Lineare Algebra I - Vorlesungs-Script

Prof. Andrew Kresch

Basisjahr 08/09 Semester II

Mitschrift:
Simon Hafner

Inhaltsverzeichnis

1 Bilinearformen

Das kanonische Skalarprodukt (oder: Standardskalarprodukt) von $\mathbb{R}^n$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : &\mathbb{R}^n x \mathbb{R}^n && \to \mathbb{R} \\ &(x, y) && \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

gegeben durch

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

falls $x = (x_1, \cdots, x_n)$ und $y = (y_1, \cdots, y_n)$ sind.

Definition 1 (Konvention)**.** eine $1x1$ Matrix wird mit Eintrag indentifiziert

$$(x) \in M(1 \times 1, K) \leftrightarrow x \in K$$

Dann können wir schreiben:

$$\langle x, y \rangle = (x^t)(y)$$

$$x = \left(x_1, \vdots, x_n \right), y = \left(y_1, \vdots, \right)$$

$$(x_1, \cdots, x_n) \left(y_1, \vdots, y_n \right) = (x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)$$

Bemerkung 1 ($\langle , \rangle$ ist bilinear).

$$\begin{aligned} \langle x + x', y \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle \\ \langle \lambda x, y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle \\ \langle x, y + y' \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle \\ \langle x, \lambda y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

symmetrisch:

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

positiv definit:

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &\geq 0 \\ \langle x, x \rangle &= \Leftrightarrow x = 0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

$$\text{für} \forall x, y, x', y' \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$$

Bemerkung 2 (Hintergrund: euklidische Geometrie).

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Bemerkung 3 (Eigenschaften von $\|.\|$).

$$\begin{aligned} \|x\| \geq 0, \text{mit } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

Dann definieren wir den Abstand von $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$d(x, y) \in \mathbb{R}$$

$$d(x, y) := \|y - x\|$$

Bemerkung 4. Eigenschaften

$$\begin{aligned} d(x, y) \geq 0, \text{mit} d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ d(y, x) = d(x, y) \\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

$$\text{für} x, y, z \in \mathbb{R}^n$$

Wir sind motiviert, Strukturen zu definieren, basierend auf diesen Eigenschaften, so z.B.

- Bilineare Formen (symetrisch, positiv definit)
- Norme
- Metriken

Beweis 1. *$\|.\|$ und d: die Dreiecksungleichung folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung*

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle \leq (?)\,(\|x\|+\|y\|)^2 \\ &\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \leq \|x\|\,\|y\|\end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung: für $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle \langle y,y\rangle$$

mit Gleichheit genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

$$\Leftrightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} --- & x & --- \\ --- & y & --- \end{pmatrix} \in M(2\times n, \mathbb{R})$$

A hat Rang ≤ 1

Beweis 2.

$$\begin{aligned} A\cdot A^t = & &= \begin{pmatrix}\langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle \\ \langle x,y\rangle & \langle y,y\rangle\end{pmatrix} \in M(2\times 2), \mathbb{R} \\ \det(A\cdot A^t) = & &= \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2 \end{aligned}$$

Es gibt eine Gleichung von Determinanten:

$$\begin{aligned} & A, B \in M(k\times n, K) \\ \det(A\cdot B^t) = & \sum_{1\leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k \leq n} \det(A^{s_1,\cdots,s_k})\det(B^{s_1,\cdots,s_k}) \\ \textit{wobei } A^{s_1,\cdots,s_k} := & (a_i, s_j)_{1\leq i,j\leq k}, B^{s_1,\cdots,s_k} = (b_i, s_j)_{1\leq i,j\leq k} \end{aligned}$$

Beweis-Skizze: Reduktion zum Fall, dass die Zeilen von A und B Standardbasiselemente sind; direkte Berechnung in diesem Fall.
Es folgt:

$$\det(A\cdot A^t) = \sum_{1\leq i<j\leq n} \det(A^{i,j})^2 \geq 0$$

und ist $= 0 \Leftrightarrow$ alle 2×2 Minoren von A sind 0 $\Leftrightarrow$ rang$(A) \leq 1$

Korollar 1. *Wir können definieren*

$$\angle(x,y) := \cos^{-1} \underbrace{\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}}_{\in[-1,1]\in\mathbb{R}} \in [0,\pi] \in \mathbb{R}$$

$$\textit{für}$$
$$0 \neq x \in \mathbb{R}^n$$
$$0 \neq y \in \mathbb{R}^n$$

Korollar 2. *x, y Vektoren, θ Winkel zwischen den beiden*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|y - x\|^2\right)$$

und deshalb:

$$\cos\theta = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|y - x\|^2}{2\,\|x\|\,\|y\|}$$

$\Longrightarrow$ *Winkel eines Dreiecks ist nur von den Seitenlängen abhängig.*

Beispiel 1.

$$\angle(x, y) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$$

$$\underbrace{\{y|\,\langle x, y\rangle = 0\} = 0}_{\text{Untervektorraum}} \cup \{0 \neq y \in \mathbb{R}^n | \angle(x, y) = \frac{\pi}{2}\}$$

Man nennt x und y <u>senkrecht</u> falls $\langle x, y\rangle = 0$

Fazit 1.

$$\begin{aligned} \langle .,.\rangle \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n && \text{bilinear form} \\ \|.\|\mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}_{\geq 0} && \text{Norm} \\ d(.,.)\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}_{>0} && \text{Metrik} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sqrt{\langle x, x\rangle} \\ d(x, y) &= \|y - x\| \\ \langle x, y\rangle &= \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|y - x\|^2}{2} \end{aligned}$$

1.1 Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to &\quad \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto &\quad x \times y \end{aligned}$$

für $y = (y_1, y_2, y_3)$ und $y = (y_1, y_2, y_3)$ ist

$$x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_2, x_1y_2 - x_2y_1)$$

oder:

$$x \times y = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

wobei (e_1, e_2, e_3) die Standardbasis ist. Es ist deshalb klar, dass

$$0 = \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \langle x, x \times y\rangle$$

$$0 = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \langle y, x \times y\rangle$$

$x \times y$ liegt auf der Gerade von Vektoren senkrecht zu x und y. weiter:

$$\det\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \langle x \times y, x \times y\rangle$$

$$\begin{aligned} &= \|x \times y\|^2 = (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\ &= \|x\|^2\,\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2 = \|x\|^2\,\|y\|^2\left(1 - \frac{\langle x, y\rangle^2}{\|x\|^2\,\|y\|^2}\right) \\ &= \|x\|^2\,\|y\|^2\,(1 - \cos^2\angle(x, y) = \|x\|^2\,\|y\|^2 \sin^2\angle(x, y) \end{aligned}$$

Fazit 2. Wenn das Ergebnis = 0, folgt daraus, dass x und y linear abhängig sind. Falls x und y linear unabhängig sind, dann folgt dass $(x \times y, x, y)$ zu derselben Orientierungsklasse gehört wie (e_1, e_2, e_3). Insgesamt bedeutet dies, dass $x \times y$ folgende Eigenschaften hat:

- ist senkrecht zu x und y
- ist $0 \Leftrightarrow x$ und y sind linear abhängig
- hat Länge $\|x\| \|y\| \sin \angle(x, y)$
- und hat die Richtung, die mit x und y die gleiche Orientierungsklassse wie die Standardbasis hat.

1.2 Skalarprodukt über $\mathbb{C}^n$

Sei $z = (z_1, \cdots, z_n)$ und $w = (w_1, \cdots, w_n) \in \mathbb{C}^n$

Bemerkung 5. Der Ausdruck macht Sinn.

$$\begin{aligned} \langle z, w \rangle &:= z_1 w_1 + \cdots + z_n w_n \\ \langle z, z \rangle &:= z_1^2 + \cdots + z_n^2 \end{aligned}$$

Dann kann die Länge nicht mehr interpretiert werden, z.B. für $z = (1, i, 0, \cdots, 0)$ haben wir $\langle z, z \rangle = 1^2 + i^2 = 0$. Isotropische Untervektorräume von $\mathbb{C}^n$ werden nicht in in diesem Kurs behandelt. ($V \subset \mathbb{C}^n$ s.d. $\langle v, w \rangle = 0 \; \forall v, w \in V$). Für die Physik, die Geometrie usw. ist eine Interpretation in Zusammenhang mit Länge wichtig, deshalb brauchen wir eine neue Definition.

Definition 2 (Das kanonische Skalarprodukt)**.** von $\mathbb{C}^n$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle ., . \rangle_c : \mathbb{C}^n \mathbb{C}^n &\to \mathbb{C} \\ (z, w) &\mapsto z_1 \bar{w_1} + \cdots + z_n \bar{w_n} \end{aligned}$$

Eigenschaften 1 (von $\langle ., \rangle_c$).

$$\begin{aligned} \langle z + z', w \rangle &= \langle z, w \rangle_c + \langle z', w \rangle_c \\ \langle \lambda z, w \rangle_c &= \lambda \langle z, w \rangle_c \\ \langle z, w + w' \rangle_c &= \langle z, w \rangle_c + \langle z, w' \rangle_c \\ \langle z, \lambda w \rangle_c &= \bar{\lambda} \langle z, w \rangle_c \end{aligned}$$

für $z, z', w, w' \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$
$\langle ., . \rangle_c$ ist sesquilinear

$$\begin{aligned} \langle w, z \rangle_c &= \overline{\langle z, w \rangle_c} && \text{hermitesch} \\ \langle z, z \rangle_c &\in \mathbb{R}_{\geq 0} && \text{positiv definit} \\ \langle z, z \rangle = 0 &\Leftrightarrow z = 0 \end{aligned}$$

Fazit 3. $\langle ., . \rangle_c$ ist sesquilinear, hermitesch und positiv definit.

Beweis 3. *Bei Bedarf sonstwo nachschauen (Zu viele Zeichen und zu wenig Sinn). Es läuft auf eine Sammlung von Quadraten heraus.*

Definition 3 (Norm von $\mathbb{C}^n$)**.**

$$\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle_c}$$

Bemerkung 6. Sei $w = (x_1' + x y_1', \cdots, x_n' + i y_n')$. Dann:

$$\begin{aligned} \langle z, w \rangle_c &= (x_1 + i y_1)(x_1' - i y_1') + \cdots + (x_n + i y_n)(x_n' - i y_n') \\ &= (x_1 x_1' + y_1 y_1' + \cdots + x_n x_n' + y_n y_n') + i(x_1' y_1 - x_1 y_1' + \cdots + x_n' x_y - x_n y_n') \end{aligned}$$

Auf diese Weise ist $\langle .,. \rangle_c$ eine Erweiterung von reellen Skalarprodukt.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{2n} &\to \mathbb{C}^n && \mathbb{R}\text{-linear} \\ e_1 &\mapsto (1, 0, \cdots, 0) \\ e_2 &\mapsto (i, 0, \cdots, 0 \\ &\cdots \\ e_{2n} &\mapsto (0, \cdots, 0, i) \end{aligned}$$

$$\langle .,. \rangle_c = \big(\langle .,. \rangle \text{ von } \mathbb{R}^{2n}\big) + i(\text{neues})$$

$\operatorname{Re} \langle .,. \rangle_c = \langle .,. \rangle$ von $\mathbb{R}^{2n}$ unter diesem Isomorpismus.
Sei $\omega := \operatorname{Im} \langle .,. \rangle$:

$$\begin{aligned} \omega : &\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{R} \\ \text{oder } &\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

Eigenschaften 2 (von ω (Imaginärteil des kanonischen Skalarproduktes)). **bilinear**

schiefsymmetrisch $\omega(w, z) = -\omega(z, w)$

$\omega(z, z) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C}^n$ (oder $\mathbb{R}^{2n}$)

1.3 Bilinearform

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

Definition 4 (Bilinearform)**.** Eine bilineare Form auf V ist eine Abbildung

$$s : V \times V \to K$$

so dass:

$$\begin{aligned} s(v + v', w) &= s(v, w) + s(v', w) \\ s(\lambda v, w) &= \lambda s(v, w) \\ s(v, w + w') &= s(v, w) + s(v, w') \\ s(v, \lambda w) &= \lambda s(v, w) \end{aligned}$$

$\forall v, v', w, w' \in V, \lambda \in K$
Und: s heisst symmetrisch, falls $s(w, v) = s(v, w)$ und schiefsymmetrisch, falls $s(w, v) = -s(v, w)$.

Beispiel 2.

- $\langle .,. \rangle := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine symmetrische bilineare Form
- ω ist eine schiefsymmetrisch bilineare Form
- ($\langle .,. \rangle_c$ nicht)
- $V = \{$stetige Abbildung$[0, 1] \to \mathbb{R}\}$ über $\mathbb{R}$: $f, g \in V$

  $$s(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

  ist eine symmetrisch bilineare Form auf V

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, mit $\dim_K V < \infty$, und $s : V \times V \to K$ eine bilineare Form.

Definition 5. darstellende Matrix Ist $B = (v_i)_{1 \le i \le n}$ eine Basis von V, so setzen wir

$$M_B(s) := (s(v_i, v_j))_{1 \le i,j \le n} \in M(n \times n, K)$$

die darstellende Matrix

Korollar 3. *für $x, y \in V$*

$$x = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$$
$$y = y_1v_1, + \cdots + y_nv_n$$

und

$$M_B(s) = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}, d.h. a_{ij} = s(v_i, v_j)$$

haben wir:

$$\begin{aligned} s(x,y) &= \sum_{i,j=1}^{n} x_iy_ja_{ij} \\ &= (x_1 \cdots x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= x^tM_B(s) \cdot y \end{aligned}$$

Proposition 1. *Sei V ein endlich-dim. Vektorraum über K mit Basis $B = (v_i)_{1\leq i\leq n}$. Es gibt eine Bijektion zwischen der Menge von Bilinearformen und $M(n \times n, K)$, gegeben durch*

$$(s : V \times V \to K) \mapsto M_B(s)$$

Beweis 4. *Wir schreiben einen Vektor $x \in V$ als $(x_1, \cdots, x_n)$ falls $x = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$. Ähnlich für y. Dann ist*

$$\begin{aligned} A \in M(n \times n, K) \mapsto & V \times V \to K \\ & (x,y) \mapsto x^t \cdot A \cdot y \end{aligned}$$

inverses zu der obigen Abbildung.

Bemerkung 7. Sei $(s : V \times V \to K)$ eine bilineare Forum und $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ die darstellende Matrix. Wir erinnern uns an die Notation

$$\begin{aligned} \Phi_B : & K^n \to V \\ & e_1 \mapsto v_i \end{aligned}$$

Dann:

$$\begin{tikzcd} K^n \times K^n \arrow[r, "\Phi_B \times \Phi_B"] & V \times V \arrow[r, "s"] & K \end{tikzcd}$$

ist gegeben durch

$$(x,y) \longmapsto t_xA \cdot y$$

Sei $A = (u_i)_{1\leq i\leq n}$ eine andere Basis.

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[d, "T = \Phi_B^{-1} \circ \Phi_A"'] \arrow[dr, "\Phi_A"] & \\ K^n \arrow[r, "\Phi_B"'] & V \end{tikzcd}$$

Proposition 2. *Transforationsformel Mit dieser Notation haben wir:*

$$M_A(s) = T^t \cdot M_B(s) \cdot T$$

Beweis 5.

$$\begin{tikzcd} K^n \times K^n \arrow[r, "\Phi_B \times \Phi_B"] & V \times V \arrow[r, "s"] & K \end{tikzcd}$$

$$(x,y) \longmapsto t_x \cdot M_B(s) \cdot y$$

Es folgt:

$$\begin{tikzcd}
 & K\times K \arrow[rr, "\Phi_A\times\Phi_A"] \arrow[dr, "T\times T"'] & & V\times V \arrow[r, "s"] & K & \\
(x,y) \arrow[ur, phantom, "\in"] \arrow[rrrrr, bend left=60, mapsto] \arrow[ddrr, mapsto] & & K\times K \arrow[ur, "\Phi_B\times\Phi_B"'] & & & x^tM_A(s)y= \arrow[ul, phantom, "\in"] \\
 & & & & & \\
 & & (T_x,T_y) \arrow[uu, phantom, "\in"] \arrow[uurrr, mapsto] & & &
\end{tikzcd}$$

$$= x^tT^tM_B(s)Ty = (T_x)^tM_B(s)(T_y)$$

Es folgt aus der oberen Proposition (Vor der Transf.):

$$T^tM_B(s)T = M_a(s)$$

Beispiel 3. $V = K^n$, mit Standardskalaprodukt $< .,. >$. Ist $B = (e_1, \cdots, e_n)$, so ist

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = M_{\text{Standardbasis}}(< .,. >)$$

Sei

$$\begin{aligned} A =&(e_1, e_2 - e_1, e_3 - e_2, \cdots, e_n - e_{n-1}) \\ =:&(u_1, u_2, \cdots, u_n) \end{aligned}$$

Direkt aus der Definition:

$$< u_i, u_j >= \begin{cases} 1 & i = j = 1 \\ 2 & i = j > 1 \\ -1 & \lvert i - j \rvert = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

oder mit der Transformationsformel

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \cdots & & \\ \cdots & & 1 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \text{ und } T^tE_NT''$$

Bemerkung 8. Ist A die darstellende Matrix bezügloich einer Basis, so haben wir:

- symmetrisch $\Leftrightarrow A = A^t$
- schiefsymmetrisch $\Leftrightarrow A = -A^t$

Das stimmt überein mit (vgl. Übungsblatt 3): $A \in M(n \times n)$ ist symmetrisch $\Leftrightarrow A = A^t$. A ist schiefsymmetrisch oder antisymmetrisch (oder alternierend wenn $\operatorname{char}(K) \neq 2) \Leftrightarrow A = -A^t$

1.4 Bilineare und quadratische Formen

Eine quadratische Form $V \to K$ wird zu einer Bilinearform assoziert. Falls $\dim_K V < \infty$: "quadratische Form" bedeutet $q : V \to K$ bezüglich einem Koordinatensystem gegeben als homogenes quadratisches Polynom. Ist $s : V \times V \to K$ eine bilineare Form, dann heisst

$$\begin{aligned} q :&V \to K \\ &v \mapsto q(v) = s(v, v) \end{aligned}$$

die zu s gehörige quadratische Form.

Beispiel 4. $< v, v >= v_1^2 + \cdots + v_n^2$ für $v \in K^n$
Für $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ eine symmetrische Matrix mit $s : V \times V \to K$, $(x, y) \mapsto x^t Ay$, haben wir

$$\begin{aligned} s(x,x) &= x^t Ax \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

Ist $\mathrm{char}(K) \neq 2$, so haben wir:

$$\begin{aligned} \{\text{symm. bilineare Formen in } K^n\} &\leftrightarrow \{\text{quadr. Formen auf } K^n\} \\ s &\mapsto q(v) := s(v,v) \\ &\hookleftarrow \text{(Polarisierungsformel)} \end{aligned}$$

1.4.1 Polarisierungsformel

Ist s eine symmetrische Bilinearform und q die zu s gehörende quadratische Form über einem Vektorraum V über K mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$, dann gilt:

$$\begin{aligned} s(v,w) &= \frac{1}{2}\left(q(v+w) - q(v) - q(w)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(q(v) + q(w) - q(v+w)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(q(v+w) - q(v-w)\right) \end{aligned}$$

1.5 Sesquilineare Form

Definition 6. Sei V ein komplexer Vektorraum. Eine Abbildung

$$s : V \times V \to \mathbb{C}$$

heisst sesquilinear falls:

$$\begin{aligned} s(v+v', w) &= s(v,w) + s(v',w) \\ s(\lambda v, w) &= \lambda s(v,w) \\ s(v, w+w') &= s(v,w) + s(v,w') \\ s(v, \lambda w) &= \bar{\lambda} s(v,w) \end{aligned}$$

für $v, v', w, w' \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Beispiel 5. $\langle .,. \rangle$ auf $\mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned} s(f,g) &= \int_0^1 f(x) g(x) dx \\ &\text{auf } V := \{\text{stetige Abb.}[0,1] \to \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

Definition 7. hermitesch Eine sesquilineare Form heisst hermitesch, falls

$$s(w,v) = s(v,w)\ \forall v, w \in V$$

Beispiel 6. $\langle .,. \rangle_c$ auf $\mathbb{C}^n$ ist hermitesch.

Bemerkung 9. hermitesche Form Man spricht von hermiteschen Form, diese sind immer sesquilinear

Definition 8. darstellende Matrix Sei $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$, und $B := (V_i)_{1 \leq i \leq n}$ eine Basis. Ist s eine sesquilineare Form, so definieren wir

$$M_B(s) := (s(v_i, v_j))_{1 \leq i \leq n}$$

die darstellende Matrix. Sind $z, w \in V$

$$z = z_1 v_1 + \cdots + z_n v_n$$
$$w = w_1 v_1 + \cdots + w_n v_n$$

dann haben wir

$$\begin{aligned} s(z,w) &= \sum_{i,j=1}^{n} z_i \bar{w_j} a_{ij} \text{wobei} a_{ij} = s(v_i, v_j) \\ &= (z_1 \cdots z_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w_1} \\ \vdots \\ \bar{w_n} \end{pmatrix} \qquad = z^t M_B(s) \cdot \bar{w} \end{aligned}$$

Proposition 3. *Sei V ein endlich dim. $\mathbb{C}$ Vektorraum und $B = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$. Wir haben eine Bijektion*

$$\{\textit{sesquilineare Form auf } V\} \leftrightarrow M(n \times n, \mathbb{C})$$

Unter dieser Bijektion haben wir:

$$\{\textit{hermitesche Formen}\} \leftrightarrow \{A \in M(n \times n, \mathbb{C}) : A^t = \bar{A}\}$$

Man sagt: eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ mit $A^t = \bar{A}$ ist hermitesch.

Satz 1. *Transformationsformel Sei $A = (u_1, \cdots, u_n)$ eine andere Basis mit Transformationsmatrix T:*

TODO: hier einfügen

Dann gilt:

$$M_A(s) = T^t \cdot M_B(s) \cdot \bar{T}$$

Mit $g(v) := s(v,v)$ gilt die Polarisierungsformel

$$s(v,w) = \frac{1}{4}\left(q(v+w) - q(v-w) + iq(v+iw) - iq(v-iw)\right)$$

Definition 9. positiv definit Sei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, V ein K-Vektorraum und $s : V \times V \to K$ eine Billinearform $\begin{cases} \text{symmetrisch} & K = \mathbb{R} \\ \text{hermitesch} & K = \mathbb{C} \end{cases}$ heisst positiv definit, falls $s(v; v) > 0 \ \forall 0 \neq v \in V$

Beispiel 7. $\langle ., . \rangle$ ist positiv definit auf $\mathbb{R}^n$
$\langle ., . \rangle_c$ ist psoitiv definit auf $\mathbb{C}^n$

Definition 10. Skalarprodukt
Ein Skalarprodukt ist $\begin{cases} \text{positiv definite symetrische bilineare Form} & K = \mathbb{R} \\ \text{eine positiv definite hermetische Form} & K = \mathbb{C} \end{cases}$

Definition 11. Skalarprodukt oft $\langle ., . \rangle$, Norm $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$

Definition 12. Euklidischer Vektorraum Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt

Definition 13. Untärer Vektorraum Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit Skalarprodukt

Beispiel 8.

$$V = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ stetig}\} \text{ mit } \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$
$$V = \{f : [0,1] \to \mathbb{C} \text{ stetig}\} \text{ mit } \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$$

in beiden Fällen

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx}$$

"L^2-Norm"

Bemerkung 10. In einem beliebigen euklidischen bzw. unitären Vektorraum gilt die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichtung

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \, \|w\| \;\; \forall v, w \in V$$

mit = genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Beweis 6. *(Skizze) klar falls $v = 0$ oder $w = 0$, also nehmen wir an, dass $v \neq 0$ und $w \neq 0$ 1. Reduktion: zum Fall $\|v\| = \|w\| = 1$.*

$$v_1 := \frac{v}{\|v\|} w_1 := \frac{w}{\|w\|}$$
$$\|v_1\| = 1 \, \|w_1\| = 1$$

2. Reduktion: Es reicht aus, zu zeigen: $\operatorname{Re}\langle v, w\rangle \leq 1$ *= genau dann wenn $V = W$*

$$\begin{aligned} |\langle v, w\rangle| &= \mu \langle v, w\rangle & \mu \in \mathbb{C}, |\mu| = 1 \\ &= \langle \mu v, w\rangle \in \mathbb{R}_{\geq} \\ &= \operatorname{Re}\langle v', w\rangle \; wobei v' := \mu v \end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung $\leq$, Gleichheit: v, w linear unabhängig $\Longrightarrow$ v', w linear unabhängig $\Longrightarrow$ $v' \neq w$

Eigenschaften 3.

$$\begin{aligned} & & = \text{falls} \\ \langle v - w, v - w\rangle &\geq 0 & v - w = 0 \\ \langle v, v\rangle - \langle v, w\rangle - \langle w, v\rangle + \langle w, w\rangle &\geq 0 & v = w \\ 1 - \langle v, v\rangle - \overline{\langle v, w\rangle} + 1 &\geq 0 & v = w \end{aligned}$$

Beispiel 9. Ist $T : V \to \mathbb{R}^n$ oder $T : V \to \mathbb{C}^n$ ein Isomorphismus, dann ist $s : V \times V \to \mathbb{R}$ (bzw. $s : V \times V \to \mathbb{C}$) gegeben durch

$$s(x, y) = \langle T_x, T_y\rangle$$

bzw.

$$s(x, y) = \langle T_x, T_y\rangle_c$$

ein Skalarprodukt.

Definition 14. Sei V ein exklusiver, bzw. unitärer Vektorraum

- $v, w \in V$ heisst orthogonal, falls $\langle v, w\rangle = 0$
- $U, W \subset V$ heissen orthogonal (geschrieben $U \perp V$) falls $U \perp W$ $\forall u \in U$, $w \in W$
- $U \subset W$ das orthagonale Koplement ist $U^{\perp} = \{v \in V : u \perp v \forall u \in U\}$
- $v_1, \cdots, v_n$ sind orthogonal, falls $v_i \perp v_j$ $\forall i \neq j$

- $v_1, \cdots, v_n$ sind orthonormal, falls $v_i \perp v_j \ \forall i \neq j$ und $\|v_i\| = 1 \ \forall i$
- V ist orthagonale direkte Summe von Untervektorräumen $V_1, \cdots, V_r$ falls

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$
$$V_i \perp V_j \ \forall i \neq j$$

$$C([-1,1],\mathbb{R}) := \{f : [-1;1] \to \mathbb{R}\text{stetig}\}$$

dann ist $C([-1,1]\mathbb{R})$ die orthogonale direkte Summe von $C([-1,1]\mathbb{R})_{\text{gerade}}$ und $C([-1,1]\mathbb{R})_{\text{ungerade}}$. gerade: $f(-x) = f(x)$ und ungerade: $f(-x) = -f(x)$

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{gerader Teil}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{ungerader Teil}}$$

g gerade, h ungerade $\implies$ gh ungerade $\implies$ $\langle g, h\rangle = \int_{-1}^{1} g(x)h(x) = 0$

Bemerkung 11. Ist $v_1, \cdots, v_n$ eine orthonormale Familie mit $v_i \neq 0 \forall i$, so gilt

1. $(i)(v_1, \cdots, v_n)$ ist linear unabhängig $(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = 0 \implies c_i < v_i, v-i > + \cdots + c_i < v_i, v_i > + \cdots + c_n < v_n, v_i >= 0 \implies c_i \|v_i\|^2 = 0 \implies c_i = 0)$
2. $\left(\frac{v_1}{\|v_i\|}, \cdots, \frac{v_n}{\|v_i\|}\right)$ ist orthonormal

Satz 2. *Ist $(v_1, \cdots, v_n)$ eine orthonormale Basis von V, so gilt folgendes für beliebiges $v \in V$*

$$v = \sum_{i=1}^{n} < v_i, v_j > v_i$$

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^{b} c_i v_i \\ < v, v_j > &= \sum_{i=1}^{n} c_i < v_i, v_j > \\ &= c_j < v_i, v_j > = c_j \end{aligned}$$

Proposition 4. *Sei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $(V, < .,. >)$ ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum über K*

1. *Ist $n := \dim_K V < \infty$ und $(v_1, \cdots, v_d)$ eine orthonormale Familie von Vektoren von V, so existieren $v_{d+1}, \cdots, v_n$, so dass $(v_1, \cdots, v_n)$ eine orthonormale Basis von V ist.*
2. *Ist $U \subset V$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum, so gilt $V = U \bigoplus U^\perp$, orthonormal direkte Summe.*

Beweis 7. *Es gibt triviale Fälle: $d = n$ in 1., $U = 0$ in 2. Auch: der Fall $(d = 0)$ in 1. $\Leftarrow$ $d = 1$: $0 \neq v \in V$ beliebiger Vektor, wir nehmen $b_1 = \frac{v}{\|v\|}$*
Beweis durch Induktion nach N mit Indunktionsannahme 1. gilt für $n \leq N$
$N = 1$ okay.

Plan: *Wir zeigen IA $\implies$ 2. für $\dim_K U \leq N$ und IA $\implies$ 1. für $n \leq N + 1$.*
IA $\xRightarrow{\dim U \leq N}$ $\exists$ orthonormale Basis $(u_1, \cdots, u_d)$ von U $d := \dim U$. Für beliebiges $v \in V$ gilt:

$$v - \sum_{i=1}^{n} < v_i, v_j > u_i \in U^\perp$$

$$\begin{array}{c|c} U: \text{1-dimensional} & U^{\perp}\text{: 2-dim} \\ s(e_1,e_1)=3 & =24 \end{array}$$

denn

$$\left\langle v - \sum_{i=1}^{n} < v_i, u_i > u_i, u_j \right\rangle = < v, u_j > - \sum_{i=1}^{n} < v, u_j >< u_i, u_j >= 0$$

Und: 1. für $\dim V \leq N+1$ *folgt aus IA und 2. für* $U \leq N$

$$1 \leq d < n = \dim V \geq N+1$$
$$\implies 1 \leq d \leq N und 1 \leq \dim V - d \geq N$$

Sei $U := span(v_1, \cdots, v_d)$ *Aus 2. haben wir* $V = U \bigoplus U^{\perp}$ *Nach IA,* $\exists$ *orthonormale Basis* $(v_{d+1}, \cdots, v_n)$ *von* $U^{\perp}$ *Es folgt, dass* $(v_1, \cdots, v_n)$ *ist eine orthonormale Basis von* V*.*

Eigenschaften 4. Praktisches Verfahren zu testen ob ein symmetrisch bilineare bzw. hermetische Form ein Skalaprodukt ist (falls $\dim_K V < \infty$). Verfahren:

- wählen $U \subset V$ nicht trivialer Untervektorraum (z.B. $U = span(v), 0 \neq v \in V$)
- Berechnen $U^{\perp}$
- Testen:
  - Ist $V = U \bigoplus U^{\perp}$?
  - Ist die Einschränkung von der Form auf U ein Skalarprodukt?
  - Ist die Einschränkung von der Form auf $U^{\perp}$ ein Skalarprodukt?

Beispiel 10. $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$M := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die entsprechende Bilinearform

$$(x, y) \mapsto t_x \cdot M \cdot y$$

$$\begin{aligned} U &= (e_1) \\ U^{\perp} &= \{(x_1, x_2, x_3 : 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\} \\ &= ((1, -3, 0), (0, 2, -1)) \end{aligned}$$

Die darstellende Matrix:

$$s|_{U^{\perp}} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 24 & -21 \\ -21 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} U &\cong \mathbb{R}^2 \\ W &= (e_1) \in \mathbb{R}^2 \\ W^{\perp} &= \{(x_1, x_2) | 24x_1 - 21x_2 = 0\} \\ &= (21, 24) \end{aligned}$$

W 1-dim, $W^{\perp}$ 1-dim

$$(s|_{U^{\perp}})(e_1, e_2) = 24$$
$$\begin{pmatrix} 21 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 & -21 \\ -21 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 18 \end{pmatrix} = -216$$

$\implies$ kein Skalarprodukt

1.6 Volumen

Definition 15. Volumen $\begin{matrix}\text{Skalarprodukt} \\ <.,.>\end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix}\text{Norm} \\ \|v\| := \sqrt{<v,v>}\end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix}\text{Metrik} \\ d(x,y) = \|y,x\|\end{matrix}$

$K = \mathbb{R} \rightsquigarrow$ Volumen ($\dim V < \infty$)

1.6.1 Spat

Definition 16. Spat $u_1, \cdots, u_n$ orthonormale Basis. Dann ist der von $(u_1, \cdots, u_n)$ aufgespannte Spat definiert als (wobei c_i := von $(u_1, \cdots, u_n)$ aufgespannten Spat)

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} c_i u_i | 0 \leq c_i \leq 1 \ \forall i\right\}$$

Vol(Spat):=1

Falls $v_1, \cdots, v_n \in V$ beliebig sind, dann hat der von $(v_1, \cdots, v_n)$ aufgespannte Spat

$$\text{Vol} = \left|\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right| \quad v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_i$$

Sei $b_i j := < v_i, v_j >$ und $B := \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ Wir haben $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk}$, also $B = A \cdot A^t$. Es folgt:

$$\text{Vol} = \sqrt{(\det A)^2} = \sqrt{\det B}$$

Vorteile:

- keine Wahl von orthonormaler Basis nötig
- auch sinnvoll für eine Kollektion $v_1, \cdots, v_m$ evzl. $m \neq n$

Beispiel 11. $m = 1$

$$\begin{aligned} \det B &= \|v_1\|^2 \\ \sqrt{\det B} &= \|v_1\| \end{aligned}$$

Definition 17. Grammsche Determinante Im m-dim Volumen := $\sqrt{G(v_1, \cdots, v_m)}$ wobei

$$G(v_1, \cdots, v_m) := \det\left(< v_i, v_j >\right)_{1 \leq i,j \leq m}$$

die sogenannte <u>Grammsche Determinante</u> ist.

Bemerkung 12. Es gilt $G(v_1, \cdots, v_m) = 0 \Leftrightarrow v_1, \cdots, v_m$ lineare abhängig, weil

$$A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{R})$$

mit

$$G(v_1, \cdots, v_m) = \det(A, A^t) = \sum (m \times m \text{Minor})$$

Bemerkung 13.

$$\text{Vol}(v_1, \cdots, v_m) := \sqrt{G(v_1, \cdots, v_m)}$$

ist 0 falls $\exists i : v_i = 0$

sonst:

$$\text{Vol}(v_1, \cdots, v_m) = \|v_1\| \cdots \|v_m\| \,\text{Vol}(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \cdots, \frac{v_m}{\|v_m\|}$$

Satz 3. *Hadamard'sche Ungleichung*

$$Vol(v_1, \cdots, v_m) \leq \|v_1\| \cdots \|v_m\|$$

für $0 \neq v_i \in V$, $i = 1, \cdots, m$. Mit Gleichheit genau dann wenn $v_1, \cdots, v_m$ orthogonal sind.

Beweis 8. *Durch fallende Induktion nach*

$$\max\{|I| : I \subset \{1, \cdots, m\} \,|(v_i)_{i \in I} \text{ orthogonal}\}$$

Fall $\max\{\cdots\} = m$ *das bedeutet, $v_1, \cdots, v_m$ sind orthogonal. Dann:*

$$G(v_1, \cdots, v_m) = \det \begin{pmatrix} \|v_1\|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \|v_m\|^2 \end{pmatrix} = \|v_1\|^2 \cdots \|v_m\|^2$$

Die ist der Induktionsanfang.
Sei $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq r < m$. Induktionsanahme: Ungleichung für den Fall

$$\max\{|I| : (v_i)_{i\in I} \text{ orthogonal}\} > r$$

Sei $v_1, \cdots, v_m$, so dass $\max\{\cdots\} = r$. o.B.d.A: $v_1, \cdots, v_r$ orthagonal. Wir schreiben:

$$v_m = \underbrace{v_m - \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle v_m, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle} v_i}_{\tilde{v}_m \in \operatorname{span}(v_1, \cdots, v_r)^\perp} + \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \frac{\langle v_m, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle} v_i}_{\tilde{\tilde{v}}_m \in \operatorname{span}(v_1, \cdots, v_r)}$$

$$< \tilde{v_m}, \tilde{\tilde{v_m}} = 0$$

- $v = \tilde{v} + \tilde{\tilde{v}}$
- $< \tilde{v}, \tilde{\tilde{v}} >= 0$
- $\|v\|^2 = \|\tilde{v}\|^2 + \left\|\tilde{\tilde{v}}\right\|^2$

Das ist eine Orthogonale Projektion Wir haben

$$G(v_1, \cdots, v_m) = G(v_1, \cdots, v_{m-1}, \tilde{v_m})$$

weil (Spalten- und Zeilenumforumgen. . .). Es folgt:

$$\begin{aligned} Vol(v_1, \cdots, v_m) = Vol(v_1, \cdots, v_{m-1}, \tilde{v_m}) &\leq \|v_1\| \cdots \|v_{m-1}\| \|\tilde{v_m}\| \\ &< \|v_1\| \cdots \|v_{m-1}\| \|\tilde{v_m}\| \end{aligned}$$

Definition 18. Gram-Schmidt-Orthagonalisierungsverfahren

$$\tilde{v_r} := v_r - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{< v_r, \tilde{v_i} >}{< \tilde{v_i}, \tilde{v_i} >} \tilde{v_i}, \text{für} 1, 2, \cdots$$

gegeben: eine Kollektion $(v_1, \cdots, v_n)$ oder abzählbar unendlich $(v_1, v_2, \cdots)$. Das Verfahren produziert $(\tilde{v_1}, \tilde{v_2}, \cdots)$, mit:

$$\begin{array}{lll} (\tilde{v_1}, \tilde{v_2}, \cdots & & = \quad (v_1, v_2, \cdots) \\ (\tilde{v_1}, \cdots, \tilde{v_m}) & & = (v_1, \cdots, v_m)\ \forall m \\ (\tilde{v_1}, \tilde{v_2}, \cdots) & \text{sind orthogonal} & \end{array}$$

Beispiel 12. $C([-1, 1], \mathbb{R})$ mit $< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x$

$$(1, x, x^2, \cdots)$$

$$\xrightarrow{\text{GS}} \frac{< x^2, 1 >}{< 1, 1 >} = \frac{2/3}{2}$$

$$(1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3}{5} \cdots)$$

Bis auf Normalisierung bekommen wir die Legendre-Polynome.

Fazit 4. $\begin{array}{c} \text{Bilinearform} \xrightarrow{\text{+ def, symm}} \\ \text{Sesquilinearform} \xrightarrow{\text{+ def, hermitesch}} \end{array} \text{Norm} \rightarrow \text{Metrik}$ Norm:

$$\begin{aligned} \|.\| : V &\to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \|x\| = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \\ \|\lambda x\| &= |\lambda| \|x\| \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

Metrik:

$$\begin{aligned} d : V \times V &\to \mathbb{R}_{\leq 0} \\ d(x, <) = 0 &\Leftrightarrow x = y \\ d(x, y) &= d(y, x) \\ d(x, z) &\leq d(y, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

Aber: nicht jede Metrik, nicht einmal jede transinvariante Metrik kommt von einer Norm.

Bemerkung 14. Eine Norm kommt von einer +def, symm Bilinearform

$$\Leftrightarrow \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \ \forall x, y \in V$$

Definition 19. ausgeartete Bilinearform Eine Bilinearform $s : V \times V \to K$ ist ausgeartet (oder: entartet), falls eine oder beide der induzierten Abbildungen $V \to V^*$ <u>nicht</u> injektiv ist.

$$\begin{aligned} v &\mapsto (w \mapsto s(v, w)) \\ v &\mapsto (w \mapsto s(w, v)) \end{aligned}$$

Bemerkung 15. Falls $\dim_K V < \infty$, dann:

$$\begin{aligned} &v \mapsto (w \mapsto s(v, w)) && \text{injektiv} \\ &\quad\Updownarrow \\ &v \mapsto (w \mapsto s(w, v)) && \text{injektiv} \\ &\quad\Updownarrow \\ &\quad s \text{ ist nicht ausgeartet} \\ &\quad\Updownarrow \\ &\quad \text{die darstennelde Matrix ist invertierbar} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(v, w) &= v^t \cdot A \cdot w \\ &= \left(A^t \cdot v\right)^t \end{aligned}$$

¡++¿

Satz 4. *Sei V ein K-Vektorraum, $s : V \times V \to K$ eine symmetrische oder schiefsymmetrische Bilinearform. Für $U \subset V$ Untervektorraum, schreiben wir noch*

$$U^\perp := \{v \in V : s(u, v) = 0 \ \forall u \in U\}$$

($s(v, u) = 0 \Leftrightarrow s(u, v) = 0$ weil s symm. bzw. schiefsymm.)

Proposition 5. *Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $s : V \times V \to K$ eine nicht ausgeartete symmetrische oder schiefsymmetrische Bilinearform. Sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Dann gilt:*

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V$$

Beweis 9. *Sei $(v_i)_{i=1,\cdots n}$ eine Basis mit $n := \dim V$, und A die darstellende Matrix von s bzw. (v_i). Wir haben dann:*

$$s(x, y) = x^t \cdot A \cdot y$$

und $A^t = \pm A$, $\det A \neq 0$

$$U^\perp = \left\{x \in V_i | x^t \cdot A \cdot y = 0 \ \forall y \in U\right\} \quad = \left\{x \in V_i | (x \cdot A)^t \cdot y = 0 \ \forall y \in U\right\}$$

Sei $F: V \to V$ lin.Abb. $\leftrightarrow A$. Dann:

$$F(U^\perp) = \{Ax | (Ax)^t y = 0 \ \forall y \in U\} \qquad = \{Ax | \tilde{x}^t y = 0 \ \forall y \in U\}$$

Es folgt: mit

$$B := \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_d \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$(u_1, \cdots, u_d)$ *Basis von U, dann ist* $F(U^\perp) = \operatorname{Ker} B$. *Jetzt:*

$$\dim U^\perp = \dim F(U^\perp) = \dim \operatorname{Ker} B = n - \dim U$$

Korollar 4. $\dim U < \infty$, *$s: V \times V \to K$ nicht ausgeartet, (schief-) symm.*

$$U \subset \Longrightarrow \left(U^\perp\right)^\perp = U$$

Bemerkung 16. Es ist <u>nicht</u> immer der Fall, dass $V = U \bigoplus U'$, weil es ist möglich, dass $U \cup U^\perp \neq 0$. 2 Extremfälle:

- U ist isotropisch ($s|_{U'}$ ist trivial) $\Leftrightarrow U \subset \underbrace{U^\perp}_{\dim V - \dim U}$
- $s|_U$ ist auch nicht ausgeartet $\Leftrightarrow U \cup U^\perp = 0 \Leftrightarrow V = U \bigoplus U^\perp$

Aus 1. ist klar:

$$\dim U \leq \frac{1}{2} \dim V \ \forall \text{isotrop} U \subset V$$

1.7 Orthogonale und unitäre Endomorphismen

$K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

Definition 20. orthogonaler bzw. unitärer Endomorphismus Sei $V, \langle , \rangle$ ein ortho. bzw. unitärer Vektorraum. Ein Endomprhismus $F: V \to V$ heisst <u>orthogonal</u> bzw. <u>unitär</u> falls

$$\langle F(v), F(w) \rangle = \langle v, w \rangle \ \ \forall v, w \in V$$

Bemerkung 17. Das ist äquivalent zu

$$\|F(v)\| = \|v\| \ \ \forall v \in V$$

Eigenschaften 5. orthogonaler bzw. unitärer Endomorphismus Sei F ein ortho. bzw. unitärer Endomorphismus. Dann:

- F ist injektiv
- Falls $\dim_K V < \infty$, F ist bijektiv, und F' ist auch ortho. bzw. unitär
- Für jeden Eigenwert $\lambda \in K$ gilt $|\lambda| = 1$. Eigenvektor v:

$$\|v\| = \|F(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$$

Falls $V = \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ mit Standardskalarprodukt

$$\langle v, w \rangle = v^t w \text{bzw} \qquad \langle v, w \rangle_c = v^t \bar{w}$$

Ist F zur Matrix A entsprechend, dann

$$\begin{aligned} \langle F(v), F(w) \rangle = \langle v, w \rangle \ \Leftrightarrow & \qquad (Av)^t A w = v^t w \\ & \qquad \text{bzw.} (Av)^t \overline{Aw} = v^t w \\ \Leftrightarrow \ v^t A^t A w = v^t w \Leftrightarrow & \qquad A^t A = E_n \\ \text{bzw} \Leftrightarrow \ v^t A^t \bar{A} \bar{w} = v^t \bar{w} \Leftrightarrow & \qquad A^t \bar{A} = E_n \end{aligned}$$

Definition 21. ortho. bzw. unitäre Matrix $O(n) := A \in GL_n(\mathbb{R})$ heisst orthogonal falls $A^t A = E_n$
$U(n) := A \in GL_n(\mathbb{C})$ heisst unitär falls $A^t \bar{A} = E_n$

Not 1.

$$O_n := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | A \text{ orthogonal}\}$$
$$O_n := \{A \in GL_n(\mathbb{C}) | A \text{ unitär}\}$$

Weil

$$A, B \in O(n) \implies (AB)^t(AB) = B^t A^t AB = B^t B = E_n \implies AB \in O(n)$$

haben wir $O(n) \subset GL_n(\mathbb{R})$ ist eine Untergruppe. Ähnlich: $U(n) \subset GL_n(\mathbb{C})$ ist eine Untergruppe.

Not 2.

$$SO(n) = O(n) \cap SL_n(\mathbb{R})$$
$$SU(n) = U(n) \cap SL_n(\mathbb{C})$$

Not 3. ortho. bzw. unitärer Vektorraum

$$O(V) = \{F \in GL(V) | \text{ortho.}\}$$
$$U(V) = \{F \in GL(V) | \text{unitär}\}$$

Bemerkung 18.

$$A \in O(n) \implies \det A \in \{\pm 1\}$$
$$A \in U(n) \implies \det A \in \{\pm z \in \mathbb{C} : |Z| = 1\}$$

Eigenschaften 6. Charakterisierungen von ortho. bzw. unitären Matrizen Äquivalente Charakterisierungen von orthogonalen bzw. unitären Matrizen $A \in GL_n(\mathbb{R})$:
A ist orthogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t \Leftrightarrow A^t A = E_n \Leftrightarrow AA^t = E_n \Leftrightarrow$ die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$.
Ähnlich:
A ist unitär $\Leftrightarrow A^{-1} = \bar{A}^t \Leftrightarrow A^t \bar{A} = E_n \Leftrightarrow \bar{A} A^t = E_n \Leftrightarrow$ die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n \Leftrightarrow$ die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$.
Für $n = 1$

$$O(1) = \{\pm 1\} \qquad U(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \cong S^1$$
$$SO(1) = \{1\} \qquad SU(1) = \{1\}$$

Für $n = 2$: $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a^2 + b^2 = 1$

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} | \theta \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} | \theta \in \mathbb{R} \right\}$$
$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} | \theta \in \mathbb{R} \right\} \cong S^1$$

$(z, w) \in \mathbb{C}^2$, $|z|^2 + |w|^2 = 1$, $(-\bar{w}, \bar{z}) \perp (z, w)$

$$U(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z & -\lambda\bar{w} \\ w & \lambda\bar{z} \end{pmatrix} | (z, w) \in \mathbb{C}^2, |z|^2 + |w|^2 = 1, \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1 \right\} \cong S^3 \times S^1$$

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} | (z, w) \in \mathbb{C}^2, |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\} \cong S^3$$

$SO(3)$ eine explizite Beschreibung ist möglich (später)

Proposition 6. *Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle , \rangle$, und sei $F : V \to V$ ein unitärer Endomorphismus. Dann besitzt V eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren von F.*

Beweis 10. *Durch Indunktion nach* $\dim V$. $\dim V = 0, 1$ *trivial.* $\dim V \geq 2$ *Weil $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, gibt es einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Sei $v \in V$ ein Eigenvektor, mit $\|v\| = 1$. Weil F untär ist, haben wir $F(v^\perp) = v^\perp$. Wir haben* $\dim v^\perp = \dim V - 1$

$$\begin{aligned} w \in v^\perp \, \langle v, w\rangle &\implies \langle v, w\rangle = 0 \\ \lambda \langle v, F(w)\rangle = \langle \lambda v, F(w)\rangle = \langle F(v), F(w)\rangle &= 0 \\ &\implies F(v^\perp) \subset v^\perp \end{aligned}$$

Aus der Induktionsannahme folgt, dass $\exists$ Orthonormalbasis von $v^\perp$ von Eigenvektoren von F. Zusammen mit $v \overset{V=\mathrm{span} \bigoplus v^\perp}{\rightsquigarrow}$ Orthonormalbasis von V

Korollar 5. *Sei $A \in U(n)$. Dann $\exists S \in U(n)$, $\theta_1, \cdots, \theta_n \in \mathbb{R}$ so dass*

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

Proposition 7. *Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle , \rangle$, und sei $F : V \to V$ ein orthogonaler Endomorphismus. Dann besitzt V eine Orthonormalbasis $\left(v_1^+, \cdots, v_r^+, v_1^-, \cdots, v_s^-, w_1, w_1', \cdots, w_t, w_t'\right)$*

- $F(v_i^+) = v_i^+$
- $F(v_i^-) = -v_i^-$
- $F(w_i) = (\cos\theta_i)w_i + (\sin\theta_i)w_i'$
- $F(w_i') = (-\sin\theta w_i) + (\cos\theta_i)w_i'$

mit $\theta_i \in \mathbb{R}$, $0 < |\theta| < \phi$, $i = 1, \cdots, t$

Beweis 11. *Durch Induktion nach* $\dim V$*:* $\dim V = 0, 1, 2$ *trivial.* $\dim > 2$ *(nächstes mal)*

Fazit 5.

$$\begin{array}{ll} \dim_{\mathbb{R}} V & \langle ., .\rangle \text{ Skalarprodukt} \\ F : V \to V \text{ orthogonaler Endomorphismus} & \\ \implies \exists \text{ orthogonale Basis} & \text{+1 oder -1 Eigenvektoren} \end{array}$$

$$F(\alpha w_i + \beta w_i') = (\alpha \cos\Theta_i - \beta \sin\Theta_i)\, w_i + (\alpha \sin\Theta_i \beta \cos\Theta_i)\, w_i', \;\; \Theta_i \in \mathbb{R}$$

Beweis 12. *Fortsetzung Durch Induktion nach* $\dim V$*, Induktionsanfang:* $\dim V \leq 2$ $\dim V = 2$ *bezüglich beliebiger Basis (w_1, w_1').*

$$V : \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \textit{oder} \begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ -\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}$$

Matrix 1: w_1, w_2 ist wie oben, Matrix 2: chaakteristisches Polynom $t^2 - 1 = (t-1)(t+1) \to$ (+1-Eigenvektor, -1-Eigenvektor)

1. *Fall: $\exists$ reeller Eigenwert*

   $$\lambda \in \mathbb{R}, \;\; |\lambda| = 1 \;\; v \in V \;\; F(v) = \lambda v$$

   wir zeigen, dass $F(v^\perp) = v^\perp$ genau wie im Fall einees unitären Endomorphismus

   $$\dim(v^\perp) = \dim V - 1 \overset{IA}{\rightsquigarrow} v^\perp : \textit{orthonormale Basis}$$
   $$V = (v) \bigoplus v^\perp$$

2. Fall: $\nexists$ reeller Eigenwert

$$\implies P_F(t) = \prod_{i=1}^{(\dim V)/2} Q_i(t)$$

$Q_i(t)$ irreduzibles quadratisches Polynom. Aus dem Satz von Cayley-Hamilton folgt:

$$\implies \exists \overbrace{v}^{\neq 0} \in V,\ imit Q_i(F)v = 0$$

Sei $0 \neq v_0 \in V$ beliebigen Vektor $P_F(F)v_0 = 0$

$$\begin{aligned} Q_1(F)Q_2(F)\cdots +_{\frac{\dim V}{2}} (F)v_0 = 0 \\ \implies \exists j : Q_j(F)Q_{j+1}(F)\cdots +_{\frac{\dim V}{2}} (F)v_0 = 0 \\ aber\ Q_{j+1}(F)\cdots Q_{\dim V}2(F)v_0 \neq 0 \end{aligned}$$

$\implies$ wir nehmen $i := j$ und $v := Q_{j+1}(F)\cdots Q_{\frac{\dim V}{2}(F)v_0}$.
Beh: $U := \operatorname{span}(v, F(v))$ ist ein F-invariante Vektorraum. $Q_i(F)_v = 0 \implies \exists a, b \in \mathbb{R}$ mit $F(F(v)) = av + bF(V)$. Es folgt: $U^\perp$ ist auch F-invariant. $V = U \bigoplus U^\perp \overset{IA}{\rightsquigarrow}$ Basen von U und von $U^\perp$ wie oben. Die Vereinigung dieser Basen ist wie erwünscht.

Korollar 6. *Sei $A \in O(n)$. Dann gibt es ein $S \in O(n)$ und $r, s, t \in \mathbb{N}$, $\Theta_1, \cdots, \Theta_t \in \mathbb{R}$ mit*

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} E_r & & & & 0 \\ & -E_s & & & \\ & & D_{\Theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & D_{\Theta_t} \end{pmatrix}$$

wobei

$$D_\Theta := \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}$$

Beispiel 13.

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix} \in U(n)$$

$$\begin{aligned} A(z_1, \cdots, z_n) = (z_2, \cdots, z_n, z_1) \\ A(1, S, S^2, \cdots, S^{n-1}) = (S, S^2, \cdots, S^{n-1}, 1) \\ S := e^{2\pi i/n}\ S^n = 1 \end{aligned}$$

$\implies (1, S, S^2, \cdots, S^{n-1})$ ist Eigenvektor zum Eigenwert S. Ähnlich: für $0 \leq j \leq n-1$ haben wir $(1, S^j, S^{2j}, \cdots, S^{(n-1)j})$ ist Eigenvektor zum Eigenwert S^j. $1, S, S^2, \cdots, S^{n-1}$ sind paarweise verschieden $\implies (1, S^j, S^{2j}, \cdots, S^{(n-1)j})$ ist eine Basis von Eigenvektoren. Normalisierung:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1, S^j, S^{2j}, \cdots, S^{(n-1)j}\right)\right)_{j=0,1,\cdots,n-1}$$

ist eine orthonormale Basis von Eigenvektoren

Fazit 6. $(K = \mathbb{C})$ unitärer Endomorpismus von V
$(K = \mathbb{R})$ orthogonaler Endormophismus von V
$\implies V = \bigoplus_{\text{Eigenwerte}\lambda} \operatorname{Eig}(F; \lambda)$ orthogonale direkte Summe

Beispiel 14.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{4}{5} & \frac{36}{65} \\ \frac{4}{13} & -\frac{3}{5} & \frac{48}{65} \\ \frac{12}{13} & 0 & -\frac{5}{13} \end{pmatrix} \in O(3)$$

$\det A = 1$ 2 komplex konjugierte + 1 reller oder 3 reelle Eigenwerte $\implies$ +1 ist ein Eigenwert. ... $\rightsquigarrow$ Eigenvektor $(6,3,4)$ zum Eigenwert 1. $\to$ v mit $\|v\| = 1$ $v = \frac{1}{\sqrt{61}}(6,3,4)$ — $v^\perp = \operatorname{span}((1,-2,0),(2,0,-3)) \xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}}$

$$(1,-2,0), (\frac{8}{5}, \frac{4}{5}, -3)$$

Normalisieren:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0), \sqrt{1}\sqrt{305}(8,4,-15)$$

Und wir berechnen

$$S := \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{61}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{8}{\sqrt{305}} \\ \frac{3}{\sqrt{61}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{305}} \\ \frac{4}{\sqrt{61}} & 0 & -\frac{15}{\sqrt{305}} \end{pmatrix}$$

bekommen wir

$$\underbrace{S^{-1}}_{=S^t} AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{57}{65} & \frac{4\sqrt{61}}{65} \\ 0 & -\frac{4\sqrt{61}}{65} & -\frac{57}{65} \end{pmatrix}$$

1.8 Beschreibung von $SO(3)$ und $O(3)$

Eigenschaften 7. Sei $A \in SO(3)$. Dann: entweder es gibt 1 reelle und 2 komplex konjugierte Eigenwerte oder 3 reelle Eigenwerte. $\lambda \in \mathbb{C} \implies \lambda \cdot \bar{\lambda} = 1$. Eigenwerte $+1(\times 3) \Leftrightarrow A = E_3$ oder $-1(\times 2)$ / $+1$. Wenn $\not\Leftrightarrow A = E^3$, dann ist $\dim \operatorname{Eig}(A,1) = 1$.

$$A : \operatorname{Eig}(A,1)^\perp \to \operatorname{Eig}(A,1)^\perp$$

ist eine Drehung durch einen Winkel $\Theta \in (0, 2\phi)$. Bezüglich Basis (v_1, v_2, v_3), $v_1 \in \operatorname{Eig}(A,1)$, $\|v_1\| = 1$ sieht A aus wie

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & -\sin\Theta \\ 0 & \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}$$

Eigenschaften 8. Sei $A \in O(3)$ Falls $\det A = 1$, haben wir $A \in SO(3)$
Falls $\det A = -1$, haben wir $-A \in SO(3)$
Dann bekommen wir die folgende Beschreibung von $A \in O(3)$ mit $\det A = -1$:

- $A = -E_3$
- oder $\dim \operatorname{Eig}(A,-1) = 1$
  $v_1 \in \operatorname{Eig}(A,-1)$, $\|v_1\| = 1$
  $A : \operatorname{Eig}(A,-1)^\perp \to \operatorname{Eig}(A,-1)^\perp$ ist eine Drehung um den Winkel $\Theta - \pi \in (-\pi, \pi)$ (Spiegelung oder Spiegelung mit Drehung)

1.9 Selbstadjugierte Endomorphismen

V,$\langle , \rangle$, K-Vektorraum mit Skalaprodukt. (K=$\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Ist $F : V \to V$ ein Endomorphismus, so heisst $F^* : V \to V$ adjugierter Endomorpismus falls

$$\langle F(v), w\rangle = \langle v, F^*(w)\rangle \ \forall v, w \in V$$

Definition 22. $F : V \to V$ ist adjugiert falls

$$\langle F(v), w\rangle = \langle v, F(w)\rangle \ \forall v, w \in V$$

Eigenschaften 9. Falls $V = \mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt, so zu F ist eine assoziierte Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$, dann ist A^t zu F^* assoziiert. Falls $V = \mathbb{C}^n$, dann ist

$$F \leftrightarrow A \in M(n \times n, \mathbb{C})$$
$$F^* \leftrightarrow \bar{A}^t \in M(n \times n, \mathbb{C})$$

Beweis 13.

$$\langle Av, w\rangle = (Av)^t\bar{w} = v^tA^t\bar{w} = v^t\bar{A}^tw = \left\langle v, \bar{w}^tw\right\rangle$$

Bemerkung 19. F^* ist eindeutig falls für $\tilde{F}^*$ gilt

$$\langle F(v), w\rangle = \left\langle v, \tilde{F}^*(w)\right\rangle$$

dann ist

$$0 = \left\langle v, \tilde{F}^*(w) - F^*(w)\right\rangle$$

$\implies$

$$\begin{aligned} 0 = \left\langle \tilde{F}^*(w) - F^*(w), \tilde{F}^*(w) - F^*(w)\right\rangle \\ = \left\|\tilde{F}^*(w) - F^*(w)\right\|^2 \\ \implies \tilde{F}^*(w) = F^*(w) \end{aligned}$$

Fazit 7. Im Fall $V = \mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ mit Standardskalarprodukt ist ein selbstadjungierter Endomorphismus durch eine symmetrische bzw. hermitesche Matrix gegeben.

Lemma 1. *Jeder Eigenwert eines selbstadjugierten Endomorphismus ist reell.*

Beweis 14. *Ist $F(v) = \lambda v$ mit $v \neq 0$, so gilt*

$$\lambda \langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle F(v), v\rangle = \langle v, F(v)\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \bar{\lambda} \langle v, v\rangle \implies \lambda = \bar{\lambda}$$

Bemerkung 20. Prä-Hilbertraum bezeichnet einen K-Vektorraum (K=$\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) mit Skalarprodukt. Euklidische bzw. unitäre Vektorräume sind endlichdimensional,

Proposition 8. *Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und $F : V \to V$ ein selbstadjugierter Endomorphismus. Dann gibt es eine orthonormale Basis von Eigenvektoren.*

Beweis 15. *Falls V ein unitärer Vektorraum ist: durch Induktion nach* $\dim V$*, $\exists$ Eigenwert λ, Eigenvektor v, oBdA haben wir $\|v\| = 1$. Wir behaupten:*

$$F(v^\perp) \in V^\perp$$

$$\langle v, w\rangle = 0 \implies \langle v, F(w)\rangle = \langle F(v), w\rangle = \langle \lambda v, w\rangle = \lambda \langle v, w\rangle = 0$$

IA $\implies$ $\exists$ orthonormale Basis von $v^\perp$. Dies, zusammen mit v, gibt eine Basis von V. Fall eines euklidischen Vektorraums: Das gleiche Argumente ist gültig, sobald wir wissen, dass F einen Eigenwert besitzt. Man wählt eine Basis von V, so:

$$F \leftrightarrow A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \quad [n = \dim V]$$

mit $A = A^t$. Wir betrachten A als komplexe Matrix, so dass

$$A = \bar{A} \implies \bar{A}^t = A^t = A \implies A \textit{ ist hermetisch}$$

Sei λ ein (komplexer) Eigenwert von A. Weil A hermetisch ist, haben wir $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir haben

$$\det(A - \lambda E_n) = 0$$

Dann:

$$\det(F - \lambda id_V) = 0$$

also λ ist Eigenwert von F.

Korollar 7. *Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Dann $\exists\ S \in O(n)$ mit*

$$S^t AS = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n),\ \ \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ hermetisch. Dann $\exists\ S \in U(n)$ mit

$$\bar{S}^t AS = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n),\ \ \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

Korollar 8. *Sei $F : V \to V$ wie in der Proposition oben. Dann ist V die orthogonale direkte Summe von diesen Eigenräumen:*

$$V = \bigoplus_{Eigenwerte \lambda} \operatorname{Eig}(F; \lambda)$$

Fazit 8. $\rightsquigarrow$ Praktisches Verfahren: A symmetrisch bzw. hermetische Matrix
$\hookrightarrow$ berechnen $\operatorname{Eig}(A; \lambda)$
$\hookrightarrow$ wählen von jedem eine orthonormale Basis

Beispiel 15.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3+3i \\ 3 & 5 & -3-3i \\ 3-3i & -3+3i & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = \det(tE_3 - A) = (t-5)^2(t-2) + \cdots = t^3 - 12t^2 + 256 = (t+4)(t-8)^2$$

$$\operatorname{Eig}(A; -4) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3+3i \\ 3 & 9 & -3-3i \\ 3-3i & -3+3i & 6 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1+i \end{pmatrix} \right\}$$

$$\operatorname{Eig}(A; \delta) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3+3i \\ 3 & -3 & -3+3i \\ 3-3i & -3+3i & -6 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1-i \end{pmatrix} \right\} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix}$$

Wir bekommen:

$$S := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{-1+i}{2} & 0 & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix}$$

dann:

$$\bar{S}^t AS = \operatorname{diag}(-4, 8, 8)$$

Bemerkung 21. Das Resultat von der Proposition oben im Fall eines euklidischen Vektorraums ist klar, auch aus geometrischem Grund.

$$\text{symm. Matrizen} \setminus \mathbb{R} \ \rightsquigarrow\ \text{quadratische Formen}$$

(Prop aktuelle-7) $S^t AS$ aus der Transformationsformel.
... und man kann auch einen alternativen Beweis in diesem Fall geben.

$$A \in M(n \times n, \mathbb{R}), A^t = A \ \rightsquigarrow\ q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, q(v) := v^t Av$$

(Faktum aus der Analysis)

$$\exists x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1 \text{ mit} q(x) \geq g(x')\ \forall x' \in \mathbb{R}n^n, \|x'\| = 1$$

Dann für $v \in \mathbb{R}^n, v \perp x$ haben wir $Av \perp x$. In der Tat haben wir

$$(Av - q(x)v) \perp x\ \forall v \in \mathbb{R}^n$$

denn

$$\langle Av - q(x)v, v\rangle + 2\lambda \langle Av - q(x)v, x\rangle = (v + \lambda x)^t (A - q(x)E_n)(v + \lambda x) \leq 0\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

(Details im Buch, 5.6.4)

Bemerkung 22. F selbstadjugiert, $\dim V < \infty \implies \exists$ orthonromale Basis von Eigenvektoren $\implies$

$$V = \bigoplus_{\lambda} \operatorname{Eig}(F;\lambda)$$

orthogonale direkte Summe $\rightsquigarrow$ orthogonalte Projektion

$$P_\lambda V \to \operatorname{Eig}(F,\lambda)$$

Dann können wir schreiben

$$F = \sum_{\text{Eigenwerte}\lambda} \lambda P_\lambda$$

$$= \{\text{Eigenwerte von } F\} = \text{"Spektrum"}$$

Geschrieben mit Matrizen:

$$A \in (n \times n, \mathbb{R}) \text{ symmetrisch } \implies \exists S \in O(n)$$

so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.
Interpretation: der zu A assoziierte Endomorphismus ist Diagonalisierbar.
S^tAS ist eine Diagonalmatrix
Interpretation: $A \;\leftrightarrow\; s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Bilinearform.

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \;\leftrightarrow\; (x,y) \mapsto x^t \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) y$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i$$

Fragen

- Zu einer symmetrischen Bilinearform gibt es eine bestimmte Normalform?
- Wie kann man das praktisch berechnen?

Proposition 9. *Hauptachsentransofrmation symmetrischer Matrizen Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch und $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die entsprechende symmetrische Bilinearform. Dann:*

1. *Ist $B = (w_1, \cdots, w_n)$ eine orthonormale Basis von Eigenvektoren von A, so ist $M_B(s) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda)$ wobei $\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ die Eigenwerte von A sind.*

2. *Es gibt eine Basis B' mit*

$$M_{B'}(s) = \begin{pmatrix} E_k & & \\ & -E_l & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Blockdiagonalmatrix, wobei

$$k = \#\{i | \lambda_i > 0\}$$
$$l = \#\{i | \lambda_i < 0\}$$

Beweis 16. 1. *$\Leftrightarrow \exists S \in O(n)$ mit $S^tAS = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$*

2. *$\Leftrightarrow \exists T \in GL_n(\mathbb{R})$ mit $T^tAT = \begin{pmatrix} E_k & & \\ & -E_l & \\ & & 0 \end{pmatrix}$*

oBdA habe wir

$$\lambda_1, \cdots, \lambda_k > 0$$
$$\lambda_{k+1}, \cdots, \lambda_{k+l} < 0$$
$$\lambda_{k+l+1} = \cdots = \lambda_n = 0$$

Wir nehmen $B' = (w'_1, \cdots, w'_n)$ mit

$$w'_i = \begin{cases} \frac{w_i}{\sqrt{|\lambda_i|}} & i \leq k + l \\ w_i, i > l + l \end{cases}$$

$$(w'_i)^t A w'_i = \frac{1}{|\lambda_i|} w_i^t A w_i = \frac{1}{|\lambda_i|} \lambda_i \textit{ für } i \leq k + l$$

Bemerkung 23.

$$T^t A T = \underbrace{\begin{pmatrix} E_k & & \\ & -E_n & \\ & & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Sylvester-Form}}$$

... Erklärung zum Namen “Hauptachsentransformation”...

Korollar 9. *Sei $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform mit entsprechender Matrix A. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *s ist positiv definit*
2. *Alle Eigenwerte von A sind positiv*
3. *Die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms haben alternierende Vorzeichen*

Vorzeichenregel von Descartes

Beispiel 16.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = \det(tE_3 - A) = t^3 - ut^2 + 15t \underbrace{+} 3$$

$$P_A(-1) = -21 \; P_a(0) = 3 \implies \exists \lambda : -1 < \lambda < 0$$

Beweis 17. *s ist äquivalent zu*

$$(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i y_i$$

$\implies$ *s positiv definit $\Leftrightarrow \lambda_i > 0 \; \forall i$*

Bemerkung 24. Weitere Begriffe $s : V \times V \to \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform

positiv definit	positiv semidefinit
negativ definit	negativ semidefinit
indefinit:	$\exists x \in V : s(x, x) > 0$ und $y \in V : s(y, y) < 0$

Tabelle 1: Weitere Begriffe

Bemerkung 25. Ausartungsraum Ausartungsraum von einer Bilinearform $s : V \times V \to K$ auf einem Vektorraum über einem beliebigen Körper K ist:

$$U := \{v \in V | s(v, w) = 0 \; \forall w \in V\}$$

und ist ein Untervektorraum. Falls s symmetrisch oder schiefsymmetrisch ist, bekommen wir eine induzierte Bilinearform $\bar{s} : V/U \times V/U \to K$, gegeben durch

$$v + U, w + U) \mapsto s(v, w)$$

und $\bar{s}$ ist nicht ausgeartet.

$$v' = v + u,\ u \in U$$
$$w' = w + \tilde{u},\ \tilde{u} \in U$$

$$s(v', v') = s(v, w) + s(u, w) + s(v, \tilde{u}) + s(u, \tilde{u}) =$$
$$= s(v, w) + s\underbrace{(u, w)}_{=0} \pm \underbrace{s(\tilde{u}, v)}_{=0} + s\underbrace{(u, \tilde{u})}_{=0}$$

$$s(v, w) = 0 \implies v \in U \implies v + U$$

ist Nullvektor von V/U

Korollar 10. *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. dann gibt es eine orthogonale Zerlegung*

$$\mathbb{R}^n = W_+ \oplus W_i \oplus W_0$$

mit

$$s|_{W_+} > 0,\ s|_{W_-} < 0$$

und $W_0 =$ Ausartungsraum von s

Proposition 10. *Trägheitsgesetz/Signatur von Sylvester Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $s : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Sei*

$$V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0$$

eine Zerlegung als orthogonale direkte Summe, mit $s|_{V_+} > 0$, $s|_{V_-} < 0$ und V_0=Ausartungsraum von s. Dann sind

$$r_+ := \dim(V_+),\ r_- = \dim(V_-) \text{ und } r_0 := \dim(V_0)$$

Invarianten von s, charakterisiert durch

$$r_+ = \max\{\dim W | W \subset V \text{ Untervektorraum},\ s|_W > 0\}$$

$$r_- = \max\{\dim W | W \subset V \text{ Untervektorraum},\ s|_W < 0\}$$

Die Invarianten (r_+, r_-, r_0) heisst Trägheitsindex oder Signatur von s

Bemerkung 26. Ist A eine $n \times n$ symmetrische reelle Matrix, heisst Signatur die Signatur von der zu A entsprechender Biliniearform.

Bemerkung 27. Auch $r_+ - r_-$ heisst Signatur.

Dimension	$\dim V = r_+ + r_- + r_0$	
Rang	$r_+ + r_-$	$\leftrightarrow (r_+, r_-, r_0)$
Signatur in diesen Sinn	$r_+ - r_-$	

Beweis 18. *Reduktionsschritt: Es genüngt, das Resultat zu beweisen, im Fall dass s nicht ausgeartete ist.*

$$V \to \bar{V} = V/V_0$$

$$V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0$$
$$\bar{V} = \bar{V}_+ \oplus \bar{V}_-$$

wobei $\bar{V}_\pm$ = Bild von $V_\pm$. Bew. $\bar{V} = \bar{V}_+ + \bar{V}_-$ direkte Summe

$$\Leftrightarrow\ \bar{V}_+ \cap \bar{V}_- = 0$$

$$\bar{v} \leftrightarrow v \in V_+ \oplus V_0$$

und

$$v \in V_- \oplus V_0$$

$\Leftrightarrow v \in V_0$ *Behauptung:* $\bar{s}$ *induzierte Bilinearform auf* $\bar{V}$

$$\max\{\dim W | s|_W > 0\} = \max\{\dim U | U \subset \bar{V}, \bar{s}|_U > 0\}$$

und

$$\max\{\dim W | s|_W < 0\} = \max\{\dim U | U \subset \bar{V}, \bar{s}|_U < 0\}$$

Ist $W \subset V, s|_W > 0$, *und* $\bar{W} :=$ *Bild von* W, *so haben wir*

$$\dim \bar{W} = \dim W$$

und

$$\bar{s}|\bar{W} > 0$$

Dimensionsformel:

$$\dim \bar{W} = \dim W - \dim(\underbrace{W \cap V_0}_{=0}) = \dim W$$

und

$$\bar{s}(\bar{v}, \bar{v}) = s(v, v)$$

wobei $v \in W \mapsto v \in \bar{W}$ *Umgekehrt ist*

$$U \subset \bar{V},\ \bar{s}|_U > 0,\ \dim U = d$$

wählen Basis $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_d)$ *von* $\bar{U}$, *mit* $v_i \mapsto \bar{v}_i\ \forall i$ *dann haben wir* $W := \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_d)$ *hat die Eigenschaft*

$$\dim W = d\ s|_W > 0,\ \operatorname{Im}(W) = U$$

Beweis im Fall s *nicht ausgeartet:*
Behauptung: Ist

$$W_+ \subset V, s|_{W_+} > 0,\ W_- \subset V, s|_{W_-} < 0$$

so haben wir

$$W_+ \cap W_- = 0$$

Es folgt:

$$\dim W_- + \dim W_+ \leq \dim V$$

mit Gleicheit $\Leftrightarrow V = W_+ \oplus W_-$
Deshalb

$$r_+ + r_- \leq \dim V$$

Und wir haben $=$ *aus dem Korollar*
(alternativer Beweis ohne Quotientenvektorräume sehe Buch)

Bemerkung 28. Praktische Fragen:

- Wie berechnet man die Signatur einer symmetrischen Bilinearform?
- Wie findet man eine Basis, so dass die darstellden Matrix in Sylversterform ist?

In Matrixen: $A \in (n \times n, \mathbb{R})$ symm.

- Signatur?
- Finden $T \in GL_n(\mathbb{R})$ mit T^tAT in Sylvesterform

Antwort:
Aus der Hauptachsentrasformation:

$$\exists\ S \in O(n),\ S^t AS = S^{-1}AS = \operatorname{diag}(\lambda, \dots, \lambda_n)$$

$\implies$ Signatur

$$r_+ = \#\{i|\lambda_i > 0\}$$
$$r_- = \#\{i|\lambda_i < 0\}$$
$$r_0 = \dim \operatorname{Ker}(A)$$
$$S \overset{\text{Normieren der Spaltenvektoren}}{\rightsquigarrow} S'$$

mit $S'^t AS$ in Sylvesterform.
Alternatives, oft leicheres Verfahren:

- $\operatorname{Ker}(A)$ = Ausartungsraum berechnen
- Vektoren Wählen, wobei $q(v) = s(v, v)$ verschieden von Null ist. $\rightsquigarrow q(v) \in \{\pm 1\} \rightsquigarrow v^\perp$

Beispiel 17. Silvesterform

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$P_A(t) = t^3 - 8t^2 + 3t = t\left(t - (4 + \sqrt{13})\right)\left(t - (4 - \sqrt{13}\right)$$

Signaturen $(2, 0, 1)$ Mit Halbachsentransformation

Eigenwert 0	$\rightsquigarrow$	Eigenvektor $(1, -1, 1)$
Eigenwert $4 + \sqrt{13}$	$\rightsquigarrow$	Eigenvektor $(1, 4 - \sqrt{13}, -3 + \sqrt{13})$
Eigenwert $4 - \sqrt{13}$	$\rightsquigarrow$	Eigenvektor $(1, 4 + \sqrt{13}, -3 - \sqrt{13})$

Normieren...
S' ausrechnen... (ne danke)
haben wir

$$S'^t = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 18. Alternativ

$$e_2 :\ q(e_2) = e_2^t A e_2 = 1$$
$$e_2^\perp = \{(x, y, z)|2x + y + z = 0\}$$
$$(-1, 2, 0)A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$
$$\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$T := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mit T haben wir $T^t AT = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

2 Klassifikation von Bilinearformen auf $\mathbb{R}^n \leftrightarrow$ Signatur

Seien euklidische $(V, \langle,\rangle)$ und symmetrische Bilinearform $s : V \times V \to \mathbb{R}$, so können wir die Bilinearform durch die Hauptachsentransormation verstehen. Seien ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum V und die symmetrische Bilinearform $s : V \times V \to \mathbb{R}$, dann ist s durch die Signatur (r_+, r_-, r_0) klassifiziert.

Eigenschaften 10. $\dim V = 2$

Signatur	$(2,0,0)$	$q(v) := s(v,v)$ Quadratische Schale (positiv)
	$(0,2,0)$	Quadratische Schale (negativ)
	$(1,1,0)$	Sattelpunkt
	$(0,1,1)$	Quadratisches halbes Rohr (positiv)
	$(1,0,1)$	Quadratisches halbes Rohr (negativ)

Eigenschaften 11. $\dim V = 3$ $\{q(v) = 1\}$

(3,0,0)	Sphäre	
(2,1,0)	einschaliges Hyperboloid	+ Fälle s entartet
(1,2,0)	zweischaliges Hyperboloid	
(0,3,0)	$\varnothing$	

Der Fall von Bilinearformen über Vektorräumen über $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ beliebiger Körper.

Proposition 11. *Orthogonalisierungssatz Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper mit char$(K) \neq 2$. Sei s eine symmetrische Bilinearform über V. Dann gibt es eine Basis B von V, so dass die $M_B(s)$ eine Diagonalmatrix ist.*

Beweis 19. *Reduktionsschritt zum Fall s nicht ausgeartet. Sei U = Ausartungsraum. $\bar{V} := V/U$ und $\bar{s} :=$ induzierte Bilinearform. Wählen wir ein Komplement $W \subset V$ zu U, so haben wir*

$$V = U \oplus W$$
$$W \xrightarrow{\textit{Isomorphismus}} \bar{V}$$
$$s|_W \textit{ nicht ausgeartet}$$

Wir können deshalb behaupten, dass s nicht ausgeartet ist. Dann beweisen wir dies Aussage durch Induktion nach $\dim V$. $\dim V \leq 1$ *trivial. Induktionsschritt:*

$$s \textit{ nicht ausgeartet} \overset{\dim(\mathbb{K})\neq 2}{\Longrightarrow} \exists v \in V : s(v,v) \neq 0$$

Sei $V' := V^\perp$ Wir haben $\dim V' = \dim V - 1$, *weil s nicht ausgeartet ist.*
IA $\rightsquigarrow$ Basis B' von V' mit $\underbrace{M_B(s|_{V'})}_{\textit{auch nicht ausgeartet}}$ *diagonal. Dann:*

$$B \& v \rightsquigarrow B \textit{ mit } M_B(s) \textit{ eine Diagonalmatrix}$$

Korollar 11. *Ist char $K \neq 2$, so gibt es zu einer symmetrischen Matrix $A \in (n \times n, \mathbb{K})$ ein $S \in GL_n(\mathbb{K})$ so dass $S^t AS$ eine Diagonalmatrix ist.*

Beispiel 19. $\mathbb{K}$ beliebig, chat $(K) \neq 2$ $V = K^2$

$$s(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1$$
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$s(v_1, v_1) = 2$$
$$v_1^\perp = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$s(v_2, v_2) = -2$$
$$B := (v_1, v_2)$$
$$M_B(s) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$S \;\leftrightarrow\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Standardbasis. Mit $S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ haben wir

$$S^t AS = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 29. offen bleibt die Frage: Sind symmetrische Bilinearformen s und s' auf V gegeben ($\dim_{\mathbb{K}} < \infty$), können wir entscheiden ob s und s' äquivalent sind?
Oder, in Matrizen: Sind symmetrische $A, A' \in (n \times n, \mathbb{K})$ gegeben, können wir entscheiden, obes ein $S \in GL_N(\mathbb{K})$ gibt, so dass $S^t AS = A'$?
Die Antwort hängt von $\mathbb{K}$ ab.

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ durch die Signatur
- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ durch die Rang
- andere $\mathbb{K}$?

Im Allgemeinen:

- Rang
- Reduktion zum Fall einer nichtausgearteten Form

Wir behaupten: s ist nicht ausgeartet $\Leftrightarrow$ eine darstellende Matrix A ist invertierbar.

$$\det(A) \in \mathbb{K}^*/(\mathbb{K}^*)^2$$

ist eine Invariante von s, wegen der Transformationsform.

$$T \in GL_n(\mathbb{K}) \;\rightsquigarrow\; T^t AT$$

ist eine andere darstellende Matrix. Und

$$\det(T^t AT) = \det(T^t)\det(A)\det(T) = (\det T)^2 \det(A)$$

Definition 23. Diskriminante Sei $s : V \times V \to \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform (mit $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$). Die Diskiminante von s ist 0 falls s ausgeartet ist, sonst ist die Klasse von $\det(A)$ in $\mathbb{K}^*/(\mathbb{K}^*)^2$, wobei A eine darstellende Matrix von s ist. Die Diskriminante ist eine Invariante von s

- Rang
- Diskriminante

Bemerkung 30. Noch offen: sind s,s' nicht ausgeartet, mit derselben Diskriminante, zu entscheiden, ob s und s' äquivalent sind.

Beispiel 20. $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, z.B. $V = \mathbb{Q}^2$, s Standardskalarprodukt $s(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$ und s' symmetrische Bilinearform mit $\mathrm{disc}(s) = +1$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix} \overset{\text{Basiswechsel}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

mit $aa' = b^2, b \in \mathbb{Q}$

$$\Longrightarrow\; a = \frac{b^2}{a'} = a'\left(\frac{b}{a'}\right)^2$$

$a = 2$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a = 3$

$$s' \;\leftrightarrow\; q'(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2$$

Beh:

$$q'(x) \neq 1 \;\forall x \in \mathbb{Q}^2$$

Konsequenz: s' ist nicht äquivalent zu s. Ist $3x_1^2 + 3x_2^2 = 1$ so schreiben wir $x_1 = \frac{r_1}{s_1}, x_2 ? \frac{r_2}{s_2}$, $r_1, r_2, s_1, s_2 \in \mathbb{Q}$, $s_1, s_2 \neq 0$

$$3r_1^2 s_2^2 + 3r_2^2 s_1^2 = s_1^2 s_2^2$$

$$\text{oder } 3r^2 + 3s^2 = t^2 \text{ wobei } r = r_1 s_2,\ \ s = r_2 s_1,\ \ \overbrace{t}^{\neq 0} = s_1 s_2 \tag{1}$$

$$3^{\text{ungerade}}(3k_1 + 1) + 3^{\text{ungerade}}(3k_2 + 1)$$
$$\Longrightarrow \text{Widerspruch zu (1)}$$

Fazit 9. $\mathbb{K}$: Körper, $\operatorname{char}(\mathbb{K}) \neq 2$
V:endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum
s: $V \times V \to \mathbb{K}$ symmetrische Bilinearform

Rang Rang ¡ $\dim V \Leftrightarrow s$ ist ausgeartet. U:=Ausartungsraum. $\bar{s}$ induzierte Bilinearform auf $\bar{V} := V/U$ (nicht ausgeartet)

Diskriminiante für s nicht ausgeartet: $\operatorname{disc}(s) \in \mathbb{K}^*/(K^*)^2$

Beispiel 21. $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}^2$ Bilinear entsprechend zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

- Beide: Rang 2, Diskriminante 1
- nicht äquivalent

Bemerkung 31. Die Frage, ob eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf $V := \mathbb{Q}^2$ der Diskriminante 1 äquivalent zum Standardskalarprodukt ist, können wir nur beantworten mittels einem Resultat aus der Zahlentheorie.

Satz 5. *s nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf* $\mathbb{Q}^2$ $\operatorname{disc}(s) = 1 \Longrightarrow$ *$\exists B$ Basis mit*

$$M_B(s) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$$

Dann: s ist äquivalent zum Standardskalarprodukt $\Leftrightarrow$

$$\exists v \in V,\ s(v,v) = 1 \textit{ d.h. } \exists x, y \in \mathbb{Q}:\ ax^2 + ay^2 = 1$$

$\Leftrightarrow$

$$\exists x, y \in \mathbb{Q} \textit{ mit } x^2 + y^2 = a$$

Bemerkung 32. Ein Resultat aus der Zahlentheorie gibt uns eine Charakterisierung von Summen zweier Quadrate in $\mathbb{Q}$: für $a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$:

$$\exists x, y \in \mathbb{Q} : x^2 + y^2 = a \ \Leftrightarrow x, y \in \mathbb{Z} : x^2 + y^2 = a$$

$\Leftrightarrow a > 0$ und jede Primzahl $p = 4k+3$ ($k \in \mathbb{N}$) kommt mit gerader Vielfachheit in der Primzahlzerlegun von a vorkommen. Der Beweis nutzt

$$(x_1x_1' - x_2x_2')^2 + (x_1x_2' + x_2x_1')^2 = (x_1^2 + x_2^2)(x_1'^2 + x_2'^2)$$

Satz von Fermat: p Primzahl

$$\exists x, y \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 = p \ \Leftrightarrow\ p = 2 \vee 4|(p-1)$$

Argument vom letzten Mal (auszuschliessen $a = 3$)

Fazit 10. Zurück zum Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
Wir wissen: eine symmetrische Bilinearform $s : V \times V \to \mathbb{R}$ ($\dim_{\mathbb{R}} V < \infty$) ist durch die Signatur (r_+, r_-, r_0) charaktertisiert.

$$A : M_B(s)\ P_A(t) = \prod_{i=1}^{n} (t - \lambda_i)$$

$$\begin{aligned} r_+ &= \#\{i|\lambda_i > 0\} \\ r_- &= \#\{i|\lambda_i < 0\} \\ r_0 &= \#\{i|\lambda_i = 0\} \end{aligned}$$

und

$s > 0 \Leftrightarrow$ Signatur $(n, 0, 0) \Leftrightarrow \lambda_i > 0 \forall i \Leftrightarrow$ Koeff. $P_A(t)$ hat alternierende Vorzeichen

Definition 24. Hauptminor Sei $A = (a_{ij}) \in (n \times n, \mathbb{K})$. Wir schreiben A_k für die Teilmatrix $(A_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$, für $1 \leq k \leq n$. Der k-te Hauptminor von A ist $\det(A_k)$

Bemerkung 33. $\dim_{\mathbb{R}} < \infty$, $s : V \times V \to \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform. Wann ist s positiv? Es ist notwendig, aber nicht hinreichend, dass $\det(A) > 0$ für eine darstellende Matrix A.

Proposition 12. *Hauptminorenkriterium von Jacobi-Sylvester Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $s : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform und A eine darstellende Matrix. Dann ist s positiv definit $\Leftrightarrow \det(A_K) > 0$, $k = 1, \cdots, n$ $n = \dim V$*

Beweis 20. $\Rightarrow$ *Ist $s > 0$, so ist $s|_W > 0$ für alle Untervektorräume $S \subset V$. Sei $B = (v_1, \cdots, v_n)$ eine Basis mit $A = M_B(s)$. Sei $V_k := \operatorname{span}(v_1, \cdots, v_k)$ für $1 \leq k \leq n$. Dann haben wir:*

$$M_{(v_1,\cdots,v_k)}(s|_{V_k}) = (s(v_i, v_j))_{1 \leq i,j \leq k} = (A_K)$$

Weil $s|_{V_k} > 0$, folgt: $\det(A_k) > 0$.
$\Leftarrow$ *Durch eine Induktion nach n:*
IA: $n = 1$
IS: Wir nehmen das Resultat an für einen Vektorraum der Dimension $n-1$. Seien $B = (v_1, \cdots, v_n)$ eine Basis von V und $A = (a_{ij})_{i \leq i,j \leq n}$ $A = M_B(s)$. Wir haben

- *aus $\det(A) > 0$ folgt: s ist nicht ausgeartet*
- *aus $\det(A_1) > 0$ folgt $a_{11} > 0$*

Wir haben $V = \operatorname{span}(v_1) \oplus V_1^\perp$. Es genügt zu zeigen, dass $s|_{v_1^\perp}$ positiv definit ist. Eine Basis von $v_1^\perp$ sieht so aus: Sei $c_i := \frac{a_{1i}}{a_{11}}$ und $\tilde{v}_i := v_i - c_i v_1$ für $i = 2, \cdots, n$.

$$s(v_1, \tilde{v}_1) = s(v_1, v_i) - c_i s(v_1, v_1) = a_{1i} - c_i a_{11} = 0$$

$$(\tilde{v}_2, \cdots, \tilde{v}_n) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -c_2 & 1 & & & \\ -c_3 & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ -c_n & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\tilde{a}_{ij})_{2 \leq i,j \leq n} \; \tilde{a}_{ij} = s(\tilde{v}_i, \tilde{v}_j) = a_{ij} - c_i a_{i1} + c_i c_j a_{11} = a_{ij} - c_i a_{1j}$$

$$\text{weil } c_i c_j a_{11} = \frac{a_{1i}}{a_{11}} a_{1j} = c_j a_{i1}$$

Wir haben für $s \leq k \leq n$:

$$\begin{pmatrix} -c_2 & 1 & & & \\ -c_3 & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ -c_k & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{k1} & & & a_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} - c_2 a_{12} & \cdots & a_{2k} - c_2 a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{2k} - c_k a_{12} & \cdots & a_{kk} - c_k a_{1k} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{k2} & \cdots & \tilde{a}_{kk} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \det(A_k) = a_{11} \det(\tilde{a}_{ij})_{2 \leq i,j \leq k}$$

Aus $\det(A_k) > 0$ *und* $a_{11} > 0$ *folgt:*

$$\det(\tilde{a}_{ij})_{2\leq i,j\leq k} > 0, \text{ für } k = 2, \cdots, n$$

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt $s|_{v_1^\perp} > 0$

3 Multilineare Algebra

3.1 Dualvekttorräume

Definition 25. Dualvektorraum / Linearformen Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualvektorraum ist $V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$. Elemente vo V^* heissen Linearformen. V^* ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, mit Addition von Abbildungen und Multiplikation durch Skalare.

Eigenschaften 12. Sei $B = (v_i)_{i\in I}$ eine Basis von V.

- Koeffizient von v_i
$$v_i^* : v = \sum_{j\in I} a_j v_j \mapsto a_i$$
- Summe von Koeffizienten
$$\sum v_i^* : v = \sum_{j\in I} a_j v_j \mapsto \sum a_i$$
wohldefiniert, weil nur endlich viele a_j sind $\neq 0$
- Operationen auf Funktionsräumen, z.B. $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$
- Standardkoordinaten: $n \in \mathbb{N}_{>0}$, $V = \mathbb{K}^n$, Standardbasis $e_1, \cdots, e_n$
$$e_i^* : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_i$$

Bemerkung 34. Ist $B = (v_1, \cdots, v_n)$ eine Basis von V, so ist $B^* = (v_1^*, \cdots, v_n^*)$ eine Basis von V^*. Denn zu $f : V \to \mathbb{K}$ haben wir $c_i := f(v_i)$, dann

$$f \text{ linear} \implies f(\sum_{i=1}^n a_i v_i) = \sum_{i=1}^n c_i a_i$$

Das zeigt, dass V^* ist von $v_1^*, \cdots, v_n^*$ aufgespannt. Lineare Unabhängigkeit von $v_1^*, \cdots, v_n^*$ ist klar. Deshalb haben wir einen Isomorphismus $V \to V^*$, gegeben durch $v_i \mapsto v_i^*\ \forall i$. Falls $\dim V = \infty$ mit Basis $(v_i)_{i\in I}$, dann ist V^* nicht von den $v_i^*, i \in I$ aufgespannt, z.B.

$$\sum_{i\in I} \notin \mathrm{span}(v_i^*)_{i\in I}$$

$\phi : V \to \mathbb{K}$ mit $\phi(v_i) \neq 0$ nur für endlich viele $i \in I$

Beispiel 22. $V = \mathbb{K}$ mit Standardbasis $(e_1, \cdots, e_n)$. Dann hat V^* die Standardbasis $(e_1^*, \cdots, e_n^*)$ und wir haben den Isomorphismus

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n &\to (\mathbb{K})^* \\ e_i &\mapsto e_i^*\ \forall i \end{aligned}$$

Bemerkung 35. Es ist nicht überraschend, dass der Isomorphismus $V \to V^*$ assoziert zu einer Basis $B = (v_1, \cdots, v_n)$ abhängig von der Basis ist.

Bemerkung 36. Sei $V \subset \mathbb{K}^n$ ein Untervektorraum. V kann durch eine Basis gegeben werden, oder durch Gleichungen.

$$V = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \middle| x - y + z = 0\right\}$$

ist eine Linearform auf $\mathbb{K}^n$

Definition 26. orthogonaler Raum Sei W ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $V \subset W$ ein Untervektorraum. Der Untervektorraum

$$V^0 = \{\phi \in W^* : \phi(v) = 0 \ \forall v \in V\} \subset W^*$$

heisst der zu V orthogonale Raum. Falls $\dim V < \infty$, dann haben wir $\dim V^0 = \dim W - \dim V$. Basis von

$$W^* = \overbrace{\underbrace{W_1, \cdots, W_d}_{\text{von } V}, \cdots, W_n}^{W}$$

Dann:

$$V^0 = \operatorname{span}\left(w_{d+1}^*, \cdots, w_n^*\right)$$

Definition 27. duale Abbildung Sei $V \to W$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Dann gibt es eine lineare Abbildung $F^* : W^* \to V^*$, die duale Abbildung, gegeben durch Komposition mit F

$$\psi : V \to K \mapsto F^*(\psi) := \psi \circ F$$

Dann

$$V^0 = \ker\left(W^* \to V^*\right)$$

Aus der Dimensionsformel bekommt man nochmals

$$\dim V^0 = \dim W^* - \dim V^*$$

Eigenschaften 13. duale Abbildung

- falls $W = V$, gilt $(id_V)^* = \mathrm{Id}_{V^*}$
- Ist auch $G : U \to V$ gegeben, so haben wir

$$G^* F^* \psi = (F \circ G)^* \psi$$

Das nennt man Funktorialität.

Bemerkung 37. Man kann zeigen, dass zu $U \subset V$ bekommt man eine surjektive duale Abbildung $V^* \to U^*$

$$(\psi : V \to \mathbb{K}) \mapsto \psi|_U$$

Proposition 13. *Seien V und W endlich dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Basen $A = (v_1, \cdots, v_n)$ und $B = (w_1, \cdots, w_m)$. Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung mit darstellender Matrix M. Dann ist $F^* : W^* \to V^*$ bezüglich der dualen Basen $A^* = (v_1^*, \cdots, v_n^*), B^* = (w_1^*, \cdots, w_m^*)$ durch die Matrix M^t dargestellt. Wir schreiben $M = (a_{ij})$. Das bedeutet:*

$$F(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

Es folgt

$$F^*(w_i^*)(v_j) = \text{ i-te Komonent von } F(v_j) = a_{ij}$$

Das ist zu sagen, die darstellende Matrix von F^* ist die Matrix (a_{ji})

$$F^*(w_i^*) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} v_j^*$$

Eigenschaften 14. $F : V \to W$

- $$\underbrace{(\operatorname{Im} F)^0}_{\text{alle } W \xrightarrow{\phi} \mathbb{K} \text{ mit } \phi|_{\operatorname{Im} F}=0} = \underbrace{\operatorname{Ker} F^*}_{\text{alle } W \xrightarrow{\phi} \mathbb{K} \text{ mit } \phi \circ F=0}$$

  Da
  $$\phi|_{\operatorname{Im} F} = 0 \Leftrightarrow \phi \circ F = 0$$
  haben wir die Gleichung.

- $$(\operatorname{Ker})^0 = \operatorname{Im}(F^*)$$
  $\supset$ offensichtlich
  $\subset$ folgt aus der Surjektivität von $W^* \to (\operatorname{Im} F)^*$

Wir betrachten $\phi : V \to \mathbb{K}$ mit $\phi|_{\operatorname{Ker} F} = 0$

$$w \to W, w = F(v) \text{ für ein } v \in V$$

$$w \rightsquigarrow \bar{\phi}(w) = \phi(v)$$

Ist
$$w = F(v')$$
dann ist
$$v' - v \in \operatorname{Ker} F$$
und
$$\phi(v') - \phi(v) = \phi(v' - v) = 0$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr] & & K \\ & \operatorname{Im} F \arrow[ur, "\bar{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\exists \underbrace{\psi}_{\in W^*} \mapsto \underbrace{\bar{\phi}}_{\in (\operatorname{Im} F)^*}$$

d.h.
$$\psi : W \to \mathbb{K}$$
mit
$$\psi|_{\operatorname{Im} F} = \bar{\phi}$$
Das zeigt:
$$F^*(\psi) = \phi$$

Bemerkung 38. An dem Diagramm haben wir eine Bijektion zwischen $\phi \in V^*$ mit $\phi|_{\operatorname{Ker} F} = 0$ und $\bar{\phi} \in (\operatorname{Im} F)^*$

$$\xRightarrow{\dim W < \infty} \dim(\operatorname{Im} F) = \dim(\operatorname{Im} F)^* = \dim(\operatorname{Ker} F)^0 = \dim \operatorname{Im}(F^*)$$

$$\xRightarrow{\dim V, \dim W < \infty} \operatorname{rang}(F) = \operatorname{rang}(F^*)$$

Keine Überraschung! $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^t)$

Beispiel 23.
$$\mathbb{R}[x]^{\leq 2} \xrightarrow{(ev_{-1}, ev_1)} \mathbb{R}$$
surjektiv
$$\Longrightarrow (\operatorname{Im} F)^0 = 0$$
Interpretation:

$$\alpha f(-1) + \beta f(1) = 0 \; \forall f \in \mathbb{R}[x]^{\leq 2} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

$$\operatorname{Ker}((\alpha, \beta) \mapsto (f \mapsto \alpha f(-1) + \beta f(1)))$$

$$\operatorname{Ker}(ev_{-1}, ev_1) = \operatorname{span}(x^2 - 1)$$

$$\implies \operatorname{Ker}(ev_{-1}, ev_1)^0 = \left\{ \mathbb{R}[x]^{\leq 2} \xrightarrow{\phi} \mathbb{R},\ \phi(x^2-1) = 0 \right\} = \operatorname{span}\left(\frac{1}{2} ev_0'' + ev_0, ev_0' \right)$$

und

$$= \operatorname{Im}\,(ev_{-1}, ev_1)^* = \operatorname{span}(ev_{-1}, ev_1)$$

weil

$$\begin{aligned} ev_{-1} &= \frac{1}{2} ev_0'' - ev_0' + ev_0 \\ ev_1 &= \frac{1}{2} ev_0'' + ev_0' + ev_0 \end{aligned}$$

3.2 Der Bidualraum $V \rightsquigarrow V^* \rightsquigarrow V^{**}$

Definition 28. kanonische lineare Abbildung $\dim V < \infty \implies$ ein Isomorphismus $V \to V^*$ wird durch die Auswahl einer Basis bestimmt. Dagegen haben wir eine Abbildung $V \to V^{**}$ unabhängig von der Basis, so:

$$v \mapsto \begin{pmatrix} V^* \xrightarrow{ev_v} \mathbb{K} \\ (\phi : V \to \mathbb{K}) \mapsto \phi(v) \end{pmatrix}$$

Dies heisst kanonische lineare Abbildung und ist ein Isomorphismus falls $\dim V < \infty$

Bemerkung 39. Im Allgemeinen ist die kanonische Abbildung $V \to V^{**}$ injektiv:

$$\begin{aligned} [\text{Sei } v \in V \text{ mit } v \neq 0] \overset{\operatorname{span}(v) \subset V}{\rightsquigarrow} & V^* \twoheadrightarrow \operatorname{span}(V)^* \\ & \phi \mapsto \psi : v \mapsto 1 \ (\text{d.h. } \phi(v) = 1) \\ \implies ev_1(\phi) \neq 0 & \end{aligned}$$

$$\dim V < \infty \implies \dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$$

Dann:

$$\implies V \to V^{**} \text{ injektiv } \Leftrightarrow \text{bijektiv}$$

Oft schreibt man $V = V^{**}$ für V ein Vektorraum mit $\dim V < \infty$. Das bedeutet immer, dass V und V^{**} identifiziert wird, durch den kanonischen Isomorphismus.

Beispiel 24. $V = \mathbb{K}^n$ mit Standardbasis $e_1, \cdots, e_n$.
$V^* = (\mathbb{K}^n)^*$ hat die duale Basis $e_1^*, \cdots, e_n^*$
$V \to V^{**}$ mit einer Abbildung

$$e_i \mapsto \begin{pmatrix} \phi : (\mathbb{K}^n)^* \to \mathbb{K} \mapsto \phi(e_i) \\ e_j^* \mapsto \delta_{ij} \end{pmatrix} = e_i^{**}$$

Bemerkung 40. Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung von endlichdimensionalen Vektorräumen. Dann ist $F^* * = F$, im folgenden Sinn:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\sim"] & W \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\sim"] & W^* \arrow[r, "F^*"] \arrow[dl, dashed] & V^* \\ V^{**} \arrow[r, "F^{**}"] & W^{**} & & \end{tikzcd}$$

Wobei $\sim$ einen kanonischen Isomorphismus darstellt.
Daraus folgt, dass

$$V \xrightarrow{F} W \rightsquigarrow W^* \xrightarrow{F^*} V^* \rightsquigarrow V^{**} \xrightarrow{F^{**}} W^{**}$$

kommutativ ist.

Bemerkung 41.

$$\begin{tikzcd}
v \in V \arrow[rrr, bend left, "\mapsto"] & V \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[d] & F(v) \in V \arrow[d, mapsto] & \\
& V^{**} \arrow[r] & W^{**} & \psi \arrow[r, mapsto] & \psi(F(v)) \arrow[d, equal] \\
\phi \arrow[r, mapsto] & \phi(v) \in V^{**} \arrow[rrr, bend right, "\mapsto"'] & & \psi \arrow[r, mapsto] & F^*(\psi)(v)
\end{tikzcd}$$

Falls $\dim W < \infty$ und $V \subset W$, dann haben wir $V^{00} = V$ im folgenden Sinn

$$\overbrace{V^0}^{\dim=\dim W-\dim V} \subset W^*$$

$$\overbrace{V^{00}}^{\dim=\dim W-(\dim W-\dim V)\dim V} \subset W^{**} \xleftarrow{\sim} W \supset V$$

Das Bild von V unter dem kanonischen Isomorphismus ist V^{00}.
Sei $v \in V$ $ev_1 \in V^{00}$

$$\phi \in W^*,\ \phi(v)0\ \forall \phi \in V \implies \phi(v) = 0$$

Beispiel 25.

$$W = \mathbb{R}^3$$

$$V = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right) \implies V^0 = \operatorname{span}(e_1^* - e_2^* - e_3^*) = \operatorname{span}(e_1 + e_3, -e_2 + e_3)$$

$$V^{00} = \operatorname{span}(e_1^{**} + e_2^{**}, e_1^{**} + e_3^{**})$$

3.3 Zusammenhang zwischen Dualraum und bilinearen Abbildungen

- schon gesehen, z.B. bei der Definition "nicht ausgeartet"
- jetzt explizit

Definition 29. bilineare Abbildung Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, v und W Vektorräume über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $b : V \times W \to \mathbb{K}$ heisst bilinear falls

$$w \mapsto b(v, w) \text{ ist linear } \forall v \in V$$

und

$$v \mapsto b(v, w) \text{ ist linear } \forall w \in W$$

$$[(w \mapsto b(v, w)) \in W^*]$$

Bemerkung 42. Im Fall $W = V$ ist dies genau zu sagen, dass b eine Bilinearform ist. Also haben wir Abbildungen

$$b' : V \to W^*$$

und

$$b'' : W \to V^*$$

Aus der Definition folgt, dass b' und b'' sind linear.

Definition 30. nicht ausgeartet Eine bilineare Abbildung $b : V \times W \to \mathbb{K}$ ist nicht ausgeartet, falls $b' : V \to W^*$ und $b'' : W \to V^*$ injektiv sind.

Bemerkung 43. Falls V und W endlich dimensional sind, ist es nur möglich, eine nicht ausgeartete bilineare Abbildung zu haben, wenn $\dim V = \dim W$. Falls $\dim V = \dim W$: "injektiv" oben ist äquivalent zu "bijektiv".

Beispiel 26.

- V beliebig, dann ist

$$\begin{aligned} V \times V^* &\to \mathbb{K} \\ (v, \phi) &\mapsto \phi(v) \end{aligned}$$

stets nicht ausgeartet.

$$\begin{aligned} b' : V &\to V^{**} \\ v &\mapsto ev_v \end{aligned}$$

ist die kanonische Abbildung, ist injektiv

$$\begin{aligned} b'' : V^* &\to V^* \\ \phi &\mapsto \phi \end{aligned}$$

ist id_{V^*} ist ein Isomorpismus

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\langle , \rangle$ Skalarprodukt auf V.

$$b(v, w) := \langle v, w \rangle$$

b' und b'' sind gleich, definiert als Ψ

$$\rightsquigarrow \Psi : V \to V^*$$

injektiv

Bemerkung 44. Das zeigt, dass jedes Skalarprodukt nicht ausgeartet ist. Und: falls $\dim_{\mathbb{R}} V < \infty$ ist Ψ ein Isomorphismus. Ψ heisst kanonisch. (kanonische Abbildung bzw. kanonischer Isomorphismus)

Eigenschaften 15. V, $\dim V = n$, mit Skalarprodukt, kanonischer Isomorphismus Ψ

- Für $U \subset V$ Untervektorraum gilt

$$\Psi(U^\perp) = U^0$$

- Für $B = (v_1, \cdots, v_n)$ eine orthonormal Basis haben wir

$$\Psi(v_i) = V_i^*$$

für $i = 1, \cdots, n$, wobei $(v_1^*, \cdots, v_n^*)$ die duale Basis ist.
zeigen:

$$\underbrace{\Psi(U^\perp)}_{\dim = \dim V - \dim U} \subset \underbrace{U^0}_{\dim = \dim v - \dim U} \quad \text{klar}$$

$$\left\langle v_i, \sum_{j=1}^n a_j v_j \right\rangle = a_i$$

$$v_i^* \left(\sum_{j=1}^n a_j v_j \right) = a_i$$

Beispiel 27. Graphiker gesucht ;)

Bemerkung 45. Wir haben zwei kanonische Abbildungen:

$$V \to V^{**} \text{ für beliebiges } V \ / \ \mathbb{K}$$

$$V \xrightarrow{\Psi} V^* \text{ für } V/\mathbb{R} \text{ mit Skalarprodukt}$$

Definition 31. adjugierte Abbildung V, W euklidische Vektorräume

$$F : V \to W \text{ lineare Abbildung}$$

adjugiert: $F^{ad} : W \to V$ ist adjugiert zu F falls gilt

$$\langle F(v), w\rangle = \left\langle v, F^{ad}(w)\right\rangle \; \forall v \in V, w \in W$$

Bemerkung 46.

$$\begin{tikzcd} V & W \arrow[l, "F^{ad}"'] \arrow[d, "\Psi"] \\ V^* \arrow[from=u, "\Phi"] & W^* \arrow[l, "F^*"'] \end{tikzcd}$$

$$F^*(\Psi(w))(v) = \Psi(w)\left(F(v)\right) = \Phi\left(F^{ad}(w)\right)(v)$$
$$\implies F^*\left(\Phi(w)\right) = \Phi\left(F^{ad}(w)\right) \text{ in } V^*$$

Daraus folgt, dass das Diagramm kommutiert

Bemerkung 47. Seien $v_1, \cdots, v_n$ orthonormale Basen von V, $w_1, \cdots, w_m$ für W $\rightsquigarrow$ duale Basen $v_1^*, \cdots, v_n^*$ und $w_1^*, \cdots, w_m^*$ Bezüglich orthonormaler Basen ist F^{ad} durch die transponierte Matrix gegeben: Sei

$$F \;\leftrightarrow\; A \in M(m \times n, \mathbb{R})$$

dann, aus Prop 49 (13?):

$$F^* \;\leftrightarrow\; A^t \in M(m \times n, \mathbb{R}) \implies F^{ad} \;\leftrightarrow A^t \text{ weil} \Phi(v_i) = v_i^*,\; \Psi(w_i) = w_i^* \;\forall i$$

Beispiel 28. $V = \mathbb{R}^2$ mit Skalarprodukt, $W = \mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ mit

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$F : V \to W$$
$$(\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta x + \alpha x^2$$

Basis von W $1, x, x^2$

$$V^* = (\mathbb{R}^2)^* \text{ mit Basis } e_1^*, e_2^*$$

$$\begin{tikzcd} V & W \arrow[l, "F^{ad}"'] \arrow[d, "\Psi"] \\ V^* \arrow[from=u, "\Phi"] & W^* \arrow[l, "F^*"'] \end{tikzcd}$$

$$V \xrightarrow{\Psi} V^*$$
$$e_1 \mapsto e_1^*$$
$$e_2 \mapsto e_2^*$$

W^* hat die duale Basis $1^*, x^*, x^{2^*}$.
Wir berechnen Ψ explizit:

$$\Psi(1) = \left(f \mapsto \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}\,x\right)$$

$$\begin{aligned} W &\xrightarrow{\Phi} W^* \\ 1 &\mapsto 2(1^*) + \frac{2}{3}\left(x^{2^*}\right) \\ x &\mapsto \cdots \\ x^2 &\mapsto \cdots \end{aligned}$$

Dann:

$$F^*\left(\psi(1)\right) = \left((\alpha,\beta) \int_{-1}^{1} \alpha + \beta x + \alpha x^2 \,\mathrm{d}\, x = 2\alpha + \frac{2}{3}\alpha = \frac{8}{3}\alpha\right)$$

d.h.

$$\frac{8}{3}e_1^* \overset{\Phi^{-1}}{\mapsto} \left(\frac{8}{3}, 0\right)$$

Ähnlich:

$$F^*\left(\Psi(x)\right) = \left((\alpha,\beta) \mapsto \int_{-1}^{1} \alpha x + \beta x^2 + \alpha x^3 \,\mathrm{d}\, x = \frac{2}{3}\beta\right)$$

und

$$F^*\left(\Psi(x^2)\right) = \left((\alpha,\beta) \mapsto \int_{-1}^{1} \alpha x^2 + \beta x^3 + \alpha x^4 \,\mathrm{d}\, x = \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{5}\alpha = \frac{16}{15}\alpha\right)$$

d.h.

$$\begin{aligned} F^{ad}(1) &= \left(\frac{8}{3}, 0\right) \\ F^{ad}(x) &= \left(0, \frac{2}{3}\right) \\ F^{ad}(x^2) &= \left(\frac{16}{15}, 0\right) \end{aligned}$$

$$F^{ad}\left(a + bx + cx^2\right) = \left(\frac{8}{3}a + \frac{16}{5}c, \frac{2}{3}b\right)$$

Check:

$$\int_{-1}^{1} \left(\alpha + \beta x + \alpha x^2\right)\left(a + bx + cx^2\right) \mathrm{d}\, x \overset{?}{=} \left\langle (\alpha,\beta), \left(\frac{8}{3}a + \frac{16}{15}c, \frac{2}{3}b\right)\right\rangle$$

Skalarprodukt:

$$\alpha\left(\frac{8}{3}a + \frac{16}{15}c\right) + \beta\left(\frac{2}{3}b\right)$$

Integral:

$$\int_{-1}^{1} a\alpha + (b\alpha + c\beta)x + (c\alpha + b\beta + a\alpha)x^2 + (c\beta + \alpha b)\,x^3 + c\alpha x^4 \,\mathrm{d}\, x =$$

$$= 2a\alpha + \frac{2}{3}\left(a\alpha + b\beta + c\alpha\right) + \frac{2}{5}c\alpha$$

stimmt.

Bemerkung 48. Wir könnten F^{ad} auch durch die Wahl einer orthonormalen Basis von W berechnen.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{5}{2}}\sqrt{\frac{-1+3x^2}{2}}$$

Dann:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} & \end{pmatrix}$$

und so

$$A^t = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{pmatrix} \to F^{ad}$$

Bemerkung 49. Jetzt betrachen wir den Fall $W = V$, also $b : V \times V \to \mathbb{K}$ eine Bilinearform. Da b' und b'' genau durch das "Umtauschen" von V und W unterschieden

$$b' : V \to V^*,\ v \mapsto (w \mapsto b(v,w))$$
$$b'' : V \to V^*,\ w \mapsto (v \mapsto b(v,w))$$

haben wir Interpretation von Bedingungen über b:

- b symmetrisch $\Leftrightarrow b'' = b'$
- b schiefsymmetrisch $\Leftrightarrow b'' = -b'$

Bemerkung 50. Sei jetzt $\dim_{\mathbb{K}} < \infty$. Dann haben wir $b'' = (b')^*$ in folgendem Sinne: Dual zu $b' : V \to V^*$ ist

$$\begin{tikzcd} V^{**} \arrow[r, "(b')^*"] & V^* & ev_V \arrow[r, mapsto] & ev_V \circ b' \\ V \arrow[u, "\sim"] & & v \arrow[u, mapsto] & \end{tikzcd}$$

($ev_V =$ Auswertungsabbildung an $v \in V$)
Wobei:

$$ev_V \circ b'(v') = ev_V\,(w \mapsto b(v',w)) = b(v',v)$$

Da

$$b'' : V \to V^*$$

durch

$$v \mapsto (v' \mapsto b(v',v))$$

definiert ist, haben wir Gleichheit.

Eigenschaften 16.

$$b \text{ symmetrisch} \iff b'' = b' \iff (b')^* = b'$$

$$b \text{ schiefsymmetrisch} \iff b'' = -b' \iff (b')^* = -b'$$

Bemerkung 51. Falls $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$, s symmetrisch und nicht ausgeartet führt zu

$$b'(= b'')\ V \xrightarrow{\sim} V^*$$

Bemerkung 52. Spezialfall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, V euklidisch, dann ist des gerade das, was Ψ hiess:
Untevektorraum $U \subset V, U^\perp \subset V$ sowie $U^0 \subset V^*$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\sim"] & V^* \\ U^\perp \arrow[u, dash, "\cup"'] & U^0 \arrow[u, dash, "\cup"'] \end{tikzcd}$$

Bemerkung 53. Was passiert, falls $K = \mathbb{C}$? Dann sind wir an sesquilinearen Abbildungen interessiert.

$$s : V \times W \to \mathbb{C}$$

Dann gibt es immer noch eine Abbildung

$$s'' : W \to V^*\ w \mapsto (v \mapsto s(v,w))$$

aber diese ist nicht mehr linear.

Beispiel 29. $V = \mathbb{C}[x], s : V \times V \to \mathbb{C}$

$$s(f,g) = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}\,x$$

Dann z.B.

$$1 \overset{s''}{\longmapsto} \left(f \mapsto \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x \right)$$

also: Durchschnittswert auf $[0,1]$
aber:

$$i \overset{s''}{\longmapsto} \left(f \mapsto -i \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x \right)$$

also: $(-i)\cdot$ Durchschnittswert auf $[0,1]$
Damit ist s'' semilinear.

Definition 32. semilinear Eine Abbildung $t : V \to W$ zwischen $\mathbb{C}$-Vektorräumen heisst semilinear, falls:

- $t(v + v') = t(v) + t(v')\ \forall v, v' \in V$
- $t(\lambda v) = \bar{\lambda}(v)\ \forall v \in V,\ \lambda \in \mathbb{C}$

Definition 33. kanonischer Semi-Isomorphismus Falls V ein unitärer Vektorraum ist, mit Skalarprodukt

$$s : V \times V \to \mathbb{C}$$

so erhalten wir (was oben s'' heisst, nennen wir hier Ψ)

$$\Psi : V \to V^* \text{ kanonischer } \underbrace{\text{Semi}}_{\text{semilinear}} \underbrace{\text{-Isomorphismus}}_{\text{bijektiv}}$$

Bemerkung 54. Wie vorher haben wir zu einem Endomorphismus

$$F : V \to V$$

den adjugierten Endomorphismus

$$F^{ad} : V \to V$$

gegeben durch

$$F^{ad} := \Psi^{-1} \circ F^* \circ \Psi$$

Eigenschaften 17. adjugierter Endomorphismus

- $$s\left(F(v), w\right) = s\left(v, F^{ad}(w)\right)\ \forall v, w \in V$$
- $$\operatorname{Im} F^{ad} = (\operatorname{Ker} F)^{\perp}$$
- $$\operatorname{Ker} F^{ad} =< (\operatorname{Im} F)^{\perp}$$
- Ist B eine Orthonormalbasis von V und A die darstellende Matrix von F bezüglich B, dann ist $\bar{A}^t$ die darstellende Matrix von F^{ad}

Satz 6.

$$F \textit{ ist unitär diagonalisierbar} \iff F \circ F^{ad} = F^{ad} \circ F$$

Definition 34. F normal F heisst normal, falls

$$F \circ F^{ad} = F^{ad} \circ F$$

3.4 Anwendung des Dualraums

das duale Polytop $\mathbb{K} = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^n$

Definition 35. konvexe Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft $\forall s, t \in S$: s und t sind wegzusammenhängend.

Definition 36. konvexe Hülle konvexe Hülle von $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$\cap_{S \subset \mathbb{R}^n, S \text{ konvex}, \Gamma \subset S} S$$

"kleinste konvexe Menge, in der Γ enthalten ist"

Definition 37. konvexes Polytop die konvexe Hülle von einer endlichen Menge in $\mathbb{R}^n$

Definition 38. innerer Punkt Das Polytop P hat $O \in \mathbb{R}$ als inneren Punkt falls:

- $O \in \mathbb{R}$
- $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(0) \subset P$

Definition 39. Ist ein Polytop mit $O \in \mathbb{R}$ als inneren Punkt, so definieren wir

$$P^* = \left\{ \phi \in (\mathbb{R}^n)^* : \phi(v) \leq 1 \ \forall v \in P \right\}$$

Definition 40. duales Polytop P^* ist ein konvexes Polytop $O \in (\mathbb{R}^n)^*$ als innerem Punkt. P^* heisst duales Polytop.

Bemerkung 55.

$$P^* * = P$$

Bemerkung 56. Konstruktion des dualen Polytops: l Hyperebene, so dass P auf einer Seite von l liegt (inklusive l selbst) $\rightsquigarrow$ Gleichung von l schreiben als

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 1$$

$$P \subset \{(x_1, \cdots, x_n) \, | \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \leq 1\}$$

$\rightsquigarrow$

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in P^*$$

(Skizze (Freiwilliger gesucht }:-))

$$\text{Facetten von } P \rightsquigarrow \text{ Ecken in } P^*$$

(P^*) konvexe Hülle

Beispiel 30.

- Der Tetraeder ist selbstdual.
- Der Würfel dual zum Oktaeder.
- Der Dodekaeder ist dual zum Ikosaeder.

3.5 Das Tensorprodukt

$$V \rightsquigarrow V^* \text{ Linearformen}$$

Wir möchten eine Redeweise haben, genug flexibel für solche Situationen. Eine nützliche Konstruktion dafür ist das Tensorprodukt.

Definition 41. Tensorprodukt Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V und W Vektorräume über $\mathbb{K}$. Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum heisst Tensorprodukt von V und W, geschrieben $V \otimes W$, falls, eine bilineare Abbildung

$$\eta : V \times W \to V \otimes W$$

gegeben ist, die folgende universelle Eigenschaften erfüllt:

Zu jedem $\mathbb{K}$-Vektorraum U mit bilinearer Abbildung

$$\xi : V \times W \to U$$

gibt es eine eindeutige lineare Abbildung

$$\xi' : V \otimes W \to U$$

so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[d, "\eta"] \arrow[dr, "\xi"] & \\
V \otimes W \arrow[r, "\xi'"] & U
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Bemerkung 57. Es ist noch unklar, wie die Elemente von $V \otimes W$ aussehen, oder ob $V \otimes W$ gar existiert. Auch unklar: warum.

Korollar 12. *Aus der Definition folgt: $V \otimes W$, falls es existiert, ist eindeutig bis auf Isomorphismus.*

Bemerkung 58. Seien

$$\eta : V \times W \to V \otimes W$$

und

$$\tilde{\eta} : V \times W \to \widetilde{V \otimes W}$$

gegeben, beide erfüllen die universellen Eigenschaften. Wir wenden die universelle Eigenschaft an, mit $U := \widetilde{V \otimes W}$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[d, "\eta"] \arrow[dr, "\tilde{\eta}"] & \\
V \otimes W \arrow[r, "\zeta"] & \widetilde{V \otimes W}
\end{tikzcd}$$

Wir wenden die universelle Eigenschaft an mit $U := V \otimes W$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[d, "\tilde{\eta}"] \arrow[dr, "\eta"] & \\
\widetilde{V \otimes W} \arrow[r, "\tilde{\zeta}"] & V \otimes W
\end{tikzcd}$$

Wir wenden die universelle Eigenschaft an mit $U := V \otimes W$

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[d, "\eta"] \arrow[dr, "\eta"] & \\
V \otimes W \arrow[r, "\tilde{\zeta} \circ \zeta"] & V \otimes W
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[d, "\eta"] \arrow[dr, "\eta"] & \\
V \otimes W \arrow[r, "1_{V \otimes W}"] & V \otimes W
\end{tikzcd}$$

Beide Diagramme kommutieren

$$\tilde{\zeta} \circ \zeta \circ \eta = \tilde{\zeta} \circ \tilde{\eta} = \eta$$

$$1_{V \otimes W} \circ \eta = \eta$$

Es folgt aus der universellen Eigenschaft, dass

$$\tilde{\zeta} \circ \zeta = 1_{V \otimes W}$$

Wir wenden die universelle Eigenschaft an, mit $U := \widetilde{V \otimes W}$

$$
\begin{tikzcd}
V \tilde{\times} W \arrow[d, "\tilde{\eta}"] \arrow[dr, "\tilde{\eta}"] & \\
\widetilde{V \otimes W} \arrow[r, "\tilde{\zeta} \circ \zeta"] & V \otimes W
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[d, "\tilde{\eta}"] \arrow[dr, "\tilde{\eta}"] & \\
\widetilde{V \otimes W} \arrow[r, "1_{\widetilde{V \otimes W}}"] & \widetilde{V \otimes W}
\end{tikzcd}
$$

Beide Diagramme kommutieren

$$\zeta \circ \tilde{\zeta} \circ \tilde{\eta} = \zeta \circ \eta = \tilde{\eta}$$

$$1_{\widetilde{V \otimes W}} \circ \tilde{\eta} = \tilde{\eta}$$

Es folgt aus der universellen Eigenschaft, dass

$$\zeta \circ \tilde{\zeta} = 1_{\widetilde{V \otimes W}}$$

Ergebnis:

$$V \otimes W \xrightarrow{\zeta} \widetilde{V \otimes W}$$

ist Isomorphismus, inverse zu

$$\tilde{\zeta} : \widetilde{V \otimes W} \to V \otimes W$$

Fazit 11. universelle Eigenschaft $\rightsquigarrow$ Eindeutigkeit bis auf Isomorphismus

Not 4. Tensorprodukt $V \otimes W$ oder $V \otimes_{\mathbb{K}} W$

3.5.1 Existenz vom Tensorprodukt

Bemerkung 59. Es gibt zwei Methoden

- Durch Auswahl von Basen
- Beschreibung als Quotientenvektorraum

Heute: Methode 1

- braucht die Existenz von Basen
- klar fall $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$

oder im Allgemeinen für die, die das Auswahlaxiom gesehen haben.

Proposition 14. *Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V und $(w_j)_{j \in J}$ eine Basis von W. Dann existiert das Tensorprodukt $V \otimes W$, mit Basis $(v_i \otimes w_j)_{(i,j) \in I \times J}$ und*

$$\eta : V \times W \to V \otimes W$$

$$\left(\sum_{i \in I} a_i v_i \sum_{j \in J} b_j w_j \right) \mapsto \sum_{(i,i) \in I \times J} a_i b_j \left(v_i \otimes w_j \right)$$

mit $a_i \neq 0$ für endlich viele i und $b_j \neq 0$ für endlich viele j
Das bedeutet, dass die Elemente von $V \otimes W$

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} c_{ij} \left(v_i \otimes w_j \right) \;\; c_{ij} \in \mathbb{K}$$

nur endlich viele $c_{ij} \neq 0$.

Beweis 21. *Zu verifizieren:*

- *dass η bilinear ist*
- *und erfüllt die universelle Eigenschaft*

η ist bilinear:

$$\begin{aligned}
\eta\left(\sum_{i\in I} a_i v_i,\ \sum_{j\in J} b_j w_j\right) + \eta\left(\sum_{i\in I} a'_i v_i,\ \sum_{j\in J} b_j w_j\right) &= \\
= \sum_{i\in I} a_i b_j\,(v_i \otimes w_j) + \sum_{(i,\ j)\in I\times J} a'_i b_j\,(v_i \otimes w_j) &= \\
= \sum_{(i,\ j)\in I\times J} (a_i b_j + a'_i b_j)\,(v_i \otimes w_j) &= \\
= \sum_{(i,\ j)\in I\times J} (a_i + a'_i)\, b_j\,(v_i \otimes w_j) &= \\
= \eta\left(\sum_{i\in I}(a_i 1 a'_i) v_i,\ \sum_{j\in J} b_j w_j\right)& \\
= \eta\left(\sum_{i\in I} a_i v_i + \sum_{i\in I} a'_i v_j,\ \sum_{j\in J} b_j w_j\right)&
\end{aligned}$$

Beispiel 31. $V = \mathbb{K}^2$, $W = \mathbb{K}[t]$
V hat die Standardbasis (e_1, e_2)
W hat die Basis $(1, t, t^2, \cdots)$
$\implies$ $V \otimes W$ hat die Basis $e_1 \otimes 1, e_1 \otimes t, \cdots, w_2 \otimes 1, e_2 \otimes t, \cdots$

$$\begin{aligned}
\eta : \mathbb{K}^2 \times K[t] &\to K^2 \otimes K[t] \\
\big((1,0), t^2\big) &\mapsto e_1 \otimes t^2 \\
\big((0,1), t^3\big) &\mapsto e_2 \otimes t^3 \\
\big((2,3), t^4\big) &\mapsto 2e_1 \otimes t^4 + 3e_2 \otimes t^4
\end{aligned}$$

Typisches Element von $\mathbb{K}^2 \otimes \mathbb{K}[t]$

$$e_1 \otimes t^2 + e_2 \otimes t^3 + 2e_1 \otimes t^4 + 3e_2 \otimes t^4$$

Mit anderer Schreibweise:

$$(t^2, 0) + (0, t^3) + (2t^4, 0) + (0, 3t^4)$$

oder:

$$(t^2 + 2t^4, t^3 + 3t^4)$$

Definition 42. Sei U ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und

$$\xi : V \times W \to U$$

eine bilineare Abbildung. Wir definieren

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[d, "\eta"] \arrow[dr, "\xi"] & \\
V \otimes W \arrow[r, "\xi'"] & U
\end{tikzcd}$$

$$\xi' : V \otimes W \to U$$

durch

$$\xi'(v_i \otimes w_j) := \xi(v_i, w_j)$$

für $i \in I$, $j \in J$, und deshalb:

$$\xi'\left(\sum_{(i,j)\in I\times J} c_{ij} v_i \otimes w_j\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} c_{ij}(v_i, w_j)$$

Das Diagram kommutiert (aus der Bilinearität von ξ)
Die Eindeutigkeit ist durch die identischen Basenvektoren gegeben.

Bemerkung 60.
$$\dim V \otimes W = (\dim V)(\dim W)$$
Not 5. Für $v \in V$, $w \in W$ schreibt man oft $v \otimes w$ für $\eta(v,w)$

Bemerkung 61. Weil
$$(v,w) \mapsto v \otimes w := \eta(v,w)$$
eine bilineare Abbildung ist, haben wir
$$\begin{aligned} v \otimes w + v' \otimes w &= (v \times v') \otimes w \\ v \otimes w + v \otimes w' &= v \otimes (w' \times w) \\ (\lambda v) \otimes w = \lambda(v \otimes w) &= v \otimes (\lambda w)) \end{aligned}$$
Rechenregeln für Tensoren

Not 6. Letztes Mal: für Basiselemente v_i, w_j bezeichnet $v_i \otimes w_j$ ein Basiselement von $V \otimes W$

Bemerkung 62. Die Abbildung lässt sich schreiben als
$$\begin{aligned} V \times W &\xrightarrow{\eta} V \otimes W \\ (v_i, w_j) &\mapsto v_i \otimes w_j \end{aligned}$$
Bemerkung 63. Jetzt für beliebige $v \in V$, $w \in W$ bezeichnet $v \otimes w$ das Element
$$\eta(v,w) \in V \otimes W$$
Weil in der Konstruktion wir η durch
$$\eta(v_i, w_j) := v_i \otimes w_j$$
definiert haben, stimmen die beiden Bedeutungen von $v_i \otimes w_j$ überein.

Beispiel 32. Isomorphismus von Vektorräumen über $\mathbb{R}$
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t] &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}[t] \oplus \mathbb{R}[t] \\ e_1 \otimes t^j &\mapsto \left(t^j, 0\right) \\ e_2 \otimes t^j &\mapsto \left(0, t^j\right) \end{aligned}$$
Ganz ähnlich
$$\begin{aligned} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t] &\xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[t] \\ 1 \otimes t^j &\mapsto t^j \\ i \otimes t^j &\mapsto it^j \end{aligned}$$
$\implies$ für $\gamma \in \mathbb{C}$ gilt:
$$\gamma \otimes t^j \mapsto \gamma t^j$$
weil:
$$\gamma = \alpha + \beta i \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$
haben wir
$$\begin{aligned} \gamma \otimes t' &= (\alpha + \beta i) \otimes t^j \\ &= \alpha \otimes t^j + \beta i \otimes t^j \\ &= \alpha\left(1 \otimes t^j\right) + \beta\left(i \otimes t^j\right) \\ &\mapsto \alpha\left(t^j\right) + \beta(it^j) \\ &= (\alpha + \beta i)\, t^j \\ &= \gamma t^j \end{aligned}$$
Proposition 15. *Sei $\mathbb{K} \to \mathbb{L}$ eine Körpererweiterung und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann hat $K \otimes_{\mathbb{K}} V$ die Struktur von L-Vektorraum, mit*
$$\alpha(\beta \otimes v) = (\alpha\beta) \otimes v \quad \textit{für } \alpha, \beta \in L \textit{ und } v \in V$$

Beweis 22. *Wir müssen verifizieren, dass*

$$(\alpha, \beta \otimes v) \mapsto (\alpha\beta) \otimes v$$

eine Abbildung von $L \times (L \otimes_{\mathbb{K}} V)$ *nach* $L \otimes_{\mathbb{K}} V$ *beschreibt. D.h. für jedes* $\alpha \in L$, $\exists$ *eine Abbildung* $L \otimes V \to L \otimes V$

$$\begin{tikzcd}
L \times V \arrow[r, "{(\beta,\alpha) \mapsto (\alpha\beta, v)}"] \arrow[d, "\eta"] \arrow[dr, "{(\alpha,\beta) \mapsto (\alpha\beta) \otimes v}"] & L \times V \arrow[d, "\eta"] \\
L \otimes V \arrow[r, dashed, "\text{Aus der u.E.}"'] & L \otimes V
\end{tikzcd}$$

$$(\alpha, \beta) \mapsto (\alpha\beta) \otimes v$$

ist bilinear:

$$\begin{aligned}
(\beta + \beta', v) \mapsto (\alpha(\beta + \beta')) \otimes v = \\
&= (\alpha\beta + \alpha\beta') \otimes v && \textit{Körpereigenschaft} \\
&= \alpha\beta \otimes v + \alpha\beta' \otimes v && \textit{Rechenregeln für Tensoren}
\end{aligned}$$

So bekommen wir

$$\begin{aligned}
L \times (L \otimes V) &\to L \otimes V \\
(\alpha, \beta \otimes v) &\mapsto (\alpha\beta) \otimes v
\end{aligned}$$

Wir müssen auch die Axiome für den Vektorraum über L *verifizieren, d.h.:*

$$\begin{aligned}
\alpha(w + w') &= \alpha w + \alpha w' && \text{für } \alpha \in L,\ w, w' \in L \otimes V \\
\alpha(\alpha' w) &= (\alpha\alpha') w && \text{für } \alpha, \alpha' \in L,\ w \in L \otimes V
\end{aligned}$$

Die erste Gleichung gilt weil $L \otimes V \dashrightarrow L \otimes V$ *über* $\mathbb{K}$*-linear ist. Die zweite folgt aus der ersten, falls wir nur den Fall verifizieren, wobei* $w = \beta \otimes v$*. Dafür benutzen wir*

- $L \otimes_{\mathbb{K}} V$ *ist von Elementen* $\beta \otimes v$ $(\beta \in L,\ v \in V)$ *aufgespannt, als* $\mathbb{K}$*-Vektorraum (Klar von der Konstruktion)*
- *Dann können wir schreiben*

$$w = \beta_1 \otimes v_1 + \cdots + \beta_\gamma \otimes v_\gamma \qquad \gamma \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned}
\alpha(\alpha'(\beta_1 \otimes v_1 + \cdots + \beta_\gamma \otimes v_\gamma)) &= \alpha(\alpha'(\beta_1 \otimes v_1) + \cdots + \alpha'(\beta_\gamma \otimes v_\gamma)) \\
&= \alpha(\alpha'(\beta_1 \otimes v_1)) + \alpha(\alpha'(\beta_\gamma)) \\
&= (\alpha\alpha')(\beta_1 \otimes v_1) + \cdots + (\alpha\alpha')(\beta_\gamma \otimes v_\gamma) \\
&= (\alpha\alpha')(\beta_1 \otimes v_1 + \cdots + \beta_\gamma \otimes v_\gamma)
\end{aligned}$$

für $w := \beta \otimes v$*:*

$$\begin{aligned}
\alpha(\alpha'(\beta \otimes v)) &= \alpha((\alpha'\beta) \otimes v) \\
&= (\alpha(\alpha'\beta)) \otimes v \\
&= ((\alpha\alpha')\beta) \otimes v \\
&= (\alpha\alpha')(\beta \otimes v)
\end{aligned}$$

Satz 7.

$$\underbrace{\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t]}_{\mathbb{C}-\,\textit{Vektorraum}} \to \mathbb{C}[t]$$

Beh: dies ist ein Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen. Nur noch zu verifzieren: die $\mathbb{C}$-Linearität. Im allgemeinen haben wir

$$L \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[t] \xrightarrow{\sim} L[t]$$

L-linearer Isomorphismus

Beweis 23. *Sei $\gamma \in \mathbb{C}$*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t] \arrow[rrr, "\sim"] \arrow[ddd, "\gamma \cdot (\ )"'] & & & \mathbb{C}[t] \arrow[ddd, "\gamma \cdot (\ )"] \\
& \gamma' \oplus t^j \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \gamma t^j \arrow[d, mapsto] & \\
& \gamma\left(\gamma' \otimes t^j\right) = (\gamma\gamma') \otimes t^j \arrow[r, mapsto] & \gamma\gamma' t^j & \\
\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t] \arrow[rrr, "\sim"] & & & \mathbb{C}[t]
\end{tikzcd}$$

Bemerkung 64. Ganz ähnlich

$$L \otimes \mathbb{K}^n \xrightarrow{\sim} L^n$$

L-linearer Isomorphimsus. ($n \in \mathbb{N}$) Insbesondere:

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n$$

Definition 43. Komplexifizierung Ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, so heisst der $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ die Komplexifizierung von V

3.5.2 Tensorprodukt von linearen Abbildungen

Definition 44. Tensorprodukt von linearen Abbildungen Sei V, W, $V \otimes_{\mathbb{K}} W$, $V \times W \xrightarrow{\eta} V \otimes_{\mathbb{K}} W$ und V', W', $V' \otimes_{\mathbb{K}} W'$, $V' \times W' \xrightarrow{\eta'} V' \otimes_{\mathbb{K}} W'$ gegeben, mit linearen Abbildungen

$$V \xrightarrow{\phi} V'$$

$$W \xrightarrow{\psi} W'$$

Dann haben wir:

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "\phi \times \psi"] \arrow[d, "\eta"] & V' \times W' \arrow[d, "\eta'"] \\
V \otimes W \arrow[r, dashed, "\text{neu}"] & V' \otimes W'
\end{tikzcd}$$

Beh: die Komposition ist bilinear

$$(v, w) \mapsto \psi(v) \otimes \psi(w)$$

(neu) aus der universellen Eigenschaft das Tensorprodukt von linearen Abbildungen

Not 7. Tensorprodukt von linearen Abbildungen

$$\phi \otimes \psi$$

3.5.3 Spezialfälle

Bemerkung 65. Spezialfall 1 V, V', W, W' endlichdimensional mit gegebenen Basen $\dim V = m$ Basis $v_1, \cdots, v_m$, $\dim W = n$ Basis $w_1, \cdots, w_m$, $\dim V' = m'$ Basis $v'_1, \cdots, v'_m$, $\dim W' = n'$ Basis $w'_1, \cdots, w'_m$ dargestellt durch ϕ dargestellt als $A \in M(m' \times m, \mathbb{K})$, ψ durch $B \in M(n' \times n), \mathbb{K}$. Wie wir schon gesehen haben, hat $V \otimes W$ die Basis

$$\begin{pmatrix} v_1 \otimes w_1 & \cdots & v_1 \otimes w_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ v_m \otimes w_1 & \cdots & v_m \otimes w_n \end{pmatrix}$$

und $V' \otimes W'$ hat die Basis

$$\begin{pmatrix} v'_1 \otimes w'_1 & \cdots & v'_1 \otimes w'_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ v'_m \otimes w'_1 & \cdots & v'_m \otimes w'_n \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die darstellende Matrix von $\phi \otimes \psi$, Basiselement $v_i \otimes w_j$ von $V \otimes W$ geht auf was?

$$\begin{tikzcd}
(v_i, w_j) \arrow[r, mapsto] \arrow[dd, mapsto, "\eta"] & (\phi(v_i), \psi(w_j)) \arrow[r, "="] \arrow[dr, mapsto, "\eta'"'] & \left(a_{1i}v'_i + \cdots + a_{m'i}v'_{m'}, b_{1j}w'_j + \cdots + b_{n'j}w'_{n'}\right) \\
& & (a_{1i}v'_i + \cdots + a_{m'i}v'_{m'}) \otimes (b_{1j}w'_1 + \cdots + b_{n'j}w'_{n'}) = \\
v_i \otimes w_j \arrow[urr, mapsto, "\phi \otimes \psi"] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} &= a_{1i}b_{1j}\,(v'_1 \otimes w'_1) + a_{1i}b_{2j}\,(v'_1 \otimes w'_2) + \cdots + a_{1i}b_{n'j}\,(v'_1 \otimes w'_{n'}) + \\ &\quad a_{2i}b_{1j}\,(v'_2 \otimes w'_1) + \cdots + a_{2i}b_{n'j}\,(v'_2 \otimes w'_{n'}) + \\ &\quad \cdots + a_{m'i}b_{1j}\,(v_{m'} \otimes w'_1) + \cdots + a_{m'i}b_{n'j}\,(v'_{m'} \otimes w'_{n'}) \end{aligned}$$

$A \otimes B$ heisst die darstellende Matrix von $\phi \otimes \psi$ und sieht so aus:

$$\begin{pmatrix}
a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1n} & \cdots & a_{1m}b_{11} & \cdots & a_{1m}b_{1n} \\
a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2n} & \cdots & a_{1m}b_{21} & \cdots & a_{1m}b_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{11}b_{n'1} & a_{11}b_{n'2} & \cdots & a_{11}b_{n'n} & \cdots & a_{1m}b_{n'1} & \cdots & a_{1n}b_{n'n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m'1}b_{11} & a_{m'1}b_{12} & \cdots & a_{m'1}b_{1n} & \cdots & a_{m'm}b_{11} & \cdots & a_{m'm}b_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m'1}b_{n'1} & a_{m'1}b_{n'2} & \cdots & a_{m'1}b_{n'n} & \cdots & a_{m'm}b_{n'1} & \cdots & a_{m'm}b_{n'n}
\end{pmatrix} \in M(m'n' \times mn, \mathbb{K}$$

Diese Matrix lässt sich in Blockmatrixen unterteilen:

$$\begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & \cdots & a_{2m}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{m'm}B \end{pmatrix} = A \otimes B$$

Beispiel 33.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 6 \\ 6 & 8 & 9 & 12 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 66. Spezialfall 2 $V' = V$ und $\phi = 1_V$. Dann folgt aus $\psi : W \to W'$

$$V \otimes_{\mathbb{K}} W \xrightarrow{1_v \otimes \psi} V \otimes_{\mathbb{K}} W'$$

$1_V \otimes \psi$ kann auch mit $V \otimes \psi$ bezeichnet werden.

Beispiel 34. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C} \rightsquigarrow$ Komplexifizierung einer linearen Abbildung

$$\psi : W \to W' \rightsquigarrow \mathbb{C} \otimes \psi : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} W \to \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} W'$$

wenn $\dim W, \dim W' < \infty$, darstellende Matrix $B = (b_{ij}), b_{ij} \in \mathbb{R}$, so bekommen wir $\mathbb{C} \otimes B$, mit derselben Grösse, denselben Einträgen, aber als komplexe Zahlen betrachtet. Ähnlich für eine beliebige Körpererweiterung $\mathbb{K} \to \mathbb{L}$

$$\psi : W \to W' \ \rightsquigarrow \ \mathbb{L} \otimes \psi : \mathbb{L}W \to \mathbb{L} \otimes W'$$

Bemerkung 67. Spezialfall 3 $V' = W' = \mathbb{K}$, und so $\phi \in V^*$, $\psi \in W^*$

$$\rightsquigarrow \ \phi \otimes \psi : V \otimes_{\mathbb{K}} W \to \underbrace{\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}}_{\text{Basis } (1 \otimes 1) \mapsto 1} \approx \mathbb{K}$$

So können wir schreiben

$$\phi \otimes \psi : V \otimes_{\mathbb{K}} W \to \mathbb{K}$$

d.h.

$$\phi \otimes \psi \in (V \otimes_{\mathbb{K}} W)^*$$

Anscheinend hat $\phi \otimes \psi$ auch eine Bedeutung als Element von $V^* \otimes_{\mathbb{K}} W^*$ Es gibt einen Zusammenhang:

$$\begin{tikzcd} V^* \times W^* \arrow[d] \arrow[dr, "(\phi, \psi) \mapsto \phi \otimes \psi"] & \\ V^* \otimes W^* & (V \otimes W)^* \end{tikzcd}$$

Satz 8.

$$V^* \times W^* \to (V \otimes W)^*$$
$$(\psi, \phi) \mapsto \phi \otimes \psi$$

ist eine bilineare Abbildung.

Beweis 24.

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\left(\phi + \tilde{\phi}\right) \times \psi"] \arrow[d] & \mathbb{K} \times \mathbb{K} \arrow[d] \\ V \otimes W \arrow[r, "\left(\phi + \tilde{\phi} \otimes \psi\right)"] & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

- $$\left(\psi + \tilde{\psi}, \phi\right) \mapsto \left(\phi + \tilde{\phi}\right) \otimes \stackrel{?}{=} \phi \otimes \phi + \tilde{\phi} \otimes \psi$$

  ok

- ...

Proposition 16. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V, W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$. Die oben beschriebene lineare Abbildung*

$$V^* \otimes W^* \to (V \otimes W)^*$$

ist ein Isomorphismus

Beweis 25. *Wir rechnen mit Basen. Seien $(v_1, \cdots, v_n)$ Basis in V mit dualen Basen $(v_1^*, \cdots, v_m^*)$ in V^*. Seien $(w_1, \cdots, w_m)$ Basis in W mit dualen Basen $(w_1^*, \cdots, w_n^*)$ in W^*. Dann ist $\left(v_i^* \otimes w_j^*\right)_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$ eine Vasis von $V^* \otimes W^*$*

$$V \xrightarrow{v_i^*} \mathbb{K}$$
$$W \xrightarrow{w_j^*} \mathbb{K}$$

$$V \otimes W \xrightarrow{v_i^* \otimes w_j^*} \mathbb{K}$$
$$v_i \otimes w_j \otimes \mapsto \delta_{ik} \cdot \delta_{jl}$$

Wir erkennen das als Basiselement von $(V \otimes W)^*$. Wir können auch $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ interpretieren als Tensorprodukt. V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$

$$(\phi, w) \longmapsto v \mapsto \psi(v) w$$

$$\begin{tikzcd}
V^* \times W \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(V, W) \\
V^* \otimes W \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

Beh: Das ist eine bilineare Abbildung ...

Proposition 17. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, V, W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume. Dann ist die lineare Abbildung*

$$V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W)$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis 26. *Eine ähnliche Berechnung mit Basen.*

Beispiel 35. $V = W = \mathbb{R}^3$ A =

$$e_2^* \otimes e_3 \mapsto \begin{pmatrix} e_1 \mapsto 0 \\ e_2 \mapsto e_3 \\ e_3 \mapsto 0 \end{pmatrix}$$

oder durch eine Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow e_1^* \otimes e_1 + 2e_3^* \otimes e_1 - e_2^* \otimes e_2 + e_3^* \otimes e_2 + e_1^* \otimes e_3 + 2e_2^* \otimes e_3$$

$$= (e_1^* + 2e_3^*) \otimes e_1 + (-e_2^* + e_3^*) \otimes e_2 + (e_1^* + 2e_2^*) \otimes e_3 \stackrel{?}{=} (\ ) \otimes (\ ) + (\ ) \otimes (\ )$$

Standardbasis (e_1, e_2, e_3), Basiswechsel von V und W

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Neue Basen von V

$$\begin{aligned} f_1 &= (1,0,0) \\ f_2 &= (0,1,0) \\ f_3 &= (-2,1,1) \end{aligned}$$

Neue Basen von W

$$\begin{aligned} f_1 &= (1,0,1) \\ f_2 &= (0,-1,2) \\ f_3 &= (0,0,1) \end{aligned}$$

so:

$$\begin{aligned} f_1 &\mapsto g_1 \\ f_2 &\mapsto g_2 \\ f_3 &\mapsto 0 \end{aligned}$$

Das bedeutet, wir können ϕ als

$$f_1^* \otimes g_1 + f_2^* \otimes g_2$$

schreiben.
Zu finden: f_i^* bezüglich (e_1^*, e_2^*, e_3^*). Zeilen aus der Transformationsmatrix:

$$\begin{aligned} f_1^* &= e_1^* + 2e_3^* \\ f_2^* &= e_2^* - e_3^* \\ f_3^* &= e_3^* \end{aligned}$$

So haben wir

$$\phi \;\leftrightarrow\; (e_1^* + 2e_3^*) \otimes (e_1 + e_3) + (e_2^* - e_3^*) \otimes (-e_2 + 2e_3)$$

checken

$$e_1^* \otimes e_1 + 2e_3^* \otimes e_1 + e_1^* \otimes e_3 + 2e_3^* \otimes e_3 - e_2^* \otimes e_2 + e_3^* \otimes e_2 + 2e_2^* \otimes e_3 - 2e_3^* \otimes e_3$$

Bemerkung 68.

$$V^* \otimes_{\mathbb{K}} W \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$$

lineare Abbildungen als Tensoren

$$V^* \otimes_{\mathbb{K}} V^* \xrightarrow{\sim} (V \otimes_{\mathbb{K}} V)^*$$

Bilinearformen als Tensoren

3.6 (Bi-)lineare Abbildungen als Tensoren

Wir wollen Begriffe wie symmetrisch, alternierend in die Sprache von Tensoren übersetzen.

$$V \times V \xrightarrow{s} \mathbb{K} \qquad s(v,w) = s(w,v) \text{ symmetrisch}$$

oder

$$V \times V \xrightarrow{s} W \qquad s(v,w) = s(w,v) \text{ symmetrisch}$$

$$V \times V \xrightarrow{s} \mathbb{K} \qquad s(v,v) = 0 \text{ alternierend}$$

Definition 45. äusseres Produkt Das äussere Produkt von einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit sich selbst ist ein Vektorraum $V \wedge V$ oder $\wedge^2 V$ mit alternierenden bilinearen Abbildung $V \times V \to V \wedge V$, die die folgende universelle Eigenschaft erfüllt: Für jeden $\mathbb{K}$-Vektorraum W mit der alternierenden bilinearen Abbildung

$$\xi : V \times V \to W$$

gibt es eine eindeutige lineare Abbildung

$$V \wedge V \xrightarrow{\xi'} W$$

so dass das Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} V \times V \arrow[d, "\eta"] \arrow[dr, "\xi"] & \\ V \wedge V \arrow[r, dashed, "\xi'"] & W \end{tikzcd}$$

Bemerkung 69. äusseres Produkt

$$\text{universelle Eigenschaft} \implies \text{Eindeutigkeit bis auf Isomorphismus}$$

Existenz: 2 Möglichkeiten

- $$V \wedge V = V \otimes V / \operatorname{span}(v \otimes v : v \in V)$$
- durch Basis

Beweis 27. *Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V, wo I eine Totalordnung gegeben ist. Bsp:*

- $(v_1, \cdots, v_n)$ *mit* $\leq$
- $(v_1, v_2, \cdots)$ *mit* $\leq$
- *allg. Existenz (Lemma von Zorn)*

Dann können wir $V \wedge V$ konstruieren, mit Basis $(v_i \wedge v_j)_{(i,j) \in I \times I}$, $i < j$

$$V \times V \xrightarrow{\eta} V \wedge V$$
$$(v_i, v_j) \mapsto \begin{cases} v_i \wedge v_j & i < j \\ 0 & i = j \\ -v_j \wedge v_i & i > j \end{cases}$$

eindeutige Erweiterung zu einer bilinearen Abbildung

$$\left(\sum_{i \in I} a_i v_i, \sum_{j \in I} b_j v_j \right) \mapsto \sum_{i<j} a_i b_j v_i \wedge \wedge v_j - \sum_{i>j} a_i b_j v_j \wedge v_i$$

Bemerkung 70. Dies ist eine alternierende bilineare Abbildung und erfüllt die universelle Eigenschaft.

$$\begin{tikzcd} (v_i, v_j) & V \times V \arrow[d] \arrow[dr, "\xi"] & \\ v_i \wedge v_j, i < j & V \wedge V \arrow[r, dashed] & W \end{tikzcd}$$

ξ' definiert durch

$$\xi'(v_i \wedge v_j) = \xi(v_i, v_j)$$

Aus der universellen Eigenschaft vom Tensorprodukt bekommt man eine linearee Abbildung

$$V \otimes V \twoheadleftarrow V \wedge V$$

$$\begin{tikzcd} (v_i, v_j) \arrow[d, mapsto] & V \times V \arrow[d, "\eta_1"] \arrow[dr, "\eta"] & \\ v_i \wedge v_j, i < j & V \wedge V \arrow[r, dashed] & W \end{tikzcd}$$

Explizit:

$$v_i \otimes v_j \mapsto \begin{cases} v_i \wedge v_j & i < j \\ 0 & i = j \\ -v_i \wedge v_j & i > j \end{cases}$$

Bemerkung 71. Rechenregeln für $v, v', w, w' \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned} (v + v') \wedge w &= v \wedge w + v' \wedge w \\ (\lambda v) \wedge w &= \lambda (v \wedge w) \\ v \wedge v &= 0 \\ w \wedge v &= -v \wedge w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v \wedge (w + w') &= v \wedge w + v \wedge w' \\ v \wedge (\lambda w) &= \lambda(v \wedge w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V \times V &\xrightarrow{\eta} V \wedge V \\ (v, w) &\mapsto v \wedge w \end{aligned}$$

Beispiel 36. $V = \mathbb{K}^n$ Standardbasis $(e_1, \cdots, e_n)$ von $V \rightsquigarrow$ Basis $(e_i \wedge e_j)_{1 \leq i < j \leq n}$ von $V \wedge V$.
$n = 2$

$$\begin{aligned} V \wedge V &\cong \mathbb{K} \\ e_1 \wedge e_2 &\rightsquigarrow 1 \end{aligned}$$

$n = 3$

$$\begin{aligned} V \wedge V &\cong \mathbb{K}^3 \\ e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3 & \end{aligned}$$

allg. n

$$\dim V \wedge V = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Bemerkung 72. universelle Eigenschaft für $W = \mathbb{K}$ ergibt

$$\begin{tikzcd} V \times V \arrow[d] \arrow[dr] & \\ V \wedge V \arrow[r, dashed] & W \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \{\text{alternierende Bilinearformen auf } V\} \arrow[r, hook, "\subset"] \arrow[d, leftrightarrow] & \{\text{Bilinearformen auf } V\} \arrow[d, leftrightarrow] \\ (V \wedge V)^* \arrow[r, hook] & (V \otimes V)^* \end{tikzcd}$$

Proposition 18. *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Dann haben wir $V^* \wedge V^* \cong (V \wedge V)^* \cong$ der Untervektorraum von $(V \otimes V)^*$ von $\phi : V \otimes V \to \mathbb{K}$ mit $\phi(v \otimes v) = 0 \forall v \in V$, wobei der erste Isomorphismus aus der universellen Eigenschaft so folgt:*

$$\begin{tikzcd}
V^* \times V^* \arrow[d] \arrow[dr] & (\phi, \psi) \arrow[dr, mapsto] & \\
V^* \wedge V^* \arrow[r, dashed] & (V \wedge V)^* & (v \wedge w) \longmapsto \det \begin{pmatrix} \phi(v) & \phi(w) \\ \psi(v) & \psi(w) \end{pmatrix}
\end{tikzcd}$$

Beweis 28. *Wir wählen eine Basis $(v_1, \cdots, v_n)$ von $V \implies v_1^*, \cdots, v_n^*$ von $V^* \implies v_i^* \wedge V_j^*$ von $\wedge^2 V^*$ $(1 \leq i < j \leq n)$. $\implies$ Basis $v_i \wedge v_j$ von $\wedge^2 V \implies$ Duale Basis $(v_i \wedge v_j)^*$ von $\left(\wedge^2 V\right)^*$*

$$v_k \wedge v_k \mapsto \det \begin{pmatrix} \delta_{ik} & \delta_{il} \\ \delta_{jk} & \delta_{jl} \end{pmatrix} = \delta_{ik}\delta_{jl} \qquad 1 \leq k < l \leq n$$

$$v_i^* \wedge v_j^* \mapsto (v_i \wedge v_j)^*$$

Da Basiselemente auf Basiselemente 1 zu 1 abgebildet werden, haben wir einen Ismorphismus.

Bemerkung 73. Weitere Themen:

- $\wedge^* V \ k \ \geq 2$
- $\wedge^* \phi$ für die lineare Abbildung $\phi : V \to W$
- $\alpha \wedge \beta \in \wedge^{k-l} V$ fpr $\alpha \in \wedge^k V$, $\beta \in \wedge^l V$

Bemerkung 74. $\wedge^k V$ ist für $k \in \mathbb{N}_{>0}$ definiert, analog zu $\wedge^2 V$. Eine Abbildung

$$\phi \overbrace{V \times \cdots \times V}^{k} \to W$$

heisst

multilinear falls $\forall i, 1 \leq i \leq k \ v_1 \cdots v_k, v_i \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\phi(v_1, \cdots, v_{i-1}, v_i + v_i', v_{i+1}, \cdots, v_n) = \phi(v_1, \cdots, v_n) + \phi(v_1, \cdots, v_i', \cdots, v_n)$$
$$\phi(v_1, \cdots, v_{i-1}, \lambda v_i, \cdots, v_n) = \lambda \phi(v_1, \cdots, v_n)$$

alternierend falls

$$(i \neq j, v_i = v_j) \implies \phi(v_1, \cdots, v_n) = 0$$

Dann wird $\wedge^k V$ definiert als Vektorraum mit multilinearen Abbildung mit der universellen Eigenschaft.

$$\begin{tikzcd}
\overbrace{V \times \cdots \times V}^{k} \arrow[d] \arrow[dr, "\text{multilinear und alternierend}"] & \\
\wedge^k V \arrow[r, dashed, "\exists!"] & W
\end{tikzcd}$$

Konstruktion ist möglich aus Basis mit Totalordnung. Ist $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis, $(I, \leq)$ Totalordnung, dann ist $(v_1 \wedge v_{i_2} \wedge \cdots \wedge v_{i_k})_{i_1 < i_2 < \cdots < i_{i_k}}$ eine Basis von $\wedge^k V$. Spezialfälle: $\underbrace{\wedge^0 V = K}_{\text{Konvention}}$ $\wedge^1 V = V$ $\wedge^2 V = V \wedge V$

Bemerkung 75. Ohne alternierend in der oberen Abbildung bekämen wir $\overbrace{V \times \cdots \times V}^{k}$: $(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V < \otimes W)$ schreibt als $U \otimes V \otimes W$

Beispiel 37.
- $V = K^4$ $K^6 \cong \wedge^2 V$
  $e_1 \wedge e_2$, $e_1 \wedge e_3$, $e_2 \wedge e_3$, $e_1 \wedge e_4$, $e_3 \wedge e_4$
- $K^4 \cong \wedge^3 K$
  $e \wedge e_2 \wedge e_3$, $e_1 \wedge e_2 \wedge e_4$, $e_1 \wedge e_3 \wedge e_4$, $e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$
- $K^4 \wedge^4 V$
  $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$

Allg. $\dim V = n \implies \wedge^k V = \binom{n}{k}$, insbesondere ist Null für $k > n$

Bemerkung 76. Rechenregeln

$$v_1 \wedge \cdots \wedge (v_i + v_i') \wedge \cdots \wedge v_k = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k + v_1 \wedge \cdots \wedge v_i' \wedge \cdots \wedge v_k$$
$$v_1 \wedge \cdots \wedge (\lambda v_i) \wedge \cdots \wedge v_k = \lambda (v_1 \wedge \cdot \wedge v_k)$$
$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_i \wedge v_{i+1} \wedge \cdots \wedge v_k = -v_1 \wedge \cdots \wedge v_{i+1} \wedge v_i \wedge \cdots \wedge v_k$$
$$(\cdots \wedge v \wedge \cdots \wedge v \wedge \cdots) = 0$$

Bemerkung 77. $\phi V \to W$

$$\begin{tikzcd}
\overbrace{V \times \cdots \times V}^{k} \arrow[r, "\phi \times \cdots \times \phi"] \arrow[d] & \overbrace{W \times \cdots \times W}^{k} \arrow[d] \\
\wedge^k V \arrow[r, dashed, "\wedge^k \phi"] & \wedge^k W
\end{tikzcd}$$

Beispiel 38. $V = W = \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \phi &: V \to W \\ (x, y) &\mapsto (x + 2y, 3x + 4y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \wedge^2 \phi : \wedge^2 V &\to \wedge^2 W = \wedge^2 \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R} \\ e_1 \wedge e_2 &\mapsto (e_1 + 3e_2) \wedge (2e_1 + 4e_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= e_1 \wedge (2e_1 + 4e_2) + 3e_2 \wedge (2e_1 + 4e_2) \\ &= 2_e \wedge e_1 + 4e_1 \wedge e_2 + 6e_2 \wedge e_1 + 12e_2 \wedge e_2 \\ &= 4e_1 \wedge e_2 - 6e_1 \wedge e_2 \\ &= -2e_1 \wedge e_2 \\ \det &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = -2 \end{aligned}$$

Wir werden sehen: $\wedge^{\dim V} \rightsquigarrow \det$

Bemerkung 78. In grösserer Allgemeinheit:

$$\begin{aligned} \wedge^k V \times V &\to \wedge^{k+1} V \\ (v_1 \wedge \cdots \wedge v_k, v_0) &\mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \wedge v_0 \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
\overbrace{V \times \cdots \times V}^{k} \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\wedge^k V \times V \arrow[r, dashed] & \wedge^{k+1} V
\end{tikzcd}$$

für $w_1, \cdots, w_l \in V$

$$\begin{tikzcd}
\wedge^k V \otimes \overbrace{V \times \cdots \times V}^{l} \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\wedge^k V \times \wedge^l V \arrow[r, dashed, "\text{aus uE}"] & \wedge^{k+l} V \\
\alpha, \beta \arrow[r, mapsto] & \alpha \wedge \beta
\end{tikzcd}$$

Eigenschaft:

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha$$

für $\alpha \in \wedge^k V$, $\beta \in \wedge^l V$

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) \wedge (w_1 \wedge \cdots \wedge w_l) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \wedge w_1 \cdots \wedge w_l$$

Proposition 19. *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einen Körper $\mathbb{K}$ $d := \dim V$, und $\phi V \to V$ ein Endomorphismus. Dann ist*

$$\wedge^d \phi : \wedge^d V \to \wedge^d V$$

gegeben durch Multiplikation durch $\det V$

Beweis 29. *Wir nehmen eine Basis $(v_1, \cdots, v_d)$ von V. Dann ist $\wedge^d V$ von Dimension 1, erzeugt von $v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$. Ist $A \in M(d \times d, \mathbb{K})$ die darstellende Matrix, so haben wir* $\det \phi = \det A$. *Es folgt: Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathrm{End}(V) &\to \mathbb{K} \\ \phi &\mapsto (\textit{das eindeutig bestimmte } \lambda \in \mathbb{K}) \end{aligned}$$

Wobei λ bestimmt ist durch

$$\left(\wedge^d \phi\right)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_d) = \lambda v_1 \wedge \cdots \wedge v_d = \phi(v_1) \wedge \phi(v_2) \wedge \cdots \wedge \phi(v_d)$$

ist

multilinear *in den Spalten der darstellenden Matrix*

alternierend

bildet 1_V *auf* $1 \in \mathbb{K}$ *ab*

3.7 Symmetrische Produkte

Definition 46. symmetrisch Eine nichtlineare Abbildung $\overbrace{V \times \cdots \times V}^{n} \xrightarrow{\phi} W$ ist symmetrisch falls

$$\phi\left(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(n)}\right) = \phi(v_1, \cdots, v_n) \qquad \forall \sigma \in S_n,\ v_1, \cdots, v_n \in V$$

Dann wiederholt alles mit "symmetrisch" statt "alternierend".

$$\begin{tikzcd} V \times \cdots \times V \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \mathrm{Sym}^n V \arrow[r, dashed] & W \end{tikzcd}$$

Not 8. $S^n V$ oder $\mathrm{Sym}^n V$ oder $V^n V$

Bemerkung 79. Falls $\dim V = d$, was ist $\dim \mathrm{Sym}^n V$? Sei Basis $(v_1, \cdots, v_d)$.

$$\dim \mathrm{Sym}^n V \binom{b+d-1}{n}$$

Beispiel 39. Sei $V := K^n$ mit Standardbasis $e_1, \cdots, e_n$. Dann hat V^* die Duale Basis $x_1 := v_1^*, \cdots, x_n = e_n^*$ Koordinaten. Und

$$\mathrm{Sym}^d V^* \cong \left(\mathrm{Sym}^d V\right)^*$$

hat eine Basis bestehend aus Monomen vom Grad d.

Bemerkung 80. Man kann ein homogenes Polynom in $x_1, \cdots, x_n$ als Element von $\mathrm{Sym}^d(K^n)^*$ betrachten

Beispiel 40. Für $\dim V < \infty$ und $\mathrm{char} K = 0$ oder $> d$ haben wir:

$$\{\text{symmetrische Bilinearformen auf } V\} \;\leftrightarrow\; \mathrm{Sym}^2 V^*$$

Für $V = K^n$

$$\text{Standardskalarprodukt} \;\leftrightarrow\; e_1^* e_1^* + \cdots + e_n^* e_n^* = x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

Bemerkung 81. In der multilinearen Algebra hat man Interpretationen von z.B. multinearen Abbildungen, ssymmetrischen / alternierenden Formen durch Vektorräume wie $V \otimes W$, Λ^d, Sym, duale,... Einfachster Fall: alle Vektorräume von Dimension $< \infty$

Beispiel 41. Endomorphismen

$$\mathrm{End}(V) \;\leftrightarrow\; V^* \otimes V$$

symmetrische Bilinearformen

$$V \times V \to W \;\leftrightarrow\; \mathrm{Sym}^2 V^* \otimes W$$

Bilinearformen

$$U \times V \to W \;\leftrightarrow\; \text{linear } U \otimes V \to W \;\leftrightarrow\; \text{linear} U \to V^* \otimes W \;\leftrightarrow\; \text{Elemente } U^* \otimes V^* \otimes W$$

Beispiel 42. Anwendungen

$$V \otimes V^* \to K$$

(oder $W \otimes V \otimes V^* \to W$ usw.) auch: ($\dim V = n$)

$$\Lambda^k V \otimes \Lambda^{n-k} V \to \Lambda^n V \underbrace{\cong}_{\text{Wahl}} K \rightsquigarrow \Lambda^k V \underbrace{\xrightarrow{\sim}}_{\text{Wahl}} \left(\Lambda^{n-k} V\right)^* \cong \Lambda^{n-k} V^*$$

Beispiel 43.

$$\mathrm{End}(V) \leftrightarrow V^* \otimes V \cong V \otimes V^* \to K$$

Matrix

$$(a_{ij}) \leftrightarrow \sum a_{ij} v_j^* \otimes v_i \leftrightarrow \sum a_{ij} v_i \otimes v_j^* \mapsto \sum a_{ii} = \mathrm{A}$$

$$\underbrace{\phi}_{\mathrm{End}(V)} \rightsquigarrow \Lambda^n \phi$$

ist Multiplikation durch $\det \phi$

4 Ringe, Moduln

4.1 Ringe

Definition 47. Ringe $(R, +, \cdot)$

1. $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
2. das neutrale Element für $+$ ist 0
3. ist assoziativ und distributiv

$$(ab)\,c = a\,(bc)$$
$$a\,(b + c) = ab + ac$$
$$(a + b)\,c = ac + bc$$

4. $1 \in R$ ist neutrales Element für $\cdot$

Bemerkung 82. Falls $1 = 0$ in R, dann ist R der Nullring

$$c = 1c = 0c = 0 \qquad\qquad \forall c \in R$$

Definition 48. kommutativ Ein Ring heisst kommutativ, falls die Multiplikation kommutativ ist.

$$ab = ba \qquad \forall a, b \in R$$

Beispiel 44. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}[x]$ sind kommutative Ringe. $(n \times n, \mathbb{R})$ ist nichtkommutativ für $n \geq 2$

Bemerkung 83. Homomorphismen

$$\begin{aligned} \phi : R &\to S \\ \phi(a+b) &= \phi(a) + \phi(b) \\ \phi(ab) &= \phi(a)\phi(b) \\ \phi(1) &= 1 \end{aligned}$$

nicht vergessen

4.2 Moduln über kommutative Ringe

Definition 49. Sei R ein kommutativer Ring. Ein Modul über R ist eine abelsche Gruppe $(M, +)$ mit Aktion ("Skalarmultiplikation")

$$\begin{aligned} R \times M &\to M \\ (a, v) &\mapsto av \end{aligned}$$

so dass $\forall a, b \in R$, $v, w \in M$

$$\begin{aligned} (a+b)\,v &= av + bv \\ a\,(v+w) &= av + aw \\ a\,(bv) = (ab)\,v& \\ 1v = v& \end{aligned}$$

Definition 50. Erzeugendes Element $(v_i)_{i \in I}$ erzeugen M falls für jedes $x \in M$ existiert $(a_i)_{i \in I}$, $a_i \in R$ nur endlich viele $\neq 0$, so dass

$$\sum_{i \in I} a_i v_i = x$$

Definition 51. unabhängig $(v_i)_{i \in I}$ ist unabhängig falls für $(a_i)_{i \in I}$, $a_i \in R$ nur endlich viele $\neq 0$

$$\sum_{i \in I} a_i v_i = 0 \implies a_i = 0 \qquad \forall i \in I$$

Definition 52. Basis $(v_i)_{i \in I}$ ist eine Basis von M falls $(v_i)_{i \in I}$ unabhängig ist und M erzeugt.

Bemerkung 84. Obwohl jeder Vektorraum eine Basis besitzt (falls man das Lemam von Zorn annimmt oder nur endlich dimensionale Vektorräume betrachtet), ist das nicht mehr der Fall für Moduln.

Beispiel 45. $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Q}$ Sei $(v_i)_{i \in I}$ erzeugend, $(I \neq \varnothing)$ nehmen wir $i_0 \in I$ und $x = \frac{1}{2} v_{i_0}$. Dann: $\exists (a_i) : a_i \in \mathbb{Z}$ nur endlich viele $\neq 0$ mit

$$\sum a_i v_i = x \implies \sum 2 a_i v_i = v_{i_0} \implies (v_i) \text{ ist nicht unabhängig}$$

Beispiel 46. $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $(v_i)_{i \in I}$ erzeugend $(I \neq \varnothing) \implies$ wähle $i_0 \in I$, dan

$$n v_{i_0} = 0 \implies (v_i)_{i \in I} \text{ ist nicht unabhängig}$$

Definition 53. freies Modul M ist ein freies Modul falls M eine Basis besitzt.

Beispiel 47. R^n $\forall n \in \mathbb{N}$ ist ein freies Modul mit Standardbasis $e_1, \cdots, e_n$

Bemerkung 85. Ein $\mathbb{Z}$-Modul ist eine abelsche Gruppe.

Bemerkung 86. Sei K ein Körper. Ein K-Modul ist ein K-Vektorraum.

Bemerkung 87. Interpretationen gibt es auch für andere Ringe, z.B. $R = K[x]$, $\ni f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d$ $(V, +)$ (V als Modul). Ein K-Vektorraum: (λ, v) für $\lambda \in K$, $v \in V$ erfüllen die Axiome der abelschen Gruppe.

$$xv = \phi(v)$$

ein Endomorphismus

$$\xRightarrow{\text{Axiome}} fv = a_0 v + a_1 \phi(v) + a_2 \phi(\phi(v)) + \cdots + a_d \phi^d(v)$$

analog zu linearen Abbildungen gibt es auch R-Modulhomomorphismen

$$\begin{aligned}\phi : M &\to M' \\ \phi(v + v') &= \phi(v) + \phi(v') \\ \phi(av) &= a\phi(v)\end{aligned}$$

Bemerkung 88. Sei R ein kommutativer Ring (mit 1). Sei M ein R-Modul, endlich erzeugt. Falls M frei ist, dann haben wir:

$$M \cong R^n$$

für ein $n \in N$. Ist R nicht der Nullring, so haben wir

$$R^n \cong R^m \implies n = m$$

Beweis 30. *Skizze:* $\exists m \subset R$ *max. (Lemma von Zorn)* $\Leftrightarrow R/m : K$ *ist ein Körper* $\to$ *reduziert zum Fall von einem Körper.*

$$\begin{aligned}R^n \oplus_R K K^n \\ R^m \oplus_R K K^m\end{aligned}$$

$$\implies K^n \cong K^m \implies n = m$$

Definition 54. Rang eines Moduls ... ist analog zur Dimension von einem Vektorraum.

Bemerkung 89. Was tun falls M nicht frei ist? Wir können mindestens ein minimales erzeugendes System wählen. Dann wird M beschrieben durch Erzeugende und deren Relationen.

Beispiel 48. $R = \mathbb{Z}$

$$M = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$$

M ist durch $(1, 0)$, $(0, 1)$ erzeugt. Das ist nicht optimal, denn M ist tatsächlich nur durch ein Element erzeugt.

$$\begin{aligned}3(1, 1) &= (1, 0) \\ 4(1, 1) &= (0, 1)\end{aligned}$$

Relationen? Kann nur sein $(a, a) \Leftrightarrow 2|a, 3|a \Leftrightarrow 6|a$. $6(1, 1) = 0$ in M. Das sagt zusammen:

$$M \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

deshalb

$$\begin{aligned}(1, 1) &\leftrightarrow 1 \\ (0, 2) &\leftrightarrow 2 \\ (1, 0) &\leftrightarrow 3 \\ (0, 1) &\leftrightarrow 4 \\ (1, 2) &\leftrightarrow 5 \\ (0, 0) &\leftrightarrow 0\end{aligned}$$

Beispiel 49.

$$M = (\mathbb{Z}/4mbZ) \oplus (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$$

M ist durch $(1,0)$, $(0,1)$ erzeugt. Echt effizienter geht es nicht. M ist nicht erzeugt durch ein einzelnes Element. Aber: M ist auch erzeugt durch $(1,2)$ und $(0,3)$.

$$\begin{aligned} 8\,(1,2) + (0,3) &= (0,1) \\ 9\,(1,2) &= (1,0) \end{aligned}$$

Relationen?

$$\begin{aligned} &a\,(1,2) + b\,(0,3) = 0 \\ \iff\; &4|a \text{ und } 6|2a + 3b \;\; a, b \in \mathbb{Z} \\ &a = 4a' \;\; a' \in \mathbb{Z} \\ &\iff\; 6|8a' + 3b \\ &b = 2b' \;\; b' \in \mathbb{Z} \\ &\iff\; 6|8a' + 6b' \\ \iff\; &3|a' \iff (12|a, 2|b) \end{aligned}$$

Das zeigt:

$$M \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})$$

Bemerkung 90. Um einheitlich einen endlich erzeugten Modul zu beschreiben, brauchen wir eine Normalform.

Definition 55.

$$R^* := \{\text{Einheiten in } R\} = \{a \in R | \exists b \in R : ab = 1\}$$

Definition 56. Sei R ein kommutativer Ring. Zeilen- bzw. Spaltenumformungen von $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ sind:

1. Ein vielfaches von einer Zeile (bzw. Spalte) zu einer anderen zu addieren.
2. Multiplizieren eine Zeile bzw. Spalte durch eine Einheit in R.
3. zwei Zeilen bzw. Spalten vertauschen

und deren Kombinationen.

Bemerkung 91. Nach wie vor ist 3. erreichbar durch eine Kombination von 1. und 2.

Bemerkung 92. Es gibt entpsrechende Elementarmatrixen, die an der entsprechenden Stelle $a \in R^*$ statt dem Einselement stehen haben. Äquivalent zu beschreiben M durch Erzeugende auf Relationen ist: Es gibt 2 freie Module, und Homomorphismus, so dass $M \cong$Cokern (endlicher Fall).

$$R^n \xrightarrow{\phi} R^n$$

Erzeugende: $v_1, \cdots, v_m \in M$
Relationen: $w_1, \cdots, w_m \in R^m = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1}) \cdots (a_{1n}, \cdots, a_{mn})$
Für jede Relation $b_1 v_1 + \cdots + b_m v_m = 0$ in M mit $b_1, \cdots, b_m \in R$ gibt es $c_1, \cdots, c_n \in R$ so dass

$$\begin{aligned} c_1 a_{11} + \cdots + c_n a_{1n} &= b_1 \\ &\cdots \\ c_1 a_{m1} + \cdots + c_n a_{mn} &= b_m \end{aligned}$$

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m \;\; 1 \leq j \leq n} \in M(n \times n, R)$$

Wenn dies der Fall ist, haben wir:

$$\begin{aligned} \operatorname{coker}(\phi) &\cong M \\ \bar{e}_i &\rightsquigarrow v_i \qquad\qquad 1 \leq i \leq m \end{aligned}$$

Bemerkung 93. Sei $A' \in M(m \times n, R)$ mit $A \rightsquigarrow A' \rightsquigarrow \phi'$, wobei $R^n \xrightarrow{\phi'} R^m$. Dann haben wir:

$$\operatorname{coker}(\phi) \cong \operatorname{coker}(\phi')$$

$A \rightsquigarrow A'$: A' entspricht $(v_1', \cdots, v_m')$, die kommen von $v_1, \cdots, v_m$ durch addieren von Vielfachem von einem zu einer anderen oder multiplizieren von einer Einheit. Das gleiche mit Spaltenumformungen zu A', A' entspricht $(w_1', \cdots, w_n')$

Proposition 20. *Sei $A \in M(m \times n, \mathbb{Z})$. Dann gibt es Produkte von Elementarmatrizen $Q \in M(m \times m, \mathbb{Z})$ und $P \in M(n \times n, \mathbb{Z})$ so dass*

$$A' := QAP^{-1}$$

eine solche Diagonalform hat:

$$\begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_r & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad d_1, \cdots, d_r \in \mathbb{N}_{>0} \; d_1 | d_{i+1} \forall i$$

Beweis 31. *Wir produzieren durch Zeilen-/Spaltenumformungen von $A \neq 0$ eine Matrix so dass:*

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

wobei die verbleibenden Einträge alle durch a teilbar sind. Durch eine Induktion genügt das.

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_0 & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

teilt a_0 die anderen Einträge in 1. Zeile/Spalte $\implies$ wir können diese zu 0 machen. Sonst: (Division mit Rest) wir bekommen einen Eintrag mit kleiner $|\ |$. Teilt a_0 alle übrigen Einträge $\rightarrow$ fertig. Sonst: $a \nmid b$ Wir bbekommen einen Eintrag $|\ | \leq a_0$

Beispiel 50.

$$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

¡++¿