LA. 15.9.08

$(x, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
$\hookrightarrow k^n \to V$

I. Grundbegriffe
(Körper, Vektorraum, usw).

II. Lineare Abbildungen
Matrizen

III Lösungen von linearen Gleichungen

IV. Determinanten, Eigenwerte, usw.

I. Grundbegriffe Kapitel 0

$\mathbb{R}$ heisst die reellen Zahlen: (Intuitives Verständnis) eine rigorose Konstruktion (in Analysis Vorlesung)

Daraus machen wir $\mathbb{R}^n$ - die Menge von n- von reelen Zahlen $(x_1, \dots x_2) \in \mathbb{R}^n$ bedeutet $x \in \mathbb{R} \dots x_n \in \mathbb{R}$

$(x_1 \dots x_n) = (y_1, \dots y_n) \iff x_i = y_i$ für alle i

$\mathbb{R}$ ist bloss eine Menge also nichts neues:

$x_1 = a_{1,0} \cdot a_{1,1} \cdot a_{1,2} \dots$
$\vdots$
$x_n = a_{n,0} \cdot a_{n,1} \cdot a_{n,2} \dots$

$\longrightarrow x = a_{n,1,0} \cdot a_{n,0} \cdot a_{1,1} \cdot \dots$

$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (fast) bijektiv

$\mathbb{R}^1$ = Zahlengerade, $\mathbb{R}^2$ - Ebene
$\mathbb{R}^3$ = Raum

$\mathbb{R}^n$ muss als mehr als bloss eine Menge betrachtet werden.

Was ist neu? Distanz, z.B. Richtung

Elemente in $\mathbb{R}^n$ stellen etwas geometrisches dar

Vektor = Richtung + Grösse

Formell: $\mathbb{R}^n$ besitzt eine Struktur von Vektorraum, und als Vektorraum kann man $\mathbb{R}^n$ von $\mathbb{R}^m$ unterscheiden, wenn $n \neq m$.

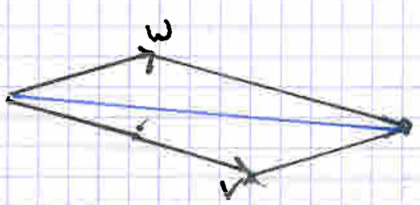
$\Rightarrow$ Hauptthema in der Mathematik: Strukturen

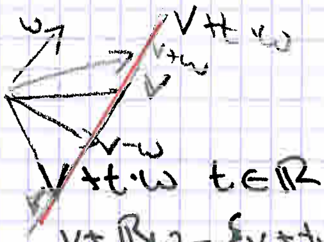
Bsp.: Mengen; $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$
Gruppen; $(\mathbb{R}, +)$, Menge + Operation
Körper; $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
Vektorraum; $(\mathbb{R}^n, +)$ $\oplus \mathbb{R}$ Gruppe + Multiplikation von Skalaren

$(-1)v + v = (-1)v + 1v = (-1+1)\cdot v = 0v = 0$ □

Beweis von $(-1)\cdot v = -v$

Summe von zwei Vektoren:



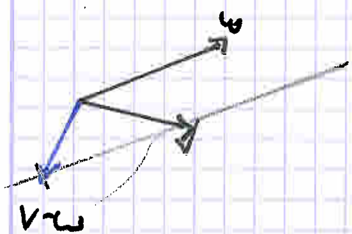


$v + t\cdot w$ $\quad t \in \mathbb{R}$

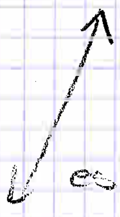
$v + \mathbb{R}w = \{v + tw \mid t \in \mathbb{R}\}$

Das ist die Gerade durch v und $v+w$ (wenn $w \neq 0$)

Differenz von zwei Vektoren:



*



es geht um die Gerade!

Definition: Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt Gerade wenn es zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ gibt, mit $w \neq 0$, so dass $A = v + \mathbb{R}w$.

Proposition 1: Sei A eine Gerade: Dann

(a). für beliebige $v, v' \in A$, $v \neq v'$, gilt $A = v + \mathbb{R}w$, wo $w = v' - v$

(b) $\exists i, 1 \leq i \leq n$ $\quad v, w \in \mathbb{R}^1$

~~$v_i = 0$, $w_i = 1$~~ so dass wenn man schreibt

$v = (x_1 \cdots x_n)$

$w = (y_1 \cdots y_n)$

haben wir $x_i = 0$, $y_i = 1$ und, $A = v + \mathbb{R}w$

Beweis: Gegeben: $A = v_0 + \mathbb{R}w_0$ (Gerade), $w_0 \neq 0$ ($v_0, w_0 \in \mathbb{R}^1$, $w_0 \neq 0$), $v \neq v'$

Für (a). haben wir auch $v, v' \in A$, das bedeutet $v = v_0 + tw_0$

$v' = v_0 + t'w_0$ $\quad (t, t' \in \mathbb{R})$, $v \neq v' \Rightarrow t \neq t'$ ← da sonst 0

Denn $\underbrace{v' - v}_{=w} = (t' - t)w_0$

Daraus folgt: • $v + s\cdot w = v_0 + tw_0 + s(t'-t)w_0$ $\quad s \in \mathbb{R}$

$= v_0 + (t + st' - st)w_0$

• $v_0 + sw_0 = (v - \frac{t}{t'-t})w + s(\frac{1}{t'-t}w)$

$= v + \frac{s-t}{t'-t}\cdot w$

Dann gilt:

(a) Wenn man durch $A = v + \mathbb{R}w$ und $A' = v' + \mathbb{R}w'$ die Geraden beschreibt, dann sind A und A' parallel (oder gleich), genau dann wenn $\exists t \in \mathbb{R}$ so dass $w' = t \cdot w$

(b) Falls die Bedingungen in (a) erfüllt sind, dann $A = A'$ genau dann wenn $A \cap A' \neq \emptyset$ A u. A' schneiden sich

<u>Beweis</u>: (a) "$\Rightarrow$" $A' = u + A \Rightarrow v' + \mathbb{R}w' = u + v + \mathbb{R}w \Rightarrow \exists t_0$ so dass $v' = u + v + t_0 w$ und. $\exists t_1$ so dass $v' + w' = u + v + t_1 w$

$w' = (t_1 - t_0) w$

"$\Leftarrow$" $w' = t \cdot w$ dann $A' = v' + \mathbb{R}\underbrace{t}_{\neq 0}w = v' + \mathbb{R}w = (v' - v) + \underbrace{v + \mathbb{R}w}_{A}$

$= (v' - v) + A$ □

(b) "$\Rightarrow$" ist klar

"$\Leftarrow$" wir haben durch (a) dass $\exists u \in \mathbb{R}^n$ so dass $A' = u + A$. sei $v_0 \in A \cap A'$, dann $v_0 \in A$ $\quad v_0 \in A'$

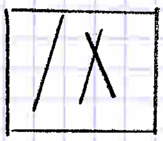
$u + v_0 \in A$

$\overset{(v \neq 0)}{\Rightarrow} A' = v_0 + \mathbb{R}u$

ähnlich: $\overset{(v \neq 0)}{\Rightarrow} A = v_0 + \mathbb{R}(-u) \subset v_0 + \mathbb{R}u = A'$ □

Gerade in $\mathbb{R}^n$: parallel od. nicht?

$n = 2$



Für verschiedene Geraden A, A' entweder A und A' parallel oder sie schneiden sich.

$n = 3$ Zwei Möglichkeiten für $A \cap A' = \emptyset$

- A u. A' sind parallel
- A u. A' sind windschief

Zwei Möglichkeiten für $A \cap A' \neq \emptyset$

- $A = A'$
- $A \cap A'$ besteht aus genau einem Punkt.

Können wir das aus der Parameterdarstellung erkennen?

Wir betrachten 2 ~~[illegible]~~ Geraden geg. durch Parameterdarstellung

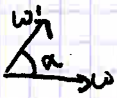
$A = v + \mathbb{R}w$

$A' = v' + \mathbb{R}w'$

$\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ Symetrie

$\langle v, v\rangle \geq 0$ $= 0$ wenn $v = 0$ ($\langle , \rangle$ ist positiv)

Kosinussatz:



$\cos\alpha = \frac{\langle w, w'\rangle}{\|w\|\cdot\|w'\|}$ — Länge vom w'

wenn $w(x_1 .. x_n)$, dann $\|w\| = \sqrt{x_1^2 + .. x_n^2}$

d.h. $\boxed{\|w\|^2 = \langle w, w\rangle}$

da $|w|\cdot|w'| \neq 0$

Wichtiges Fall: $\alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \langle w, w'\rangle = 0$ ($w \neq 0$, $w' \neq 0$)

$\Leftrightarrow w \perp w'$ (w u. w' sind orthogonal)

Cauchy-Schwarsche Ungleichung

$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\cdot\|w\|$ mit Gleichheit ~~genau~~ dann wenn v und w linear abhängig sind.

Bemerkungen: (i) klar dass wenn v u. w' linear abhängig sind $\Rightarrow$ Gleichheit

(ii) Es genügt zu beweisen, dass $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\cdot\|w\|$

~~(iii)~~

Beweis: 3 versch.

1. Der Satz folgt aus dem Kosinussatz
2. Induktionsbeweis: n=1 ist trivial $\Rightarrow$ n=2

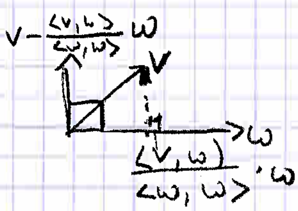
$$0 \leq (x_1 x_2' - x_2 x_1')^2$$

(n ≥ 3) mit $v = (x_1 .. x_n)$, $w = (x_1' .. x_n')$ haben wir:

$$\langle v, w\rangle = (x_1 x_1' .. + x_{n-1} x_{n-1}') + x_n x_n'$$
$$\leq \sqrt{x_1^2 .. x_{n-1}^2}\cdot\sqrt{x_1'^2 + .. + x_{n-1}'^2} + x_n x_n'$$
$$\leq \sqrt{\sqrt{x_1^2 .. x_{n-1}^2}^2 + x_n^2}\cdot\sqrt{\sqrt{x_1'^2 + .. x_{n-1}'^2}^2 + x_n'^2} = \|v\|\cdot\|w\|$$

3. $0 \leq \langle v - \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w, v - \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w\rangle$

$$= \langle v, v\rangle - 2\langle v, \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w\rangle + \frac{\langle v, w\rangle^2}{\langle w, w\rangle^2}\langle w, w\rangle \quad \text{Bilinearität}$$
$$= \|v\|^2 - \frac{\langle v, w\rangle^2}{\|w\|^2}$$
$$= \frac{1}{\|v\|^2}(\|v\|^2\cdot\|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2)$$



<u>Definition:</u> Sei $w=(x_1,x_2,x_3)$ und $w'=(y_1,y_2,y_3)$ Vektoren in $\mathbb{R}^3$.
Das Vektorprodukt $w \times w'$ ist definiert durch
$$w \times w' = (x_2y_3 - x_3y_2, -x_1y_3 + x_3y_1, x_1y_3 - x_2y_1)$$

<u>Bemerkungen:</u> (1) Wir sehen, dass $d = \langle v'-v, w\times w'\rangle$, also
Determinante von einer Matrix
$$u = \langle v'-v, w\times w'\rangle \frac{w\times w'}{\|w\times w'\|^2}$$
$$\Rightarrow \text{Distanz} = \|u\| = \frac{|\langle v'-v, w\times w'\rangle|}{\|w\times w'\|}$$

(2) d ist auch eine Determinante $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$

(3) Skalarprodukt u. Determinante
↳ haben eine Bedeutung in $\mathbb{R}^n$ für jedes n
Vektorprodukt → nur in $\mathbb{R}^3$

<u>Eigenschaften des Vektorproduktes</u>

- Bilinearität
- Schiefsymmetrie $w \times w' = -w' \times w$
- $\|v\times w\|^2 = \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2$
- $\langle v\times w, v\rangle = 0$, $\langle v \times w, w\rangle = 0$ →
- $v \times w = 0 \Leftrightarrow v, w$ linear abhängig (im Besonderen: $v \times v = 0$)

<u>I. Grundbegriffe</u>

Es gibt Abbildungen zwischen Mengen:
$f: X \to Y$ oder $X \xrightarrow{f} Y$
Eine Abbildung ist eine Regel, die ein Element von X nimmt und ein Element von Y produziert.
<u>Formell:</u> $X \times Y$ die Menge von Paaren
$\cup$
Γ eine Teilmenge von $X \times Y$
Γ mit der Spezialform: dass für jedes $x \in X$
genau ein $y \in Y$ existiert so dass $(x,y) \in \Gamma$

<u>Definition:</u> Eine Abbildung von X nach Y ist $f: X \to Y$ gegeben durch eine Teilmenge $\Gamma \subset X \times Y$ mit der geg. Spezialform
Wenn $(x,y) \in \Gamma$, dann haben wir $f(x) = y$.

Beweis: "⇒" Es sei f gegeben, bijektiv. Dann definiert man $g: Y \to X$ durch $g(y) := x$ immer wenn $f(x) = y$. g ist eine Abbildung mit dieser Definition: $g \circ f = id_X$ und $f \circ g = id_Y$.

"⇐" Es seien f und g gegeben, so dass $g \circ f = id_X$ und $f \circ g = id_Y$, dann haben wir $f(g(y)) = y$ ($\Rightarrow f$ ist surjektiv)
f ist auch injektiv: $f(x) = f(x') \Rightarrow g(f(x)) = g(f(x')) = x'$
⇒ Also ist f bijektiv.

Operationen mit Mengen

X, Y seien Teilmengen einer gemeinsamen Menge, dann haben wir die folgenden Operationen:

Vereinigung $X \cup Y$
Durchschnitt $X \cap Y$
Differenz $X \setminus Y = \{x \in X \mid x \notin Y\}$
(auch $\bigcup_{i \in I} X_i$) (auch $\bigcap_{i \in I} X_i$)

Beschränkung: $f|T$, $T \subset X$, $f: X \to Y$

Endliche Mengen

$\{1, 2, \dots n\}$ $(n \in \mathbb{N})$

Definition: X ist endlich wenn es $n \in \mathbb{N}$ gibt und eine bijektive Abbildung $X \to \{1, 2, \dots n\}$
X ist unendlich wenn es nicht endlich ist.
z.B. $\mathbb{N}$ ist unendlich.

- X ist abzählbar wenn es eine bijektive Abbildung $X \to \mathbb{N}$ ist
- X ist unabzählbar wenn X unendlich und nicht abzählbar ist.

$\mathbb{Q}$ ist abzählbar: jedes Element hat einen bestimmten Nenner!

Nenner 1 → ganze Zahlen 0, −1, −2, ...
2 → $-1/2, 3/2, -3/2 \dots$
3 → $1/3 \dots$
⋮
→ Man hat eine Liste ⇒ abzählbar

Cantorsche Diagonalverfahren ⇝ z.B. $\mathbb{R}$

<u>Beispiele:</u> $\underbrace{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}}_{+}$, $\underbrace{\mathbb{R}\setminus\{0\} \quad \mathbb{R}_{>0}}_{\cdot}$ abelsche Gruppen

Bsp. für nicht kommut. Gruppe: Sei M eine beliebige Menge, dann ist $\{$bijektive Abbildungen $M \to M\}$ mit $\circ$ ~~*~~ eine Gruppe (man benutzt Proposition 2 ; S. 5))

<u>Bemerkung:</u> Falls $M = \{1, 2 .. n)$ heisst diese Gruppe S_n (Symetrische Gruppe

<u>Definition:</u> Ein <u>Ring</u> (mit Einselement) ist ein Tripel $(\mathbb{R}, +, -)$ so dass: $\quad +, \circ \quad \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(\mathbb{R}_1)$ $(\mathbb{R}, +)$ ist eine abelsche Gruppe (mit Identität als 0 bezeichnet und inverses $-a$)

$(\mathbb{R}2)$ $\cdot$ ist distributiv $a(b+c) = ab + ac \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$
$(a+b)\cdot c = ac + bc$

$(\mathbb{R}_3)$ $\cdot$ ist assoziativ $(ab)c = a(bc) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

$(\mathbb{R}_4)$ $\exists 1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$ so dass $1\cdot a = a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Bsp.: $\mathbb{Z}$

Ein Ring heisst kommutativ wenn $\cdot$ kommutativ ist

<u>Definition:</u> Ein Körper ist ein kommutatives Ring, in dem jedes Element ausser 0 ~~hat~~ ein multiplikatives Inverses hat:
$\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \quad \exists a' \in \mathbb{R}$ so dass $a'a = 1$

<u>Bemerkung:</u> (i) Man schreibt oft k od K für einen Körper
(ii) Das Axiom von Körpern macht aus ~~*~~ $k \setminus 0$ eine (mit $\cdot$) Gruppe

<u>Beispiele:</u> $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$

<u>Definition:</u> Ein Vektorraum über dem Körper K (oder K-Vektorraum) ist ein Tripel $(V, +, *)$
$+ : V \times V \to V$
$* : K \times K \to V$

Bsp: $2 \mid (1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})$ aber $2 \nmid (1 \pm \sqrt{5})$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] := \{a+b\sqrt{5} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$

<u>Definition:</u> Sei R ein Integritätsbereich. Dann ist R ein Ring mit eindeutiger Primelementzerlegung, wenn jedes $c \neq 0$ $c \in R^*$ als: $c = t_1 t_2 \dots t_r$ t_i irreducable $\forall i$, geschrieben werden kann.
eindeutig in Sinne dass, wenn man auch
$c = \tilde{t}_1 \cdots \tilde{t}_s$ $\tilde{t}_i$ irreducable $\forall i$ hat, dann ist $r = s$ und es existieren $\sigma \in S_r$, $u_i \in R^*$ für $1 \leq i \leq r$ mit $\tilde{t}_{\sigma(i)} = u_i t_i$ $\forall i$
Bsp. $\mathbb{Z}$.

<u>Definition:</u> Sei R ein Integritätsbereich. Dann heißt R ein euklidischer Ring, wenn es eine Funktion
$v: R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ gibt mit den folgenden Eigenschaften:
(i) $\forall c,d \in R$ mit $d \neq 0$ es gibt $q,r \in R$ mit $c = qd + r$ und entweder $r = 0$ oder $v(r) < v(d)$
(ii) $\forall c,d \in R \setminus 0$ gilt stets $v(cd) \geq v(c)$.
Die Funktion v heißt euklidische Normfunktion

Bsp.: $\mathbb{Z}$ mit $|\ \ |$
$\mathbb{R}[X]$ mit Grad (Übungsblatt)
$K[X]$ K = beliebiger Körper

<u>Faktum:</u> Jeder euklidische Ring ist ein Ring mit eindeutiger Primelementzerlegung.
Eigenschaft (i) heißt Division mit Rest.

$$(4x^3+3x^2+1):(x^2+2) = 4x+3$$
$$\begin{array}{l} 4x^3 \quad +8x \\ \hline \quad 3x^2 - 8x + 1 \\ \quad 3x^2 \quad\quad +6 \\ \hline \quad\quad -8x - 5 \end{array}$$

$4x^3+3x^2+1 = (4x+3)(x^2+2) + (-8x-5)$ ← Der Grad vom Rest ist kleiner als der Anfang hier $4x^3$

Definition: Sei K ein Körper und V und W Vektorräume über K. Eine lineare Abbildung von V nach W ist eine Abbildung $f: V \to W$ so dass
$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x,y \in V$
$f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \forall \lambda \in K,\ x \in V$

Andere Begriffe: (gelten für alle Strukturen)
f, ein Morphismus von Gruppen, Ringen od. Vektorräumen, heisst
Monomorphismus $\Leftrightarrow$ f injektiv ist
Epimorphismus $\Leftrightarrow$ f surjektiv ist
Endomorphismus $\Leftrightarrow$ gleicher Definitions- + Zielbereich

In allen Kontexten gilt:
Isomorphismus $\Leftrightarrow$ f den Definitions- u. Zielbereich identifiziert
bijektiv
Automorphismus $\Leftrightarrow$ Endomorphismus der Isomorphismus ist

Lineare Abbildungen, Basis, Dimension
Seien K ein Körper und V ein Vektorraum
Definition: Sei I eine Menge. Dann nennen wir eine Kollektion $(v_i)_{i\in I}$ von Elementen von V linear abhängig, falls es $(c_i)_{i\in I}$ gibt mit $c_i \in K\ \forall i$ so dass
(i) nur endlich viele c_i verschieden von 0 sind
(ii) $c_i \neq 0$ für mindestens ein $i \in I$
(iii) $\sum_{i\in I} c_i \cdot v_i = 0$

Die Kollektion heisst linear unabhängig, wenn sie nicht linear abhängig ist.

Beispiel: In K^n ist $((1,0,..,0)$
$(0,1,0,...,0)$
$(0,0,...,1))$ linear unabhängig.

Notation: $e_i := (0,..0,1,0,..0)$ wobei die 1 an der i-ten Stelle steht.

Konvention: ~~Ist ein Platz,~~ Im Fall $(v_1 .. v_n)$ von Vektoren ist $I = \{1, 2, .. n\}$
Im Fall einer Folge: $(v_i) = (v_1 .. v_2 .. v_n)$, ist $I = \mathbb{N}_{>0}$
Indexmenge

Sehr wichtig sind Endomorphismen von Vektorräumen.

Letztes mal: lineare (un)abhängigkeit u. span (v_i)

<u>Definition:</u> Sei V ein Vektorraum und $(v_i)_{i\in I}$ eine Kollektion von Vektoren. Dann heisst ~~diese~~ $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis, wenn $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig ist $\underbrace{\text{span}(v_i) = V}$
"v_i ist ein erzeugendes System

<u>Bsp.</u> Die kanonische Basis von K^n ist $(e_1 \dots e_n)$ wir erinnern uns, dass $e_i = (0,\dots,0,\underset{\uparrow \text{ i-te Stelle}}{1},0\dots0)$

<u>Lemma:</u> Sei V ein Vektorraum und $(v_i)_{i\in I}$ eine Kollektion von Vektoren. Sei $i_0 \in I$

(i) Ist $(v_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ linear abhängig, dann ist $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig $\Leftrightarrow v_{i_0} \notin \text{span}(v_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$

(ii) Ist $\text{span}(v_i)_{i\in I} = V$, dann ist $(v_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}} = V \Leftrightarrow \exists (c_i)_{i\in I}, c_i \in K$ $c_{i_0} \neq 0$ (nur endlich viele $c_i \neq 0$) mit $\sum_{i=1} c_i v_i = 0$

<u>Beweis</u> (i) Ist ~~$(v_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$~~ $v_{i_0} \in \text{span}(v_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$, dann haben wir $v_{i_0} = \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} c_i v_i$ mit $c_i \in K$

dann setzen wir $c_{i_0} := -1$, dann haben wir $\sum_{i\in I} c_i v_i = 0$

Umgekehrt: ist $v_{i_0} \notin \text{span}(v_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$, und ist $(c_i)_{i\in I}$ eine Kollektion von Skalaren, nicht alle $=0$, mit $\sum_{i\in I} c_i v_i = 0$. Wenn $c_{i_0} = 0$, dann ist $\sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} c_i v_i = 0 \Leftarrow$ Widerspruch!

Wenn $c_i \neq 0$, dann $\sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} c_i v_i = -c_{i_0} v_{i_0}$

$-\frac{1}{c_{i_0}} \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} c_i v_i = v_{i_0} \Leftarrow$ Widerspruch! $\boxed{}$

(ii) Ist $\text{span}(v_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}} = V$, dann gibt es $(c_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ so dass $v_{i_0} = \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} c_i v_i$. Also $0 = -v_{i_0} + \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} c_i v_i$

Umgekehrt, ist $\sum_{i\in I} c_i v_i = 0$ mit $c_i \neq 0$, ist $v \in V$, dann gibt es $(d_i)_{i\in I}$ mit $\sum_{i\in I} d_i v_i = v$. Dann ist $v = d_{i_0} v_{i_0} + \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} d_i v_i$

$= d_{i_0}\left(-\frac{1}{c_{i_0}} \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} c_i v_i\right) + \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} d_i v_i \in \text{span}(v_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ $\boxed{}$

Ist $\overset{*}{\sum_{i\in I}} d_i \tilde{v}_i = 0$, dann $0 = d_{i_0} v_{i_0} + \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} d_i \tilde{v}_i = d_{i_0}\left(\sum_{i\in I} c_i v_i\right) + \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} d_i v_i$. Da $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis ist, haben wir $c_{i_0} d_{i_0} = 0$

$c_i d_{i_0} + d_i = 0 \ \forall i \neq i_0$

da $c_{i_0} \neq 0 \Rightarrow d_{i_0} = 0$

und $d_i = 0 \ \forall i \neq i_0$

$\Rightarrow *$ □

Proposition 4: Sei $(v_i)_{i\in I}$ und $(w_j)_{j\in J}$ Basen eines Vektorraum V. Ist I endlich, dann ist auch J endlich und $|I| = |J|$

Anzahl Elemente

Beweis: Durch Induktion nach $n := \left| \{ i \in I \mid v_i \in \{w_j\}_{j\in J} \} \right|$

IA: $n = 0$ o.B.d.A ist $I \subset J$. Dann folgt es aus der Proposition 3 dass $I = J$

IS: $n > 0 \Rightarrow \exists\, i_0 \in I$ mit $v_{i_0} \notin \{w_j\}_{j\in J}$ Es gibt $j_0 \in J$ mit $w_{j_0} \notin \operatorname{Span}(v_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$. Dann haben wir $w_{j_0} = \sum_{i\in I} c_i v_i$ mit $c_{i_0} \neq 0$

Jetzt verwenden wir das Austauschverfahren: wir erhalten die neue Basis $(\tilde{v}_i) \overset{IV}{\Rightarrow} |J| = |I|$ □

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \in M(m\times n, K)$$

I $\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$ II

$$A' := \left(\lambda a_{i1} + a_{j1} \dots \lambda a_{in} + a_{jn} \right)$$

Fortsetzung von dem Beweis von Proposition 7

Wir müssen zeigen $\underline{ZR(A')} = ZR(A)$ Zeilenrang

Spaltenrang (A') = Spaltenrang (A)

falls $A \xrightarrow{\text{II}} A'$

Dann haben wir:

$$c_1 a'_1 + \dots + c_m a'_m = c_1 a_1 + \dots (\lambda c_i + c_j) a_j + \dots + c_m a_m$$

$\left(\begin{array}{l} a_i := i^{\text{k}} \text{ Zeilenvektor von } A \\ a'_i = i^{\text{k}} \quad " \quad " \quad A' \end{array} \right)$

$$b_1 a_1 + \dots + b_m a_m = b_1 a'_1 + \dots + (-\lambda b_i + b_j) a'_j + \dots + b_m a'_m$$

Also haben wir $ZR(A) = ZR(A')$

Wir haben einen Automorphismus $(x_1 \dots x_n) \xrightarrow{g} (x_1, \dots x_{j-1}, \lambda x_i + x_j + \dots x_m)$ von K^m wobei g jeden Spaltenvektor von A auf einen Spaltenvektor von A' abbildet. Also haben wir $g(SR(A)) = SR(A')$, und deshalb Splatenrang (A) = Spaltenrang (A')

Beispiel: von Zeilenumformungen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

II 2 Mal $\downarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

III $\downarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

II $\downarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} j_1 = 1 \\ j_2 = 3 \\ j_3 = 4 \end{array} \quad j_1 = n\text{te Zeile}$$

Definition: Eine Matrix A ist von Zeilenstufenform, wenn es Zahlen $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ mit $k \leq m$, so dass $a_{i j_i} \neq 0$ für $\underline{1 \leq i \leq k}$ und $(i > k \vee j < j_i) \Rightarrow a_{ij} = 0$

Also A sieht im allg. aus wie folgt:

Zu jedem $A \in M(m \times n, K)$ definieren wir $j_i := j_i(A) := \min(\{j \mid a_{ij} \neq 0\} \cup \{n+i\})$

Behauptung: A ist in Zeilenstufenform

$\Updownarrow$ (a)

$j_1 < j_2 < \ldots < j_m$

$\Updownarrow$ (b)

$\forall i < m \quad j_i < \min\{j_{i+1}, \ldots j_m\}$

Beweis: (a) "⇒" Ist A in Zeilenstufenform also stimmen die $j_i(A)$ mit den j_i von der Definition der Zeilenstufenform überein.

$j_1 < j_2 \leq \ldots < j_k < \underset{n+k+1}{\overset{\shortparallel}{j_{k+1}}}$

"⇐" ist $j_1 < \ldots < j_m$ also setzen wir $k := \#\{i \mid j_i \leq n\}$ Anzahl von..

Wir sehen, dass A die Definition der Zeilenstufenform mit $j_1 < \ldots < j_k$ trifft.

(b) "⇒" Ist $j_1 < \ldots < j_m$ also ist $j_i < j_{i+1} = \min\{j_{i+1}, \ldots, j_m\}$

"⇐" Ist $j_1 < j_{i+1} = \min\{j_{i+1}, \ldots j_m\}\ \forall i$, also zeigen wir, dass $j_i < j_{i+1} < \ldots < j_m$ für $\forall i$. Durch fallende Induktion nach i:

IA: $i = m$ (trivial)

IS: $\overset{\leftarrow \text{IV.}}{j_{i+1} < \ldots < j_m}$, dann haben wir

$j_i < \min\{j_{i+1} \ldots j_m\} = j_{i+1} < \ldots < j_m$ $\blacksquare$

Beweis Proposition 9: durch fallende Induktion ~~nach~~ über N.

$N := \min\{2i-1 \mid j_i > \min(j_{i+1} \cdots j_m)\} \cup \{2i \mid i_2 = \min(j_{i+1} \cdots j_m)\} \cup \{2m\}$

IA: $n = 2m \iff$ A ist in Zeilenstufenform

IS: $n < 2m$

(i) n ungerade, $n = 2i-1$ $j_i > \min(j_{i+1}, \ldots j_m)$

mit $j_1 < \min\{j_2 \ldots j_m\} \ldots j_{i-1} < \min\{j_i \ldots j_m\}$

Also sei l so dass $j_l = \min\{j_{i+1} \ldots j_m\}$, definieren A' durch

13.10.08

2. u. 3 Zeile wechseln

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= y_1 \\ 2x_3 - x_4 &= y_1 + y_3 \\ -x_4 &= y_2 \\ 2x_4 &= -y_1 + y_4 \end{aligned}$$

2 × 3. Zeile + 4. Zeile

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= y_1 \\ 2x_3 - x_4 &= y_1 + y_3 \\ -x_4 &= y_2 \\ 0 &= -y_1 + 2y_2 + y_4 \end{aligned}$$

Zeilenstufenform

Das System von Gleichungen hat keine Lösungen, falls $-y_1 + 2y_2 + y_4 \neq 0$. Falls $-y_1 + 2y_2 + y_4 = 0$ haben wir die Lösungen:

$$x_4 = -y_2$$
$$x_3 = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_3 + x_4) = \tfrac{1}{2}(y_1 - y_2 + y_3) \quad 3/2$$
$$x_1 = -2x_2 - 3x_3 + 2x_4 + y_1 = -2x_2 - 3(\tfrac{1}{2}(y_1 - y_2 + y_3)) - 2y_2 + y_1$$

Wir schreiben: $x_2 = t$, ein Parameter und dies wird zu:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -\tfrac{1}{2}y_1 - \tfrac{1}{2}y_2 - \tfrac{3}{2}y_3 - 2t \\ x_2 &= t \\ x_3 &= \tfrac{1}{2}(y_1 - y_2 + y_3) \\ x_4 &= -y_2 \end{aligned}\right\} \text{parametrisierte Lösungen durch } t \in \mathbb{R}$$

Das Gausche-Eliminationsverfahren kann auch mit Parametern als Koeffizienten durchgeführt werden.

Beispiel: (Verschiedene Fälle)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} ax + by &= 1 \\ bx + ay &= 0 \end{aligned}$$

1. $a=0$, $b=0$: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, keine Lösung

2. $a=0$, $b\neq 0$: $\begin{bmatrix} b & \cancel{a}\,0 \\ \cancel{a}\,0 & b \end{bmatrix}$ $\quad \begin{aligned} bx + \cancel{ay} &= 0 \\ \cancel{ax} + by &= 1 \end{aligned}$ ist in Zeilenstufenform, da diagonal

3. $a \neq 0$: $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & \frac{-b^2}{a} + a \end{bmatrix}$ $\quad \begin{aligned} ax + by &= 1 \\ \left(\frac{-b^2}{a} + a\right)y &= \frac{-b}{a} \end{aligned}$

16.10.08 1

Letztes mal:

Summe von Vektorräumen

$W, W' \subseteq V$

$W + W' \subseteq V$

Falls W und W' endlich dimensional sind.

Dimensionsformel d.h. $W + W' = \dim W + \dim W' - \dim W \cap W'$

Im Beweis: $(v_1, \ldots v_n, w_1, \ldots w_k)$ Basis von W

$(v_1, \ldots v_n, w_1', \ldots w_l')$ " W'

zu zeigen: $(v_1 \ldots v_n, w_1 \ldots w_k, w_1' \ldots w_l')$ lin. unabhängig

$$\underbrace{a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n + c_1 w_1 + \ldots + c_k w_k}_{\in W \cap W'} + c_1' w_1' + \ldots + c_l' w_l' = 0$$

$$\underbrace{a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n + c_1 w_1 + \ldots + c_k w_k}_{\in W} = \underbrace{-c_1' w_1' - \ldots - c_l' w_l'}_{\in W'} = 0$$

Definition: V heisst direkte Summe von Untervektorräumen W und W' falls $V = W + W'$ und $W \cap W' \{0\}$.

Geschrieben $V = W \oplus W'$

Notation für Vektorsumme

Allgemeiner: Ist $W_i \subset V$ eine Familie von Untervektorräumen indexiert durch I, dann schreibt man $V = \bigoplus_{i \in I} W_i$, wenn jedes $v \in V$ eindeutig als $\sum_{i \in I} c_i w_i$ geschrieben werden kann, wobei $w_i \in W_i$, $c_i \in K$ nur endlich viele $\neq 0$.

Beispiel: $K^n = \bigoplus_{i=1}^{n} K \cdot e_i$ $K \cdot e_i = \mathrm{Span}\{e_i\}$

Menge mit einem Element

$e_i = (0, \ldots 0, 1, 0, 0 \ldots 0)$

i-tes Element

$\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \cdot i$

$\mathbb{R} := \mathbb{R} \cdot 1 = \mathrm{Span}\{1\}$

$\mathbb{R} \cdot i := \mathrm{Span}\{i\}$

Existenz von Komplementen

Sei V ein Vektorraum und $W \subset V$ ein Untervektorraum, dann heisst Komplement ein Untervektorraum $W' \subseteq W$ so dass $V = W \oplus W'$.

Lemma: Seien $f, g: V \to W$ lineare Abbildungen, und $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von V. Ist $f(v_i) = g(v_i)$ $\forall i \in I$, dann folgt $f = g$.

Beweis: Reduziert zu: $f(v_i) = 0$ $\forall v_i \Rightarrow f = 0$
zu zeigen: $f(v) = 0$, $v \in V$ beliebiges Element.
Wir schreiben $v = \sum c_i v_i \Rightarrow f\ \sum c_i(f(v_i)) = 0$

Notation: $Hom_K(V, W)$ für die Menge von linearen Abbildungen $V \to W$. Man schreibt $Hom(V, W)$ wenn der Körper klar ist

Beweis: In Symbolen, müssen wir zeigen, dass die Abbildungen $Hom(K^n, K^m) \rightleftarrows M(m\times n, K)$ wohldefiniert sind und gegenseitige Inverse sind.

$f \longmapsto A$ wobei i-ter Spaltenvektor $= f(e_i)$

$(x_1 \dots x_n) \mapsto (\dots \underbrace{a_{i1}x_1 \dots + a_{in}x_n}_{i\text{-te Stelle}} \dots) \longleftarrow A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$

$(y_1 \dots y_n) \mapsto (\dots, a_{i1}y_1 + \dots + a_{in}y_n, \dots)$
$(0, 0 \dots 1 0 \dots 0) \mapsto (a_{1i}, a_{2i} \dots a_{mi})$

zu checken: $(x_1+y_1 \dots x_n+y_n) \longmapsto (\dots (a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n) + (a_{i1}y_1 + \dots a_{in}y_n), \dots)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$
$(x_1+y_1 \dots + x_n+y_n) \mapsto (\dots, a_{i1}(x_1+y_1) + \dots + a_{in}(x_n+y_n), \dots)$

ähnlich für $(\lambda x_1 \dots \lambda x_n)$

- Sei $f: K^n \to K^m$ eine lineare Abbildung. $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi} & & a_{mn} \end{pmatrix}$
$f \longmapsto A$
$(x_1, \dots x_n)(\dots \quad) \longleftrightarrow$
Von dem Lemma genügt es zu zeigen $f(e_i) = (a_{1i}, \dots a_{mi})$ ✓

- Umgekehrt: $((x_1 \dots x_n)(\,)) \longleftrightarrow A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$
$f \quad \cdot /\!/ \qquad \longleftrightarrow$
Matrix, deren i-te Spaltenvektor $f(e_i)$

reduzierte Frage: in der i-ten Stelle von $f(e_j)$ steht a_{ij}? ✓
Wir rechnen: $f(e_j) = (a_{1j}, \dots \underset{\uparrow\ i\text{-te Stelle}}{a_{ij}}, \dots a_{mj})$

$f: K^m \to K^l \quad g: K^n \to K^m$ mit $A \in M(l\times m, K)$ $B \in M(m\times n, K)$
$f \circ g: K^n \to K^l$
von Übungsblatt $\to C := A \cdot B \in Mat(l\times n, K) \mapsto h: K^n \to K^l$

16.10.08

Kern, Bild, Faser

Definition: Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. Die Faser von f sind die Mengen $f^{-1}(w), w \in W$. Der Kern von f ist $f^{-1}(0)$. Das Bild von f ist $\{f(v) \mid v \in V\}$

Notation: $Ker(f)$ für den Kern von f
$Im(f)$ für das Bild von f 20.10.08

Proposition 13: Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann:
(a) Das Bild von f ist ein Untervektorraum von W
(b) Der Kern von f ist ein Untervektorraum von V
(c) Jede Faser $\emptyset \neq f^{-1}(w)$ $(w \in W)$ hat die Form $v + Ker(f)$, wobei $v \in f^{-1}(w)$ beliebig.

Beweis: (a) Sei $w = f(v)$ und $w' = f(v')$, also ist $w + w' = f(v) + f(v') \in Im(f)$ und $\lambda w = f(\lambda v)$ für $\lambda \in K$
(b) Sei $v, v' \in Ker(f)$ also ist $f(v+v') = f(v) + f(v') = 0$ und $f(\lambda v) = \lambda f(v) = 0$
(c) Sei $v \in f^{-1}(w)$. Wir müssen zeigen $f^{-1}(w) = v + Ker(f)$
'$\supseteq$' $v' \in Ker(f) \Rightarrow f(v+v') = f(v) + f(v') = w + 0 = w$
'$\subseteq$' $u \in f^{-1}(w) \Rightarrow f(u-v) = f(u) - f(v) = w - w = 0$
$\Rightarrow u - v \in Ker(f)$ von $u = (u-v) + v \in v + Ker(f)$

Korollar: $Ker(f) = 0 \Leftrightarrow f$ ist injektiv

Proposition 14: Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung, mit $\dim V < \infty$
Also ist $\dim V = \dim Im(f) + \dim Ker(f)$

Bemerkung: Ist $(v_1, .. v_e)$ eine Basis von V, also ist $(f(v_1), .. f(v_e))$ ein Erzeugendessystem vom $Im(f)$ also ist $\dim Im(f) < \infty$.

Beweis: Sei $(v_1 .. v_k)$ eine Basis von $Ker(f)$ und $(w_1, .. w_r)$ eine Basis vom $Im(f)$. Sei u_i ein Element von $f^{-1}(w_i)$ für $1 \leq i \leq r$.

Beh.: $(v_1, .., v_k, u_1, .. u_r)$ ist eine Basis von V. Sei $v \in V$ mit $f(v) = c_1 w_1 + .. + c_r w_r$. Sei $v' := c_1 v_1 + .. + c_r u_r$.
$f(v - v') = f(v) - f(v') = c_1 w_1 + .. + c_r w_r - (c_1 w_1 + .. + c_r w_r) = 0$
Deshalb haben wir $v - v' = b_1 v_1 + .. + b_k v_k$ $b_i c_i \in K$

Addition: $(\omega+V)+(\omega'+V)=\{v+\omega+v'+\omega' \mid v,v'\in V\}$

Addition von Mengen

$=(\omega+\omega')+V$

Multiplikation: $\lambda(\omega+V):=\lambda\omega+V$

$\omega+V=\omega'+V \Leftrightarrow \omega'-\omega\in V$

Ist $\omega+V=\omega'+V$ also: $\lambda(\omega+V)=\lambda\omega+V$

$\lambda(\omega'+V)=\lambda\omega'+V$

$=\lambda(\omega'-\omega)+V$

$=\lambda\omega+V$

* Wir haben eine lineare Abbildung, die kanonisch heißt.

$W\to W/V \to$ Eigenschaften: - ist surjektiv, 0-Element $=V$

$w\mapsto w+V$ mit $\ker=V$

Es folgt aus der Dimensionsformel:

- ist W endlich dimensional, dann haben wir $\dim W/V=\dim W-\dim V$

Definition: Sei $f: V\to W$ eine lineare Abbildung. Der Cokern von f ist $W/\mathrm{Im}(f)$, der Quotientenvektorraum von W durch das Bild von f. Notation: Cokern $=\mathrm{Coker}(f)$.

Es ist klar, dass $\mathrm{Coker}(f)=0 \Leftrightarrow f$ surjektiv ist.

(Jedes Element von $W/\mathrm{Im}(f)$ ist 0!) also jed. Element liegt im Bild.

- Weiter haben wir:

$\dim \mathrm{Coker}(f)=m-\dim \mathrm{Im}(f)$

$=m-\mathrm{rang}(A)$

Also:

$\mathrm{rang}(A)=m-\dim \mathrm{Coker}(f)$ dual zu: $\mathrm{rang}(A)=n-\dim \mathrm{Ker}(f)$

$f: K^n\to K^m$, $\mathrm{rang}(A)\leq \min(m,n)$

$\updownarrow$

$A\in M(m\times n, K)$

Falls $n<m$: f ist nie surjektiv, f ist ~~[illegible]~~ injektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rang}(A)=n$

Falls $m<n$: f ist nie injektiv, f ist surjektiv $\Leftrightarrow \mathrm{rang}(A)=m$

Falls $m=n$: f injektiv $\Leftrightarrow f$ surjektiv $\Leftrightarrow f$ bijektiv $\Leftrightarrow A$ invertierbar

$\left.\begin{array}{l}\exists\ AB=BA=E_n \text{ sodass:}\\ B\in M(n\times n, K)\end{array}\right\}$ invertierbar.

23.10.

Definition: Die $n \times n$ Elementarmatrizen über K sind:

$$\begin{array}{c} \\ i\text{-te} \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrizen mit $a_{ii} = \lambda$, $a_{jj} = 1$ für $j \neq i$

$1 \leq i \leq n$
$\lambda \in K^*$

$1 \leq i \leq n$, $i \neq j$, $\lambda \in K$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \lambda \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Dreiecksmatrizen mit $\begin{cases} a_{rr} = 1 & \forall r \\ a_{ij} = \lambda & \\ a_{rs} = 0 & \forall r \neq s, (r,s) \neq (i,j) \end{cases}$

$$\begin{array}{c} \\ i\text{-te} \rightarrow \\ j\text{-te} \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Permutationsmatrix mit: $n-2$ Diagonaleinträgen $= 1$

- Einträge $0, 1$
- In jeder Zeile genau 1mal 1 u. in jed. Spalte " " "

$1 \leq i < j \leq n$

Proposition 15: Ist $A \in M(m \times n; K)$ durch elementare Zeilenumformungen nach A' überführt, dann ist A nach A' durch linksseitige Multiplikation von Elementarmatrizen überführt.

Beweis:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{m \times m \text{ Elementarmatrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{i1} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A'}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \lambda \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}}_{m \times m \text{ El.}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A'}$$

Proposition 16: $GL_n(K)$ wird von Elementarmatrizen erzeugt.

Beweis: Durch Gauß'sches Eliminationsverfahren kann $A \in GL_n(K)$ ($\operatorname{rang}(A) = n$) zu einer Matrix A' in Stufenform gebracht werden mit $\neq 0$ Diagonaleinträgen.

23.10.01

Operation: Ist $f: V \to W$ eine lineare Abbildung, dann haben wir eine ~~?~~ induzierte lineare Abbildung

$f^*: W^* \to V^*$

$V \xrightarrow{f} W \to K$

Dies ergibt eine lin. Abbildung

$\mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$ ~~?~~ Funktionalität ist

$g: U \to V$, $f: V \to W$ dann ist $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$

Falls $V = K^n$, also ist $V^* \cong K^n$

Basis $e_1 \dots e_n$ $\qquad e_1^* \dots e_n^*$ wobei $e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$

Proposition 17: Wir haben ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}(K^n, K^m) & \xrightarrow{f \mapsto f^*} & \mathrm{Hom}((K^m)^*, (K^n)^*) & \cong & \mathrm{Hom}(K^m, K^n) \\ \updownarrow & & & & \updownarrow \\ M(m \times n, K) & & \xrightarrow{A \mapsto A^t} & & M(n \times m, K) \end{array}$$

27.10

Definition:

$GL_n(K)$ oder $GL(n; K)$ allgemeine lineare Gruppe

$= \{ A \in M(n \times n; K) \mid A \text{ invertierbar} \}$

Es gibt andere solche Gruppen, z.B. die projektive lineare Gruppe $PGL_n(K) := \{ A \in M(n \times n; K) \mid A \text{ invertierbar} \} / \sim$ wobei

$A \sim A' \Leftrightarrow \exists \lambda \in K^*$ sodass $A' = \lambda A$

Beweis von Proposition 17:

$M(m \times n; K)$ ist ein K-Vektorraum, von der Dimension mn.

Eine Basis ist $\{ E_i^j \}_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(K^n, K^m) & \xrightarrow{\text{dual}} & \mathrm{Hom}(K^m, K^n) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ M(m \times n; K) & \xrightarrow{\text{transponiert}} & M(n \times m, K) \end{array}$$

$K^m \cong (K^m)^*$, $K^n \cong (K^n)^*$

wobei

$$E_i^j = \begin{array}{c} \\ i\text{te Zeile} \to \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\uparrow$ $j$te Spalte

$$E_i^j \longrightarrow E_j^i$$

$$\begin{pmatrix} e_j \mapsto e_i \\ e_{j'} \mapsto 0 \quad j' \neq j \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} e_i^* \mapsto e_j^* \\ e_{i'}^* \mapsto 0 \quad i' \neq i \end{pmatrix}$$

27.10.08

Anwendungen zur Darstellung von linearen Abbildungen

(i) $V \to W$ (ii) $V \to V$

(i) $f: V \to W$ (V, W endl. dim Vektorräume)
$\dim V = n$
$\dim W = m$
$\Bigg\}$ gegeben

$\left.\begin{array}{l} A \text{ - Basis von } V \\ B \text{ - Basis von } W \end{array}\right\}$ - bestimmen $D \in M(m \times n, K)$

A', B' - neue Basen $D' \in M(m\times n, K)$

im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[dr, "\Phi_A"] \arrow[dd, "T = \Phi_{A'}^{-1}\circ\Phi_A"'] \arrow[rrr, bend left, "D = \Phi_B^{-1}\circ f\circ\Phi_A"] & & & K^m \arrow[dl, "\Phi_B"'] \arrow[dd, "S = \Phi_{B'}^{-1}\circ\Phi_B"] \\
 & V \arrow[r] & W & \\
K^n \arrow[ur, "\Phi_{A'}"'] \arrow[rrr, bend right, "\Phi_{B'}^{-1}\circ f\circ\Phi_{A'}"'] & & & K^m \arrow[ul, "\Phi_{B'}"]
\end{tikzcd}$$

($\Rightarrow$ ganzes Diagramm ist kommutativ)

Das Diagramm ist kommutativ, also haben wir:

$D'T = SD$ wobei $S \in M(m\times n, K)$ zu $\Phi_{B'}^{-1} \circ \Phi_B$ enspricht.

Anders geschrieben:

$D' = SDT^{-1}$

Definition: Matrizen D und D' derselben Grösse sind äquivalent falls es invertierbare Matrizen S und T gibt, so dass $D' = SDT^{-1}$. Dies ist eine Äquivalenzrelation. (Ist $D' = SDT^{-1}$ also ist $D = S^{-1}D'T$
$= S^{-1}D'(T^{-1})^{-1}$)

Proposition 19: Sei $D \in M(m\times n, K)$ und $r := \text{rang}(D)$, dann ist D zu $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} := \left.\underbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}^{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{n}\right\}m$ äquivalent.

Bemerkung: Dieser Repräsentant kann als Normalform geschrieben werden.

27.10.02

Determinanten

Wir haben gesehen:

ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertierbar $\Leftrightarrow$ $\underline{ad-bc} \neq 0$ und falls $ad-bc \neq 0$ ist

Determinante von A

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \underline{aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj}$$

$n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

$\overset{\shortparallel}{\#}\{\text{Permutationen von } \{1,2 \ldots n\}\}$

$\overset{\shortparallel}{\#}$ Elemente von S_n

Permutationen

$\sigma : \{1,2 \ldots n\} \xrightarrow{\text{Bijektion}} \{1,2,\ldots n\}$

wird $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ geschrieben

weitere Notation: zyklische Notation

$(i_1 \; \sigma(i_1) \; \sigma(\sigma(i_1)) \; \ldots \;) \cdot$ nach einigen Schritten kommt man zurück → also zyklisch

$\cdot (i_2 \; \sigma(i_2) \ldots \;) \ldots (i_r \; \sigma(i_r) \ldots)$

mit $\{i_j, \sigma(i_j), \ldots\} \cap \{i_k, \sigma(i_k) \ldots\} = \emptyset$ für $k \neq j$ (disjunkt)

und $\sigma(k) = k$ falls k in keinem Zyklus liegt.

Beispiel: • Transposition

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & i-1 & i & i+1 & \ldots & j & & n \\ 1 & \ldots & i-1 & j & i+1 & \ldots & i & & n \end{pmatrix} = (i \; j)$$

30.10.02

• $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$ wird in Zykelnotation als

$(1,3)(4,5)$ geschrieben

Beispiel: von Komposition in S_n

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Das gleiche, in Zykelnotation: $(1,2) \circ (2,3) = (1,2,3)$

30.10.08

wobei $s_h := (h, h+1)$;

$(a_1, a_2 \dots a_k) = (a_1, a_2)(a_2, a_3) \cdots (a_{k-1}, a_k)$

für paarweise verschiedene $a_1 \dots a_k$

$A \in M(n \times n, K) \rightsquigarrow \underbrace{\det(A)}_{\text{Funktion von den Einträgen von } A.} \in K$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\updownarrow$$

$$(a_{11}, a_{12}, \dots a_{1n}), (a_{21}, \dots a_{2n}), \dots, (a_{n1}, \dots a_{nn})$$

$$\in \underbrace{K^n \times K^n \times \dots \times K^n}_{n\text{-mal}}$$

Als Abkürzung schreibt man

$a_i := (a_{i1}, \dots a_{in})$

Definition: Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Eine Abbildung $\det: M(n \times n, K) \to K$ heisst **Determinante** falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(D1) det ist linear in jeder Zeile

d.h. für $1 \le i \le n$ gilt: $\det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_i' + a_i'' \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_i' \\ a_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_i'' \\ a_n \end{pmatrix}$

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (\lambda \in K)$$

(D2) det ist alternierend.

für $1 \le i < j \le n$ gilt: $\left(a_i = a_j \Rightarrow \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0 \right)$

(D3) det ist normiert.

$\det(E_n) = 1$

30.10.08

(D10) $\det(A)=0 \Leftrightarrow a_1,\dots,a_n$ linear abhängig sind

(D11) $\det(A)\neq 0 \Leftrightarrow A\in Gl_n(K)$ (invertierbar)

(D12) Für $A,B\in M(n\times n,K)$ gilt $\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)$

$A\rightsquigarrow B$ (durch Zeilenumf.)

I. $\det(B)=\lambda\det(A)$

II. $\det(B)=\det(A)$

III. $\det(B)=-\det(A)$

Beweis: D_4, D_5 folgen aus D_1

D_7: $\det(B)=\det(A)+\det\begin{pmatrix}\vdots\\ \lambda a_j\\ a_j\\ \vdots\end{pmatrix}=\det(A)+\lambda\det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_j\\ a_j\\ \vdots\end{pmatrix}$

$=\det(A)+\lambda\cdot 0$

D_6: wir nutzen D_1, D_7

$\det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_j\\ a_i\\ \vdots\end{pmatrix}\begin{matrix}\leftarrow i\text{-te Zeile}\\ \leftarrow j\text{-te Zeile}\end{matrix}\overset{(D_7)}{=}\det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_j+a_i\\ a_i\\ \vdots\end{pmatrix}\overset{(D_7)}{=}\det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_j+a_i\\ -a_j\\ \vdots\end{pmatrix}\overset{(D_7)}{=}\det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_i\\ -a_j\\ \vdots\end{pmatrix}$

$\overset{(D_1)}{=}\det\begin{pmatrix}a_i\\ a_j\end{pmatrix}=\det(A)$

D_8: Sei $\sigma\in S_n$, $\sigma=(i_1,\dots\sigma^{k_1-1}(i_1))\dots(i_r,\dots\sigma^{k_r-1}(i_r))$,

dann $E_n \xrightarrow[\text{}]{\sum k_i \text{ mal Zeilenaustauschen}} B$, Aus (D_7) folgt $\det B=(-1)^{\sum k_i-1}\det(E_n)$

$\overset{(D_3)}{=}(-1)^{\sum k_i-1}$

$\sigma=(i,j)$: $r=1$, $k_1=2$, $\operatorname{sign}\sigma=(-1)^1=\operatorname{sign}\sigma$

6.11.08

$\det: M(n\times n,K)\to K$

$\det(AB)=\det A\cdot\det B$

Daraus folgt: $\det: Gl_n(K)\to K^*$ ist surjektiver Homomorphismus

Definition: Der Kern des Homomorphismus heisst spezielle lineare Gruppe und ist mit $Sl_n(K)$ bezeichnet. Also:

- $Sl_n(K)=\{A\in M(n\times n,K)\mid \det A=1\}$

Einige andere lineare Gruppen:

Orthogonale Gr.: $O_n(K)=\{A\in M(n\times n,K)\mid {}^tA\cdot A=E_n\}$ $\det {}^tA\cdot A=1=\det({}^tA)\cdot\det(A)\Rightarrow\det(A)\in\{\pm1\}$ für $\operatorname{char}(K)\neq 2$

spezielle Orthog. Gr.:

- $SO_n(K)=O_n(K)\cap Sl_n(K)$

6.11.08

$$\rightsquigarrow A'_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ \vdots \\ \cancel{a_{i1}} \\ \vdots \\ a_{n1} \dots \quad \dots a_{nn} \end{pmatrix} \in M(n-1 \times n-1, K)$$ weggestrichen

<u>Lemma:</u> $\det A'_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

<u>Beweis:</u> $A_{ij} \xrightarrow{(*)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A'_{ij} \end{pmatrix}$

$*$ $(i+j-2)$ mal $P' \Rightarrow$ (vertauschen von Zeilen u. Spalten)

<u>Definition:</u> Die Matrix $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) \in M(n \times n, K)$ mit $\tilde{a}_{ij} := \det A_{ji}$ $= (-1)^{i+j} \det A'_{ji}$ heisst die zu A komplementäre Matrix.

<u>Proposition 24:</u> Für $A \in M(n \times n, K)$ mit Komplementärmatrix $\tilde{A}$ gilt:

$$\tilde{A} \cdot A = A \cdot \tilde{A} = (\det A) \cdot E_n$$

<u>Beweis:</u> Wir schreiben $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ wobei a_i die i^{te} Zeile von A ist.

dann haben wir: $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \tilde{a}_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \det A_{jk}$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_{j-1} \\ e_k \\ a_{j+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$ k^{te} Element der Standardbasis

$$\overset{(a_1)}{=} \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_{j-1} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_k \\ a_{j+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{j-1} \\ a_i \\ a_{j+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \overset{(D2)}{=} \delta_{ij} \det A$$

<u>Proposition 25:</u> (Laplace'sche Entwicklung)

Ist $A \in M(n \times n, K)$ gegeben und A'_{ij} wie oben durch Streichen von der i^{ten} Zeile und der j^{ten} Spalte definiert, so gilt für $1 \leq i \leq n$:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det A'_{ij}$$

und für $1 \leq j \leq n$ gilt:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A'_{ij}$$

<u>Beweis:</u> Wir haben $(-1)^{i+j} \det A'_{ij} = \det A_{ij} = \tilde{a}_{ji}$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A'_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{a}_{ji} = \det A.$$

10.11.08

f surjektiv $\Rightarrow \exists B: AB = E_n$

$\Uparrow \qquad \Downarrow$

f bijektiv $\Leftrightarrow \det A \in R^*$

$\Updownarrow \qquad \Uparrow$

A invertierbar $\Rightarrow \exists B: BA = E_n$

Diskussion: $M(m\times n, R)$ hat Sinn für beliebigen Ring R, aber die Determinante macht keinen Sinn falls R nicht kommutativ ist.

z.B.: Multiplikativität

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$$

$$(ad-bc)(a'd'-b'c') \stackrel{?}{=} (aa'+bc')(cb'+dd') - (ab'+bd')(ca'+dc')$$

$$ada'd' - adb'c' - bca'd' + bcb'c' \stackrel{?}{=} aa'cb' + aa'dd' + \dots$$

$\Rightarrow$ ~~$\neq$~~ R müsste kommutativ sein!

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Wir behaupten: die Gleichungen von Determinanten sind auch gültig für Matrizen über R. Wir haben:

$0 \neq f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_N] \to R[x_1, \dots, x_N]$

aus Lemma folgend

$0 \neq f \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_N]$

Genauer gesagt; dies betrifft alle Gleichungen, die durch Polynome mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten geschrieben werden können

$\exists\ f_1, \dots f_M \in \mathbb{Z}[x_1, \dots x_N] \leftarrow$ Polynomring so dass die Gleichung $f_1(\alpha_1, \dots \alpha_N) = \dots = f_M(\alpha_1, \dots \alpha_N) = 0\ \forall \alpha_1, \dots \alpha_n \in R$ ist.

Beispiel: $(\det A)(\det B) = \det AB \quad \forall A, B \in M(n\times n, R)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} N = 2n^2 \\ M = 1 \end{matrix}$$

$$f = f_1 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{n1} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \dots & b_{n1} \end{pmatrix}$$

$$\in \mathbb{Z}\underbrace{[a_{11}, \dots a_{nn}, b_{11}, \dots b_{nn}]}_{2n^2\text{-Variablen}}$$

10.11.08

Beweis: Aus der Linearität genügt es, den Satz zu beweisen falls $b = e_j$ $(1 \leq j \leq n)$. Dann:

$$(\det A)\, x_i = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ a_{n1} & & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \leftarrow j^{\text{te}} \text{ Zeile}$$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad i^{\text{te}}$ Spalte

$$\overset{\text{Zeilenumform.}}{=} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 \; 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \leftarrow j^{\text{te}} \text{ Zeile}$$

$\uparrow i^{\text{te}}$ Spalte

Es folgt: $(\det A)\, x = j^{\text{te}}$-Spalte von $\tilde{A} = \tilde{A} \cdot e_j$

Dann haben wir: $Ax = \dfrac{1}{\det A} \cdot A\tilde{A} e_j = e_j$

Beispiel: $\left.\begin{aligned} ax + by &= u \\ cx + dy &= v \end{aligned}\right\} \overset{ad-bc \neq 0}{\Longrightarrow} \quad x = \dfrac{\det\begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix}}{\det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad y = \dfrac{\det\begin{vmatrix} a & u \\ c & v \end{vmatrix}}{\det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$

Rang-Formel: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M(m \times n, K)$

$\operatorname{rang} A = ?$

Definition: Ein $r \times r$-Minor von A ist die Determinante der $r \times r$-Matrix $(a_{i_c, j_d})_{1 \leq c, d \leq r}$ wobei $I \subset \{1, \ldots, m\}$, $J \subset \{1, \ldots, n\}$, $|I| = |J| = r$, $I = \{i_1 < \ldots < i_r\}$, $J = \{j_1 < \ldots < j_r\}$

Lemma: Ist $A \rightsquigarrow A'$ durch elementare Zeilenumformung, so gilt:
$\{r \mid \exists \neq 0 \; r \times r\text{-Minor von } A\} = \{r \mid \exists \neq 0 \; r \times r \text{ Minor von } A'\}$

Beweis: $(r \times r\text{-Minor von } A)_{\in K^N} \xrightarrow{\text{linear, invertierbare Abbildung}}$ $(r \times r)\text{-Minor von } A')_{\in K^N}$ (für jedes r)

Proposition 28: Sei $A \in M(m \times n, K)$. Dann $\{r \mid \exists \neq 0 \; r \times r\text{-Minor von } A\} = \{1, 2, \ldots, \operatorname{rang}(A)\}$. Anders gesagt: $\operatorname{rang}(A)$ ist die maximale Grösse von einem von Null verschiedenen Minor von A.

Beweis: Falls A in Zeilenstufenform ist, ist der Satz klar.

13.11.08

Determinante eines Endomorphismus eines endlich dimensionalen Vektorraum:

$V \quad \dim_K V = n < \infty$

$F: V \to V$

B Basis von $V \rightsquigarrow A \in M(n\times n, K)$

B' andere Basis von $V \rightsquigarrow A' \in M(n\times n, K)$

mit $A' = SAS^{-1}$ wobei S die Transformationsmatrix ist

Es folgt: $\det A' = \det S \cdot \det A \, (\det S)^{-1}$
$= \det A$

Definition: Sei V ein endlich dim. Vektorraum über K. Dann ist die Determinante von einem Endomorphismus $F: V \to V$ die Determinante von einer darstellenden Matrix bezüglich einer Basis. Dies ist unabhängig von der gewählten Basis

Bemerkung: (i) auch der Rang eines solchen F macht Sinn:
$\operatorname{rang}(F) := \operatorname{rang}(A)$ wobei A eine darstellende Matrix ist.

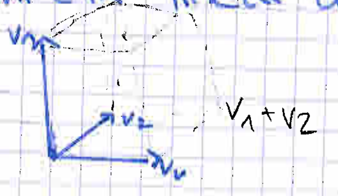
(ii) Es gilt $\operatorname{rang}(F) = \dim_K(V) \Leftrightarrow \det F \neq 0 \Leftrightarrow$ F bijektiv $\Leftrightarrow$ F injektiv $\Leftrightarrow$ F surjektiv

Geometrische Interpretation

V endlich dim. Vektorraum, $K = \mathbb{R}$

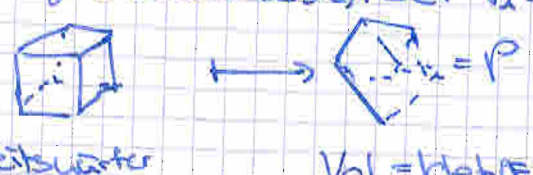
$V \cong \mathbb{R}^n$, wobei $n = \dim_{\mathbb{R}} V$

$v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig $\rightsquigarrow$ Parallelotop

$P :=$


$|\det(A)| = \operatorname{Vol}(P)$ wobei ${}^tA = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

Sei $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Endomorphismus mit darstellender Matrix A (bzg. Standardbasis). Sei $v_i := F(e_i)$



Einheitswürfel
$\operatorname{Vol} = 1$

$\operatorname{Vol} = |\det(F)|$

13.11.08

Man definiere $u \sim v \Leftrightarrow \exists$ solches γ, dies ist eine Äquivalenzrelation.
Dann nehme man $I = \{Äqu. Kl\}$ und für jedes $i \in I$, wo u ein Räpresentant ist $U_i = \{v \in U \mid u \sim v\}$

Wegzusammenhang - Komponente 20.11.08

Normalerweise spricht man von Zusammenhängenden Mengen und Zusammenhangskomponenten.

Zusammenhängend $\overset{def}{\Leftrightarrow} \nexists$ stetige Abbildung nach $\mathbb{R}$ mit Bild $\{0,1\}$

wegzusammenhängend $\Rightarrow$ zusammenhängend
$\not\Leftarrow$

Bsp.: Die Menge $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=0 \vee y = \sin(1/x)\}$ ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

Zerlegung in Wegzusammenhangs Komponenten
Zerlegung in Zusammenhangs Komponenten 20.

$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid \det A > 0\} \cup \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid \det A < 0\}$ ist auch eine Zerlegung in Zusammenhangs Komponenten.

Wir haben $GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$
$A \mapsto \frac{\det A - |\det A|}{2 \det A}$ stetig Abbildung mit Bild $\{0,1\}$

Eigenwerte, Eigenvektoren

Sei K ein Körper, seien V und W endlich dim. Vektorräume über K. Wir erinnern uns: jede lineare Abbildung $F: V \to W$ ist bezüglich geeigneter Basen durch $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dargestellt. Dabei ist r der Rang von F.

Nun betrachten wir einen Endomorphismus $F: V \to V$. Wir erinnern uns: Basis A von $V \rightsquigarrow$ Darstellung von F durch eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ wobei $n = \dim_K V$

Basis A' von $V \rightsquigarrow$ Darstellung durch $A' \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $A' = SAS^{-1}$, wobei $S \in GL_n(K)$ die Transformationsmatrix ist.

Wir suchen eine angenehme Basis, wobei die Matrix A eine besonders einfache Form hat, z.B. Diagonal- oder obere Dreiecksmatrix.

Am einfachsten haben wir Basiselemente b_i, so dass $A \cdot b_i$ ein Vielfaches von b_i ist.

<u>Begründung</u>: Wir haben $F^3 = \mathrm{id}$, so aus $F(v) = \lambda v$ folgt $v = F^3(v) = \lambda^3 v$

$\overset{v \neq 0}{\Longrightarrow} \lambda^3 = 1 \overset{K=\mathbb{R}}{\Longrightarrow} \lambda = 1$

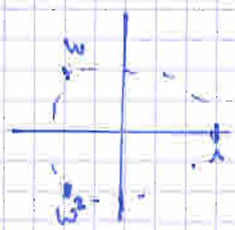
$F(v) = v \overset{v=(x,y,z)}{\Longrightarrow} x = y = z \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0 = y = z$

also ist 1 kein Eigenwert.

Falls $K = \mathbb{C}$, dann setzen wir $\omega := e^{\frac{2\pi i}{3}}$, wir haben

$F(1, \omega, \omega^2) = \omega(1, \omega, \omega^2)$ ω ist Eigenwert von F,

$(1, \omega, \omega^2)$ ist ein Eigenvektor von F zum Eigenwert ω.



Auch: $F(1, \omega^2, \omega) = \omega^2(1, \omega^2, \omega)$

ω^2 ist Eigenwert von F, $(1, \omega^2, \omega)$ ist Eigenvektor von F zum Eigenwert ω^2.

Es folgt: Bezüglich der Basis $(1, \omega, \omega^2), (1, \omega^2, \omega)$ ist F durch

$\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$ dargestellt.

<u>Definition:</u> Sei V ein endlich dim. K-Vektorraum und $F: V \to V$ ein Endomorphismus. Dann heisst F <u>diagonalisierbar</u>, falls es eine Basis gibt, so dass F durch eine Diagonalmatrix dargestellt wird.

<u>Bemerkung</u>: Ist $A \in M(n \times n, K)$ so sagen wir, A ist diagonalisierbar, falls der entsprechende Endomorphismus von K^n diagonalisierbar ist. A diagonalisierbar $\Leftrightarrow \exists S \in GL_n(K)$ so dass SAS^{-1} eine Diagonalmatrix ist.

<u>Beispiel</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$

$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 4x + 3y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ $x + 2y = \lambda x \Rightarrow y = \frac{\lambda - 1}{2} x$

$4x + 3y = \lambda y \Rightarrow 4x + 3 \frac{\lambda - 1}{2} x = \lambda \frac{\lambda - 1}{2} x$

$\lambda = 1$ <u>kein Eigenwert</u>

$\Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow 4 + 3\frac{(\lambda - 1)}{2} = \frac{\lambda(\lambda - 1)}{2}$

$\rightsquigarrow \lambda = -1 \quad y = -x$

$\lambda = 5 \quad y = 2x$

24.11.08

Korollar: Ist $\dim_K V = n$ und F ein Endomorphismus von F mit n versch. Eigenwerten, dann ist F diagonalisierbar

Wie berechnet man die Eigenwerte von einem Endomorphismus eines endl. dim. Vektorraums?

$\Rightarrow$ durch die Eigenschaften
- λ Eigenwert $\Leftrightarrow Eig(F,\lambda) \neq 0$
- $Eig(F,\lambda) = \ker(F - \lambda\, id_V)$

λ Eigenwert $\Leftrightarrow \ker(F - \lambda\, id_V) \neq 0$

Definition: $P_F := \det(t \cdot id_V - F) \in K[t]$ heisst charakteristisches Polynom von F

Proposition 31: Sei V ein endl. dim Vektorraum $/K$ und $F: V \to V$ ein Endomorph. Dann ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von $F \Leftrightarrow P_F(\lambda) = 0$

Beweis: $\ker(\lambda\, id_V - F) \neq 0 \Leftrightarrow P_F(\lambda) = \det(\lambda\, id_V - F) = 0$

Bemerkung: Ist F durch eine Matrix $A \in M(n \times n, K)$ gegeben, dann ist $P_F = P_A = \det(\lambda E_n - A)$

Praktisches Verfahren, Eigenwerte und Eigenvektoren zu berechnen:

1). durch Basiswahl, den ~~Eigen~~ Endomorph F durch eine Matrix $A \in M(n \times n, K)$ darstellen

2). Berechnen $P_F = P_A = \det(t \cdot E_n - A)$

3). Finde die Nullstellen von $P_A \rightsquigarrow$ Diese sind die Eigenwerte

4). Für jeden Eigenwert λ, berechnen Eigenraum $\overset{\text{Basis}}{\rightsquigarrow} \ker(A - \lambda E_n)$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 10 & -24 \\ 2 & 5 & -12 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ ges: Eigenwerte, Eigenräume

$$P_A = \begin{vmatrix} t-2 & -1 & 2 \\ -3 & t-10 & 24 \\ -2 & -5 & t+12 \end{vmatrix} = (t-2)(t-10)(t+12) + 48 + 30 + 4(t-10) + 120(t-2) - 3(t+12)$$
$$= t^3 - 124t + 240 + 48 + 30 + 121t + 316$$
$$= t^3 - 3t + 2$$
$$= (t-1)^2(t+2)$$

Nullstellen $1, -2$ = Eigenwerte

$\lambda = 1$: $\ker(A - E_3) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 9 & -24 \\ 2 & 5 & -13 \end{pmatrix}$

$= \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & -18 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

24.11.08

<u>Definition:</u> Ist $P_F = (t-\lambda)^m Q$ mit $t-\lambda$, Q teilerfremd, dann definieren wir $\mu(P_F, \lambda) = m$

<u>Lemma:</u> i) $\mu(P_F, \lambda) > 0 \iff \lambda$ ist ein Eigenwert von F

ii) Wir haben $\underbrace{\mu(P_F,\lambda)}_{m} \geq \underbrace{\dim \mathrm{Eig}(F,\lambda)}_{=d}$

<u>Beweis:</u> Sei λ ein Eigenwert von F. Wir haben $\mu(P_F,\lambda) \geq 1$.
Sei $v_1, .. v_d$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(F,\lambda)$. Diese Basis lässt sich zu einer Basis $v_1, ..., v_d, v_{d+1}, ... v_n$ erweitern
... darstellende Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \lambda E_d & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \rightsquigarrow P_A = (t-\lambda)^d P_C$$

$\Rightarrow d \leq m$

27.11.08

<u>Proposition 30 (Erweiterung):</u>

$F: V \to V$, $\dim V < \infty$, dann sind äquivalent:

i). F diagonalisierbar

ii) .

iii) .

iv). .

(v). P_F zerfällt ~~als~~ in Produkt von linearen Faktoren in $K[t]$ und für jeden Eigenwert λ haben wir $\mu(P_F,\lambda) = \dim \mathrm{Eig}(F,\lambda)$

<u>Beweis:</u> i) $\Rightarrow$ v) : $n := \dim V$

<u>Lemma:</u> F diagonalisierbar $\Rightarrow P_F = \prod_{i=1}^{n} (t-\lambda_i)$

Sei $(v_1 .. v_n)$ eine Basis mit $F(v_i) = \lambda_i v_i$, für $i = 1, .., n$.
Dann haben wir $\mu(P_F, \lambda) = \#\{i \mid \lambda_i = \lambda\}$ für jeden Eigenwert λ. Bezüglich der Basis:

$F - \lambda \mathrm{id}_V$ ist durch $\begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n - \lambda \end{pmatrix}$ dargestellt

Dann haben wir:

$\dim \mathrm{Eig}(F,\lambda) = \dim \mathrm{Ker}(\quad) = \mu(P_F, \lambda)$

v) $\Rightarrow$ ii).

Sei $r := \#\{\text{Eigenwerte}\}$ und seien $\lambda_1, .. \lambda_r$ die Eigenwerte.
Für $1 \leq i \leq r$ sei $v_{i,1}, .. v_{i,d_i}$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(F,\lambda_i)$,
wobei $d_i = \dim \mathrm{Eig}(F,\lambda_i)$

27.11.08

Lemma: Sei $F: V \to V$ eine lineare Abbildung und $W \subset V$ mit $F(W) \subset W$. Dann

i). Es gibt eine induzierte lineare Abbildung $\overline{F}: V/W \to V/W$

ii). Ist $\dim V < \infty$, so gilt: $\det F = \det(F_{|W}) \cdot \det(\overline{F})$

Dabei ist $F_{|W}$ die Beschränkung von F auf W.

Beweis: i). Wir haben die kanonische lineare Abbildung $V \to V/W$

$v \mapsto v + W =: \overline{v}$

Dann definieren wir $\overline{F}(\overline{v}) = \overline{F(v)}$

Dass dies wohldefiniert ist:

Ist $v' \in v+W$, d.h. $v' = v + w$, mit $w \in W$, dann haben wir: $\overline{F(v')} = F(v') + W$

$= F(v) + \underbrace{F(w)}_{\in W} + W = F(v) + W$

~~Die Linearität ist~~

Linearität ist noch zu zeigen.

ii). Wir erinnern uns aus dem Beweis, dass $\dim V = \dim W + \dim V/W$, dass eine Basis von V so vorkommt.

$r = \dim W$
$s = \dim V/W$
$r + s = \dim V$

Sei $a_1, \dots, a_r$ eine Basis von W,

$b_1, \dots, b_s$ " " " V/W,

Sei $c_1, \dots, c_s \in V$ s.d. $\overline{c_i} = b_i$ $i = 1, \dots, s$

$\Rightarrow$ Dann ist $a_1, \dots a_r, c_1, \dots, c_s$ eine Basis von V ist

Bezüglich dieser Basis ist F durch eine Blockmatrix $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ dargestellt, wobei $A \in M(r \times r, K)$, $F_{|W}$ darstellt und

$C \in M(s \times s, K)$ $\overline{F}$ darstellt

Dann haben wir $\det F = \det A \cdot \det C$

$= \det F_{|W} \cdot \det \overline{F}$

Proposition 31: Sei V ein endl. dim. Vektorraum und $F: V \to V$ ein Endomorphismus. Ist λ ein Eigenwert von F mit Vielfachheit $m := \mu(P_F; \lambda)$, so existieren linear unabhängige Vektoren $v_1, \dots, v_n$ so dass:

$$\begin{cases} F(v_1) = \lambda v_1 \\ \exists\, a_{ij} \in K,\ 1 \le j < i \le m \quad \text{mit } F(v_i) = \lambda v_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} v_j \\ \quad \text{für } 2 \le i \le m \end{cases}$$

Weitere Annahmen:

$$\underline{\sum_{i,j} b_{ij} v_j^{(i)}} \overset{F}{\rightsquigarrow} \sum_{i,j} b_{ij} F(v_j^{(i)}) = 0 \xrightarrow{r} \sum_{i,j} b_{ij} \lambda_r v_j^{(i)} = 0$$

mit s_r so klein wie möglich

$$\Rightarrow \sum_{i,j} b_{ij} \Big(\lambda_i v_j^{(i)} + \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}^{(i)} v_k^{(i)} \Big) = 0$$

$$\sum_{i,j} b_{ij} \Big((\lambda_i - \lambda_r) v_j^{(i)} + \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}^{(i)} v_k^{(i)} \Big) = 0$$

In dieser Relation ist der Koeffizient von $v_{s_r}^{(r)} = 0$. Diese Relation ist nicht trivial, denn die Koeffizienten von $v_{s_i}^{(i)}$ sind $\neq 0$ für $i \in \{ i' \mid \exists j \text{ mit } b_{i'j} \neq 0 \}$, $i \neq r$.

Da es eine nicht triviale Relation entweder mit kleiner Anzahl von i' mit (Koef. eines $v_j^{(i)}) \neq 0$ oder mit kleinerem s_r ↯

<u>Korollar:</u> Ist $F: V \to V$, $\dim_K V < \infty$, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

i). P_F zerfällt in Linearfaktoren

ii) Es gibt eine Basis von V, wobei F durch eine obere Dreiecksmatrix dargestellt ist.

<u>Beweis:</u> i) ⇒ ii): Sei $P_F = \prod_{i=1}^{r} (t - \lambda_i)^{m_i}$ eine Primfaktorzerlegung. Dann haben wir $\sum_{i=1}^{r} m_i = \dim V$. Aus Prop 32 folgt, dass $(v_j^{(i)})_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le j \le m_i}}$ eine Basis von V ist. Und bzg $(v_j^{(i)})$ ist F durch eine Blockmatrix dargestellt.

$$\begin{array}{l} m_1 \\ m_2 \\ \\ m_r \end{array} \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{matrix} & & & 0 \\ & \begin{matrix} \lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2 \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \begin{matrix} \lambda_r & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{matrix} \end{pmatrix} \in \text{Obere } \Delta\text{-Matrix}$$

ii) ⇒ i) Wir haben $P_F = P_A$ wobei $A = \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ eine obere Δ-Matrix ist und $P_A = \prod_{i=1}^{n} (t - a_i)$

Ein $\neq 0$ Vektor in einem Hauptraum heisst <u>Hauptvektor</u>.
Nach Prop. 32 ist der Hauptvektoren aufgespannte Vektorraum die direkte Summe $\bigoplus_{\lambda \text{ Eigenw.}} \text{Hau}(F;\lambda)$.

<u>Beispiel</u>: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 10 & -24 \\ 2 & 5 & -12 \end{pmatrix}$ $P_A = (t-1)^2(t+2)$

<u>$\lambda = 1$</u>: Eigenvektor $(1,3,1)$

<u>$\lambda = 2$</u>: Eigenvektor $(0,2,1)$

$$\text{Hau}(A,1) = \ker (A - E_3)^2$$
$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 9 & -24 \\ 2 & 5 & -13 \end{pmatrix}^2$$
$$= \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -18 & -36 & 90 \\ -9 & -18 & 45 \end{pmatrix} = \text{span}((-1,3,1),(2,-1,0))$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 10 & -24 \\ 2 & 5 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & -2 \end{pmatrix}$$

obere Blockdiagonalmatrix

4.12.08

<u>Proposition 33:</u> (Satz von Cayley-Hamilton)
Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und $F: V \to V$ ein Endomorphismus. Dann haben wir $P_F(F) = 0$.

Ist $\dim V = n$ dann: $P_F = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$
mit $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in K)$
Dann ist $P_F(F) := F^n + a_{n-1}F^{n-1} + \ldots + a_1 F + a_0 \cdot \text{id}_V$

<u>Beispiel:</u> $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2\times 2, K)$, dann: $P_A = t^2 - (a+d)\cdot t + (ad-bc)$

$$P_A(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - (a+d)\cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

Da die Aussage zu einem System von Polynomgleichungen mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten von den Einträgen von einer Matrix reduziert, genügt es, die Aussage zu beweisen, falls $K = \mathbb{Q}$. Oder sogar falls $K = \mathbb{C}$

Anwendung vom Satz von Cayley-Hamilton

Invariante Untervektorräume von reellem Vektorraum mit Endomorphismus.

$K = \mathbb{R}$, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ $n < \infty$, $n \geq 1$, $F: V \to V$

Gibt es immer einen Eigenvektor?

$\Updownarrow$

$$\exists\, U \subset V, \dim(U) = 1 \text{ mit } F(U) \subset U$$

$\Rightarrow$ Nein! Z.B.: $V = \mathbb{R}^2$, F eine Drehung

Proposition 34: Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum von $\dim n > 0$, und $F: V \to V$ ein Endomorphismus. Dann gibt es einen Untervektorraum $U \subset V$ mit $\dim(U) \in \{1, 2\}$, und $F(U) \subset U$

Der Beweis braucht einige Bemerkungen über Zerlegungen von reellen Polynomen.

"Beweis:"

- $f \in \mathbb{C}[X]$ von Grad ≥ 1 $\overset{\text{Fundam. Alg.}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, \alpha \in \mathbb{C}$ mit $f(\alpha) = 0 \Rightarrow f$ hat Zerlegung in Linearfaktoren
- $f \in \mathbb{R}[X]$ von Gr. ≥ 1 $\Rightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{C}$ mit $f(\alpha) = 0$
  $0 = \overline{f(\alpha)} = f(\overline{\alpha})$

$f = X^2 + 1$ irreduzibar Polynom in $\mathbb{R}[X]$

Nullstellen von f: $\left.\begin{cases} \text{reelle} \\ \text{komplex konjugierte Paare} \end{cases}\right\}$ Nullstellen

Und: falls $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \notin \mathbb{R}$, Nullstelle ist $\left.\begin{matrix} f(\alpha) = 0 \\ f(\overline{\alpha}) = 0 \end{matrix}\right\} \Downarrow\ \overline{\alpha} \neq \alpha$

$X^2 - (\alpha + \overline{\alpha})X + \overline{\alpha}\alpha = (X - \alpha)(X - \overline{\alpha}) \mid f$

$X^2 - 2\operatorname{Re}\alpha \cdot X + |\alpha|^2 =$

Es folgt: jedes $f \in \mathbb{R}[X]$ zerfällt als Produkt von $\begin{cases} \text{Linearfaktoren} \\ \text{und} \\ \text{irreduzible quadr. Faktoren} \end{cases}$

Beweis Prop. 34:

Falls P_F eine reelle Nullstelle hat, dann hat F einen Eigenvektor v, und $U := \operatorname{span}\{v\}$ hat $\dim(U) = 1$ und $F(U) \subset U$. Sonst haben wir eine Zerlegung $P_F = \prod_{i=1}^{d} G_i$, wobei $d = n/2$ und jedes G_i irreduziebel von Grad 2 ist.

Nach dem Satz von Cayley-Hamilton haben wir:

$P_F(F) = G_1(F) \dots G_d(F) = 0$

Sei $v \in V$, $v \neq 0$ ein Vektor. Dann: $G_1(F) \dots G_d(F) \cdot v = 0$

Wir behaupten, dass $1, \bar{X}, \dots, \bar{X}^{d-1}$ eine Basis von L sind.
Sei $\sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i x^i = 0$ eine Relation in L.

$\Rightarrow \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i x^i = f \cdot \underset{\in K[X]}{g}$ in $K[X]$

Ist $g \neq 0$, dann ist $\deg(f \cdot g) = d + \deg(g) \geq d$

$d > \deg \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i x^i$ $\lightning$

Es folgt: $g = 0$ und die Relation ist trivial.

ii). Die Ringstruktur ist von $K[X]$ induziert.
Es ist zu zeigen: jedes $0 \neq \bar{g} \in L$ hat ein multiplikatives Inverses, d.h.: $\exists b \in K[X]$, so dass $f \mid b \cdot g - 1$
Eukl. Algorithmus sagt uns: $h, a, b \in K[X]$, mit $h \mid f$, $h \mid g$
$af + bg = h$, h normiert (ggT von f u. g)
Weil f irreduzibel ist und kein Teiler von g ist, müssen wir $h = 1$ haben. Es folgt: $f \mid bg - 1$
Beispiel: $K = \mathbb{R}$, $f = x^2 + 1$, $L \cong \mathbb{C}$
$\alpha \mapsto i$
od. $\alpha \mapsto -i$

Beweis Prop. 35 i) $\Rightarrow$ ii)

Annahme: $P_A \neq t^n$
Sei f ein normierter irreduzibler Teiler von P_A mit $f \neq t$
Ist f linear, d.h. $f = t - \alpha$, $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$, dann hat A den Eigenwert α.
$\Rightarrow$ A ist nicht nilpotent.

Falls $\deg f \geq 2$: wir benutzen das Lemma
$K \rightarrow \underset{\underset{\alpha := \bar{X}}{\text{ᗰ}}}{L} := K[X] / f \cdot K[X]$ mit $f(\alpha) = 0$ in L

Es folgt, dass α ein Eigenwert von A ist in L. Weil $\alpha \neq 0$ ist, folgt, dass A nicht nilpotent ist.

8.12.08

$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}3&1\\0&3\end{matrix}} & \begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix} \\ \begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix} & \begin{matrix}\boxed{2}&0\\0&\boxed{3}\end{matrix}\end{pmatrix}$ 4x4 Jordanmatrix (Bsp.)

2x2 Jordanblock

1x1 Jordanblöcke

Jede Jordanmatrix hat eine Blockmatrixstruktur, wobei die Blöcke Jordanblöcke sind.

Konvention: Wir können bestimmen, dass alle Blöcke mit Diagonaleinträgen λ zusammengelegt sind, mit Grössen in fallender Reihenfolge.

$\begin{pmatrix} 3&1&0&0\\0&3&0&0\\0&0&\boxed{3}&0\\0&0&0&\boxed{-2}\end{pmatrix}$ Bsp.

0 wäre 1 weil $b_1=1 \Rightarrow a_1=a_2$ und nicht $\Leftarrow$

$\begin{pmatrix} \boxed{-2}&0&0&0\\0&3&1&0\\0&0&3&0\\0&0&0&\boxed{3}\end{pmatrix}$ oder

wie oben

Partition $m_i \in \mathbb{N}\ \forall i$: Die Grösse von Jordanblöcken mit diagonal Einträgen λ sind durch eine Folge von natürlichen Zahlen $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_q$ beschrieben.

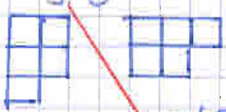
z.B. $(2,1)$ $(\lambda=3)$

$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}3&1\\&3\end{matrix}} &&& \\ & \boxed{\begin{matrix}3&1\\&3\end{matrix}} && \\ && \boxed{3} & \\ &&& \boxed{-2}\end{pmatrix}$

$(2,2,1) \sim (2,2,1,0) \sim (2,2,1,0,0)$

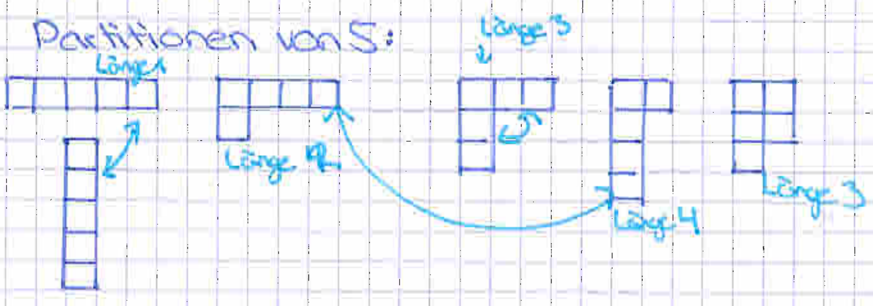
Ferrers Diagramm

Konjugierte Partition:



$(2,2,1) \overset{\text{konj.}}{\longleftrightarrow} (3,2)$

Partitionen von 5:



15.12.08

Definition: Reelle Jordan-Normalform

$$\begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_r \end{pmatrix} \quad \forall J_i \begin{cases} J(\lambda, d) \\ \text{oder} \\ J(\alpha, \beta; 2d) \end{cases}$$

Man kann beweisen: jedes $A \in M(n\times n, \mathbb{R})$ ist ähnlich zu einer Matrix der reellen Jordan-Normalform.

Bemerkung: Das charakteristische Polynom von $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ ist $\underline{(t-\alpha)^2+\beta^2}$

Und $\underline{P_{J(\alpha,\beta;2d)} = ((t-\alpha)^2+\beta^2)^d}$

Anwendungen von Jordan-Normalform

1). Zu entscheiden, ob zwei Matrizen ähnlich sind

2). Zu berechnen $f(A)$ für $A \in M(n\times n, \mathbb{C})$ und f eine analytische Funktion ist. (z.B. e^x, $\sin x$, $\sqrt{1+x}$, ...)

3). Zusammenhang mit gewöhnlichen Differentialrechnungen (ODEs)

Erklärungen:

2). Wir verstehen

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ (Potenzreihe mit ∞-Konvergenzradius)

So definieren wir:

$e^A = E_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} \dots$

für $A \in M(n\times n)\mathbb{C})$

Das bedeutet: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{A^i}{i!}$ $\quad A^0 := E_n$, $0! = 1$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

Dann haben wir: $\lim\limits_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{a^i}{i!} & 0 \\ 0 & \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{b^i}{i!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ $\quad A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$ $\quad A^i = \begin{pmatrix} a^i & i a^{i-1} \\ 0 & a^i \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{A^i}{i!} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{a^i}{i!} & \underline{\sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{a^i}{i!}} \\ 0 & \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{a^i}{i!} \end{pmatrix}$ $\quad \frac{i a^{i-1}}{i!} = \frac{i a^{i-1}}{i(i-1)!}$