim V < \infty)$

1.6.1 Spat

Definition 16. Spat u_1, \dots, u_n orthonormale Basis. Dann ist der von (u_1, \dots, u_n) aufgespannte Spat definiert als (wobei $c_i :=$ von (u_1, \dots, u_n) aufgespannten Spat)

$$\left\{ \sum_{i=1}^n c_i u_i \mid 0 \leq c_i \leq 1 \ \forall i \right\}$$

$\text{Vol}(\text{Spat}) := 1$

Falls $v_1, \dots, v_n \in V$ beliebig sind, dann hat der von (v_1, \dots, v_n) aufgespannte Spat

$$\text{Vol} = \left| \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right| \quad v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j$$

Sei $b_{ij} := \langle v_i, v_j \rangle$ und $B := \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ Wir haben $b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk}$,

also $B = A \cdot A^t$. Es folgt:

$$\text{Vol} = \sqrt{(\det A)^2} = \sqrt{\det B}$$

Vorteile:

- keine Wahl von orthonormaler Basis nötig
- auch sinnvoll für eine Kollektion v_1, \dots, v_m evtl. $m \neq n$

Beispiel 11. $m = 1$

$$\begin{aligned} \det B &= \|v_1\|^2 \\ \sqrt{\det B} &= \|v_1\| \end{aligned}$$

Definition 17. Grammsche Determinante Im m -dim Volumen $:= \sqrt{G(v_1, \dots, v_m)}$ wobei

$$G(v_1, \dots, v_m) := \det (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq m}$$

die sogenannte Grammsche Determinante ist.

Bemerkung 12. Es gilt $G(v_1, \dots, v_m) = 0 \Leftrightarrow v_1, \dots, v_m$ lineare abhängig, weil

$$A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{R})$$

mit

$$G(v_1, \dots, v_m) = \det(A, A^t) = \sum (m \times m \text{ Minor})$$

Bemerkung 13.

$$\text{Vol}(v_1, \dots, v_m) := \sqrt{G(v_1, \dots, v_m)}$$

ist 0 falls $\exists i : v_i = 0$

sonst:

$$\text{Vol}(v_1, \dots, v_m) = \|v_1\| \cdots \|v_m\| \text{Vol}\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_m}{\|v_m\|}\right)$$

Satz 3. Hadamard'sche Ungleichung

$$\text{Vol}(v_1, \dots, v_m) \leq \|v_1\| \cdots \|v_m\|$$

für $0 \neq v_i \in V$, $i = 1, \dots, m$. Mit Gleichheit genau dann wenn v_1, \dots, v_m orthogonal sind.

Beweis 8. Durch fallende Induktion nach

$$\max \{|I| : I \subset \{1, \dots, m\} \mid (v_i)_{i \in I} \text{ orthogonal}\}$$

Fall $\max\{\dots\} = m$ das bedeutet, v_1, \dots, v_m sind orthogonal. Dann:

$$G(v_1, \dots, v_m) = \det \begin{pmatrix} \|v_1\|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \|v_m\|^2 \end{pmatrix} = \|v_1\|^2 \cdots \|v_m\|^2$$

Die ist der Induktionsanfang.

Sei $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq r < m$. Induktionsannahme: Ungleichung für den Fall

$$\max\{|I| : (v_i)_{i \in I} \text{ orthogonal}\} > r$$

Sei v_1, \dots, v_m , so dass $\max\{\dots\} = r$. o.B.d.A: v_1, \dots, v_r orthogonal. Wir schreiben:

$$v_m = \underbrace{v_m - \sum_{i=1}^r \frac{\langle v_m, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i}_{\tilde{v}_m \in \text{span}(v_1, \dots, v_r)^\perp} + \underbrace{\sum_{i=1}^r \frac{\langle v_m, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i}_{\tilde{v}_m \in \text{span}(v_1, \dots, v_r)}$$

$$< \tilde{v}_m, \tilde{v}_m \rangle = 0$$

- $v = \tilde{v} + \tilde{v}$
- $< \tilde{v}, \tilde{v} \rangle = 0$
- $\|v\|^2 = \|\tilde{v}\|^2 + \|\tilde{v}\|^2$

Das ist eine Orthogonale Projektion Wir haben

$$G(v_1, \dots, v_m) = G(v_1, \dots, v_{m-1}, \tilde{v}_m)$$

weil (Spalten- und Zeilenumformungen...). Es folgt:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(v_1, \dots, v_m) &= \text{Vol}(v_1, \dots, v_{m-1}, \tilde{v}_m) \leq \|v_1\| \cdots \|v_{m-1}\| \|\tilde{v}_m\| \\ &< \|v_1\| \cdots \|v_{m-1}\| \|v_m\| \end{aligned}$$

Definition 18. Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren

$$\tilde{v}_r := v_r - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\langle v_r, \tilde{v}_i \rangle}{\langle \tilde{v}_i, \tilde{v}_i \rangle} \tilde{v}_i, \text{ für } 1, 2, \dots$$

gegeben: eine Kollektion (v_1, \dots, v_n) oder abzählbar unendlich (v_1, v_2, \dots) . Das Verfahren produziert $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots)$, mit:

$$\begin{aligned} (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots) &= (v_1, v_2, \dots) \\ (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m) &= (v_1, \dots, v_m) \quad \forall m \\ (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots) &\text{ sind orthogonal} \end{aligned}$$

Beispiel 12. $C([-1, 1], \mathbb{R})$ mit $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$

$$\begin{aligned} (1, x, x^2, \dots) \\ \xrightarrow{\text{GS}} \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{2/3}{2} \\ (1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3}{5} \dots) \end{aligned}$$

Bis auf Normalisierung bekommen wir die Legendre-Polynome.

Fazit 4.

Bilinearform	$\xrightarrow{+ \text{ def, symm}}$	Norm	\rightarrow	Metrik	Norm:
Sesquilinearform	$\xrightarrow{+ \text{ def, hermitesch}}$				

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \|x\| = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \\ \|\lambda x\| &= |\lambda| \|x\| \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

Metrik:

$$\begin{aligned} d : V \times V &\rightarrow \mathbb{R}_{\leq 0} \\ d(x, <) &= 0 \Leftrightarrow x = y \\ d(x, y) &= d(y, x) \\ d(x, z) &\leq d(y, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

Aber: nicht jede Metrik, nicht einmal jede transinvariante Metrik kommt von einer Norm.

Bemerkung 14. Eine Norm kommt von einer +def, symm Bilinearform

$$\Leftrightarrow \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x, y \in V$$

Definition 19. ausgeartete Bilinearform Eine Bilinearform $s : V \times V \rightarrow K$ ist ausgeartet (oder: entartet), falls eine oder beide der induzierten Abbildungen $V \rightarrow V^*$ nicht injektiv ist.

$$\begin{aligned} v &\mapsto (w \mapsto s(v, w)) \\ v &\mapsto (w \mapsto s(w, v)) \end{aligned}$$

Bemerkung 15. Falls $\dim_K V < \infty$, dann:

$$\begin{array}{ll} v \mapsto (w \mapsto s(v, w)) & \text{injektiv} \\ \Downarrow & \\ v \mapsto (w \mapsto s(w, v)) & \text{injektiv} \\ \Downarrow & \\ s \text{ ist nicht ausgeartet} & \\ \Downarrow & \\ \text{die darstellende Matrix ist invertierbar} & \end{array}$$

$$\begin{aligned} s(v, w) &= v^t \cdot A \cdot w \\ &= (A^t \cdot v)^t \end{aligned}$$

i++i

Satz 4. Sei V ein K -Vektorraum, $s : V \times V \rightarrow K$ eine symmetrische oder schiefsymmetrische Bilinearform. Für $U \subset V$ Untervektorraum, schreiben wir noch

$$U^\perp := \{v \in V : s(u, v) = 0 \quad \forall u \in U\}$$

($s(v, u) = 0 \Leftrightarrow s(u, v) = 0$ weil s symm. bzw. schiefsymm.)

Proposition 5. Sei V ein endlich dimensionaler K -Vektorraum und $s : V \times V \rightarrow K$ eine nicht ausgeartete symmetrische oder schiefsymmetrische Bilinearform. Sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Dann gilt:

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V$$

Beweis 9. Sei $(v_i)_{i=1, \dots, n}$ eine Basis mit $n := \dim V$, und A die darstellende Matrix von s bzw. (v_i) . Wir haben dann:

$$s(x, y) = x^t \cdot A \cdot y$$

und $A^t = \pm A$, $\det A \neq 0$

$$U^\perp = \{x \in V_i | x^t \cdot A \cdot y = 0 \quad \forall y \in U\} = \{x \in V_i | (x \cdot A)^t \cdot y = 0 \quad \forall y \in U\}$$

Sei $F : V \rightarrow V$ lin. Abb. $\leftrightarrow A$. Dann:

$$F(U^\perp) = \{Ax \mid (Ax)^t y = 0 \ \forall y \in U\} = \{Ax \mid \tilde{x}^t y = 0 \ \forall y \in U\}$$

Es folgt: mit

$$B := \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_d \\ | & & | \end{pmatrix}$$

(u_1, \dots, u_d) Basis von U , dann ist $F(U^\perp) = \text{Ker } B$. Jetzt:

$$\dim U^\perp = \dim F(U^\perp) = \dim \text{Ker } B = n - \dim U$$

Korollar 4. $\dim U < \infty$, $s : V \times V \rightarrow K$ nicht ausgeartet, (schief-) symm.

$$U \subset \implies (U^\perp)^\perp = U$$

Bemerkung 16. Es ist nicht immer der Fall, dass $V = U \oplus U'$, weil es ist möglich, dass $U \cup U^\perp \neq 0$. 2 Extremfälle:

- U ist isotropisch ($s|_U$ ist trivial) $\Leftrightarrow U \subset \underbrace{U^\perp}_{\dim V - \dim U}$
- $s|_U$ ist auch nicht ausgeartet $\Leftrightarrow U \cup U^\perp = 0 \Leftrightarrow V = U \oplus U^\perp$

Aus 1. ist klar:

$$\dim U \leq \frac{1}{2} \dim V \ \forall \text{ isotrop } U \subset V$$

1.7 Orthogonale und unitäre Endomorphismen

$K = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}

Definition 20. orthogonaler bzw. unitärer Endomorphismus Sei V, \langle, \rangle ein ortho. bzw. unitärer Vektorraum. Ein Endomorphismus $F : V \rightarrow V$ heisst orthogonal bzw. unitär falls

$$\langle F(v), F(w) \rangle = \langle v, w \rangle \ \forall v, w \in V$$

Bemerkung 17. Das ist äquivalent zu

$$\|F(v)\| = \|v\| \ \forall v \in V$$

Eigenschaften 5. orthogonaler bzw. unitärer Endomorphismus Sei F ein ortho. bzw. unitärer Endomorphismus. Dann:

- F ist injektiv
- Falls $\dim_K V < \infty$, F ist bijektiv, und F' ist auch ortho. bzw. unitär
- Für jeden Eigenwert $\lambda \in K$ gilt $|\lambda| = 1$. Eigenvektor v :

$$\|v\| = \|F(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

Falls $V = \mathbb{R}^n$ oder \mathbb{C}^n mit Standardskalarprodukt

$$\langle v, w \rangle = v^t w \text{ bzw. } \langle v, w \rangle_c = v^t \bar{w}$$

Ist F zur Matrix A entsprechend, dann

$$\begin{aligned} \langle F(v), F(w) \rangle &= \langle v, w \rangle \Leftrightarrow (Av)^t Aw = v^t w \\ &\text{bzw. } (Av)^t \bar{Aw} = v^t \bar{w} \\ &\Leftrightarrow v^t A^t Aw = v^t w \Leftrightarrow A^t A = E_n \\ \text{bzw. } &\Leftrightarrow v^t A^t \bar{A} \bar{w} = v^t \bar{w} \Leftrightarrow A^t \bar{A} = E_n \end{aligned}$$

Definition 21. ortho. bzw. unitäre Matrix $O(n) := A \in GL_n(\mathbb{R})$ heisst orthogonal falls $A^t A = E_n$
 $U(n) := A \in GL_n(\mathbb{C})$ heisst unitär falls $A^t \bar{A} = E_n$

Not 1.

$$O_n := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | A \text{ orthogonal}\}$$

$$O_n := \{A \in GL_n(\mathbb{C}) | A \text{ unitär}\}$$

Weil

$$A, B \in O(n) \implies (AB)^t(AB) = B^t A^t AB = B^t B = E_n \implies AB \in O(n)$$

haben wir $O(n) \subset GL_n(\mathbb{R})$ ist eine Untergruppe. Ähnlich: $U(n) \subset GL_n(\mathbb{C})$ ist eine Untergruppe.

Not 2.

$$SO(n) = O(n) \cap SL_n(\mathbb{R})$$

$$SU(n) = U(n) \cap SL_n(\mathbb{C})$$

Not 3. ortho. bzw. unitärer Vektorraum

$$O(V) = \{F \in GL(V) | \text{ortho.}\}$$

$$U(V) = \{F \in GL(V) | \text{unitär}\}$$

Bemerkung 18.

$$A \in O(n) \implies \det A \in \{\pm 1\}$$

$$A \in U(n) \implies \det A \in \{\pm z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

Eigenschaften 6. Charakterisierungen von ortho. bzw. unitären Matrizen Äquivalente Charakterisierungen von orthogonalen bzw. unitären Matrizen $A \in GL_n(\mathbb{R})$:

A ist orthogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t \Leftrightarrow A^t A = E_n \Leftrightarrow A A^t = E_n \Leftrightarrow$ die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n .

Ähnlich:

A ist unitär $\Leftrightarrow A^{-1} = \bar{A}^t \Leftrightarrow A^t \bar{A} = E_n \Leftrightarrow \bar{A} A^t = E_n \Leftrightarrow$ die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n \Leftrightarrow$ die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von \mathbb{C}^n .

Für $n = 1$

$$O(1) = \{\pm 1\} \quad U(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \cong S^1$$

$$SO(1) = \{1\} \quad SU(1) = \{1\}$$

Für $n = 2$: $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a^2 + b^2 = 1$

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\} \cong S^1$$

$(z, w) \in \mathbb{C}^2, |z|^2 + |w|^2 = 1, (-\bar{w}, \bar{z}) \perp (z, w)$

$$U(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z & -\lambda \bar{w} \\ w & \lambda \bar{z} \end{pmatrix} \mid (z, w) \in \mathbb{C}^2, |z|^2 + |w|^2 = 1, \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1 \right\} \cong S^3 \times S^1$$

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} \mid (z, w) \in \mathbb{C}^2, |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\} \cong S^3$$

$SO(3)$ eine explizite Beschreibung ist möglich (später)

Proposition 6. Sei V ein endlich dimensionaler \mathbb{C} -Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, und sei $F : V \rightarrow V$ ein unitärer Endomorphismus. Dann besitzt V eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren von F .

Beweis 10. Durch Induktion nach $\dim V$. $\dim V = 0, 1$ trivial. $\dim V \geq 2$ Weil \mathbb{C} algebraisch abgeschlossen ist, gibt es einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Sei $v \in V$ ein Eigenvektor, mit $\|v\| = 1$. Weil F unitär ist, haben wir $F(v^\perp) = v^\perp$. Wir haben $\dim v^\perp = \dim V - 1$

$$\begin{aligned} w \in v^\perp \langle v, w \rangle &\implies \langle v, w \rangle = 0 \\ \lambda \langle v, F(w) \rangle &= \langle \lambda v, F(w) \rangle = \langle F(v), F(w) \rangle = 0 \\ &\implies F(v^\perp) \subset v^\perp \end{aligned}$$

Aus der Induktionsannahme folgt, dass \exists Orthonormalbasis von v^\perp von Eigenvektoren von F . Zusammen mit $v \overset{V = \text{span}}{\rightsquigarrow} \bigoplus v^\perp$ Orthonormalbasis von V

Korollar 5. Sei $A \in U(n)$. Dann $\exists S \in U(n)$, $\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$ so dass

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

Proposition 7. Sei V ein endlich dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, und sei $F : V \rightarrow V$ ein orthogonaler Endomorphismus. Dann besitzt V eine Orthonormalbasis $(v_1^+, \dots, v_r^+, v_1^-, \dots, v_s^-, w_1, w'_1, \dots, w_t, w'_t)$

- $F(v_i^+) = v_i^+$
- $F(v_i^-) = -v_i^-$
- $F(w_i) = (\cos \theta_i)w_i + (\sin \theta_i)w'_i$
- $F(w'_i) = (-\sin \theta_i)w_i + (\cos \theta_i)w'_i$

mit $\theta_i \in \mathbb{R}$, $0 < |\theta| < \phi$, $i = 1, \dots, t$

Beweis 11. Durch Induktion nach $\dim V$: $\dim V = 0, 1, 2$ trivial. $\dim > 2$ (nächstes mal)

$\dim_{\mathbb{R}} V$ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Skalarprodukt

Fazit 5. $F : V \rightarrow V$ orthogonaler Endomorphismus +1 oder -1 Eigenvektoren
 $\implies \exists$ orthogonale Basis

$$F(\alpha w_i + \beta w'_i) = (\alpha \cos \Theta_i - \beta \sin \Theta_i) w_i + (\alpha \sin \Theta_i + \beta \cos \Theta_i) w'_i, \quad \Theta_i \in \mathbb{R}$$

Beweis 12. Fortsetzung Durch Induktion nach $\dim V$, Induktionsanfang: $\dim V \leq 2$ $\dim V = 2$ bezüglich beliebiger Basis (w_1, w'_1) .

$$V : \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta \\ -\sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix}$$

Matrix 1: w_1, w_2 ist wie oben, Matrix 2: charakteristisches Polynom $t^2 - 1 = (t-1)(t+1) \rightarrow (+1\text{-Eigenvektor}, -1\text{-Eigenvektor})$

1. Fall: \exists reeller Eigenwert

$$\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| = 1 \quad v \in V \quad F(v) = \lambda v$$

wir zeigen, dass $F(v^\perp) = v^\perp$ genau wie im Fall eines unitären Endomorphismus

$$\begin{aligned} \dim(v^\perp) &= \dim V - 1 \overset{IA}{\rightsquigarrow} v^\perp : \text{orthonormale Basis} \\ V &= (v) \bigoplus v^\perp \end{aligned}$$

2. Fall: \nexists reeller Eigenwert

$$\implies P_F(t) = \prod_{i=1}^{(\dim V)/2} Q_i(t)$$

$Q_i(t)$ irreduzibles quadratisches Polynom. Aus dem Satz von Cayley-Hamilton folgt:

$$\implies \exists \overbrace{v}^{\neq 0} \in V, \text{ mit } Q_i(F)v = 0$$

Sei $0 \neq v_0 \in V$ beliebigen Vektor $P_F(F)v_0 = 0$

$$\begin{aligned} Q_1(F)Q_2(F)\cdots + \frac{\dim V}{2}(F)v_0 &= 0 \\ \implies \exists j : Q_j(F)Q_{j+1}(F)\cdots + \frac{\dim V}{2}(F)v_0 &= 0 \\ \text{aber } Q_{j+1}(F)\cdots Q_{\dim V/2}(F)v_0 &\neq 0 \end{aligned}$$

\implies wir nehmen $i := j$ und $v := Q_{j+1}(F)\cdots Q_{\dim V/2}(F)v_0$.
 Beh: $U := \text{span}(v, F(v))$ ist ein F -invariante Vektorraum. $Q_i(F)v = 0$
 $\implies \exists a, b \in \mathbb{R}$ mit $F(F(v)) = av + bF(v)$. Es folgt: U^\perp ist auch F -invariant. $V = U \oplus U^\perp \xrightarrow{IA}$ Basen von U und von U^\perp wie oben. Die Vereinigung dieser Basen ist wie erwünscht.

Korollar 6. Sei $A \in O(n)$. Dann gibt es ein $S \in O(n)$ und $r, s, t \in \mathbb{N}$, $\Theta_1, \dots, \Theta_t \in \mathbb{R}$ mit

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} E_r & & & & 0 \\ & -E_s & & & \\ & & D_{\Theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & D_{\Theta_t} \end{pmatrix}$$

wobei

$$D_\Theta := \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix}$$

Beispiel 13.

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix} \in U(n)$$

$$\begin{aligned} A(z_1, \dots, z_n) &= (z_2, \dots, z_n, z_1) \\ A(1, S, S^2, \dots, S^{n-1}) &= (S, S^2, \dots, S^{n-1}, 1) \\ S &:= e^{2\pi i/n} \quad S^n = 1 \end{aligned}$$

$\implies (1, S, S^2, \dots, S^{n-1})$ ist Eigenvektor zum Eigenwert S . Ähnlich: für $0 \leq j \leq n-1$ haben wir $(1, S^j, S^{2j}, \dots, S^{(n-1)j})$ ist Eigenvektor zum Eigenwert S^j .
 $1, S, S^2, \dots, S^{n-1}$ sind paarweise verschieden $\implies (1, S^j, S^{2j}, \dots, S^{(n-1)j})$ ist eine Basis von Eigenvektoren. Normalisierung:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} (1, S^j, S^{2j}, \dots, S^{(n-1)j}) \right)_{j=0,1,\dots,n-1}$$

ist eine orthonormale Basis von Eigenvektoren

$(K = \mathbb{C})$ unitärer Endomorphismus von V
Fazit 6. $(K = \mathbb{R})$ orthogonaler Endomorphismus von V
 $\implies V = \bigoplus_{\text{Eigenwerte } \lambda} \text{Eig}(F; \lambda)$ orthogonale direkte Summe

Beispiel 14.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{4}{5} & \frac{36}{65} \\ \frac{4}{13} & -\frac{3}{5} & \frac{48}{65} \\ \frac{12}{13} & 0 & -\frac{5}{13} \end{pmatrix} \in O(3)$$

$\det A = 1$ 2 komplex konjugierte + 1 reeller oder 3 reelle Eigenwerte $\implies +1$ ist ein Eigenwert. $\dots \rightsquigarrow$ Eigenvektor $(6, 3, 4)$ zum Eigenwert 1. $\rightarrow v$ mit $\|v\| = 1$
 $v = \frac{1}{\sqrt{61}}(6, 3, 4) \rightarrow v^\perp = \text{span}((1, -2, 0), (2, 0, -3)) \xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}}$

$$(1, -2, 0), \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}, -3\right)$$

Normalisieren:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0), \sqrt{1}\sqrt{305}(8, 4, -15)$$

Und wir berechnen

$$S := \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{61}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{8}{\sqrt{305}} \\ \frac{3}{\sqrt{61}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{305}} \\ \frac{4}{\sqrt{61}} & 0 & -\frac{15}{\sqrt{305}} \end{pmatrix}$$

bekommen wir

$$\underbrace{S^{-1}}_{=S^t} AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{57}{65} & \frac{4\sqrt{61}}{65} \\ 0 & -\frac{4\sqrt{61}}{65} & -\frac{57}{65} \end{pmatrix}$$

1.8 Beschreibung von $SO(3)$ und $O(3)$

Eigenschaften 7. Sei $A \in SO(3)$. Dann: entweder es gibt 1 reelle und 2 komplex konjugierte Eigenwerte oder 3 reelle Eigenwerte. $\lambda \in \mathbb{C} \implies \lambda \cdot \bar{\lambda} = 1$. Eigenwerte $+1(\times 3) \Leftrightarrow A = E_3$ oder $-1(\times 2) / +1$. Wenn $\nrightarrow A = E^3$, dann ist $\dim \text{Eig}(A, 1) = 1$.

$$A : \text{Eig}(A, 1)^\perp \rightarrow \text{Eig}(A, 1)^\perp$$

ist eine Drehung durch einen Winkel $\Theta \in (0, 2\phi)$. Bezüglich Basis (v_1, v_2, v_3) , $v_1 \in \text{Eig}(A, 1)$, $\|v_1\| = 1$ sieht A aus wie

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Theta & -\sin \Theta \\ 0 & \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix}$$

Eigenschaften 8. Sei $A \in O(3)$ Falls $\det A = 1$, haben wir $A \in SO(3)$

Falls $\det A = -1$, haben wir $-A \in SO(3)$

Dann bekommen wir die folgende Beschreibung von $A \in O(3)$ mit $\det A = -1$:

- $A = -E_3$
- oder $\dim \text{Eig}(A, -1) = 1$
 $v_1 \in \text{Eig}(A, -1)$, $\|v_1\| = 1$
 $A : \text{Eig}(A, -1)^\perp \rightarrow \text{Eig}(A, -1)^\perp$ ist eine Drehung um den Winkel $\Theta - \pi \in (-\pi, \pi)$ (Spiegelung oder Spiegelung mit Drehung)

1.9 Selbstadjungierte Endomorphismen

V, \langle, \rangle , K -Vektorraum mit Skalarprodukt. ($K = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}). Ist $F : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus, so heisst $F^* : V \rightarrow V$ adjugierter Endomorphismus falls

$$\langle F(v), w \rangle = \langle v, F^*(w) \rangle \quad \forall v, w \in V$$

Definition 22. $F : V \rightarrow V$ ist adjugiert falls

$$\langle F(v), w \rangle = \langle v, F(w) \rangle \quad \forall v, w \in V$$

Eigenschaften 9. Falls $V = \mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt, so zu F ist eine assoziierte Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$, dann ist A^t zu F^* assoziiert. Falls $V = \mathbb{C}^n$, dann ist

$$\begin{aligned} F &\leftrightarrow A \in M(n \times n, \mathbb{C}) \\ F^* &\leftrightarrow \bar{A}^t \in M(n \times n, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

Beweis 13.

$$\langle Av, w \rangle = (Av)^t \bar{w} = v^t A^t \bar{w} = v^t \bar{A}^t w = \langle v, \bar{w}^t w \rangle$$

Bemerkung 19. F^* ist eindeutig falls für \tilde{F}^* gilt

$$\langle F(v), w \rangle = \langle v, \tilde{F}^*(w) \rangle$$

dann ist

$$0 = \langle v, \tilde{F}^*(w) - F^*(w) \rangle$$

\implies

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \tilde{F}^*(w) - F^*(w), \tilde{F}^*(w) - F^*(w) \rangle \\ &= \|\tilde{F}^*(w) - F^*(w)\|^2 \\ &\implies \tilde{F}^*(w) = F^*(w) \end{aligned}$$

Fazit 7. Im Fall $V = \mathbb{R}^n$ bzw. \mathbb{C}^n mit Standardskalarprodukt ist ein selbstadjungierter Endomorphismus durch eine symmetrische bzw. hermitesche Matrix gegeben.

Lemma 1. Jeder Eigenwert eines selbstadjungierten Endomorphismus ist reell.

Beweis 14. Ist $F(v) = \lambda v$ mit $v \neq 0$, so gilt

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle F(v), v \rangle = \langle v, F(v) \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle \implies \lambda = \bar{\lambda}$$

Bemerkung 20. Prä-Hilbertraum bezeichnet einen K -Vektorraum ($K = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}) mit Skalarprodukt. Euklidische bzw. unitäre Vektorräume sind endlichdimensional,

Proposition 8. Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und $F : V \rightarrow V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Dann gibt es eine orthonormale Basis von Eigenvektoren.

Beweis 15. Falls V ein unitärer Vektorraum ist: durch Induktion nach $\dim V$, \exists Eigenwert λ , Eigenvektor v , oBdA haben wir $\|v\| = 1$. Wir behaupten:

$$F(v^\perp) \in v^\perp$$

$$\langle v, w \rangle = 0 \implies \langle v, F(w) \rangle = \langle F(v), w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle = 0$$

IA $\implies \exists$ orthonormale Basis von v^\perp . Dies, zusammen mit v , gibt eine Basis von V . Fall eines euklidischen Vektorraums: Das gleiche Argumente ist gültig, sobald wir wissen, dass F einen Eigenwert besitzt. Man wählt eine Basis von V , so:

$$F \leftrightarrow A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \quad [n = \dim V]$$

mit $A = A^t$. Wir betrachten A als komplexe Matrix, so dass

$$A = \bar{A} \implies \bar{A}^t = A^t = A \implies A \text{ ist hermetisch}$$

Sei λ ein (komplexer) Eigenwert von A . Weil A hermetisch ist, haben wir $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir haben

$$\det(A - \lambda E_n) = 0$$

Dann:

$$\det(F - \lambda \text{id}_V) = 0$$

also λ ist Eigenwert von F .

Korollar 7. Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Dann $\exists S \in O(n)$ mit

$$S^t A S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ hermetisch. Dann $\exists S \in U(n)$ mit

$$\bar{S}^t A S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

Korollar 8. Sei $F : V \rightarrow V$ wie in der Proposition oben. Dann ist V die orthogonale direkte Summe von diesen Eigenräumen:

$$V = \bigoplus_{\text{Eigenwert } \lambda} \text{Eig}(F; \lambda)$$

Fazit 8. \rightsquigarrow Praktisches Verfahren: A symmetrisch bzw. hermetische Matrix

\hookrightarrow berechnen $\text{Eig}(A; \lambda)$

\hookrightarrow wählen von jedem eine orthonormale Basis

Beispiel 15.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3+3i \\ 3 & 5 & -3-3i \\ 3-3i & -3+3i & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = \det(tE_3 - A) = (t-5)^2(t-2) + \dots = t^3 - 12t^2 + 256 = (t+4)(t-8)^2$$

$$\text{Eig}(A; -4) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3+3i \\ 3 & 9 & -3-3i \\ 3-3i & -3+3i & 6 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1+i \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Eig}(A; \delta) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3+3i \\ 3 & -3 & -3+3i \\ 3-3i & -3+3i & -6 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1-i \end{pmatrix} \right\} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \right), \left(\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1-i}{2} \right)$$

Wir bekommen:

$$S := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{-1+i}{2} & 0 & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix}$$

dann:

$$\bar{S}^t A S = \text{diag}(-4, 8, 8)$$

Bemerkung 21. Das Resultat von der Proposition oben im Fall eines euklidischen Vektorraums ist klar, auch aus geometrischem Grund.

symm. Matrizen $\setminus \mathbb{R} \rightsquigarrow$ quadratische Formen

(Prop aktuelle-7) $S^t A S$ aus der Transformationsformel.

... und man kann auch einen alternativen Beweis in diesem Fall geben.

$$A \in M(n \times n, \mathbb{R}), A^t = A \rightsquigarrow q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, q(v) := v^t A v$$

(Faktum aus der Analysis)

$$\exists x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1 \text{ mit } q(x) \geq q(x') \quad \forall x' \in \mathbb{R}^n, \|x'\| = 1$$

Dann für $v \in \mathbb{R}^n, v \perp x$ haben wir $Av \perp x$. In der Tat haben wir

$$(Av - q(x)v) \perp x \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

denn

$$\langle Av - q(x)v, v \rangle + 2\lambda \langle Av - q(x)v, x \rangle = (v + \lambda x)^t (A - q(x)E_n)(v + \lambda x) \leq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

(Details im Buch, 5.6.4)

Bemerkung 22. F selbstadjugiert, $\dim V < \infty \implies \exists$ orthonormale Basis von Eigenvektoren \implies

$$V = \bigoplus_{\lambda} \text{Eig}(F; \lambda)$$

orthogonale direkte Summe \rightsquigarrow orthogonale Projektion

$$P_{\lambda} V \rightarrow \text{Eig}(F, \lambda)$$

Dann können wir schreiben

$$\begin{aligned} F &= \sum_{\text{Eigenwerte } \lambda} \lambda P_{\lambda} \\ &= \{\text{Eigenwerte von } F\} = \text{"Spektrum"} \end{aligned}$$

Geschrieben mit Matrizen:

$$A \in (n \times n, \mathbb{R}) \text{ symmetrisch} \implies \exists S \in O(n)$$

so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Interpretation: der zu A assoziierte Endomorphismus ist Diagonalisierbar.

$S^t AS$ ist eine Diagonalmatrix

Interpretation: $A \leftrightarrow s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Bilinearform.

$$\begin{aligned} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &\leftrightarrow (x, y) \mapsto x^t \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) y \\ &\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)^t \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i \end{aligned}$$

Fragen

- Zu einer symmetrischen Bilinearform gibt es eine bestimmte Normalform?
- Wie kann man das praktisch berechnen?

Proposition 9. *Hauptachsentransformation symmetrischer Matrizen* Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch und $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die entsprechende symmetrische Bilinearform. Dann:

1. Ist $B = (w_1, \dots, w_n)$ eine orthonormale Basis von Eigenvektoren von A , so ist $M_B(s) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A sind.
2. Es gibt eine Basis B' mit

$$M_{B'}(s) = \begin{pmatrix} E_k & & \\ & -E_l & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Blockdiagonalmatrix, wobei

$$\begin{aligned} k &= \#\{i | \lambda_i > 0\} \\ l &= \#\{i | \lambda_i < 0\} \end{aligned}$$

Beweis 16. 1. $\Leftrightarrow \exists S \in O(n)$ mit $S^t AS = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$2. \Leftrightarrow \exists T \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ mit } T^t AT = \begin{pmatrix} E_k & & \\ & -E_l & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

oder BdA habe wir

$$\begin{aligned} \lambda_1, \dots, \lambda_k &> 0 \\ \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{k+l} &< 0 \\ \lambda_{k+l+1} &= \dots = \lambda_n = 0 \end{aligned}$$

Wir nehmen $B' = (w'_1, \dots, w'_n)$ mit

$$w'_i = \begin{cases} \frac{w_i}{\sqrt{|\lambda_i|}} & i \leq k+l \\ w_i, i > l+l \end{cases}$$

$$(w'_i)^t A w'_i = \frac{1}{|\lambda_i|} w_i^t A w_i = \frac{1}{|\lambda_i|} \lambda_i \text{ für } i \leq k+l$$

Bemerkung 23.

$$T^t A T = \underbrace{\begin{pmatrix} E_k & & \\ & -E_n & \\ & & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Sylvester-Form}}$$

... Erklärung zum Namen "Hauptachsentransformation"...

Korollar 9. Sei $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform mit entsprechender Matrix A . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. s ist positiv definit
2. Alle Eigenwerte von A sind positiv
3. Die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms haben alternierende Vorzeichen

Vorzeichenregel von Descartes

Beispiel 16.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = \det(tE_3 - A) = t^3 - ut^2 + 15t \underbrace{+}_{-} 3$$

$$P_A(-1) = -21 \quad P_A(0) = 3 \implies \exists \lambda : -1 < \lambda < 0$$

Beweis 17. s ist äquivalent zu

$$(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda x_i y_i$$

$$\implies s \text{ positiv definit} \Leftrightarrow \lambda_i > 0 \quad \forall i$$

Bemerkung 24. Weitere Begriffe $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform

positiv definit	positiv semidefinit
negativ definit	negativ semidefinit
indefinit:	$\exists x \in V : s(x, x) > 0$ und $y \in V : s(y, y) < 0$

Tabelle 1: Weitere Begriffe

Bemerkung 25. Ausartungsraum Ausartungsraum von einer Bilinearform $s : V \times V \rightarrow K$ auf einem Vektorraum über einem beliebigen Körper K ist:

$$U := \{v \in V \mid s(v, w) = 0 \quad \forall w \in V\}$$

und ist ein Untervektorraum. Falls s symmetrisch oder schiefsymmetrisch ist, bekommen wir eine induzierte Bilinearform $\bar{s} : V/U \times V/U \rightarrow K$, gegeben durch

$$v + U, w + U \mapsto s(v, w)$$

und \bar{s} ist nicht ausgeartet.

$$\begin{aligned} v' &= v + u, u \in U \\ w' &= w + \tilde{u}, \tilde{u} \in U \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(v', v') &= s(v, w) + s(u, w) + s(v, \tilde{u}) + s(u, \tilde{u}) = \\ &= s(v, w) + \underbrace{s(u, w)}_{=0} \pm \underbrace{s(\tilde{u}, v)}_{=0} + \underbrace{s(u, \tilde{u})}_{=0} \end{aligned}$$

$$s(v, w) = 0 \implies v \in U \implies v + U$$

ist Nullvektor von V/U

Korollar 10. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. dann gibt es eine orthogonale Zerlegung

$$\mathbb{R}^n = W_+ \oplus W_i \oplus W_0$$

mit

$$s|_{W_+} > 0, s|_{W_-} < 0$$

und $W_0 = \text{Ausartungsraum von } s$

Proposition 10. Trägheitsgesetz/Signatur von Sylvester Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Sei

$$V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0$$

eine Zerlegung als orthogonale direkte Summe, mit $s|_{V_+} > 0$, $s|_{V_-} < 0$ und $V_0 = \text{Ausartungsraum von } s$. Dann sind

$$r_+ := \dim(V_+), r_- = \dim(V_-) \text{ und } r_0 := \dim(V_0)$$

Invarianten von s , charakterisiert durch

$$r_+ = \max \{ \dim W \mid W \subset V \text{ Untervektorraum, } s|_W > 0 \}$$

$$r_- = \max \{ \dim W \mid W \subset V \text{ Untervektorraum, } s|_W < 0 \}$$

Die Invarianten (r_+, r_-, r_0) heisst Trägheitsindex oder Signatur von s

Bemerkung 26. Ist A eine $n \times n$ symmetrische reelle Matrix, heisst Signatur die Signatur von der zu A entsprechender Bilinearform.

Bemerkung 27. Auch $r_+ - r_-$ heisst Signatur.

Dimension	$\dim V = r_+ + r_- + r_0$	
Rang	$r_+ + r_-$	$\leftrightarrow (r_+, r_-, r_0)$
Signatur in diesen Sinn	$r_+ - r_-$	

Beweis 18. Reduktionsschritt: Es genügt, das Resultat zu beweisen, im Fall dass s nicht ausgeartet ist.

$$V \rightarrow \bar{V} = V/V_0$$

$$V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0$$

$$\bar{V} = \bar{V}_+ \oplus \bar{V}_-$$

wobei $\bar{V}_\pm = \text{Bild von } V_\pm$. Bew. $\bar{V} = \bar{V}_+ + \bar{V}_-$ direkte Summe

$$\Leftrightarrow \bar{V}_+ \cap \bar{V}_- = 0$$

$$\bar{v} \leftrightarrow v \in V_+ \oplus V_0$$

und

$$v \in V_- \oplus V_0$$

$\Leftrightarrow v \in V_0$ Behauptung: \bar{s} induzierte Bilinearform auf \bar{V}

$$\max \{ \dim W | s|_W > 0 \} = \max \{ \dim U | U \subset \bar{V}, \bar{s}|_U > 0 \}$$

und

$$\max \{ \dim W | s|_W < 0 \} = \max \{ \dim U | U \subset \bar{V}, \bar{s}|_U < 0 \}$$

Ist $W \subset V, s|_W > 0$, und $\bar{W} := \text{Bild von } W$, so haben wir

$$\dim \bar{W} = \dim W$$

und

$$\bar{s}|_{\bar{W}} > 0$$

Dimensionsformel:

$$\dim \bar{W} = \dim W - \underbrace{\dim(W \cap V_0)}_{=0} = \dim W$$

und

$$\bar{s}(\bar{v}, \bar{v}) = s(v, v)$$

wobei $v \in W \mapsto v \in \bar{W}$ Umgekehrt ist

$$U \subset \bar{V}, \bar{s}|_U > 0, \dim U = d$$

wählen Basis $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_d)$ von \bar{U} , mit $v_i \mapsto \bar{v}_i \forall i$ dann haben wir $W := \text{span}(v_1, \dots, v_d)$ hat die Eigenschaft

$$\dim W = d \quad s|_W > 0, \quad \text{Im}(W) = U$$

Beweis im Fall s nicht ausgeartet:

Behauptung: Ist

$$W_+ \subset V, s|_{W_+} > 0, \quad W_- \subset V, s|_{W_-} < 0$$

so haben wir

$$W_+ \cap W_- = 0$$

Es folgt:

$$\dim W_- + \dim W_+ \leq \dim V$$

mit Gleichheit $\Leftrightarrow V = W_+ \oplus W_-$

Deshalb

$$r_+ + r_- \leq \dim V$$

Und wir haben = aus dem Korollar

(alternativer Beweis ohne Quotientenvektorräume sehe Buch)

Bemerkung 28. Praktische Fragen:

- Wie berechnet man die Signatur einer symmetrischen Bilinearform?
- Wie findet man eine Basis, so dass die darstellende Matrix in Sylvesterform ist?

In Matrixen: $A \in (n \times n, \mathbb{R})$ symm.

- Signatur?
- Finden $T \in GL_n(\mathbb{R})$ mit $T^t A T$ in Sylvesterform

Antwort:

Aus der Hauptachsentransformation:

$$\exists S \in O(n), S^t A S = S^{-1} A S = \text{diag}(\lambda, \dots, \lambda_n)$$

\implies Signatur

$$r_+ = \#\{i | \lambda_i > 0\}$$

$$r_- = \#\{i | \lambda_i < 0\}$$

$$r_0 = \dim \text{Ker}(A)$$

$$S \xrightarrow{\text{Normieren der Spaltenvektoren}} S'$$

mit $S'^t A S$ in Sylvesterform.

Alternatives, oft leichteres Verfahren:

- $\text{Ker}(A)$ = Ausartungsraum berechnen
- Vektoren Wählen, wobei $q(v) = s(v, v)$ verschieden von Null ist. $\rightsquigarrow q(v) \in \{\pm 1\} \rightsquigarrow v^\perp$

Beispiel 17. Sylvesterform

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = t^3 - 8t^2 + 3t = t(t - (4 + \sqrt{13}))(t - (4 - \sqrt{13}))$$

Signaturen $(2, 0, 1)$ Mit Halbachsentransformation

Eigenwert 0 \rightsquigarrow Eigenvektor $(1, -1, 1)$

Eigenwert $4 + \sqrt{13}$ \rightsquigarrow Eigenvektor $(1, 4 - \sqrt{13}, -3 + \sqrt{13})$

Eigenwert $4 - \sqrt{13}$ \rightsquigarrow Eigenvektor $(1, 4 + \sqrt{13}, -3 - \sqrt{13})$

Normieren...

S' ausrechnen... (ne danke)

haben wir

$$S'^t = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 18. Alternativ

$$e_2 : q(e_2) = e_2^t A e_2 = 1$$

$$e_2^\perp = \{(x, y, z) | 2x + y + z = 0\}$$

$$(-1, 2, 0) A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\text{Ker}(A) = \text{span} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } T \text{ haben wir } T^t A T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

2 Klassifikation von Bilinearformen auf $\mathbb{R}^n \leftrightarrow$ Signatur

Seien euklidische (V, \langle, \rangle) und symmetrische Bilinearform $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, so können wir die Bilinearform durch die Hauptachsentransformation verstehen. Seien ein endlichdimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum V und die symmetrische Bilinearform $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, dann ist s durch die Signatur (r_+, r_-, r_0) klassifiziert.

Eigenschaften 10. $\dim V = 2$

Signatur	$(2, 0, 0)$	$q(v) := s(v, v)$	Quadratische Schale (positiv)
	$(0, 2, 0)$		Quadratische Schale (negativ)
	$(1, 1, 0)$		Sattelpunkt
	$(0, 1, 1)$		Quadratisches halbes Rohr (positiv)
	$(1, 0, 1)$		Quadratisches halbes Rohr (negativ)

Eigenschaften 11. $\dim V = 3$ $\{q(v) = 1\}$

$(3, 0, 0)$	Sphäre	
$(2, 1, 0)$	einschaliges Hyperboloid	+ Fälle s entartet
$(1, 2, 0)$	zweischaliges Hyperboloid	
$(0, 3, 0)$	\emptyset	

Der Fall von Bilinearformen über Vektorräumen über \mathbb{K} , \mathbb{K} beliebiger Körper.

Proposition 11. *Orthogonalisierungssatz* Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper mit $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$. Sei s eine symmetrische Bilinearform über V . Dann gibt es eine Basis B von V , so dass die $M_B(s)$ eine Diagonalmatrix ist.

Beweis 19. *Reduktionsschritt zum Fall s nicht ausgeartet.* Sei $U = \text{Ausartungsraum}$. $\bar{V} := V/U$ und $\bar{s} :=$ induzierte Bilinearform. Wählen wir ein Komplement $W \subset V$ zu U , so haben wir

$$\begin{aligned} V &= U \oplus W \\ W &\xrightarrow{\text{Isomorphismus}} \bar{V} \\ s|_W &\text{ nicht ausgeartet} \end{aligned}$$

Wir können deshalb behaupten, dass s nicht ausgeartet ist. Dann beweisen wir dies Aussage durch Induktion nach $\dim V$. $\dim V \leq 1$ trivial. Induktionsschritt:

$$s \text{ nicht ausgeartet} \xrightarrow{\dim(\mathbb{K}) \neq 2} \exists v \in V : s(v, v) \neq 0$$

Sei $V' := V^\perp$. Wir haben $\dim V' = \dim V - 1$, weil s nicht ausgeartet ist.

$IA \rightsquigarrow$ Basis B' von V' mit $\underbrace{M_B(s|_{V'})}_{\text{auch nicht ausgeartet}}$ diagonal. Dann:

$$B \& v \rightsquigarrow B \text{ mit } M_B(s) \text{ eine Diagonalmatrix}$$

Korollar 11. Ist $\text{char } K \neq 2$, so gibt es zu einer symmetrischen Matrix $A \in (n \times n, \mathbb{K})$ ein $S \in GL_n(\mathbb{K})$ so dass $S^t A S$ eine Diagonalmatrix ist.

Beispiel 19. \mathbb{K} beliebig, $\text{char}(K) \neq 2$ $V = K^2$

$$s(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_1$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$s(v_1, v_1) = 2$$

$$v_1^\perp = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$s(v_2, v_2) = -2$$

$$B := (v_1, v_2)$$

$$M_B(s) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$S \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Standardbasis. Mit $S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ haben wir

$$S^t A S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 29. offen bleibt die Frage: Sind symmetrische Bilinearformen s und s' auf V gegeben ($\dim_{\mathbb{K}} < \infty$), können wir entscheiden ob s und s' äquivalent sind?

Oder, in Matrizen: Sind symmetrische $A, A' \in (n \times n, \mathbb{K})$ gegeben, können wir entscheiden, ob es ein $S \in GL_N(\mathbb{K})$ gibt, so dass $S^t A S = A'$?

Die Antwort hängt von \mathbb{K} ab.

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ durch die Signatur
- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ durch die Rang
- andere \mathbb{K} ?

Im Allgemeinen:

- Rang
- Reduktion zum Fall einer nichtausgearteten Form

Wir behaupten: s ist nicht ausgeartet \Leftrightarrow eine darstellende Matrix A ist invertierbar.

$$\det(A) \in \mathbb{K}^* / (\mathbb{K}^*)^2$$

ist eine Invariante von s , wegen der Transformationsform.

$$T \in GL_n(\mathbb{K}) \rightsquigarrow T^t A T$$

ist eine andere darstellende Matrix. Und

$$\det(T^t A T) = \det(T^t) \det(A) \det(T) = (\det T)^2 \det(A)$$

Definition 23. Diskriminante Sei $s : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform (mit $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$). Die Diskriminante von s ist 0 falls s ausgeartet ist, sonst ist die Klasse von $\det(A)$ in $\mathbb{K}^* / (\mathbb{K}^*)^2$, wobei A eine darstellende Matrix von s ist. Die Diskriminante ist eine Invariante von s

- Rang
- Diskriminante

Bemerkung 30. Noch offen: sind s, s' nicht ausgeartet, mit derselben Diskriminante, zu entscheiden, ob s und s' äquivalent sind.

Beispiel 20. $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, z.B. $V = \mathbb{Q}^2$, s Standardskalarprodukt $s(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ und s' symmetrische Bilinearform mit $\text{disc}(s) = +1$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Basiswechsel}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

mit $aa' = b^2, b \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow a = \frac{b^2}{a'} = a' \left(\frac{b}{a'} \right)^2$$

$a = 2$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a = 3$

$$s' \leftrightarrow q'(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2$$

Beh:

$$q'(x) \neq 1 \quad \forall x \in \mathbb{Q}^2$$

Konsequenz: s' ist nicht äquivalent zu s . Ist $3x_1^2 + 3x_2^2 = 1$ so schreiben wir $x_1 = \frac{r_1}{s_1}, x_2 = \frac{r_2}{s_2}, r_1, r_2, s_1, s_2 \in \mathbb{Q}, s_1, s_2 \neq 0$

$$3r_1^2 s_2^2 + 3r_2^2 s_1^2 = s_1^2 s_2^2$$

$$\text{oder } 3r^2 + 3s^2 = t^2 \text{ wobei } r = r_1 s_2, s = r_2 s_1, \overbrace{t}^{\neq 0} = s_1 s_2 \quad (1)$$

$$3^{\text{ungerade}}(3k_1 + 1) + 3^{\text{ungerade}}(3k_2 + 1) \\ \implies \text{Widerspruch zu (1)}$$

Fazit 9. \mathbb{K} : Körper, $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$
 V : endlichdimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum
 $s: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ symmetrische Bilinearform

Rang $\text{Rang } s \mid \dim V \Leftrightarrow s$ ist ausgeartet. $U :=$ Ausartungsraum. \bar{s} induzierte Bilinearform auf $\bar{V} := V/U$ (nicht ausgeartet)

Diskriminante für s nicht ausgeartet: $\text{disc}(s) \in \mathbb{K}^*/(K^*)^2$

Beispiel 21. $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, V = \mathbb{Q}^2$ Bilinear entsprechend zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

- Beide: Rang 2, Diskriminante 1
- nicht äquivalent

Bemerkung 31. Die Frage, ob eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf $V := \mathbb{Q}^2$ der Diskriminante 1 äquivalent zum Standardskalarprodukt ist, können wir nur beantworten mittels einem Resultat aus der Zahlentheorie.

Satz 5. s nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf \mathbb{Q}^2 $\text{disc}(s) = 1 \implies \exists B$ Basis mit

$$M_B(s) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$$

Dann: s ist äquivalent zum Standardskalarprodukt \Leftrightarrow

$$\exists v \in V, s(v, v) = 1 \text{ d.h. } \exists x, y \in \mathbb{Q} : ax^2 + ay^2 = 1$$

\Leftrightarrow

$$\exists x, y \in \mathbb{Q} \text{ mit } x^2 + y^2 = a$$

Bemerkung 32. Ein Resultat aus der Zahlentheorie gibt uns eine Charakterisierung von Summen zweier Quadrate in \mathbb{Q} : für $a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$:

$$\exists x, y \in \mathbb{Q} : x^2 + y^2 = a \Leftrightarrow \exists x, y \in \mathbb{Z} : x^2 + y^2 = a$$

$\Leftrightarrow a > 0$ und jede Primzahl $p = 4k + 3$ ($k \in \mathbb{N}$) kommt mit gerader Vielfachheit in der Primzahlzerlegung von a vor. Der Beweis nutzt

$$(x_1 x'_1 - x_2 x'_2)^2 + (x_1 x'_2 + x_2 x'_1)^2 = (x_1^2 + x_2^2)(x_1'^2 + x_2'^2)$$

Satz von Fermat: p Primzahl

$$\exists x, y \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 = p \Leftrightarrow p = 2 \vee 4 \mid (p - 1)$$

Argument vom letzten Mal (auszuschließen $a = 3$)

Fazit 10. Zurück zum Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Wir wissen: eine symmetrische Bilinearform $s: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ($\dim_{\mathbb{R}} V < \infty$) ist durch die Signatur (r_+, r_-, r_0) charakterisiert.

$$A: M_B(s) \rightarrow P_A(t) = \prod_{i=1}^n (t - \lambda_i)$$

$$\begin{aligned} r_+ &= \#\{i \mid \lambda_i > 0\} \\ r_- &= \#\{i \mid \lambda_i < 0\} \\ r_0 &= \#\{i \mid \lambda_i = 0\} \end{aligned}$$

und

$s > 0 \Leftrightarrow$ Signatur $(n, 0, 0) \Leftrightarrow \lambda_i > 0 \forall i \Leftrightarrow$ Koeff. $P_A(t)$ hat alternierende Vorzeichen

Definition 24. Hauptminor Sei $A = (a_{ij}) \in (n \times n, \mathbb{K})$. Wir schreiben A_k für die Teilmatrix $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$, für $1 \leq k \leq n$. Der k -te Hauptminor von A ist $\det(A_k)$

Bemerkung 33. $\dim_{\mathbb{R}} < \infty$, $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform. Wann ist s positiv? Es ist notwendig, aber nicht hinreichend, dass $\det(A) > 0$ für eine darstellende Matrix A .

Proposition 12. *Hauptminorenkriterium von Jacobi-Sylvester* Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform und A eine darstellende Matrix. Dann ist s positiv definit $\Leftrightarrow \det(A_k) > 0$, $k = 1, \dots, n$ $n = \dim V$

Beweis 20. \Rightarrow Ist $s > 0$, so ist $s|_W > 0$ für alle Untervektorräume $S \subset V$. Sei $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis mit $A = M_B(s)$. Sei $V_k := \text{span}(v_1, \dots, v_k)$ für $1 \leq k \leq n$. Dann haben wir:

$$M_{(v_1, \dots, v_k)}(s|_{V_k}) = (s(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq k} = (A_k)$$

Weil $s|_{V_k} > 0$, folgt: $\det(A_k) > 0$.

\Leftarrow Durch eine Induktion nach n :

IA: $n = 1$

IS: Wir nehmen das Resultat an für einen Vektorraum der Dimension $n - 1$. Seien $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ $A = M_B(s)$. Wir haben

- aus $\det(A) > 0$ folgt: s ist nicht ausgeartet
- aus $\det(A_1) > 0$ folgt $a_{11} > 0$

Wir haben $V = \text{span}(v_1) \oplus V_1^\perp$. Es genügt zu zeigen, dass $s|_{V_1^\perp}$ positiv definit ist. Eine Basis von V_1^\perp sieht so aus: Sei $c_i := \frac{a_{1i}}{a_{11}}$ und $\tilde{v}_i := v_i - c_i v_1$ für $i = 2, \dots, n$.

$$\begin{aligned} s(v_1, \tilde{v}_1) &= s(v_1, v_1) - c_1 s(v_1, v_1) = a_{11} - c_1 a_{11} = 0 \\ (\tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_n) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -c_2 & 1 & & \\ -c_3 & & 1 & \\ & & & \ddots \\ -c_n & & & & 1 \end{pmatrix} \\ (\tilde{a}_{ij})_{2 \leq i, j \leq n} \tilde{a}_{ij} &= s(\tilde{v}_i, \tilde{v}_j) = a_{ij} - c_i a_{11} + c_i c_j a_{11} = a_{ij} - c_i a_{1j} \\ \text{weil } c_i c_j a_{11} &= \frac{a_{1i}}{a_{11}} a_{1j} = c_j a_{1i} \end{aligned}$$

Wir haben für $s \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -c_2 & 1 & & \\ -c_3 & & 1 & \\ & & & \ddots \\ -c_k & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{k1} & & & a_{kk} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} - c_2 a_{12} & \dots & a_{2k} - c_2 a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{2k} - c_k a_{12} & \dots & a_{kk} - c_k a_{1k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{k2} & \dots & \tilde{a}_{kk} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \det(A_k) &= a_{11} \det(\tilde{a}_{ij})_{2 \leq i, j \leq k} \end{aligned}$$

Aus $\det(A_k) > 0$ und $a_{11} > 0$ folgt:

$$\det(\tilde{a}_{ij})_{2 \leq i, j \leq k} > 0, \text{ für } k = 2, \dots, n$$

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt $s|_{v_1^\perp} > 0$

3 Multilineare Algebra

3.1 Dualvektorräume

Definition 25. Dualvektorraum / Linearformen Sei \mathbb{K} ein Körper und V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Der Dualvektorraum ist $V^* := \text{Hom}(V, \mathbb{K})$. Elemente von V^* heißen Linearformen. V^* ist ein \mathbb{K} -Vektorraum, mit Addition von Abbildungen und Multiplikation durch Skalare.

Eigenschaften 12. Sei $B = (v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V .

- Koeffizient von v_i

$$v_i^* : v = \sum_{j \in I} a_j v_j \mapsto a_i$$

- Summe von Koeffizienten

$$\sum v_i^* : v = \sum_{j \in I} a_j v_j \mapsto \sum a_i$$

wohldefiniert, weil nur endlich viele a_j sind $\neq 0$

- Operationen auf Funktionsräumen, z.B. $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$
- Standardkoordinaten: $n \in \mathbb{N}_{>0}$, $V = \mathbb{K}^n$, Standardbasis e_1, \dots, e_n

$$e_i^* : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

Bemerkung 34. Ist $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V , so ist $B^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ eine Basis von V^* . Denn zu $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ haben wir $c_i := f(v_i)$, dann

$$f \text{ linear} \implies f\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i a_i$$

Das zeigt, dass V^* ist von v_1^*, \dots, v_n^* aufgespannt. Lineare Unabhängigkeit von v_1^*, \dots, v_n^* ist klar. Deshalb haben wir einen Isomorphismus $V \rightarrow V^*$, gegeben durch $v_i \mapsto v_i^* \forall i$. Falls $\dim V = \infty$ mit Basis $(v_i)_{i \in I}$, dann ist V^* nicht von den $v_i^*, i \in I$ aufgespannt, z.B.

$$\sum_{i \in I} \notin \text{span}(v_i^*)_{i \in I}$$

$\phi : V \rightarrow \mathbb{K}$ mit $\phi(v_i) \neq 0$ nur für endlich viele $i \in I$

Beispiel 22. $V = \mathbb{K}$ mit Standardbasis (e_1, \dots, e_n) . Dann hat V^* die Standardbasis (e_1^*, \dots, e_n^*) und wir haben den Isomorphismus

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n &\rightarrow (\mathbb{K})^* \\ e_i &\mapsto e_i^* \quad \forall i \end{aligned}$$

Bemerkung 35. Es ist nicht überraschend, dass der Isomorphismus $V \rightarrow V^*$ assoziiert zu einer Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ abhängig von der Basis ist.

Bemerkung 36. Sei $V \subset \mathbb{K}^n$ ein Untervektorraum. V kann durch eine Basis gegeben werden, oder durch Gleichungen.

$$V = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x - y + z = 0 \right\}$$

ist eine Linearform auf \mathbb{K}^n

Definition 26. orthogonaler Raum Sei W ein \mathbb{K} -Vektorraum und $V \subset W$ ein Untervektorraum. Der Untervektorraum

$$V^0 = \{\phi \in W^* : \phi(v) = 0 \ \forall v \in V\} \subset W^*$$

heisst der zu V orthogonale Raum. Falls $\dim V < \infty$, dann haben wir $\dim V^0 = \dim W - \dim V$. Basis von

$$W^* = \overbrace{W_1, \dots, W_d, \dots, W_n}^{\substack{W \\ \text{von } V}}$$

Dann:

$$V^0 = \text{span}(w_{d+1}^*, \dots, w_n^*)$$

Definition 27. duale Abbildung Sei $V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung von \mathbb{K} -Vektorräumen. Dann gibt es eine lineare Abbildung $F^* : W^* \rightarrow V^*$, die duale Abbildung, gegeben durch Komposition mit F

$$\psi : V \rightarrow \mathbb{K} \mapsto F^*(\psi) := \psi \circ F$$

Dann

$$V^0 = \ker(W^* \rightarrow V^*)$$

Aus der Dimensionsformel bekommt man nochmals

$$\dim V^0 = \dim W^* - \dim V^*$$

Eigenschaften 13. duale Abbildung

- falls $W = V$, gilt $(id_V)^* = Id_{V^*}$
- Ist auch $G : U \rightarrow V$ gegeben, so haben wir

$$G^* F^* \psi = (F \circ G)^* \psi$$

Das nennt man Funktorialität.

Bemerkung 37. Man kann zeigen, dass zu $U \subset V$ bekommt man eine surjektive duale Abbildung $V^* \rightarrow U^*$

$$(\psi : V \rightarrow \mathbb{K}) \mapsto \psi|_U$$

Proposition 13. Seien V und W endlich dimensionale \mathbb{K} -Vektorräume mit Basen $A = (v_1, \dots, v_n)$ und $B = (w_1, \dots, w_m)$. Sei $F : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung mit darstellender Matrix M . Dann ist $F^* : W^* \rightarrow V^*$ bezüglich der dualen Basen $A^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$, $B^* = (w_1^*, \dots, w_m^*)$ durch die Matrix M^t dargestellt. Wir schreiben $M = (a_{ij})$. Das bedeutet:

$$F(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$$

Es folgt

$$F^*(w_i^*)(v_j) = i\text{-te Komponente von } F(v_j) = a_{ij}$$

Das ist zu sagen, die darstellende Matrix von F^* ist die Matrix (a_{ji})

$$F^*(w_i^*) = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j^*$$

Eigenschaften 14. $F : V \rightarrow W$

•

$$\underbrace{(\operatorname{Im} F)^0}_{\text{alle } W \xrightarrow{\phi} \mathbb{K} \text{ mit } \phi|_{\operatorname{Im} F} = 0} = \underbrace{\operatorname{Ker} F^*}_{\text{alle } W \xrightarrow{\phi} \mathbb{K} \text{ mit } \phi \circ F = 0}$$

Da

$$\phi|_{\operatorname{Im} F} = 0 \Leftrightarrow \phi \circ F = 0$$

haben wir die Gleichung.

•

$$(\operatorname{Ker})^0 = \operatorname{Im}(F^*)$$

\supset offensichtlich

\subset folgt aus der Surjektivität von $W^* \rightarrow (\operatorname{Im} F)^*$

Wir betrachten $\phi : V \rightarrow \mathbb{K}$ mit $\phi|_{\operatorname{Ker} F} = 0$

$$w \rightarrow W, w = F(v) \text{ für ein } v \in V$$

$$w \rightsquigarrow \bar{\phi}(w) = \phi(v)$$

Ist

$$w = F(v')$$

dann ist

$$v' - v \in \operatorname{Ker} F$$

und

$$\phi(v') - \phi(v) = \phi(v' - v) = 0$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & K \\ & \searrow & \nearrow \bar{\phi} \\ & \operatorname{Im} F & \\ \exists \underbrace{\psi}_{\in W^*} & \mapsto & \underbrace{\bar{\phi}}_{\in (\operatorname{Im} F)^*} \end{array}$$

d.h.

$$\psi : W \rightarrow \mathbb{K}$$

mit

$$\psi|_{\operatorname{Im} F} = \bar{\phi}$$

Das zeigt:

$$F^*(\psi) = \phi$$

Bemerkung 38. An dem Diagramm haben wir eine Bijektion zwischen $\phi \in V^*$ mit $\phi|_{\operatorname{Ker} F} = 0$ und $\bar{\phi} \in (\operatorname{Im} F)^*$

$$\xrightarrow{\dim W < \infty} \dim(\operatorname{Im} F) = \dim(\operatorname{Im} F)^* = \dim(\operatorname{Ker} F)^0 = \dim \operatorname{Im}(F^*)$$

$$\xrightarrow{\dim V, \dim W < \infty} \operatorname{rang}(F) = \operatorname{rang}(F^*)$$

Keine Überraschung! $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^t)$

Beispiel 23.

$$\mathbb{R}[x]^{\leq 2} \xrightarrow{(ev_{-1}, ev_1)} \mathbb{R}$$

surjektiv

$$\implies (\operatorname{Im} F)^0 = 0$$

Interpretation:

$$\alpha f(-1) + \beta f(1) = 0 \quad \forall f \in \mathbb{R}[x]^{\leq 2} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

$$\operatorname{Ker}((\alpha, \beta) \mapsto (f \mapsto \alpha f(-1) + \beta f(1)))$$

$$\begin{aligned} \text{Ker}(ev_{-1}, ev_1) &= \text{span}(x^2 - 1) \\ \implies \text{Ker}(ev_{-1}, ev_1)^0 &= \left\{ \mathbb{R}[x]^{\leq 2} \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}, \phi(x^2 - 1) = 0 \right\} = \text{span} \left(\frac{1}{2} ev_0'' + ev_0, ev_0' \right) \end{aligned}$$

und

$$= \text{Im}(ev_{-1}, ev_1)^* = \text{span}(ev_{-1}, ev_1)$$

weil

$$\begin{aligned} ev_{-1} &= \frac{1}{2} ev_0'' - ev_0' + ev_0 \\ ev_1 &= \frac{1}{2} ev_0'' + ev_0' + ev_0 \end{aligned}$$

3.2 Der Bidualraum $V \rightsquigarrow V^* \rightsquigarrow V^{**}$

Definition 28. kanonische lineare Abbildung $\dim V < \infty \implies$ ein Isomorphismus $V \rightarrow V^*$ wird durch die Auswahl einer Basis bestimmt. Dagegen haben wir eine Abbildung $V \rightarrow V^{**}$ unabhängig von der Basis, so:

$$v \mapsto \left(\begin{array}{c} V^* \xrightarrow{ev_v} \mathbb{K} \\ (\phi : V \rightarrow \mathbb{K}) \mapsto \phi(v) \end{array} \right)$$

Dies heisst kanonische lineare Abbildung und ist ein Isomorphismus falls $\dim V < \infty$

Bemerkung 39. Im Allgemeinen ist die kanonische Abbildung $V \rightarrow V^{**}$ injektiv:

$$\begin{aligned} [\text{Sei } v \in V \text{ mit } v \neq 0] & \xrightarrow{\text{span}(v) \subset V} V^* \rightarrow \text{span}(V)^* \\ & \phi \mapsto \psi : v \mapsto 1 \text{ (d.h. } \phi(v) = 1) \\ \implies & ev_1(\phi) \neq 0 \end{aligned}$$

$$\dim V < \infty \implies \dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$$

Dann:

$$\implies V \rightarrow V^{**} \text{ injektiv} \Leftrightarrow \text{bijektiv}$$

Oft schreibt man $V = V^{**}$ für V ein Vektorraum mit $\dim V < \infty$. Das bedeutet immer, dass V und V^{**} identifiziert wird, durch den kanonischen Isomorphismus.

Beispiel 24. $V = \mathbb{K}^n$ mit Standardbasis e_1, \dots, e_n .
 $V^* = (\mathbb{K}^n)^*$ hat die duale Basis e_1^*, \dots, e_n^*
 $V \rightarrow V^{**}$ mit einer Abbildung

$$e_i \mapsto \left(\begin{array}{c} \phi : (\mathbb{K}^n)^* \rightarrow \mathbb{K} \mapsto \phi(e_i) \\ e_j^* \mapsto \delta_{ij} \end{array} \right) = e_i^{**}$$

Bemerkung 40. Sei $F : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung von endlichdimensionalen Vektorräumen. Dann ist $F^{**} = F$, im folgenden Sinn:

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{F} & W & \dashrightarrow & W^* \xrightarrow{F^*} V^* \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim & \swarrow & \\ V^{**} & \xrightarrow{F^{**}} & W^{**} & & \end{array}$$

Wobei \sim einen kanonischen Isomorphismus darstellt.

Daraus folgt, dass

$$V \xrightarrow{F} W \rightsquigarrow W^* \xrightarrow{F^*} V^* \rightsquigarrow V^{**} \xrightarrow{F^{**}} W^{**}$$

kommutativ ist.

Bemerkung 41.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \xrightarrow{\quad} & & \\
 v \in V & & \xrightarrow{\quad} & & F(v) \in V \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & V & \longrightarrow & W & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & V^{**} & \longrightarrow & W^{**} & \\
 \phi \mapsto \phi(v) \in V^{**} & & & & \psi \mapsto \psi(F(v)) \\
 & & & & = \downarrow \\
 & & & & \psi \mapsto F^*(\psi)(v)
 \end{array}$$

Falls $\dim W < \infty$ und $V \subset W$, dann haben wir $V^{00} = V$ im folgenden Sinn

$$\begin{aligned}
 \dim &= \dim W - \dim V \\
 \underbrace{\quad}_{V^0} &\subset W^* \\
 \dim &= \dim W - (\dim W - \dim V) \dim V \\
 \underbrace{\quad}_{V^{00}} &\subset W^{**} \xrightarrow{\sim} W \supset V
 \end{aligned}$$

Das Bild von V unter dem kanonischen Isomorphismus ist V^{00} .
Sei $v \in V$ $ev_1 \in V^{00}$

$$\phi \in W^*, \phi(v) = 0 \quad \forall \phi \in V \implies \phi(v) = 0$$

Beispiel 25.

$$\begin{aligned}
 W &= \mathbb{R}^3 \\
 V &= \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \implies V^0 = \text{span}(e_1^* - e_2^* - e_3^*) = \text{span}(e_1 + e_3, -e_2 + e_3) \\
 V^{00} &= \text{span}(e_1^{**} + e_2^{**}, e_1^{**} + e_3^{**})
 \end{aligned}$$

3.3 Zusammenhang zwischen Dualraum und bilinearen Abbildungen

- schon gesehen, z.B. bei der Definition “nicht ausgeartet”
- jetzt explizit

Definition 29. bilineare Abbildung Sei \mathbb{K} ein Körper, v und W Vektorräume über \mathbb{K} . Eine Abbildung $b : V \times W \rightarrow \mathbb{K}$ heisst bilinear falls

$$w \mapsto b(v, w) \text{ ist linear } \forall v \in V$$

und

$$v \mapsto b(v, w) \text{ ist linear } \forall w \in W$$

$$[(w \mapsto b(v, w)) \in W^*]$$

Bemerkung 42. Im Fall $W = V$ ist dies genau zu sagen, dass b eine Bilinearform ist. Also haben wir Abbildungen

$$b' : V \rightarrow W^*$$

und

$$b'' : W \rightarrow V^*$$

Aus der Definition folgt, dass b' und b'' sind linear.

Definition 30. nicht ausgeartet Eine bilineare Abbildung $b : V \times W \rightarrow \mathbb{K}$ ist nicht ausgeartet, falls $b' : V \rightarrow W^*$ und $b'' : W \rightarrow V^*$ injektiv sind.

Bemerkung 43. Falls V und W endlich dimensional sind, ist es nur möglich, eine nicht ausgeartete bilineare Abbildung zu haben, wenn $\dim V = \dim W$. Falls $\dim V = \dim W$: “injektiv” oben ist äquivalent zu “bijektiv”.

Beispiel 26. • V beliebig, dann ist

$$\begin{aligned} V \times V^* &\rightarrow \mathbb{K} \\ (v, \phi) &\mapsto \phi(v) \end{aligned}$$

stets nicht ausgeartet.

$$\begin{aligned} b' : V &\rightarrow V^{**} \\ v &\mapsto ev_v \end{aligned}$$

ist die kanonische Abbildung, ist injektiv

$$\begin{aligned} b'' : V^* &\rightarrow V^* \\ \phi &\mapsto \phi \end{aligned}$$

ist id_{V^*} ist ein Isomorphismus

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \langle, \rangle$ Skalarprodukt auf V .

$$b(v, w) := \langle v, w \rangle$$

b' und b'' sind gleich, definiert als Ψ

$$\sim \Psi : V \rightarrow V^*$$

injektiv

Bemerkung 44. Das zeigt, dass jedes Skalarprodukt nicht ausgeartet ist. Und: falls $\dim_{\mathbb{R}} V < \infty$ ist Ψ ein Isomorphismus. Ψ heisst kanonisch. (kanonische Abbildung bzw. kanonischer Isomorphismus)

Eigenschaften 15. V , $\dim V = n$, mit Skalarprodukt, kanonischer Isomorphismus Ψ

- Für $U \subset V$ Untervektorraum gilt

$$\Psi(U^\perp) = U^0$$

- Für $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine orthonormal Basis haben wir

$$\Psi(v_i) = v_i^*$$

für $i = 1, \dots, n$, wobei (v_1^*, \dots, v_n^*) die duale Basis ist. zeigen:

$$\begin{aligned} \underbrace{\Psi(U^\perp)}_{\dim = \dim V - \dim U} &\subset \underbrace{U^0}_{\dim = \dim V - \dim U} \quad \text{klar} \\ \left\langle v_i, \sum_{j=1}^n a_j v_j \right\rangle &= a_i \\ v_i^* \left(\sum_{j=1}^n a_j v_j \right) &= a_i \end{aligned}$$

Beispiel 27. Graphiker gesucht ;)

Bemerkung 45. Wir haben zwei kanonische Abbildungen:

$$V \rightarrow V^{**} \text{ für beliebiges } V / \mathbb{K}$$

$$V \xrightarrow{\Psi} V^* \text{ für } V/\mathbb{R} \text{ mit Skalarprodukt}$$

Definition 31. adjugierte Abbildung V, W euklidische Vektorräume

$$F : V \rightarrow W \text{ lineare Abbildung}$$

adjugiert: $F^{ad} : W \rightarrow V$ ist adjugiert zu F falls gilt

$$\langle F(v), w \rangle = \langle v, F^{ad}(w) \rangle \quad \forall v \in V, w \in W$$

Bemerkung 46.

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{F^{ad}} & W \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Psi \\ V^* & \xleftarrow{F^*} & W^* \end{array}$$

$$\begin{aligned} F^*(\Psi(w))(v) &= \Psi(w)(F(v)) = \Phi(F^{ad}(w))(v) \\ \implies F^*(\Psi(w)) &= \Phi(F^{ad}(w)) \text{ in } V^* \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass das Diagramm kommutiert

Bemerkung 47. Seien v_1, \dots, v_n orthonormale Basen von V , w_1, \dots, w_m für W
 \rightsquigarrow duale Basen v_1^*, \dots, v_n^* und w_1^*, \dots, w_m^* Bezüglich orthonormaler Basen ist
 F^{ad} durch die transponierte Matrix gegeben: Sei

$$F \leftrightarrow A \in M(m \times n, \mathbb{R})$$

dann, aus Prop 49 (13?):

$$F^* \leftrightarrow A^t \in M(m \times n, \mathbb{R}) \implies F^{ad} \leftrightarrow A^t \text{ weil } \Phi(v_i) = v_i^*, \Psi(w_i) = w_i^* \quad \forall i$$

Beispiel 28. $V = \mathbb{R}^2$ mit Skalarprodukt, $W = \mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ mit

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) \, dx$$

$$\begin{aligned} F : V &\rightarrow W \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha + \beta x + \alpha x^2 \end{aligned}$$

Basis von W $1, x, x^2$

$V^* = (\mathbb{R}^2)^*$ mit Basis e_1^*, e_2^*

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{F^{ad}} & W \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Psi \\ V^* & \xleftarrow{F^*} & W^* \end{array}$$

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{\Psi} V^* \\ e_1 &\mapsto e_1^* \\ e_2 &\mapsto e_2^* \end{aligned}$$

W^* hat die duale Basis $1^*, x^*, x^{2*}$.

Wir berechnen Ψ explizit:

$$\Psi(1) = \left(f \mapsto \int_{-1}^1 f(x) \, dx \right)$$

$$\begin{aligned}
W &\xrightarrow{\Phi} W^* \\
1 &\mapsto 2(1^*) + \frac{2}{3}(x^{2*}) \\
x &\mapsto \dots \\
x^2 &\mapsto \dots
\end{aligned}$$

Dann:

$$F^*(\psi(1)) = \left((\alpha, \beta) \int_{-1}^1 \alpha + \beta x + \alpha x^2 \, dx = 2\alpha + \frac{2}{3}\alpha = \frac{8}{3}\alpha \right)$$

d.h.

$$\frac{8}{3}e_1^* \xrightarrow{\Phi^{-1}} \left(\frac{8}{3}, 0 \right)$$

Ähnlich:

$$F^*(\Psi(x)) = \left((\alpha, \beta) \mapsto \int_{-1}^1 \alpha x + \beta x^2 + \alpha x^3 \, dx = \frac{2}{3}\beta \right)$$

und

$$F^*(\Psi(x^2)) = \left((\alpha, \beta) \mapsto \int_{-1}^1 \alpha x^2 + \beta x^3 + \alpha x^4 \, dx = \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{5}\alpha = \frac{16}{15}\alpha \right)$$

d.h.

$$\begin{aligned}
F^{ad}(1) &= \left(\frac{8}{3}, 0 \right) \\
F^{ad}(x) &= \left(0, \frac{2}{3} \right) \\
F^{ad}(x^2) &= \left(\frac{16}{15}, 0 \right)
\end{aligned}$$

$$F^{ad}(a + bx + cx^2) = \left(\frac{8}{3}a + \frac{16}{5}c, \frac{2}{3}b \right)$$

Check:

$$\int_{-1}^1 (\alpha + \beta x + \alpha x^2) (a + bx + cx^2) \, dx \stackrel{?}{=} \left\langle (\alpha, \beta), \left(\frac{8}{3}a + \frac{16}{15}c, \frac{2}{3}b \right) \right\rangle$$

Skalarprodukt:

$$\alpha \left(\frac{8}{3}a + \frac{16}{15}c \right) + \beta \left(\frac{2}{3}b \right)$$

Integral:

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^1 a\alpha + (b\alpha + c\beta)x + (c\alpha + b\beta + a\alpha)x^2 + (c\beta + \alpha b)x^3 + c\alpha x^4 \, dx = \\
&= 2a\alpha + \frac{2}{3}(a\alpha + b\beta + c\alpha) + \frac{2}{5}c\alpha
\end{aligned}$$

stimmt.

Bemerkung 48. Wir könnten F^{ad} auch durch die Wahl einer orthonormalen Basis von W berechnen.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{5}{2}}\sqrt{\frac{-1+3x^2}{2}}$$

Dann:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} & \end{pmatrix}$$

und so

$$A^t = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow F^{ad}$$

Bemerkung 49. Jetzt betrachten wir den Fall $W = V$, also $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine Bilinearform. Da b' und b'' genau durch das “Umtauschen” von V und W unterschieden

$$\begin{aligned} b' : V &\rightarrow V^*, v \mapsto (w \mapsto b(v, w)) \\ b'' : V &\rightarrow V^*, w \mapsto (v \mapsto b(v, w)) \end{aligned}$$

haben wir Interpretation von Bedingungen über b :

- b symmetrisch $\Leftrightarrow b'' = b'$
- b schief-symmetrisch $\Leftrightarrow b'' = -b'$

Bemerkung 50. Sei jetzt $\dim_{\mathbb{K}} < \infty$. Dann haben wir $b'' = (b')^*$ in folgendem Sinne: Dual zu $b' : V \rightarrow V^*$ ist

$$\begin{array}{ccc} V^{**} & \xrightarrow{(b')^*} & V^* \\ \uparrow \sim & & \uparrow \\ V & & v \end{array} \quad ev_V \longmapsto ev_V \circ b'$$

(ev_V = Auswertungsabbildung an $v \in V$)

Wobei:

$$ev_V \circ b'(v') = ev_V (w \mapsto b(v', w)) = b(v', v)$$

Da

$$b'' : V \rightarrow V^*$$

durch

$$v \mapsto (v' \mapsto b(v', v))$$

definiert ist, haben wir Gleichheit.

Eigenschaften 16.

$$b \text{ symmetrisch} \iff b'' = b' \iff (b')^* = b'$$

$$b \text{ schief-symmetrisch} \iff b'' = -b' \iff (b')^* = -b'$$

Bemerkung 51. Falls $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$, s symmetrisch und nicht ausgeartet führt zu

$$b' (= b'') : V \xrightarrow{\sim} V^*$$

Bemerkung 52. Spezialfall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, V euklidisch, dann ist das gerade das, was Ψ hiess:

Untervektorraum $U \subset V, U^\perp \subset V$ sowie $U^0 \subset V^*$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\sim} & V^* \\ \downarrow \cup & & \downarrow \cup \\ U^\perp & & U^0 \end{array}$$

Bemerkung 53. Was passiert, falls $K = \mathbb{C}$? Dann sind wir an sesquilinearen Abbildungen interessiert.

$$s : V \times W \rightarrow \mathbb{C}$$

Dann gibt es immer noch eine Abbildung

$$s'' : W \rightarrow V^* \quad w \mapsto (v \mapsto s(v, w))$$

aber diese ist nicht mehr linear.

Beispiel 29. $V = \mathbb{C}[x], s : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$

$$s(f, g) = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} \, dx$$

Dann z.B.

$$1 \xrightarrow{s''} \left(f \mapsto \int_0^1 f(x) \, dx \right)$$

also: Durchschnittswert auf $[0, 1]$

aber:

$$i \xrightarrow{s''} \left(f \mapsto -i \int_0^1 f(x) \, dx \right)$$

also: $(-i) \cdot$ Durchschnittswert auf $[0, 1]$

Damit ist s'' semilinear.

Definition 32. semilinear Eine Abbildung $t : V \rightarrow W$ zwischen \mathbb{C} -Vektorräumen heisst semilinear, falls:

- $t(v + v') = t(v) + t(v') \quad \forall v, v' \in V$
- $t(\lambda v) = \bar{\lambda} t(v) \quad \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{C}$

Definition 33. kanonischer Semi-Isomorphismus Falls V ein unitärer Vektorraum ist, mit Skalarprodukt

$$s : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

so erhalten wir (was oben s'' heisst, nennen wir hier Ψ)

$$\Psi : V \rightarrow V^* \text{ kanonischer } \underbrace{\text{Semi}}_{\text{semilinear}} \underbrace{\text{-Isomorphismus}}_{\text{bijektiv}}$$

Bemerkung 54. Wie vorher haben wir zu einem Endomorphismus

$$F : V \rightarrow V$$

den adjugierten Endomorphismus

$$F^{ad} : V \rightarrow V$$

gegeben durch

$$F^{ad} := \Psi^{-1} \circ F^* \circ \Psi$$

Eigenschaften 17. adjugierter Endomorphismus

•

$$s(F(v), w) = s(v, F^{ad}(w)) \quad \forall v, w \in V$$

•

$$\text{Im } F^{ad} = (\text{Ker } F)^\perp$$

•

$$\text{Ker } F^{ad} = (\text{Im } F)^\perp$$

- Ist B eine Orthonormalbasis von V und A die darstellende Matrix von F bezüglich B , dann ist \bar{A}^t die darstellende Matrix von F^{ad}

Satz 6.

$$F \text{ ist unitär diagonalisierbar} \iff F \circ F^{ad} = F^{ad} \circ F$$

Definition 34. F normal F heisst normal, falls

$$F \circ F^{ad} = F^{ad} \circ F$$

3.4 Anwendung des Dualraums

das duale Polytop $\mathbb{K} = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^n$

Definition 35. konvexe Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft $\forall s, t \in S: s$ und t sind wegzusammenhängend.

Definition 36. konvexe Hülle konvexe Hülle von $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$\bigcap_{S \subset \mathbb{R}^n, S \text{ konvex}, \Gamma \subset S} S$$

“kleinste konvexe Menge, in der Γ enthalten ist”

Definition 37. konvexes Polytop die konvexe Hülle von einer endlichen Menge in \mathbb{R}^n

Definition 38. innerer Punkt Das Polytop P hat $O \in \mathbb{R}$ als inneren Punkt falls:

- $O \in \mathbb{R}$
- $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(0) \subset P$

Definition 39. Ist ein Polytop mit $O \in \mathbb{R}$ als inneren Punkt, so definieren wir

$$P^* = \{\phi \in (\mathbb{R}^n)^* : \phi(v) \leq 1 \ \forall v \in P\}$$

Definition 40. duales Polytop P^* ist ein konvexes Polytop $O \in (\mathbb{R}^n)^*$ als innerem Punkt. P^* heisst duales Polytop.

Bemerkung 55.

$$P^{**} = P$$

Bemerkung 56. Konstruktion des dualen Polytops: l Hyperebene, so dass P auf einer Seite von l liegt (inklusive l selbst) \rightsquigarrow Gleichung von l schreiben als

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 1$$

$$P \subset \{(x_1, \dots, x_n) \mid \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \leq 1\}$$

\rightsquigarrow

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in P^*$$

(Skizze (Freiwilliger gesucht }:-))

$$\text{Facetten von } P \rightsquigarrow \text{Ecken in } P^*$$

(P^*) konvexe Hülle

Beispiel 30. • Der Tetraeder ist selbstdual.

- Der Würfel dual zum Oktaeder.
- Der Dodekaeder ist dual zum Ikosaeder.

3.5 Das Tensorprodukt

$$V \rightsquigarrow V^* \text{ Linearformen}$$

Wir möchten eine Redeweise haben, genug flexibel für solche Situationen. Eine nützliche Konstruktion dafür ist das Tensorprodukt.

Definition 41. Tensorprodukt Sei \mathbb{K} ein Körper und V und W Vektorräume über \mathbb{K} . Ein \mathbb{K} -Vektorraum heisst Tensorprodukt von V und W , geschrieben $V \otimes W$, falls, eine bilineare Abbildung

$$\eta : V \times W \rightarrow V \otimes W$$

gegeben ist, die folgende universelle Eigenschaften erfüllt:

Zu jedem \mathbb{K} -Vektorraum U mit bilinearer Abbildung

$$\xi : V \times W \rightarrow U$$

gibt es eine eindeutige lineare Abbildung

$$\xi' : V \otimes W \rightarrow U$$

so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V \times W & & \\ \downarrow \eta & \searrow \xi & \\ V \otimes W & \xrightarrow{\xi'} & U \end{array}$$

kommutiert.

Bemerkung 57. Es ist noch unklar, wie die Elemente von $V \otimes W$ aussehen, oder ob $V \otimes W$ gar existiert. Auch unklar: warum.

Korollar 12. Aus der Definition folgt: $V \otimes W$, falls es existiert, ist eindeutig bis auf Isomorphismus.

Bemerkung 58. Seien

$$\eta : V \times W \rightarrow V \otimes W$$

und

$$\tilde{\eta} : V \times W \rightarrow \widetilde{V \otimes W}$$

gegeben, beide erfüllen die universellen Eigenschaften. Wir wenden die universelle Eigenschaft an, mit $U := \widetilde{V \otimes W}$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & & \\ \downarrow \eta & \searrow \tilde{\eta} & \\ V \otimes W & \xrightarrow{\zeta} & \widetilde{V \otimes W} \end{array}$$

Wir wenden die universelle Eigenschaft an mit $U := V \otimes W$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & & \\ \downarrow \tilde{\eta} & \searrow \eta & \\ \widetilde{V \otimes W} & \xrightarrow{\tilde{\zeta}} & V \otimes W \end{array}$$

Wir wenden die universelle Eigenschaft an mit $U := V \otimes W$

$$\begin{array}{ccc} V \times W & & V \times W \\ \downarrow \eta & \searrow \eta & \downarrow \eta & \searrow \eta \\ V \otimes W & \xrightarrow{\tilde{\zeta} \circ \zeta} & V \otimes W & V \otimes W & \xrightarrow{1_{V \otimes W}} & V \otimes W \end{array}$$

Beide Diagramme kommutieren

$$\tilde{\zeta} \circ \zeta \circ \eta = \tilde{\zeta} \circ \tilde{\eta} = \eta$$

$$1_{V \otimes W} \circ \eta = \eta$$

Es folgt aus der universellen Eigenschaft, dass

$$\tilde{\zeta} \circ \zeta = 1_{V \otimes W}$$

Wir wenden die universelle Eigenschaft an, mit $U := \widetilde{V \otimes W}$

$$\begin{array}{ccc} V \times W & & V \times W \\ \downarrow \tilde{\eta} & \searrow \tilde{\eta} & \downarrow \tilde{\eta} \quad \searrow \tilde{\eta} \\ \widetilde{V \otimes W} & \xrightarrow{\tilde{\zeta} \circ \zeta} & V \otimes W \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V \times W & & V \times W \\ \downarrow \tilde{\eta} & \searrow \tilde{\eta} & \downarrow \tilde{\eta} \quad \searrow \tilde{\eta} \\ \widetilde{V \otimes W} & \xrightarrow{1_{\widetilde{V \otimes W}}} & \widetilde{V \otimes W} \end{array}$$

Beide Diagramme kommutieren

$$\zeta \circ \tilde{\zeta} \circ \tilde{\eta} = \zeta \circ \eta = \tilde{\eta}$$

$$1_{\widetilde{V \otimes W}} \circ \tilde{\eta} = \tilde{\eta}$$

Es folgt aus der universellen Eigenschaft, dass

$$\zeta \circ \tilde{\zeta} = 1_{\widetilde{V \otimes W}}$$

Ergebnis:

$$V \otimes W \xrightarrow{\zeta} \widetilde{V \otimes W}$$

ist Isomorphismus, inverse zu

$$\tilde{\zeta} : \widetilde{V \otimes W} \rightarrow V \otimes W$$

Fazit 11. universelle Eigenschaft \rightsquigarrow Eindeutigkeit bis auf Isomorphismus

Not 4. Tensorprodukt $V \otimes W$ oder $V \otimes_{\mathbb{K}} W$

3.5.1 Existenz vom Tensorprodukt

Bemerkung 59. Es gibt zwei Methoden

- Durch Auswahl von Basen
- Beschreibung als Quotientenvektorraum

Heute: Methode 1

- braucht die Existenz von Basen
- klar fall $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$

oder im Allgemeinen für die, die das Auswahlaxiom gesehen haben.

Proposition 14. Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V und $(w_j)_{j \in J}$ eine Basis von W . Dann existiert das Tensorprodukt $V \otimes W$, mit Basis $(v_i \otimes w_j)_{(i,j) \in I \times J}$ und

$$\eta : V \times W \rightarrow V \otimes W$$

$$\left(\sum_{i \in I} a_i v_i \sum_{j \in J} b_j w_j \right) \mapsto \sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j (v_i \otimes w_j)$$

mit $a_i \neq 0$ für endlich viele i und $b_j \neq 0$ für endlich viele j
Das bedeutet, dass die Elemente von $V \otimes W$

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} c_{ij} (v_i \otimes w_j) \quad c_{ij} \in \mathbb{K}$$

nur endlich viele $c_{ij} \neq 0$.

Beweis 21. Zu verifizieren:

- dass η bilinear ist
- und erfüllt die universelle Eigenschaft

η ist bilinear:

$$\begin{aligned}
 & \eta \left(\sum_{i \in I} a_i v_i, \sum_{j \in J} b_j w_j \right) + \eta \left(\sum_{i \in I} a'_i v_i, \sum_{j \in J} b_j w_j \right) = \\
 &= \sum_{i \in I} a_i b_j (v_i \otimes w_j) + \sum_{(i, j) \in I \times J} a'_i b_j (v_i \otimes w_j) = \\
 &= \sum_{(i, j) \in I \times J} (a_i b_j + a'_i b_j) (v_i \otimes w_j) = \\
 &= \sum_{(i, j) \in I \times J} (a_i + a'_i) b_j (v_i \otimes w_j) = \\
 &= \eta \left(\sum_{i \in I} (a_i + a'_i) v_i, \sum_{j \in J} b_j w_j \right) \\
 &= \eta \left(\sum_{i \in I} a_i v_i + \sum_{i \in I} a'_i v_i, \sum_{j \in J} b_j w_j \right)
 \end{aligned}$$

Beispiel 31. $V = \mathbb{K}^2$, $W = \mathbb{K}[t]$

V hat die Standardbasis (e_1, e_2)

W hat die Basis $(1, t, t^2, \dots)$

$\Rightarrow V \otimes W$ hat die Basis $e_1 \otimes 1, e_1 \otimes t, \dots, e_2 \otimes 1, e_2 \otimes t, \dots$

$$\begin{aligned}
 \eta : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}[t] &\rightarrow \mathbb{K}^2 \otimes \mathbb{K}[t] \\
 ((1, 0), t^2) &\mapsto e_1 \otimes t^2 \\
 ((0, 1), t^3) &\mapsto e_2 \otimes t^3 \\
 ((2, 3), t^4) &\mapsto 2e_1 \otimes t^4 + 3e_2 \otimes t^4
 \end{aligned}$$

Typisches Element von $\mathbb{K}^2 \otimes \mathbb{K}[t]$

$$e_1 \otimes t^2 + e_2 \otimes t^3 + 2e_1 \otimes t^4 + 3e_2 \otimes t^4$$

Mit anderer Schreibweise:

$$(t^2, 0) + (0, t^3) + (2t^4, 0) + (0, 3t^4)$$

oder:

$$(t^2 + 2t^4, t^3 + 3t^4)$$

Definition 42. Sei U ein \mathbb{K} -Vektorraum und

$$\xi : V \times W \rightarrow U$$

eine bilineare Abbildung. Wir definieren

$$\begin{array}{ccc}
 V \times W & & \\
 \downarrow \eta & \searrow \xi & \\
 V \otimes W & \xrightarrow{\xi'} & U \\
 \xi' : V \otimes W & \rightarrow & U
 \end{array}$$

durch

$$\xi'(v_i \otimes w_j) := \xi(v_i, w_j)$$

für $i \in I, j \in J$, und deshalb:

$$\xi' \left(\sum_{(i, j) \in I \times J} c_{ij} v_i \otimes w_j \right) = \sum_{(i, j) \in I \times J} c_{ij} \xi(v_i, w_j)$$

Das Diagramm kommutiert (aus der Bilinearität von ξ)

Die Eindeutigkeit ist durch die identischen Basenvektoren gegeben.

Bemerkung 60.

$$\dim V \otimes W = (\dim V) (\dim W)$$

Not 5. Für $v \in V$, $w \in W$ schreibt man oft $v \otimes w$ für $\eta(v, w)$

Bemerkung 61. Weil

$$(v, w) \mapsto v \otimes w := \eta(v, w)$$

eine bilineare Abbildung ist, haben wir

$$\begin{aligned} v \otimes w + v' \otimes w &= (v + v') \otimes w \\ v \otimes w + v \otimes w' &= v \otimes (w + w') \\ (\lambda v) \otimes w &= \lambda(v \otimes w) = v \otimes (\lambda w) \end{aligned}$$

Rechenregeln für Tensoren

Not 6. Letztes Mal: für Basiselemente v_i, w_j bezeichnet $v_i \otimes w_j$ ein Basiselement von $V \otimes W$

Bemerkung 62. Die Abbildung lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} V \times W &\xrightarrow{\eta} V \otimes W \\ (v_i, w_j) &\mapsto v_i \otimes w_j \end{aligned}$$

Bemerkung 63. Jetzt für beliebige $v \in V$, $w \in W$ bezeichnet $v \otimes w$ das Element

$$\eta(v, w) \in V \otimes W$$

Weil in der Konstruktion wir η durch

$$\eta(v_i, w_j) := v_i \otimes w_j$$

definiert haben, stimmen die beiden Bedeutungen von $v_i \otimes w_j$ überein.

Beispiel 32. Isomorphismus von Vektorräumen über \mathbb{R}

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t] &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}[t] \oplus \mathbb{R}[t] \\ e_1 \otimes t^j &\mapsto (t^j, 0) \\ e_2 \otimes t^j &\mapsto (0, t^j) \end{aligned}$$

Ganz ähnlich

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t] &\xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[t] \\ 1 \otimes t^j &\mapsto t^j \\ i \otimes t^j &\mapsto it^j \end{aligned}$$

\implies für $\gamma \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\gamma \otimes t^j \mapsto \gamma t^j$$

weil:

$$\gamma = \alpha + \beta i \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

haben wir

$$\begin{aligned} \gamma \otimes t^j &= (\alpha + \beta i) \otimes t^j \\ &= \alpha \otimes t^j + \beta i \otimes t^j \\ &= \alpha (1 \otimes t^j) + \beta (i \otimes t^j) \\ &\mapsto \alpha (t^j) + \beta (it^j) \\ &= (\alpha + \beta i) t^j \\ &= \gamma t^j \end{aligned}$$

Proposition 15. Sei $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$ eine Körpererweiterung und V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Dann hat $\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{K}} V$ die Struktur von \mathbb{L} -Vektorraum, mit

$$\alpha(\beta \otimes v) = (\alpha\beta) \otimes v \quad \text{für } \alpha, \beta \in \mathbb{L} \text{ und } v \in V$$

Beweis 22. Wir müssen verifizieren, dass

$$(\alpha, \beta \otimes v) \mapsto (\alpha\beta) \otimes v$$

eine Abbildung von $L \times (L \otimes_{\mathbb{K}} V)$ nach $L \otimes_{\mathbb{K}} V$ beschreibt. D.h. für jedes $\alpha \in L$,
 \exists eine Abbildung $L \otimes V \rightarrow L \otimes V$

$$\begin{array}{ccc}
 L \times V & \xrightarrow{(\beta, \alpha) \mapsto (\alpha\beta, v)} & L \times V \\
 \downarrow \eta & \searrow (\alpha, \beta) \mapsto (\alpha\beta) \otimes v & \downarrow \eta \\
 L \otimes V & \xrightarrow{\text{Aus der u.E.}} & L \otimes V \\
 & & (\alpha, \beta) \mapsto (\alpha\beta) \otimes v
 \end{array}$$

ist bilinear:

$$\begin{aligned}
 (\beta + \beta', v) &\mapsto (\alpha(\beta + \beta')) \otimes v = \\
 &= (\alpha\beta + \alpha\beta') \otimes v && \text{Körpereigenschaft} \\
 &= \alpha\beta \otimes v + \alpha\beta' \otimes v && \text{Rechenregeln für Tensoren}
 \end{aligned}$$

So bekommen wir

$$\begin{aligned}
 L \times (L \otimes V) &\rightarrow L \otimes V \\
 (\alpha, \beta \otimes v) &\mapsto (\alpha\beta) \otimes v
 \end{aligned}$$

Wir müssen auch die Axiome für den Vektorraum über L verifizieren, d.h.:

$$\begin{aligned}
 \alpha(w + w') &= \alpha w + \alpha w' && \text{für } \alpha \in L, w, w' \in L \otimes V \\
 \alpha(\alpha' w) &= (\alpha\alpha') w && \text{für } \alpha, \alpha' \in L, w \in L \otimes V
 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung gilt weil $L \otimes V \dashrightarrow L \otimes V$ über \mathbb{K} -linear ist. Die zweite folgt aus der ersten, falls wir nur den Fall verifizieren, wobei $w = \beta \otimes v$. Dafür benutzen wir

- $L \otimes_{\mathbb{K}} V$ ist von Elementen $\beta \otimes v$ ($\beta \in L, v \in V$) aufgespannt, als \mathbb{K} -Vektorraum (Klar von der Konstruktion)
- Dann können wir schreiben

$$w = \beta_1 \otimes v_1 + \cdots + \beta_\gamma \otimes v_\gamma \quad \gamma \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha(\alpha'(\beta_1 \otimes v_1 + \cdots + \beta_\gamma \otimes v_\gamma)) &= \alpha(\alpha'(\beta_1 \otimes v_1) + \cdots + \alpha'(\beta_\gamma \otimes v_\gamma)) \\
 &= \alpha(\alpha'(\beta_1 \otimes v_1)) + \alpha(\alpha'(\beta_\gamma \otimes v_\gamma)) \\
 &= (\alpha\alpha')(\beta_1 \otimes v_1) + \cdots + (\alpha\alpha')(\beta_\gamma \otimes v_\gamma) \\
 &= (\alpha\alpha')(\beta_1 \otimes v_1 + \cdots + \beta_\gamma \otimes v_\gamma)
 \end{aligned}$$

für $w := \beta \otimes v$:

$$\begin{aligned}
 \alpha(\alpha'(\beta \otimes v)) &= \alpha((\alpha'\beta) \otimes v) \\
 &= (\alpha(\alpha'\beta)) \otimes v \\
 &= ((\alpha\alpha')\beta) \otimes v \\
 &= (\alpha\alpha')(\beta \otimes v)
 \end{aligned}$$

Satz 7.

$$\underbrace{\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t]}_{\mathbb{C}\text{-Vektorraum}} \rightarrow \mathbb{C}[t]$$

Beh: dies ist ein Isomorphismus von \mathbb{C} -Vektorräumen. Nur noch zu verifizieren: die \mathbb{C} -Linearität. Im allgemeinen haben wir

$$L \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[t] \xrightarrow{\sim} L[t]$$

L -linearer Isomorphismus

Beweis 23. Sei $\gamma \in \mathbb{C}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t] & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}[t] \\ \downarrow \gamma \cdot () & & \downarrow \gamma \cdot () \\ \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t] & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}[t] \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \gamma' \oplus t^j & \xrightarrow{\quad} & \gamma t^j \\ \swarrow & & \downarrow \\ \gamma(\gamma' \otimes t^j) = (\gamma\gamma') \otimes t^j & \xrightarrow{\quad} & \gamma\gamma' t^j \end{array}$$

Bemerkung 64. Ganz ähnlich

$$L \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n \xrightarrow{\sim} L^n$$

L -linearer Isomorphismus. ($n \in \mathbb{N}$) Insbesondere:

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n$$

Definition 43. Komplexifizierung Ist V ein \mathbb{R} -Vektorraum, so heisst der \mathbb{C} -Vektorraum $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ die Komplexifizierung von V

3.5.2 Tensorprodukt von linearen Abbildungen

Definition 44. Tensorprodukt von linearen Abbildungen Sei $V, W, V \otimes_{\mathbb{K}} W, V \times W \xrightarrow{\eta} V \otimes_{\mathbb{K}} W$ und $V', W', V' \otimes_{\mathbb{K}} W', V' \times W' \xrightarrow{\eta'} V' \otimes_{\mathbb{K}} W'$ gegeben, mit linearen Abbildungen

$$\begin{array}{c} V \xrightarrow{\phi} V' \\ W \xrightarrow{\psi} W' \end{array}$$

Dann haben wir:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\phi \times \psi} & V' \times W' \\ \downarrow \eta & & \downarrow \eta' \\ V \otimes W & \xrightarrow{\text{neu}} & V' \otimes W' \end{array}$$

Beh: die Komposition ist bilinear

$$(v, w) \mapsto \psi(v) \otimes \psi(w)$$

(neu) aus der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts von linearen Abbildungen

Not 7. Tensorprodukt von linearen Abbildungen

$$\phi \otimes \psi$$

3.5.3 Spezialfälle

Bemerkung 65. Spezialfall 1 V, V', W, W' endlichdimensional mit gegebenen Basen $\dim V = m$ Basis v_1, \dots, v_m , $\dim W = n$ Basis w_1, \dots, w_n , $\dim V' = m'$ Basis $v'_1, \dots, v'_{m'}$, $\dim W' = n'$ Basis $w'_1, \dots, w'_{n'}$ dargestellt durch ϕ dargestellt als $A \in M(m' \times m, \mathbb{K})$, ψ durch $B \in M(n' \times n, \mathbb{K})$. Wie wir schon gesehen haben, hat $V \otimes W$ die Basis

$$\begin{pmatrix} v_1 \otimes w_1 & \cdots & v_1 \otimes w_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_m \otimes w_1 & \cdots & v_m \otimes w_n \end{pmatrix}$$

und $V' \otimes W'$ hat die Basis

$$\begin{pmatrix} v'_1 \otimes w'_1 & \cdots & v'_1 \otimes w'_{n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v'_{m'} \otimes w'_1 & \cdots & v'_{m'} \otimes w'_{n'} \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die darstellende Matrix von $\phi \otimes \psi$, Basiselement $v_i \otimes w_j$ von $V \otimes W$ geht auf was?

$$\begin{array}{ccc} (v_i, w_j) \mapsto (\phi(v_i), \psi(w_j)) & \xrightarrow{\quad} & (a_{1i}v'_1 + \cdots + a_{m'i}v'_{m'}, b_{1j}w'_1 + \cdots + b_{n'j}w'_{n'}) \\ \downarrow \eta & \searrow \eta' & \\ v_i \otimes w_j & \xrightarrow{\phi \otimes \psi} & (a_{1i}v'_1 + \cdots + a_{m'i}v'_{m'}) \otimes (b_{1j}w'_1 + \cdots + b_{n'j}w'_{n'}) = \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= a_{1i}b_{1j}(v'_1 \otimes w'_1) + a_{1i}b_{2j}(v'_1 \otimes w'_2) + \cdots + a_{1i}b_{n'j}(v'_1 \otimes w'_{n'}) + \\ &\quad a_{2i}b_{1j}(v'_2 \otimes w'_1) + \cdots + a_{2i}b_{n'j}(v'_2 \otimes w'_{n'}) + \\ &\quad \cdots + a_{m'i}b_{1j}(v'_{m'} \otimes w'_1) + \cdots + a_{m'i}b_{n'j}(v'_{m'} \otimes w'_{n'}) \end{aligned}$$

$A \otimes B$ heisst die darstellende Matrix von $\phi \otimes \psi$ und sieht so aus:

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1n} & \cdots & a_{1m}b_{11} & \cdots & a_{1m}b_{1n} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2n} & \cdots & a_{1m}b_{21} & \cdots & a_{1m}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{11}b_{n'1} & a_{11}b_{n'2} & \cdots & a_{11}b_{n'n} & \cdots & a_{1m}b_{n'1} & \cdots & a_{1m}b_{n'n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m'1}b_{11} & a_{m'1}b_{12} & \cdots & a_{m'1}b_{1n} & \cdots & a_{m'm}b_{11} & \cdots & a_{m'm}b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m'1}b_{n'1} & a_{m'1}b_{n'2} & \cdots & a_{m'1}b_{n'n} & \cdots & a_{m'm}b_{n'1} & \cdots & a_{m'm}b_{n'n} \end{pmatrix} \in M(m'n' \times mn, \mathbb{K})$$

Diese Matrix lässt sich in Blockmatrixen unterteilen:

$$\begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & \cdots & a_{2m}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m'1}B & \cdots & a_{m'm}B \end{pmatrix} = A \otimes B$$

Beispiel 33.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 6 \\ 6 & 8 & 9 & 12 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 66. Spezialfall 2 $V' = V$ und $\phi = 1_V$. Dann folgt aus $\psi : W \rightarrow W'$

$$V \otimes_{\mathbb{K}} W \xrightarrow{1_V \otimes \psi} V \otimes_{\mathbb{K}} W'$$

$1_V \otimes \psi$ kann auch mit $V \otimes \psi$ bezeichnet werden.

Beispiel 34. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C} \rightsquigarrow$ Komplexifizierung einer linearen Abbildung

$$\psi : W \rightarrow W' \rightsquigarrow \mathbb{C} \otimes \psi : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} W \rightarrow \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} W'$$

wenn $\dim W, \dim W' < \infty$, darstellende Matrix $B = (b_{ij}), b_{ij} \in \mathbb{R}$, so bekommen wir $\mathbb{C} \otimes B$, mit derselben Grösse, denselben Einträgen, aber als komplexe Zahlen betrachtet. Ähnlich für eine beliebige Körpererweiterung $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$

$$\psi : W \rightarrow W' \rightsquigarrow \mathbb{L} \otimes \psi : \mathbb{L}W \rightarrow \mathbb{L} \otimes W'$$

Bemerkung 67. Spezialfall 3 $V' = W' = \mathbb{K}$, und so $\phi \in V^*, \psi \in W^*$

$$\rightsquigarrow \phi \otimes \psi : V \otimes_{\mathbb{K}} W \rightarrow \underbrace{\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}}_{\text{Basis } (1 \otimes 1) \mapsto 1} \approx \mathbb{K}$$

So können wir schreiben

$$\phi \otimes \psi : V \otimes_{\mathbb{K}} W \rightarrow \mathbb{K}$$

d.h.

$$\phi \otimes \psi \in (V \otimes_{\mathbb{K}} W)^*$$

Anscheinend hat $\phi \otimes \psi$ auch eine Bedeutung als Element von $V^* \otimes_{\mathbb{K}} W^*$. Es gibt einen Zusammenhang:

$$\begin{array}{ccc} V^* \times W^* & & \\ \downarrow & \searrow (\phi, \psi) \mapsto \phi \otimes \psi & \\ V^* \otimes W^* & (V \otimes W)^* & \end{array}$$

Satz 8.

$$\begin{aligned} V^* \times W^* &\rightarrow (V \otimes W)^* \\ (\psi, \phi) &\mapsto \phi \otimes \psi \end{aligned}$$

ist eine bilineare Abbildung.

Beweis 24.

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{(\phi + \tilde{\phi}) \times \psi} & \mathbb{K} \times \mathbb{K} \\ \downarrow & & \downarrow \\ V \otimes W & \xrightarrow{(\phi + \tilde{\phi} \otimes \psi)} & \mathbb{K} \end{array}$$

•

$$(\psi + \tilde{\psi}, \phi) \mapsto (\phi + \tilde{\phi}) \otimes \stackrel{?}{=} \phi \otimes \phi + \tilde{\phi} \otimes \psi$$

ok

• ...

Proposition 16. Sei \mathbb{K} ein Körper und V, W endlichdimensionale Vektorräume über \mathbb{K} . Die oben beschriebene lineare Abbildung

$$V^* \otimes W^* \rightarrow (V \otimes W)^*$$

ist ein Isomorphismus

Beweis 25. Wir rechnen mit Basen. Seien (v_1, \dots, v_n) Basis in V mit dualen Basen (v_1^*, \dots, v_m^*) in V^* . Seien (w_1, \dots, w_m) Basis in W mit dualen Basen (w_1^*, \dots, w_n^*) in W^* . Dann ist $(v_i^* \otimes w_j^*)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ eine Basis von $V^* \otimes W^*$

$$V \xrightarrow{v_i^*} \mathbb{K}$$

$$W \xrightarrow{w_j^*} \mathbb{K}$$

$$V \otimes W \xrightarrow{v_i^* \otimes w_j^*} \mathbb{K}$$

$$v_i \otimes w_j \mapsto \delta_{ik} \cdot \delta_{jl}$$

Wir erkennen das als Basiselement von $(V \otimes W)^*$. Wir können auch $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ interpretieren als Tensorprodukt. V, W Vektorräume über \mathbb{K}

$$(\phi, w) \longmapsto v \mapsto \phi(v)w$$

$$\begin{array}{ccc} V^* \times W & \longrightarrow & \text{Hom}(V, W) \\ \downarrow & \nearrow & \\ V^* \otimes W & & \end{array}$$

Beh: Das ist eine bilineare Abbildung ...

Proposition 17. Sei \mathbb{K} ein Körper, V, W endlichdimensionale \mathbb{K} -Vektorräume. Dann ist die lineare Abbildung

$$V^* \otimes W \rightarrow \text{Hom}(V, W)$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis 26. Eine ähnliche Berechnung mit Basen.

Beispiel 35. $V = W = \mathbb{R}^3$

$$e_2^* \otimes e_3 \mapsto \begin{pmatrix} e_1 \mapsto 0 \\ e_2 \mapsto e_3 \\ e_3 \mapsto 0 \end{pmatrix}$$

oder durch eine Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow e_1^* \otimes e_1 + 2e_3^* \otimes e_1 - e_2^* \otimes e_2 + e_3^* \otimes e_2 + e_1^* \otimes e_3 + e_2^* \otimes e_3$$

$$= (e_1^* + 2e_3^*) \otimes e_1 + (-e_2^* + e_3^*) \otimes e_2 + (e_1^* + 2e_2^*) \otimes e_3$$