

Lineare Algebra I - Vorlesungs-Script

Prof. Andrew Kresch

Basisjahr 08/09 Semester II

Mitschrift:

Simon Hafner

Inhaltsverzeichnis

1	Bilinearformen	1
1.1	Vektorprodukt in \mathbb{R}^3	3
1.2	Skalarprodukt über \mathbb{C}^n	4
1.3	Bilinearform	5
1.4	Bilineare und quadratische Formen	7
1.4.1	Polarisierungsformel	8
1.5	Sesquilineare Form	8
1.6	Volumen	13
1.6.1	Spat	13
1.7	Orthogonale und unitäre Endomorphismen	16
1.8	Beschreibung von $SO(3)$ und $O(3)$	20
1.9	Selbstadjungierte Endomorphismen	20
2	Klassifikation von Bilinearformen auf $\mathbb{R}^n \leftrightarrow$ Signatur	28
3	Multilineare Algebra	32
3.1	Dualvektorräume	32
3.2	Der Bidualraum $V \rightsquigarrow V^* \rightsquigarrow V^{**}$	35
3.3	Zusammenhang zwischen Dualraum und bilinearen Abbildungen	36
3.4	Anwendung des Dualraums	42
3.5	Das Tensorprodukt	42
3.5.1	Existenz vom Tensorprodukt	44
3.5.2	Tensorprodukt von linearen Abbildungen	48
3.5.3	Spezialfälle	49
3.6	(Bi-)lineare Abbildungen als Tensoren	52

1 Bilinearformen

Das kanonische Skalarprodukt (oder: Standardskalarprodukt) von \mathbb{R}^n ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

gegeben durch

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

falls $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ sind.

Definition 1 (Konvention). eine 1×1 Matrix wird mit Eintrag indentifiziert

$$(x) \in M(1 \times 1, K) \leftrightarrow x \in K$$

Dann können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= (x^t)(y) \\ x &= \begin{pmatrix} x_1, \vdots, x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1, \vdots, y_n \end{pmatrix} \\ (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1, \vdots, y_n \end{pmatrix} &= (x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n) \end{aligned}$$

Bemerkung 1 (\langle, \rangle ist bilinear).

$$\begin{aligned} \langle x + x', y \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle \\ \langle \lambda x, y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle \\ \langle x, y + y' \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle \\ \langle x, \lambda y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

symmetrisch:

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

positiv definit:

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &\geq 0 \\ \langle x, x \rangle &= 0 \Leftrightarrow x = 0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

$$\text{für } \forall x, y, x', y' \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$$

Bemerkung 2 (Hintergrund: euklidische Geometrie).

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Bemerkung 3 (Eigenschaften von $\|\cdot\|$).

$$\begin{aligned} \|x\| &\geq 0, \text{ mit } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \|\lambda x\| &= |\lambda| \|x\| \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

Dann definieren wir den Abstand von $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} d(x, y) &\in \mathbb{R} \\ d(x, y) &:= \|y - x\| \end{aligned}$$

Bemerkung 4. Eigenschaften

$$\begin{aligned} d(x, y) &\geq 0, \text{ mit } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ d(y, x) &= d(x, y) \\ d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) \\ \text{für } x, y, z &\in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Wir sind motiviert, Strukturen zu definieren, basierend auf diesen Eigenschaften, so z.B.

- Bilineare Formen (symmetrisch, positiv definit)
- Norme
- Metriken

Beweis 1. $\|\cdot\|$ und d : die Dreiecksungleichung folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle \leq (?) (\|x\| + \|y\|)^2 \\ &\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|\end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung: für $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

mit Gleichheit genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

$$\Leftrightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} - & - & - & x & - & - & - \\ - & - & - & y & - & - & - \end{pmatrix} \in M(2 \times n, \mathbb{R})$$

A hat Rang ≤ 1

Beweis 2.

$$\begin{aligned}A \cdot A^t &= \begin{pmatrix} \langle x, x \rangle & \langle x, y \rangle \\ \langle x, y \rangle & \langle y, y \rangle \end{pmatrix} \in M(2 \times 2), \mathbb{R} \\ \det(A \cdot A^t) &= \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2\end{aligned}$$

Es gibt eine Gleichung von Determinanten:

$$\begin{aligned}A, B &\in M(k \times n, K) \\ \det(A \cdot B^t) &= \sum_{1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k \leq n} \det(A^{s_1, \dots, s_k}) \det(B^{s_1, \dots, s_k}) \\ \text{wobei } A^{s_1, \dots, s_k} &:= (a_i, s_j)_{1 \leq i, j \leq k}, B^{s_1, \dots, s_k} = (b_i, s_j)_{1 \leq i, j \leq k}\end{aligned}$$

Beweis-Skizze: Reduktion zum Fall, dass die Zeilen von A und B Standardbasiselemente sind; direkte Berechnung in diesem Fall.

Es folgt:

$$\det(A \cdot A^t) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \det(A^{i,j})^2 \geq 0$$

und $\det = 0 \Leftrightarrow$ alle 2×2 Minoren von A sind 0 $\Leftrightarrow \text{rang}(A) \leq 1$

Korollar 1. Wir können definieren

$$\begin{aligned}\angle(x, y) &:= \cos^{-1} \underbrace{\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}}_{\in [-1, 1] \in \mathbb{R}} \in [0, \pi] \in \mathbb{R} \\ &\text{für} \\ 0 &\neq x \in \mathbb{R}^n \\ 0 &\neq y \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

Korollar 2. x, y Vektoren, θ Winkel zwischen den beiden

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|y - x\|^2 \right)$$

und deshalb:

$$\cos \theta = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|y - x\|^2}{2 \|x\| \|y\|}$$

\implies Winkel eines Dreiecks ist nur von den Seitenlängen abhängig.

Beispiel 1.

$$\angle(x, y) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$$

$$\underbrace{\{y \mid \langle x, y \rangle = 0\}}_{\text{Untervektorraum}} = 0 \cup \{0 \neq y \in \mathbb{R}^n \mid \angle(x, y) = \frac{\pi}{2}\}$$

Man nennt x und y senkrecht falls $\langle x, y \rangle = 0$

Fazit 1.

$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	bilinear form
$\ \cdot\ : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$	Norm
$d(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$	Metrik

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sqrt{\langle x, x \rangle} \\ d(x, y) &= \|y - x\| \\ \langle x, y \rangle &= \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|y - x\|^2}{2} \end{aligned}$$

1.1 Vektorprodukt in \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto x \times y \end{aligned}$$

für $y = (y_1, y_2, y_3)$ und $y = (y_1, y_2, y_3)$ ist

$$x \times y = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_2, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

oder:

$$x \times y = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

wobei (e_1, e_2, e_3) die Standardbasis ist. Es ist deshalb klar, dass

$$0 = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \langle x, x \times y \rangle$$

$$0 = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \langle y, x \times y \rangle$$

$x \times y$ liegt auf der Gerade von Vektoren senkrecht zu x und y . weiter:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} &= \langle x \times y, x \times y \rangle \\ &= \|x \times y\|^2 = (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 + (x_3 y_1 - x_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \\ &= \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 \left(1 - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|x\|^2 \|y\|^2} \right) \\ &= \|x\|^2 \|y\|^2 (1 - \cos^2 \angle(x, y)) = \|x\|^2 \|y\|^2 \sin^2 \angle(x, y) \end{aligned}$$

Fazit 2. Wenn das Ergebnis $= 0$, folgt daraus, dass x und y linear abhängig sind. Falls x und y linear unabhängig sind, dann folgt dass $(x \times y, x, y)$ zu derselben Orientierungsklasse gehört wie (e_1, e_2, e_3) . Insgesamt bedeutet dies, dass $x \times y$ folgende Eigenschaften hat:

- ist senkrecht zu x und y
- ist $0 \Leftrightarrow x$ und y sind linear abhängig
- hat Länge $\|x\| \|y\| \sin \angle(x, y)$
- und hat die Richtung, die mit x und y die gleiche Orientierungsklasse wie die Standardbasis hat.

1.2 Skalarprodukt über \mathbb{C}^n

Sei $z = (z_1, \dots, z_n)$ und $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$

Bemerkung 5. Der Ausdruck macht Sinn.

$$\begin{aligned}\langle z, w \rangle &:= z_1 w_1 + \dots + z_n w_n \\ \langle z, z \rangle &:= z_1^2 + \dots + z_n^2\end{aligned}$$

Dann kann die Länge nicht mehr interpretiert werden, z.B. für $z = (1, i, 0, \dots, 0)$ haben wir $\langle z, z \rangle = 1^2 + i^2 = 0$. Isotropische Untervektorräume von \mathbb{C}^n werden nicht in diesem Kurs behandelt. ($V \subset \mathbb{C}^n$ s.d. $\langle v, w \rangle = 0 \forall v, w \in V$). Für die Physik, die Geometrie usw. ist eine Interpretation in Zusammenhang mit Länge wichtig, deshalb brauchen wir eine neue Definition.

Definition 2 (Das kanonische Skalarprodukt). von \mathbb{C}^n ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle_c : \mathbb{C}^n \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{C} \\ (z, w) &\mapsto z_1 \bar{w}_1 + \dots + z_n \bar{w}_n\end{aligned}$$

Eigenschaften 1 (von $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$).

$$\begin{aligned}\langle z + z', w \rangle &= \langle z, w \rangle_c + \langle z', w \rangle_c \\ \langle \lambda z, w \rangle_c &= \lambda \langle z, w \rangle_c \\ \langle z, w + w' \rangle_c &= \langle z, w \rangle_c + \langle z, w' \rangle_c \\ \langle z, \lambda w \rangle_c &= \bar{\lambda} \langle z, w \rangle_c\end{aligned}$$

für $z, z', w, w' \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$
 $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$ ist sesquilinear

$$\begin{aligned}\langle w, z \rangle_c &= \overline{\langle z, w \rangle_c} && \text{hermitesch} \\ \langle z, z \rangle_c &\in \mathbb{R}_{\geq 0} && \text{positiv definit} \\ \langle z, z \rangle &= 0 \Leftrightarrow z = 0\end{aligned}$$

Fazit 3. $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$ ist sesquilinear, hermitesch und positiv definit.

Beweis 3. Bei Bedarf sonstwo nachschauen (Zu viele Zeichen und zu wenig Sinn). Es läuft auf eine Sammlung von Quadraten heraus.

Definition 3 (Norm von \mathbb{C}^n).

$$\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle_c}$$

Bemerkung 6. Sei $w = (x'_1 + xy'_1, \dots, x'_n + iy'_n)$. Dann:

$$\begin{aligned}\langle z, w \rangle_c &= (x_1 + iy_1)(x'_1 - iy'_1) + \dots + (x_n + iy_n)(x'_n - iy'_n) \\ &= (x_1 x'_1 + y_1 y'_1 + \dots + x_n x'_n + y_n y'_n) + i(x'_1 y_1 - x_1 y'_1 + \dots + x'_n y_n - x_n y'_n)\end{aligned}$$

Auf diese Weise ist $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$ eine Erweiterung von reellen Skalarprodukt.

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^{2n} &\rightarrow \mathbb{C}^n && \mathbb{R}\text{-linear} \\ e_1 &\mapsto (1, 0, \dots, 0) \\ e_2 &\mapsto (i, 0, \dots, 0) \\ &\dots \\ e_{2n} &\mapsto (0, \dots, 0, i) \\ \langle \cdot, \cdot \rangle_c &= (\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ von } \mathbb{R}^{2n}) + i(\text{neues})\end{aligned}$$

Re $\langle \cdot, \cdot \rangle_c = \langle \cdot, \cdot \rangle$ von \mathbb{R}^{2n} unter diesem Isomorphismus.

Sei $\omega := \text{Im } \langle \cdot, \cdot \rangle_c$:

$$\begin{aligned}\omega : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \text{oder } \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} &\rightarrow \mathbb{R}\end{aligned}$$

Eigenschaften 2 (von ω (Imaginärteil des kanonischen Skalarproduktes)). **bilinear**

schiefsymmetrisch $\omega(w, z) = -\omega(z, w)$

$$\omega(z, z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}^n \text{ (oder } \mathbb{R}^{2n})$$

1.3 Bilinearform

Sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum.

Definition 4 (Bilinearform). Eine bilineare Form auf V ist eine Abbildung

$$s : V \times V \rightarrow K$$

so dass:

$$\begin{aligned}s(v + v', w) &= s(v, w) + s(v', w) \\ s(\lambda v, w) &= \lambda s(v, w) \\ s(v, w + w') &= s(v, w) + s(v, w') \\ s(v, \lambda w) &= \lambda s(v, w)\end{aligned}$$

$$\forall v, v', w, w' \in V, \lambda \in K$$

Und: s heisst symmetrisch, falls $s(w, v) = s(v, w)$ und schiefsymmetrisch, falls $s(w, v) = -s(v, w)$.

Beispiel 2. • $\langle \cdot, \cdot \rangle := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine symmetrische bilineare Form

- ω ist eine schiefsymmetrisch bilineare Form
- $(\langle \cdot, \cdot \rangle_c)$ nicht)
- $V = \{\text{stetige Abbildung } [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$ über \mathbb{R} : $f, g \in V$

$$s(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

ist eine symmetrisch bilineare Form auf V

Sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum, mit $\dim_K V < \infty$, und $s : V \times V \rightarrow K$ eine bilineare Form.

Definition 5. darstellende Matrix Ist $B = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ eine Basis von V , so setzen wir

$$M_B(s) := (s(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in M(n \times n, K)$$

die darstellende Matrix

Korollar 3. für $x, y \in V$

$$\begin{aligned} x &= x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \\ y &= y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n \end{aligned}$$

und

$$M_B(s) = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, \text{ d.h. } a_{ij} = s(v_i, v_j)$$

haben wir:

$$\begin{aligned} s(x, y) &= \sum_{i, j=1}^n x_i y_j a_{ij} \\ &= (x_1 \cdots x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= x^t M_B(s) \cdot y \end{aligned}$$

Proposition 1. Sei V ein endlich-dim. Vektorraum über K mit Basis $B = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$. Es gibt eine Bijektion zwischen der Menge von Bilinearformen und $M(n \times n, K)$, gegeben durch

$$(s : V \times V \rightarrow K) \mapsto M_B(s)$$

Beweis 4. Wir schreiben einen Vektor $x \in V$ als (x_1, \dots, x_n) falls $x = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$. Ähnlich für y . Dann ist

$$\begin{aligned} A \in M(n \times n, K) &\mapsto V \times V \rightarrow K \\ (x, y) &\mapsto x^t \cdot A \cdot y \end{aligned}$$

inverses zu der obigen Abbildung.

Bemerkung 7. Sei $(s : V \times V \rightarrow K)$ eine bilineare Form und $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ die darstellende Matrix. Wir erinnern uns an die Notation

$$\begin{aligned} \Phi_B : K^n &\rightarrow V \\ e_i &\mapsto v_i \end{aligned}$$

Dann:

$$K^n \times K^n \xrightarrow{\Phi_B \times \Phi_B} V \times V \xrightarrow{s} K$$

ist gegeben durch

$$(x, y) \mapsto x^t A \cdot y$$

Sei $A = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ eine andere Basis.

$$\begin{array}{ccc} & K^n & \\ & \downarrow \Phi_A & \searrow \Phi_B \\ T = \Phi_B^{-1} \circ \Phi_A & & V \\ & \uparrow \Phi_B & \\ & K^n & \end{array}$$

Proposition 2. Transformationsformel Mit dieser Notation haben wir:

$$M_A(s) = T^t \cdot M_B(s) \cdot T$$

Beweis 5.

$$\begin{aligned} K^n \times K^n &\xrightarrow{\Phi_B \times \Phi_B} V \times V \xrightarrow{s} K \\ (x, y) &\mapsto x^t \cdot M_B(s) \cdot y \end{aligned}$$

Beispiel 4. $\langle v, v \rangle = v_1^2 + \dots + v_n^2$ für $v \in K^n$

Für $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ eine symmetrische Matrix mit $s : V \times V \rightarrow K$, $(x, y) \mapsto x^t A y$, haben wir

$$\begin{aligned} s(x, x) &= x^t A x \\ &= (x_1 \quad \dots \quad x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

Ist $\text{char}(K) \neq 2$, so haben wir:

$$\begin{aligned} \{\text{symm. bilineare Formen in } K^n\} &\leftrightarrow \{\text{quadr. Formen auf } K^n\} \\ s &\mapsto q(v) := s(v, v) \\ &\leftrightarrow (\text{Polarisierungsformel}) \end{aligned}$$

1.4.1 Polarisierungsformel

Ist s eine symmetrische Bilinearform und q die zu s gehörende quadratische Form über einem Vektorraum V über K mit $\text{char}(K) \neq 2$, dann gilt:

$$\begin{aligned} s(v, w) &= \frac{1}{2} (q(v+w) - q(v) - q(w)) \\ &= \frac{1}{2} (q(v) + q(w) - q(v+w)) \\ &= \frac{1}{4} (q(v+w) - q(v-w)) \end{aligned}$$

1.5 Sesquilineare Form

Definition 6. Sei V ein komplexer Vektorraum. Eine Abbildung

$$s : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

heißt sesquilinear falls:

$$\begin{aligned} s(v + v', w) &= s(v, w) + s(v', w) \\ s(\lambda v, w) &= \lambda s(v, w) \\ s(v, w + w') &= s(v, w) + s(v, w') \\ s(v, \lambda w) &= \bar{\lambda} s(v, w) \end{aligned}$$

für $v, v', w, w' \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Beispiel 5. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf \mathbb{C}^n

$$\begin{aligned} s(f, g) &= \int_0^1 f(x)g(x)dx \\ \text{auf } V &:= \{\text{stetige Abb. } [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

Definition 7. hermitesch Eine sesquilineare Form heißt hermitesch, falls

$$s(w, v) = \overline{s(v, w)} \quad \forall v, w \in V$$

Beispiel 6. $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$ auf \mathbb{C}^n ist hermitesch.

Bemerkung 9. hermitesche Form Man spricht von hermiteschen Form, diese sind immer sesquilinear

Definition 8. darstellende Matrix Sei $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$, und $B := (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ eine Basis. Ist s eine sesquilineare Form, so definieren wir

$$M_B(s) := (s(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n}$$

die darstellende Matrix. Sind $z, w \in V$

$$\begin{aligned} z &= z_1 v_1 + \cdots + z_n v_n \\ w &= w_1 v_1 + \cdots + w_n v_n \end{aligned}$$

dann haben wir

$$\begin{aligned} s(z, w) &= \sum_{i, j=1}^n z_i \bar{w}_j a_{ij} \text{ wobei } a_{ij} = s(v_i, v_j) \\ &= (z_1 \cdots z_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \vdots \\ \bar{w}_n \end{pmatrix} = z^t M_B(s) \cdot \bar{w} \end{aligned}$$

Proposition 3. Sei V ein endlich dim. \mathbb{C} Vektorraum und $B = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$. Wir haben eine Bijektion

$$\{\text{sesquilineare Form auf } V\} \leftrightarrow M(n \times n, \mathbb{C})$$

Unter dieser Bijektion haben wir:

$$\{\text{hermitesche Formen}\} \leftrightarrow \{A \in M(n \times n, \mathbb{C}) : A^t = \bar{A}\}$$

Man sagt: eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ mit $A^t = \bar{A}$ ist hermitesch.

Satz 1. Transformationsformel Sei $A = (u_1, \dots, u_n)$ eine andere Basis mit Transformationsmatrix T :

TODO: hier einfügen

Dann gilt:

$$M_A(s) = T^t \cdot M_B(s) \cdot \bar{T}$$

Mit $g(v) := s(v, v)$ gilt die Polarisierungsformel

$$s(v, w) = \frac{1}{4} (q(v+w) - q(v-w) + iq(v+iw) - iq(v-iw))$$

Definition 9. positiv definit Sei $K = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} , V ein K -Vektorraum und

$s : V \times V \rightarrow K$ eine Bilinearform $\begin{cases} \text{symmetrisch} & K = \mathbb{R} \\ \text{hermitesch} & K = \mathbb{C} \end{cases}$ heisst positiv definit,

falls $s(v, v) > 0 \forall 0 \neq v \in V$

Beispiel 7. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist positiv definit auf \mathbb{R}^n

$\langle \cdot, \cdot \rangle_c$ ist positiv definit auf \mathbb{C}^n

Definition 10. Skalarprodukt

Ein Skalarprodukt ist $\begin{cases} \text{positiv definite symmetrische bilineare Form} & K = \mathbb{R} \\ \text{eine positiv definite hermitesche Form} & K = \mathbb{C} \end{cases}$

Definition 11. Skalarprodukt oft $\langle \cdot, \cdot \rangle$, Norm $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$

Definition 12. Euklidischer Vektorraum Vektorraum über \mathbb{R} mit Skalarprodukt

Definition 13. Unitärer Vektorraum Vektorraum über \mathbb{C} mit Skalarprodukt

Beispiel 8.

$$V = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\} \text{ mit } \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

$$V = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig}\} \text{ mit } \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$$

in beiden Fällen

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}$$

“ L^2 -Norm”

Bemerkung 10. In einem beliebigen euklidischen bzw. unitären Vektorraum gilt die Cauchy-Schwarz’sche Ungleichung

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\| \quad \forall v, w \in V$$

mit = genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Beweis 6. (Skizze) klar falls $v = 0$ oder $w = 0$, also nehmen wir an, dass $v \neq 0$ und $w \neq 0$. 1. Reduktion: zum Fall $\|v\| = \|w\| = 1$.

$$v_1 := \frac{v}{\|v\|} w_1 := \frac{w}{\|w\|}$$

$$\|v_1\| = 1 \quad \|w_1\| = 1$$

2. Reduktion: Es reicht aus, zu zeigen: $\operatorname{Re} \langle v, w \rangle \leq 1 =$ genau dann wenn $V = W$

$$\begin{aligned} |\langle v, w \rangle| &= \mu \langle v, w \rangle & \mu \in \mathbb{C}, |\mu| &= 1 \\ &= \langle \mu v, w \rangle \in \mathbb{R}_{\geq} \\ &= \operatorname{Re} \langle v', w \rangle \text{ wobei } v' := \mu v \end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz’sche Ungleichung \leq , Gleichheit: v, w linear unabhängig $\implies v', w$ linear unabhängig $\implies v' \neq w$

Eigenschaften 3.

$$\begin{aligned} \langle v - w, v - w \rangle &\geq 0 & \text{= falls } v - w &= 0 \\ \langle v, v \rangle - \langle v, w \rangle - \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle &\geq 0 & v &= w \\ 1 - \langle v, v \rangle - \overline{\langle v, w \rangle} + 1 &\geq 0 & v &= w \end{aligned}$$

Beispiel 9. Ist $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ oder $T : V \rightarrow \mathbb{C}^n$ ein Isomorphismus, dann ist $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ (bzw. $s : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$) gegeben durch

$$s(x, y) = \langle T_x, T_y \rangle$$

bzw.

$$s(x, y) = \langle T_x, T_y \rangle_c$$

ein Skalarprodukt.

Definition 14. Sei V ein exklusiver, bzw. unitärer Vektorraum

- $v, w \in V$ heisst orthogonal, falls $\langle v, w \rangle = 0$
- $U, W \subset V$ heissen orthogonal (geschrieben $U \perp W$) falls $U \perp W \quad \forall u \in U, w \in W$
- $U \subset W$ das orthogonale Komplement ist $U^\perp = \{v \in V : u \perp v \forall u \in U\}$
- v_1, \dots, v_n sind orthogonal, falls $v_i \perp v_j \quad \forall i \neq j$

- v_1, \dots, v_n sind orthonormal, falls $v_i \perp v_j \ \forall i \neq j$ und $\|v_i\| = 1 \ \forall i$
- V ist orthogonale direkte Summe von Untervektorräumen V_1, \dots, V_r falls

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$$

$$V_i \perp V_j \ \forall i \neq j$$

$$C([-1, 1], \mathbb{R}) := \{f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$$

dann ist $C([-1, 1], \mathbb{R})$ die orthogonale direkte Summe von $C([-1, 1], \mathbb{R})_{\text{gerade}}$ und $C([-1, 1], \mathbb{R})_{\text{ungerade}}$. gerade: $f(-x) = f(x)$ und ungerade: $f(-x) = -f(x)$

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{gerader Teil}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{ungerader Teil}}$$

$$g \text{ gerade, } h \text{ ungerade} \implies gh \text{ ungerade} \implies \langle g, h \rangle = \int_{-1}^1 g(x)h(x) = 0$$

Bemerkung 11. Ist v_1, \dots, v_n eine orthonormale Familie mit $v_i \neq 0 \forall i$, so gilt

1. $(i)(v_1, \dots, v_n)$ ist linear unabhängig ($c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0 \implies c_i \langle v_i, v - i \rangle + \dots + c_i \langle v_i, v_i \rangle + \dots + c_n \langle v_n, v_i \rangle = 0 \implies c_i \|v_i\|^2 = 0 \implies c_i = 0$)
2. $\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\right)$ ist orthonormal

Satz 2. Ist (v_1, \dots, v_n) eine orthonormale Basis von V , so gilt folgendes für beliebiges $v \in V$

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v_i, v \rangle v_i$$

$$v = \sum_{i=1}^b c_i v_i$$

$$\langle v, v_j \rangle = \sum_{i=1}^n c_i \langle v_i, v_j \rangle$$

$$= c_j \langle v_i, v_j \rangle = c_j$$

Proposition 4. Sei $K = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} und $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum über K

1. Ist $n := \dim_K V < \infty$ und (v_1, \dots, v_d) eine orthonormale Familie von Vektoren von V , so existieren v_{d+1}, \dots, v_n , so dass (v_1, \dots, v_n) eine orthonormale Basis von V ist.
2. Ist $U \subset V$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum, so gilt $V = U \oplus U^\perp$, orthonormal direkte Summe.

Beweis 7. Es gibt triviale Fälle: $d = n$ in 1., $U = 0$ in 2. Auch: der Fall $(d = 0)$ in 1. $\Leftarrow d = 1$: $0 \neq v \in V$ beliebiger Vektor, wir nehmen $b_1 = \frac{v}{\|v\|}$
Beweis durch Induktion nach N mit Induktionsannahme 1. gilt für $n \leq N$
 $N = 1$ okay.

Plan: Wir zeigen $1A \implies 2.$ für $\dim_K U \leq N$ und $1A \implies 1.$ für $n \leq N + 1$.
 $1A \xrightarrow{\dim U \leq N} \exists$ orthonormale Basis (u_1, \dots, u_d) von U $d := \dim U$. Für beliebiges $v \in V$ gilt:

$$v - \sum_{i=1}^d \langle v_i, v \rangle u_i \in U^\perp$$

$$U : 1\text{-dimensional} \quad \left| \quad U^\perp : 2\text{-dim} \right. \\ s(e_1, e_1) = 3 \quad \quad \quad = 24$$

denn

$$\left\langle v - \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i, u_j \right\rangle = \langle v, u_j \rangle - \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle \langle u_i, u_j \rangle = 0$$

Und: 1. für $\dim V \leq N+1$ folgt aus IA und 2. für $U \leq N$

$$1 \leq d < n = \dim V \geq N+1 \\ \implies 1 \leq d \leq N \text{ und } 1 \leq \dim V - d \leq N$$

Sei $U := \text{span}(v_1, \dots, v_d)$ Aus 2. haben wir $V = U \oplus U^\perp$ Nach IA, \exists orthonormale Basis (v_{d+1}, \dots, v_n) von U^\perp Es folgt, dass (v_1, \dots, v_n) ist eine orthonormale Basis von V .

Eigenschaften 4. Praktisches Verfahren zu testen ob ein symmetrisch bilineare bzw. hermetische Form ein Skalarprodukt ist (falls $\dim_K V < \infty$). Verfahren:

- wählen $U \subset V$ nicht trivialer Untervektorraum (z.B. $U = \text{span}(v), 0 \neq v \in V$)
- Berechnen U^\perp
- Testen:
 - Ist $V = U \oplus U^\perp$?
 - Ist die Einschränkung von der Form auf U ein Skalarprodukt?
 - Ist die Einschränkung von der Form auf U^\perp ein Skalarprodukt?

Beispiel 10. $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$M := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die entsprechende Bilinearform

$$(x, y) \mapsto t_x \cdot M \cdot y$$

$$\begin{aligned} U &= \text{span}(e_1) \\ U^\perp &= \{(x_1, x_2, x_3) : 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\} \\ &= \text{span}((1, -3, 0), (0, 2, -1)) \end{aligned}$$

Die darstellende Matrix:

$$s|_{U^\perp} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 24 & -21 \\ -21 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} U &\cong \mathbb{R}^2 \\ W &= \text{span}(e_1) \in \mathbb{R}^2 \\ W^\perp &= \{(x_1, x_2) | 24x_1 - 21x_2 = 0\} \\ &= \text{span}(21, 24) \end{aligned}$$

W 1-dim, W^\perp 1-dim

$$\begin{aligned} (s|_{U^\perp})(e_1, e_2) &= 24 \\ (21 \quad 24) \begin{pmatrix} 24 & -21 \\ -21 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 18 \end{pmatrix} &= -216 \end{aligned}$$

\implies kein Skalarprodukt

1.6 Volumen

Definition 15. Volumen $\xleftrightarrow{\text{Skalarprodukt}} \langle \cdot, \cdot \rangle \xleftrightarrow{\text{Norm}} \|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle} \xleftrightarrow{\text{Metrik}} d(x, y) = \|y, x\|$
 $K = \mathbb{R} \rightsquigarrow \text{Volumen } (\dim V < \infty)$

1.6.1 Spat

Definition 16. Spat u_1, \dots, u_n orthonormale Basis. Dann ist der von (u_1, \dots, u_n) aufgespannte Spat definiert als (wobei $c_i :=$ von (u_1, \dots, u_n) aufgespannten Spat)

$$\left\{ \sum_{i=1}^n c_i u_i \mid 0 \leq c_i \leq 1 \ \forall i \right\}$$

$\text{Vol}(\text{Spat}) := 1$

Falls $v_1, \dots, v_n \in V$ beliebig sind, dann hat der von (v_1, \dots, v_n) aufgespannte Spat

$$\text{Vol} = \left| \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right| \quad v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j$$

Sei $b_{ij} := \langle v_i, v_j \rangle$ und $B := \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ Wir haben $b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk}$,

also $B = A \cdot A^t$. Es folgt:

$$\text{Vol} = \sqrt{(\det A)^2} = \sqrt{\det B}$$

Vorteile:

- keine Wahl von orthonormalen Basis nötig
- auch sinnvoll für eine Kollektion v_1, \dots, v_m evtl. $m \neq n$

Beispiel 11. $m = 1$

$$\begin{aligned} \det B &= \|v_1\|^2 \\ \sqrt{\det B} &= \|v_1\| \end{aligned}$$

Definition 17. Grammsche Determinante Im m -dim Volumen $:= \sqrt{G(v_1, \dots, v_m)}$ wobei

$$G(v_1, \dots, v_m) := \det (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq m}$$

die sogenannte Grammsche Determinante ist.

Bemerkung 12. Es gilt $G(v_1, \dots, v_m) = 0 \Leftrightarrow v_1, \dots, v_m$ linear abhängig, weil

$$A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{R})$$

mit

$$G(v_1, \dots, v_m) = \det(A, A^t) = \sum (m \times m \text{ Minor})$$

Bemerkung 13.

$$\text{Vol}(v_1, \dots, v_m) := \sqrt{G(v_1, \dots, v_m)}$$

ist 0 falls $\exists i : v_i = 0$

sonst:

$$\text{Vol}(v_1, \dots, v_m) = \|v_1\| \cdots \|v_m\| \text{Vol}\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_m}{\|v_m\|}\right)$$

Satz 3. Hadamard'sche Ungleichung

$$\text{Vol}(v_1, \dots, v_m) \leq \|v_1\| \cdots \|v_m\|$$

für $0 \neq v_i \in V$, $i = 1, \dots, m$. Mit Gleichheit genau dann wenn v_1, \dots, v_m orthogonal sind.

Beweis 8. Durch fallende Induktion nach

$$\max \{|I| : I \subset \{1, \dots, m\} \mid (v_i)_{i \in I} \text{ orthogonal}\}$$

Fall $\max\{\dots\} = m$ das bedeutet, v_1, \dots, v_m sind orthogonal. Dann:

$$G(v_1, \dots, v_m) = \det \begin{pmatrix} \|v_1\|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \|v_m\|^2 \end{pmatrix} = \|v_1\|^2 \cdots \|v_m\|^2$$

Die ist der Induktionsanfang.

Sei $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq r < m$. Induktionsannahme: Ungleichung für den Fall

$$\max\{|I| : (v_i)_{i \in I} \text{ orthogonal}\} > r$$

Sei v_1, \dots, v_m , so dass $\max\{\dots\} = r$. o.B.d.A: v_1, \dots, v_r orthogonal. Wir schreiben:

$$v_m = \underbrace{v_m - \sum_{i=1}^r \frac{\langle v_m, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i}_{\tilde{v}_m \in \text{span}(v_1, \dots, v_r)^\perp} + \underbrace{\sum_{i=1}^r \frac{\langle v_m, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i}_{\tilde{v}_m \in \text{span}(v_1, \dots, v_r)}$$

$$< \tilde{v}_m, \tilde{v}_m \rangle = 0$$

- $v = \tilde{v} + \tilde{\tilde{v}}$
- $< \tilde{v}, \tilde{\tilde{v}} \rangle = 0$
- $\|v\|^2 = \|\tilde{v}\|^2 + \|\tilde{\tilde{v}}\|^2$

Das ist eine Orthogonale Projektion Wir haben

$$G(v_1, \dots, v_m) = G(v_1, \dots, v_{m-1}, \tilde{v}_m)$$

weil (Spalten- und Zeilenumformungen...). Es folgt:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(v_1, \dots, v_m) &= \text{Vol}(v_1, \dots, v_{m-1}, \tilde{v}_m) \leq \|v_1\| \cdots \|v_{m-1}\| \|\tilde{v}_m\| \\ &< \|v_1\| \cdots \|v_{m-1}\| \|v_m\| \end{aligned}$$

Definition 18. Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren

$$\tilde{v}_r := v_r - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\langle v_r, \tilde{v}_i \rangle}{\langle \tilde{v}_i, \tilde{v}_i \rangle} \tilde{v}_i, \text{ für } 1, 2, \dots$$

gegeben: eine Kollektion (v_1, \dots, v_n) oder abzählbar unendlich (v_1, v_2, \dots) . Das Verfahren produziert $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots)$, mit:

$$\begin{aligned} (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots) &= (v_1, v_2, \dots) \\ (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m) &= (v_1, \dots, v_m) \quad \forall m \\ (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots) &\text{ sind orthogonal} \end{aligned}$$

Beispiel 12. $C([-1, 1], \mathbb{R})$ mit $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$

$$\begin{aligned} (1, x, x^2, \dots) &\xrightarrow{\text{GS}} \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{2/3}{2} \\ (1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3}{5} \dots) \end{aligned}$$

Bis auf Normalisierung bekommen wir die Legendre-Polynome.

Fazit 4. $\begin{array}{ccccc} \text{Bilinearform} & \xrightarrow{+ \text{ def, symm}} & \text{Norm} & \rightarrow & \text{Metrik} \\ \text{Sesquilinearform} & \xrightarrow{+ \text{ def, hermitesch}} & & & \text{Norm:} \end{array}$

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \|x\| = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \\ \|\lambda x\| &= |\lambda| \|x\| \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

Metrik:

$$\begin{aligned} d : V \times V &\rightarrow \mathbb{R}_{\leq 0} \\ d(x, <) &= 0 \Leftrightarrow x = y \\ d(x, y) &= d(y, x) \\ d(x, z) &\leq d(y, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

Aber: nicht jede Metrik, nicht einmal jede transinvariante Metrik kommt von einer Norm.

Bemerkung 14. Eine Norm kommt von einer +def, symm Bilinearform

$$\Leftrightarrow \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x, y \in V$$

Definition 19. ausgeartete Bilinearform Eine Bilinearform $s : V \times V \rightarrow K$ ist ausgeartet (oder: entartet), falls eine oder beide der induzierten Abbildungen $V \rightarrow V^*$ nicht injektiv ist.

$$\begin{aligned} v &\mapsto (w \mapsto s(v, w)) \\ v &\mapsto (w \mapsto s(w, v)) \end{aligned}$$

Bemerkung 15. Falls $\dim_K V < \infty$, dann:

$$\begin{array}{ll} v \mapsto (w \mapsto s(v, w)) & \text{injektiv} \\ \Downarrow & \\ v \mapsto (w \mapsto s(w, v)) & \text{injektiv} \\ \Downarrow & \\ s \text{ ist nicht ausgeartet} & \\ \Downarrow & \\ \text{die darstellende Matrix ist invertierbar} & \end{array}$$

$$\begin{aligned} s(v, w) &= v^t \cdot A \cdot w \\ &= (A^t \cdot v)^t \end{aligned}$$

i++i

Satz 4. Sei V ein K -Vektorraum, $s : V \times V \rightarrow K$ eine symmetrische oder schiefsymmetrische Bilinearform. Für $U \subset V$ Untervektorraum, schreiben wir noch

$$U^\perp := \{v \in V : s(u, v) = 0 \quad \forall u \in U\}$$

($s(v, u) = 0 \Leftrightarrow s(u, v) = 0$ weil s symm. bzw. schiefsymm.)

Proposition 5. Sei V ein endlich dimensionaler K -Vektorraum und $s : V \times V \rightarrow K$ eine nicht ausgeartete symmetrische oder schiefsymmetrische Bilinearform. Sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Dann gilt:

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V$$

Beweis 9. Sei $(v_i)_{i=1, \dots, n}$ eine Basis mit $n := \dim V$, und A die darstellende Matrix von s bzw. (v_i) . Wir haben dann:

$$s(x, y) = x^t \cdot A \cdot y$$

und $A^t = \pm A$, $\det A \neq 0$

$$U^\perp = \{x \in V_i | x^t \cdot A \cdot y = 0 \quad \forall y \in U\} = \{x \in V_i | (x \cdot A)^t \cdot y = 0 \quad \forall y \in U\}$$

Sei $F : V \rightarrow V$ lin. Abb. $\leftrightarrow A$. Dann:

$$F(U^\perp) = \{Ax \mid (Ax)^t y = 0 \ \forall y \in U\} = \{Ax \mid \tilde{x}^t y = 0 \ \forall y \in U\}$$

Es folgt: mit

$$B := \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_d \\ | & & | \end{pmatrix}$$

(u_1, \dots, u_d) Basis von U , dann ist $F(U^\perp) = \text{Ker } B$. Jetzt:

$$\dim U^\perp = \dim F(U^\perp) = \dim \text{Ker } B = n - \dim U$$

Korollar 4. $\dim U < \infty$, $s : V \times V \rightarrow K$ nicht ausgeartet, (schief-) symm.

$$U \subset \implies (U^\perp)^\perp = U$$

Bemerkung 16. Es ist nicht immer der Fall, dass $V = U \oplus U'$, weil es ist möglich, dass $U \cup U^\perp \neq 0$. 2 Extremfälle:

- U ist isotropisch ($s|_{U'}$ ist trivial) $\Leftrightarrow U \subset \underbrace{U^\perp}_{\dim V - \dim U}$
- $s|_U$ ist auch nicht ausgeartet $\Leftrightarrow U \cup U^\perp = 0 \Leftrightarrow V = U \oplus U^\perp$

Aus 1. ist klar:

$$\dim U \leq \frac{1}{2} \dim V \ \forall \text{ isotrop } U \subset V$$

1.7 Orthogonale und unitäre Endomorphismen

$K = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}

Definition 20. orthogonaler bzw. unitärer Endomorphismus Sei V, \langle, \rangle ein ortho. bzw. unitärer Vektorraum. Ein Endomorphismus $F : V \rightarrow V$ heisst orthogonal bzw. unitär falls

$$\langle F(v), F(w) \rangle = \langle v, w \rangle \ \forall v, w \in V$$

Bemerkung 17. Das ist äquivalent zu

$$\|F(v)\| = \|v\| \ \forall v \in V$$

Eigenschaften 5. orthogonaler bzw. unitärer Endomorphismus Sei F ein ortho. bzw. unitärer Endomorphismus. Dann:

- F ist injektiv
- Falls $\dim_K V < \infty$, F ist bijektiv, und F' ist auch ortho. bzw. unitär
- Für jeden Eigenwert $\lambda \in K$ gilt $|\lambda| = 1$. Eigenvektor v :

$$\|v\| = \|F(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

Falls $V = \mathbb{R}^n$ oder \mathbb{C}^n mit Standardskalarprodukt

$$\langle v, w \rangle = v^t w \text{ bzw. } \langle v, w \rangle_c = v^t \bar{w}$$

Ist F zur Matrix A entsprechend, dann

$$\begin{aligned} \langle F(v), F(w) \rangle &= \langle v, w \rangle \Leftrightarrow (Av)^t Aw = v^t w \\ &\text{bzw. } (Av)^t \bar{Aw} = v^t \bar{w} \\ &\Leftrightarrow v^t A^t Aw = v^t w \Leftrightarrow A^t A = E_n \\ \text{bzw. } &\Leftrightarrow v^t A^t \bar{A} \bar{w} = v^t \bar{w} \Leftrightarrow A^t \bar{A} = E_n \end{aligned}$$

Definition 21. ortho. bzw. unitäre Matrix $O(n) := A \in GL_n(\mathbb{R})$ heisst orthogonal falls $A^t A = E_n$
 $U(n) := A \in GL_n(\mathbb{C})$ heisst unitär falls $A^t \bar{A} = E_n$

Not 1.

$$O_n := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | A \text{ orthogonal}\}$$

$$O_n := \{A \in GL_n(\mathbb{C}) | A \text{ unitär}\}$$

Weil

$$A, B \in O(n) \implies (AB)^t(AB) = B^t A^t AB = B^t B = E_n \implies AB \in O(n)$$

haben wir $O(n) \subset GL_n(\mathbb{R})$ ist eine Untergruppe. Ähnlich: $U(n) \subset GL_n(\mathbb{C})$ ist eine Untergruppe.

Not 2.

$$SO(n) = O(n) \cap SL_n(\mathbb{R})$$

$$SU(n) = U(n) \cap SL_n(\mathbb{C})$$

Not 3. ortho. bzw. unitärer Vektorraum

$$O(V) = \{F \in GL(V) | \text{ortho.}\}$$

$$U(V) = \{F \in GL(V) | \text{unitär}\}$$

Bemerkung 18.

$$A \in O(n) \implies \det A \in \{\pm 1\}$$

$$A \in U(n) \implies \det A \in \{\pm z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

Eigenschaften 6. Charakterisierungen von ortho. bzw. unitären Matrizen Äquivalente Charakterisierungen von orthogonalen bzw. unitären Matrizen $A \in GL_n(\mathbb{R})$:

A ist orthogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t \Leftrightarrow A^t A = E_n \Leftrightarrow A A^t = E_n \Leftrightarrow$ die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n .

Ähnlich:

A ist unitär $\Leftrightarrow A^{-1} = \bar{A}^t \Leftrightarrow A^t \bar{A} = E_n \Leftrightarrow \bar{A} A^t = E_n \Leftrightarrow$ die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n \Leftrightarrow$ die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von \mathbb{C}^n .

Für $n = 1$

$$O(1) = \{\pm 1\} \quad U(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \cong S^1$$

$$SO(1) = \{1\} \quad SU(1) = \{1\}$$

Für $n = 2$: $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a^2 + b^2 = 1$

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\} \cong S^1$$

$(z, w) \in \mathbb{C}^2, |z|^2 + |w|^2 = 1, (-\bar{w}, \bar{z}) \perp (z, w)$

$$U(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z & -\lambda \bar{w} \\ w & \lambda \bar{z} \end{pmatrix} \mid (z, w) \in \mathbb{C}^2, |z|^2 + |w|^2 = 1, \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1 \right\} \cong S^3 \times S^1$$

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} \mid (z, w) \in \mathbb{C}^2, |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\} \cong S^3$$

$SO(3)$ eine explizite Beschreibung ist möglich (später)

Proposition 6. Sei V ein endlich dimensionaler \mathbb{C} -Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, und sei $F : V \rightarrow V$ ein unitärer Endomorphismus. Dann besitzt V eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren von F .

Beweis 10. Durch Induktion nach $\dim V$. $\dim V = 0, 1$ trivial. $\dim V \geq 2$ Weil \mathbb{C} algebraisch abgeschlossen ist, gibt es einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Sei $v \in V$ ein Eigenvektor, mit $\|v\| = 1$. Weil F unitär ist, haben wir $F(v^\perp) = v^\perp$. Wir haben $\dim v^\perp = \dim V - 1$

$$\begin{aligned} w \in v^\perp \langle v, w \rangle &\implies \langle v, w \rangle = 0 \\ \lambda \langle v, F(w) \rangle &= \langle \lambda v, F(w) \rangle = \langle F(v), F(w) \rangle = 0 \\ &\implies F(v^\perp) \subset v^\perp \end{aligned}$$

Aus der Induktionsannahme folgt, dass \exists Orthonormalbasis von v^\perp von Eigenvektoren von F . Zusammen mit $v \overset{V=\text{span}}{\rightsquigarrow} \bigoplus v^\perp$ Orthonormalbasis von V

Korollar 5. Sei $A \in U(n)$. Dann $\exists S \in U(n)$, $\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$ so dass

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

Proposition 7. Sei V ein endlich dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, und sei $F : V \rightarrow V$ ein orthogonaler Endomorphismus. Dann besitzt V eine Orthonormalbasis $(v_1^+, \dots, v_r^+, v_1^-, \dots, v_s^-, w_1, w_1', \dots, w_t, w_t')$

- $F(v_i^+) = v_i^+$
- $F(v_i^-) = -v_i^-$
- $F(w_i) = (\cos \theta_i)w_i + (\sin \theta_i)w_i'$
- $F(w_i') = (-\sin \theta_i)w_i + (\cos \theta_i)w_i'$

mit $\theta_i \in \mathbb{R}$, $0 < |\theta| < \phi$, $i = 1, \dots, t$

Beweis 11. Durch Induktion nach $\dim V$: $\dim V = 0, 1, 2$ trivial. $\dim > 2$ (nächstes mal)

$\dim_{\mathbb{R}} V$ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Skalarprodukt

Fazit 5. $F : V \rightarrow V$ orthogonaler Endomorphismus +1 oder -1 Eigenvektoren
 $\implies \exists$ orthogonale Basis

$$F(\alpha w_i + \beta w_i') = (\alpha \cos \Theta_i - \beta \sin \Theta_i) w_i + (\alpha \sin \Theta_i + \beta \cos \Theta_i) w_i', \quad \Theta_i \in \mathbb{R}$$

Beweis 12. Fortsetzung Durch Induktion nach $\dim V$, Induktionsanfang: $\dim V \leq 2$ $\dim V = 2$ bezüglich beliebiger Basis (w_1, w_1') .

$$V : \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta \\ -\sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix}$$

Matrix 1: w_1, w_2 ist wie oben, Matrix 2: charakteristisches Polynom $t^2 - 1 = (t-1)(t+1) \rightarrow (+1\text{-Eigenvektor}, -1\text{-Eigenvektor})$

1. Fall: \exists reeller Eigenwert

$$\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| = 1 \quad v \in V \quad F(v) = \lambda v$$

wir zeigen, dass $F(v^\perp) = v^\perp$ genau wie im Fall eines unitären Endomorphismus

$$\begin{aligned} \dim(v^\perp) &= \dim V - 1 \overset{IA}{\rightsquigarrow} v^\perp : \text{orthonormale Basis} \\ V &= (v) \bigoplus v^\perp \end{aligned}$$

2. Fall: \nexists reeller Eigenwert

$$\implies P_F(t) = \prod_{i=1}^{(\dim V)/2} Q_i(t)$$

$Q_i(t)$ irreduzibles quadratisches Polynom. Aus dem Satz von Cayley-Hamilton folgt:

$$\implies \exists \overbrace{v}^{\neq 0} \in V, \text{ mit } Q_i(F)v = 0$$

Sei $0 \neq v_0 \in V$ beliebigen Vektor $P_F(F)v_0 = 0$

$$\begin{aligned} Q_1(F)Q_2(F)\cdots + \frac{\dim V}{2}(F)v_0 &= 0 \\ \implies \exists j : Q_j(F)Q_{j+1}(F)\cdots + \frac{\dim V}{2}(F)v_0 &= 0 \\ \text{aber } Q_{j+1}(F)\cdots Q_{\dim V/2}(F)v_0 &\neq 0 \end{aligned}$$

\implies wir nehmen $i := j$ und $v := Q_{j+1}(F)\cdots Q_{\dim V/2}(F)v_0$.
 Beh: $U := \text{span}(v, F(v))$ ist ein F -invarianter Vektorraum. $Q_i(F)v = 0$
 $\implies \exists a, b \in \mathbb{R}$ mit $F(F(v)) = av + bF(v)$. Es folgt: U^\perp ist auch F -invariant. $V = U \oplus U^\perp \xrightarrow{IA}$ Basen von U und von U^\perp wie oben. Die Vereinigung dieser Basen ist wie erwünscht.

Korollar 6. Sei $A \in O(n)$. Dann gibt es ein $S \in O(n)$ und $r, s, t \in \mathbb{N}$, $\Theta_1, \dots, \Theta_t \in \mathbb{R}$ mit

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} E_r & & & 0 \\ & -E_s & & \\ & & D_{\Theta_1} & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & D_{\Theta_t} \end{pmatrix}$$

wobei

$$D_\Theta := \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix}$$

Beispiel 13.

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix} \in U(n)$$

$$\begin{aligned} A(z_1, \dots, z_n) &= (z_2, \dots, z_n, z_1) \\ A(1, S, S^2, \dots, S^{n-1}) &= (S, S^2, \dots, S^{n-1}, 1) \\ S &:= e^{2\pi i/n} \quad S^n = 1 \end{aligned}$$

$\implies (1, S, S^2, \dots, S^{n-1})$ ist Eigenvektor zum Eigenwert S . Ähnlich: für $0 \leq j \leq n-1$ haben wir $(1, S^j, S^{2j}, \dots, S^{(n-1)j})$ ist Eigenvektor zum Eigenwert S^j .
 $1, S, S^2, \dots, S^{n-1}$ sind paarweise verschieden $\implies (1, S^j, S^{2j}, \dots, S^{(n-1)j})$ ist eine Basis von Eigenvektoren. Normalisierung:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left(1, S^j, S^{2j}, \dots, S^{(n-1)j} \right) \right)_{j=0,1,\dots,n-1}$$

ist eine orthonormale Basis von Eigenvektoren

$(K = \mathbb{C})$ unitärer Endomorphismus von V
Fazit 6. $(K = \mathbb{R})$ orthogonaler Endomorphismus von V
 $\implies V = \bigoplus_{\text{Eigenwerte } \lambda} \text{Eig}(F; \lambda)$ orthogonale direkte Summe

Beispiel 14.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{4}{5} & \frac{36}{65} \\ \frac{4}{13} & -\frac{3}{5} & \frac{48}{65} \\ \frac{12}{13} & 0 & -\frac{5}{13} \end{pmatrix} \in O(3)$$

$\det A = 1$ 2 komplex konjugierte + 1 reeller oder 3 reelle Eigenwerte $\implies +1$ ist ein Eigenwert. $\dots \rightsquigarrow$ Eigenvektor $(6, 3, 4)$ zum Eigenwert 1. $\rightarrow v$ mit $\|v\| = 1$
 $v = \frac{1}{\sqrt{61}}(6, 3, 4) \rightarrow v^\perp = \text{span}((1, -2, 0), (2, 0, -3)) \xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}}$

$$(1, -2, 0), \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}, -3\right)$$

Normalisieren:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0), \sqrt{1}\sqrt{305}(8, 4, -15)$$

Und wir berechnen

$$S := \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{61}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{8}{\sqrt{305}} \\ \frac{3}{\sqrt{61}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{305}} \\ \frac{4}{\sqrt{61}} & 0 & -\frac{15}{\sqrt{305}} \end{pmatrix}$$

bekommen wir

$$\underbrace{S^{-1}}_{=S^t} AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{57}{65} & \frac{4\sqrt{61}}{65} \\ 0 & -\frac{4\sqrt{61}}{65} & -\frac{57}{65} \end{pmatrix}$$

1.8 Beschreibung von $SO(3)$ und $O(3)$

Eigenschaften 7. Sei $A \in SO(3)$. Dann: entweder es gibt 1 reelle und 2 komplex konjugierte Eigenwerte oder 3 reelle Eigenwerte. $\lambda \in \mathbb{C} \implies \lambda \cdot \bar{\lambda} = 1$. Eigenwerte $+1(\times 3) \Leftrightarrow A = E_3$ oder $-1(\times 2) / +1$. Wenn $\nrightarrow A = E^3$, dann ist $\dim \text{Eig}(A, 1) = 1$.

$$A : \text{Eig}(A, 1)^\perp \rightarrow \text{Eig}(A, 1)^\perp$$

ist eine Drehung durch einen Winkel $\Theta \in (0, 2\phi)$. Bezüglich Basis (v_1, v_2, v_3) , $v_1 \in \text{Eig}(A, 1)$, $\|v_1\| = 1$ sieht A aus wie

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Theta & -\sin \Theta \\ 0 & \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix}$$

Eigenschaften 8. Sei $A \in O(3)$ Falls $\det A = 1$, haben wir $A \in SO(3)$

Falls $\det A = -1$, haben wir $-A \in SO(3)$

Dann bekommen wir die folgende Beschreibung von $A \in O(3)$ mit $\det A = -1$:

- $A = -E_3$
- oder $\dim \text{Eig}(A, -1) = 1$
 $v_1 \in \text{Eig}(A, -1)$, $\|v_1\| = 1$
 $A : \text{Eig}(A, -1)^\perp \rightarrow \text{Eig}(A, -1)^\perp$ ist eine Drehung um den Winkel $\Theta - \pi \in (-\pi, \pi)$ (Spiegelung oder Spiegelung mit Drehung)

1.9 Selbstadjungierte Endomorphismen

V, \langle, \rangle , K -Vektorraum mit Skalarprodukt. ($K = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}). Ist $F : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus, so heisst $F^* : V \rightarrow V$ adjugierter Endomorphismus falls

$$\langle F(v), w \rangle = \langle v, F^*(w) \rangle \quad \forall v, w \in V$$

Definition 22. $F : V \rightarrow V$ ist adjugiert falls

$$\langle F(v), w \rangle = \langle v, F(w) \rangle \quad \forall v, w \in V$$

Eigenschaften 9. Falls $V = \mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt, so zu F ist eine assoziierte Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$, dann ist A^t zu F^* assoziiert. Falls $V = \mathbb{C}^n$, dann ist

$$\begin{aligned} F &\leftrightarrow A \in M(n \times n, \mathbb{C}) \\ F^* &\leftrightarrow \bar{A}^t \in M(n \times n, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

Beweis 13.

$$\langle Av, w \rangle = (Av)^t \bar{w} = v^t A^t \bar{w} = v^t \bar{A}^t w = \langle v, \bar{w}^t w \rangle$$

Bemerkung 19. F^* ist eindeutig falls für \tilde{F}^* gilt

$$\langle F(v), w \rangle = \langle v, \tilde{F}^*(w) \rangle$$

dann ist

$$0 = \langle v, \tilde{F}^*(w) - F^*(w) \rangle$$

\implies

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \tilde{F}^*(w) - F^*(w), \tilde{F}^*(w) - F^*(w) \rangle \\ &= \|\tilde{F}^*(w) - F^*(w)\|^2 \\ &\implies \tilde{F}^*(w) = F^*(w) \end{aligned}$$

Fazit 7. Im Fall $V = \mathbb{R}^n$ bzw. \mathbb{C}^n mit Standardskalarprodukt ist ein selbstadjungierter Endomorphismus durch eine symmetrische bzw. hermitesche Matrix gegeben.

Lemma 1. Jeder Eigenwert eines selbstadjungierten Endomorphismus ist reell.

Beweis 14. Ist $F(v) = \lambda v$ mit $v \neq 0$, so gilt

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle F(v), v \rangle = \langle v, F(v) \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle \implies \lambda = \bar{\lambda}$$

Bemerkung 20. Prä-Hilbertraum bezeichnet einen K -Vektorraum ($K = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}) mit Skalarprodukt. Euklidische bzw. unitäre Vektorräume sind endlichdimensional,

Proposition 8. Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und $F : V \rightarrow V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Dann gibt es eine orthonormale Basis von Eigenvektoren.

Beweis 15. Falls V ein unitärer Vektorraum ist: durch Induktion nach $\dim V$, \exists Eigenwert λ , Eigenvektor v , oBdA haben wir $\|v\| = 1$. Wir behaupten:

$$F(v^\perp) \in v^\perp$$

$$\langle v, w \rangle = 0 \implies \langle v, F(w) \rangle = \langle F(v), w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle = 0$$

IA $\implies \exists$ orthonormale Basis von v^\perp . Dies, zusammen mit v , gibt eine Basis von V . Fall eines euklidischen Vektorraums: Das gleiche Argumente ist gültig, sobald wir wissen, dass F einen Eigenwert besitzt. Man wählt eine Basis von V , so:

$$F \leftrightarrow A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \quad [n = \dim V]$$

mit $A = A^t$. Wir betrachten A als komplexe Matrix, so dass

$$A = \bar{A} \implies \bar{A}^t = A^t = A \implies A \text{ ist hermetisch}$$

Sei λ ein (komplexer) Eigenwert von A . Weil A hermetisch ist, haben wir $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir haben

$$\det(A - \lambda E_n) = 0$$

Dann:

$$\det(F - \lambda \text{id}_V) = 0$$

also λ ist Eigenwert von F .

Korollar 7. Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Dann $\exists S \in O(n)$ mit

$$S^t A S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ hermetisch. Dann $\exists S \in U(n)$ mit

$$\bar{S}^t A S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

Korollar 8. Sei $F : V \rightarrow V$ wie in der Proposition oben. Dann ist V die orthogonale direkte Summe von diesen Eigenräumen:

$$V = \bigoplus_{\text{Eigenwert } \lambda} \text{Eig}(F; \lambda)$$

Fazit 8. \rightsquigarrow Praktisches Verfahren: A symmetrisch bzw. hermetische Matrix

\hookrightarrow berechnen $\text{Eig}(A; \lambda)$

\hookrightarrow wählen von jedem eine orthonormale Basis

Beispiel 15.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3+3i \\ 3 & 5 & -3-3i \\ 3-3i & -3+3i & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = \det(tE_3 - A) = (t-5)^2(t-2) + \dots = t^3 - 12t^2 + 256 = (t+4)(t-8)^2$$

$$\text{Eig}(A; -4) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3+3i \\ 3 & 9 & -3-3i \\ 3-3i & -3+3i & 6 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1+i \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Eig}(A; \delta) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3+3i \\ 3 & -3 & -3+3i \\ 3-3i & -3+3i & -6 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1-i \end{pmatrix} \right\} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \right), \left(\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1-i}{2} \right)$$

Wir bekommen:

$$S := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{-1+i}{2} & 0 & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix}$$

dann:

$$\bar{S}^t A S = \text{diag}(-4, 8, 8)$$

Bemerkung 21. Das Resultat von der Proposition oben im Fall eines euklidischen Vektorraums ist klar, auch aus geometrischem Grund.

symm. Matrizen $\setminus \mathbb{R} \rightsquigarrow$ quadratische Formen

(Prop aktuelle-7) $S^t A S$ aus der Transformationsformel.

... und man kann auch einen alternativen Beweis in diesem Fall geben.

$$A \in M(n \times n, \mathbb{R}), A^t = A \rightsquigarrow q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, q(v) := v^t A v$$

(Faktum aus der Analysis)

$$\exists x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1 \text{ mit } q(x) \geq q(x') \quad \forall x' \in \mathbb{R}^n, \|x'\| = 1$$

Dann für $v \in \mathbb{R}^n, v \perp x$ haben wir $Av \perp x$. In der Tat haben wir

$$(Av - q(x)v) \perp x \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

denn

$$\langle Av - q(x)v, v \rangle + 2\lambda \langle Av - q(x)v, x \rangle = (v + \lambda x)^t (A - q(x)E_n)(v + \lambda x) \leq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

(Details im Buch, 5.6.4)

Bemerkung 22. F selbstadjugiert, $\dim V < \infty \implies \exists$ orthonormale Basis von Eigenvektoren \implies

$$V = \bigoplus_{\lambda} \text{Eig}(F; \lambda)$$

orthogonale direkte Summe \rightsquigarrow orthogonale Projektion

$$P_{\lambda} V \rightarrow \text{Eig}(F, \lambda)$$

Dann können wir schreiben

$$\begin{aligned} F &= \sum_{\text{Eigenwerte } \lambda} \lambda P_{\lambda} \\ &= \{\text{Eigenwerte von } F\} = \text{"Spektrum"} \end{aligned}$$

Geschrieben mit Matrizen:

$$A \in (n \times n, \mathbb{R}) \text{ symmetrisch} \implies \exists S \in O(n)$$

so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Interpretation: der zu A assoziierte Endomorphismus ist Diagonalisierbar.

$S^t AS$ ist eine Diagonalmatrix

Interpretation: $A \leftrightarrow s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Bilinearform.

$$\begin{aligned} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &\leftrightarrow (x, y) \mapsto x^t \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) y \\ &\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)^t \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i \end{aligned}$$

Fragen

- Zu einer symmetrischen Bilinearform gibt es eine bestimmte Normalform?
- Wie kann man das praktisch berechnen?

Proposition 9. *Hauptachsentransformation symmetrischer Matrizen* Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch und $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die entsprechende symmetrische Bilinearform. Dann:

1. Ist $B = (w_1, \dots, w_n)$ eine orthonormale Basis von Eigenvektoren von A , so ist $M_B(s) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A sind.
2. Es gibt eine Basis B' mit

$$M_{B'}(s) = \begin{pmatrix} E_k & & \\ & -E_l & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Blockdiagonalmatrix, wobei

$$\begin{aligned} k &= \#\{i | \lambda_i > 0\} \\ l &= \#\{i | \lambda_i < 0\} \end{aligned}$$

Beweis 16. 1. $\Leftrightarrow \exists S \in O(n)$ mit $S^t AS = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$2. \Leftrightarrow \exists T \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ mit } T^t AT = \begin{pmatrix} E_k & & \\ & -E_l & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

oder BdA habe wir

$$\begin{aligned} \lambda_1, \dots, \lambda_k &> 0 \\ \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{k+l} &< 0 \\ \lambda_{k+l+1} &= \dots = \lambda_n = 0 \end{aligned}$$

Wir nehmen $B' = (w'_1, \dots, w'_n)$ mit

$$w'_i = \begin{cases} \frac{w_i}{\sqrt{|\lambda_i|}} & i \leq k+l \\ w_i, i > l+l \end{cases}$$

$$(w'_i)^t A w'_i = \frac{1}{|\lambda_i|} w_i^t A w_i = \frac{1}{|\lambda_i|} \lambda_i \text{ für } i \leq k+l$$

Bemerkung 23.

$$T^t A T = \underbrace{\begin{pmatrix} E_k & & \\ & -E_n & \\ & & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Sylvester-Form}}$$

... Erklärung zum Namen "Hauptachsentransformation"...

Korollar 9. Sei $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform mit entsprechender Matrix A . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. s ist positiv definit
2. Alle Eigenwerte von A sind positiv
3. Die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms haben alternierende Vorzeichen

Vorzeichenregel von Descartes

Beispiel 16.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = \det(tE_3 - A) = t^3 - ut^2 + 15t \underbrace{+}_{+} 3$$

$$P_A(-1) = -21 \quad P_A(0) = 3 \implies \exists \lambda : -1 < \lambda < 0$$

Beweis 17. s ist äquivalent zu

$$(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda x_i y_i$$

$$\implies s \text{ positiv definit} \Leftrightarrow \lambda_i > 0 \quad \forall i$$

Bemerkung 24. Weitere Begriffe $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform

positiv definit	positiv semidefinit
negativ definit	negativ semidefinit
indefinit:	$\exists x \in V : s(x, x) > 0$ und $y \in V : s(y, y) < 0$

Tabelle 1: Weitere Begriffe

Bemerkung 25. Ausartungsraum Ausartungsraum von einer Bilinearform $s : V \times V \rightarrow K$ auf einem Vektorraum über einem beliebigen Körper K ist:

$$U := \{v \in V \mid s(v, w) = 0 \quad \forall w \in V\}$$

und ist ein Untervektorraum. Falls s symmetrisch oder schiefsymmetrisch ist, bekommen wir eine induzierte Bilinearform $\bar{s} : V/U \times V/U \rightarrow K$, gegeben durch

$$v + U, w + U \mapsto s(v, w)$$

und \bar{s} ist nicht ausgeartet.

$$\begin{aligned}v' &= v + u, u \in U \\w' &= w + \tilde{u}, \tilde{u} \in U\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s(v', v') &= s(v, w) + s(u, w) + s(v, \tilde{u}) + s(u, \tilde{u}) = \\&= s(v, w) + \underbrace{s(u, w)}_{=0} \pm \underbrace{s(\tilde{u}, v)}_{=0} + \underbrace{s(u, \tilde{u})}_{=0}\end{aligned}$$

$$s(v, w) = 0 \implies v \in U \implies v + U$$

ist Nullvektor von V/U

Korollar 10. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. dann gibt es eine orthogonale Zerlegung

$$\mathbb{R}^n = W_+ \oplus W_i \oplus W_0$$

mit

$$s|_{W_+} > 0, s|_{W_-} < 0$$

und $W_0 = \text{Ausartungsraum von } s$

Proposition 10. Trägheitsgesetz/Signatur von Sylvester Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Sei

$$V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0$$

eine Zerlegung als orthogonale direkte Summe, mit $s|_{V_+} > 0$, $s|_{V_-} < 0$ und $V_0 = \text{Ausartungsraum von } s$. Dann sind

$$r_+ := \dim(V_+), r_- = \dim(V_-) \text{ und } r_0 := \dim(V_0)$$

Invarianten von s , charakterisiert durch

$$r_+ = \max \{ \dim W \mid W \subset V \text{ Untervektorraum, } s|_W > 0 \}$$

$$r_- = \max \{ \dim W \mid W \subset V \text{ Untervektorraum, } s|_W < 0 \}$$

Die Invarianten (r_+, r_-, r_0) heisst Trägheitsindex oder Signatur von s

Bemerkung 26. Ist A eine $n \times n$ symmetrische reelle Matrix, heisst Signatur die Signatur von der zu A entsprechender Bilinearform.

Bemerkung 27. Auch $r_+ - r_-$ heisst Signatur.

Dimension	$\dim V = r_+ + r_- + r_0$	
Rang	$r_+ + r_-$	$\leftrightarrow (r_+, r_-, r_0)$
Signatur in diesen Sinn	$r_+ - r_-$	

Beweis 18. Reduktionsschritt: Es genügt, das Resultat zu beweisen, im Fall dass s nicht ausgeartet ist.

$$V \rightarrow \bar{V} = V/V_0$$

$$V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0$$

$$\bar{V} = \bar{V}_+ \oplus \bar{V}_-$$

wobei $\bar{V}_\pm = \text{Bild von } V_\pm$. Bew. $\bar{V} = \bar{V}_+ + \bar{V}_-$ direkte Summe

$$\Leftrightarrow \bar{V}_+ \cap \bar{V}_- = 0$$

$$\bar{v} \leftrightarrow v \in V_+ \oplus V_0$$

und

$$v \in V_- \oplus V_0$$

$\Leftrightarrow v \in V_0$ Behauptung: \bar{s} induzierte Bilinearform auf \bar{V}

$$\max \{ \dim W | s|_W > 0 \} = \max \{ \dim U | U \subset \bar{V}, \bar{s}|_U > 0 \}$$

und

$$\max \{ \dim W | s|_W < 0 \} = \max \{ \dim U | U \subset \bar{V}, \bar{s}|_U < 0 \}$$

Ist $W \subset V, s|_W > 0$, und $\bar{W} := \text{Bild von } W$, so haben wir

$$\dim \bar{W} = \dim W$$

und

$$\bar{s}|_{\bar{W}} > 0$$

Dimensionsformel:

$$\dim \bar{W} = \dim W - \underbrace{\dim(W \cap V_0)}_{=0} = \dim W$$

und

$$\bar{s}(\bar{v}, \bar{v}) = s(v, v)$$

wobei $v \in W \mapsto v \in \bar{W}$ Umgekehrt ist

$$U \subset \bar{V}, \bar{s}|_U > 0, \dim U = d$$

wählen Basis $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_d)$ von \bar{U} , mit $v_i \mapsto \bar{v}_i \forall i$ dann haben wir $W := \text{span}(v_1, \dots, v_d)$ hat die Eigenschaft

$$\dim W = d \quad s|_W > 0, \quad \text{Im}(W) = U$$

Beweis im Fall s nicht ausgeartet:

Behauptung: Ist

$$W_+ \subset V, s|_{W_+} > 0, \quad W_- \subset V, s|_{W_-} < 0$$

so haben wir

$$W_+ \cap W_- = 0$$

Es folgt:

$$\dim W_- + \dim W_+ \leq \dim V$$

mit Gleichheit $\Leftrightarrow V = W_+ \oplus W_-$

Deshalb

$$r_+ + r_- \leq \dim V$$

Und wir haben = aus dem Korollar

(alternativer Beweis ohne Quotientenvektorräume sehe Buch)

Bemerkung 28. Praktische Fragen:

- Wie berechnet man die Signatur einer symmetrischen Bilinearform?
- Wie findet man eine Basis, so dass die darstellende Matrix in Sylvesterform ist?

In Matrixen: $A \in (n \times n, \mathbb{R})$ symm.

- Signatur?
- Finden $T \in GL_n(\mathbb{R})$ mit $T^t A T$ in Sylvesterform

Antwort:

Aus der Hauptachsentransformation:

$$\exists S \in O(n), S^t A S = S^{-1} A S = \text{diag}(\lambda, \dots, \lambda_n)$$

\implies Signatur

$$r_+ = \#\{i | \lambda_i > 0\}$$

$$r_- = \#\{i | \lambda_i < 0\}$$

$$r_0 = \dim \text{Ker}(A)$$

$$S \xrightarrow{\text{Normieren der Spaltenvektoren}} S'$$

mit $S'^t A S$ in Sylvesterform.

Alternatives, oft leichteres Verfahren:

- $\text{Ker}(A)$ = Ausartungsraum berechnen
- Vektoren Wählen, wobei $q(v) = s(v, v)$ verschieden von Null ist. $\rightsquigarrow q(v) \in \{\pm 1\} \rightsquigarrow v^\perp$

Beispiel 17. Sylvesterform

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = t^3 - 8t^2 + 3t = t(t - (4 + \sqrt{13}))(t - (4 - \sqrt{13}))$$

Signaturen $(2, 0, 1)$ Mit Halbachsentransformation

$$\text{Eigenwert } 0 \rightsquigarrow \text{Eigenvektor } (1, -1, 1)$$

$$\text{Eigenwert } 4 + \sqrt{13} \rightsquigarrow \text{Eigenvektor } (1, 4 - \sqrt{13}, -3 + \sqrt{13})$$

$$\text{Eigenwert } 4 - \sqrt{13} \rightsquigarrow \text{Eigenvektor } (1, 4 + \sqrt{13}, -3 - \sqrt{13})$$

Normieren...

S' ausrechnen... (ne danke)

haben wir

$$S'^t = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 18. Alternativ

$$e_2 : q(e_2) = e_2^t A e_2 = 1$$

$$e_2^\perp = \{(x, y, z) | 2x + y + z = 0\}$$

$$(-1, 2, 0) A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\text{Ker}(A) = \text{span} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } T \text{ haben wir } T^t A T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

2 Klassifikation von Bilinearformen auf $\mathbb{R}^n \leftrightarrow$ Signatur

Seien euklidische (V, \langle, \rangle) und symmetrische Bilinearform $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, so können wir die Bilinearform durch die Hauptachsentransformation verstehen. Seien ein endlichdimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum V und die symmetrische Bilinearform $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, dann ist s durch die Signatur (r_+, r_-, r_0) klassifiziert.

Eigenschaften 10. $\dim V = 2$

Signatur	$(2, 0, 0)$	$q(v) := s(v, v)$	Quadratische Schale (positiv)
	$(0, 2, 0)$		Quadratische Schale (negativ)
	$(1, 1, 0)$		Sattelpunkt
	$(0, 1, 1)$		Quadratisches halbes Rohr (positiv)
	$(1, 0, 1)$		Quadratisches halbes Rohr (negativ)

Eigenschaften 11. $\dim V = 3$ $\{q(v) = 1\}$

$(3, 0, 0)$	Sphäre
$(2, 1, 0)$	einschaliges Hyperboloid
$(1, 2, 0)$	zweischaliges Hyperboloid
$(0, 3, 0)$	\emptyset

+ Fälle s entartet

Der Fall von Bilinearformen über Vektorräumen über \mathbb{K} , \mathbb{K} beliebiger Körper.

Proposition 11. *Orthogonalisierungssatz* Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper mit $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$. Sei s eine symmetrische Bilinearform über V . Dann gibt es eine Basis B von V , so dass die $M_B(s)$ eine Diagonalmatrix ist.

Beweis 19. *Reduktionsschritt zum Fall s nicht ausgeartet.* Sei $U = \text{Ausartungsraum}$. $\bar{V} := V/U$ und $\bar{s} :=$ induzierte Bilinearform. Wählen wir ein Komplement $W \subset V$ zu U , so haben wir

$$\begin{aligned} V &= U \oplus W \\ W &\xrightarrow{\text{Isomorphismus}} \bar{V} \\ s|_W &\text{ nicht ausgeartet} \end{aligned}$$

Wir können deshalb behaupten, dass s nicht ausgeartet ist. Dann beweisen wir dies Aussage durch Induktion nach $\dim V$. $\dim V \leq 1$ trivial. Induktionsschritt:

$$s \text{ nicht ausgeartet} \xrightarrow{\dim(\mathbb{K}) \neq 2} \exists v \in V : s(v, v) \neq 0$$

Sei $V' := V^\perp$. Wir haben $\dim V' = \dim V - 1$, weil s nicht ausgeartet ist.

$IA \rightsquigarrow$ Basis B' von V' mit $\underbrace{M_B(s|_{V'})}_{\text{auch nicht ausgeartet}}$ diagonal. Dann:

$$B \& v \rightsquigarrow B \text{ mit } M_B(s) \text{ eine Diagonalmatrix}$$

Korollar 11. Ist $\text{char } K \neq 2$, so gibt es zu einer symmetrischen Matrix $A \in (n \times n, \mathbb{K})$ ein $S \in GL_n(\mathbb{K})$ so dass $S^t A S$ eine Diagonalmatrix ist.

Beispiel 19. \mathbb{K} beliebig, $\text{char}(K) \neq 2$ $V = K^2$

$$s(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_1$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$s(v_1, v_1) = 2$$

$$v_1^\perp = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$s(v_2, v_2) = -2$$

$$B := (v_1, v_2)$$

$$M_B(s) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$S \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Standardbasis. Mit $S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ haben wir

$$S^t A S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 29. offen bleibt die Frage: Sind symmetrische Bilinearformen s und s' auf V gegeben ($\dim_{\mathbb{K}} < \infty$), können wir entscheiden ob s und s' äquivalent sind?

Oder, in Matrizen: Sind symmetrische $A, A' \in (n \times n, \mathbb{K})$ gegeben, können wir entscheiden, ob es ein $S \in GL_N(\mathbb{K})$ gibt, so dass $S^t A S = A'$?

Die Antwort hängt von \mathbb{K} ab.

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ durch die Signatur
- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ durch die Rang
- andere \mathbb{K} ?

Im Allgemeinen:

- Rang
- Reduktion zum Fall einer nichtausgearteten Form

Wir behaupten: s ist nicht ausgeartet \Leftrightarrow eine darstellende Matrix A ist invertierbar.

$$\det(A) \in \mathbb{K}^* / (\mathbb{K}^*)^2$$

ist eine Invariante von s , wegen der Transformationsform.

$$T \in GL_n(\mathbb{K}) \rightsquigarrow T^t A T$$

ist eine andere darstellende Matrix. Und

$$\det(T^t A T) = \det(T^t) \det(A) \det(T) = (\det T)^2 \det(A)$$

Definition 23. Diskriminante Sei $s : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform (mit $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$). Die Diskriminante von s ist 0 falls s ausgeartet ist, sonst ist die Klasse von $\det(A)$ in $\mathbb{K}^* / (\mathbb{K}^*)^2$, wobei A eine darstellende Matrix von s ist. Die Diskriminante ist eine Invariante von s

- Rang
- Diskriminante

Bemerkung 30. Noch offen: sind s, s' nicht ausgeartet, mit derselben Diskriminante, zu entscheiden, ob s und s' äquivalent sind.

Beispiel 20. $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, z.B. $V = \mathbb{Q}^2$, s Standardskalarprodukt $s(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ und s' symmetrische Bilinearform mit $\text{disc}(s) = +1$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Basiswechsel}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

mit $aa' = b^2, b \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow a = \frac{b^2}{a'} = a' \left(\frac{b}{a'} \right)^2$$

$a = 2$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a = 3$

$$s' \leftrightarrow q'(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2$$

Beh:

$$q'(x) \neq 1 \quad \forall x \in \mathbb{Q}^2$$

Konsequenz: s' ist nicht äquivalent zu s . Ist $3x_1^2 + 3x_2^2 = 1$ so schreiben wir $x_1 = \frac{r_1}{s_1}, x_2 = \frac{r_2}{s_2}, r_1, r_2, s_1, s_2 \in \mathbb{Q}, s_1, s_2 \neq 0$

$$3r_1^2 s_2^2 + 3r_2^2 s_1^2 = s_1^2 s_2^2$$

$$\text{oder } 3r^2 + 3s^2 = t^2 \text{ wobei } r = r_1 s_2, s = r_2 s_1, \overbrace{t}^{\neq 0} = s_1 s_2 \quad (1)$$

$$3^{\text{ungerade}}(3k_1 + 1) + 3^{\text{ungerade}}(3k_2 + 1) \\ \implies \text{Widerspruch zu (1)}$$

Fazit 9. \mathbb{K} : Körper, $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$
 V : endlichdimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum
 $s: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ symmetrische Bilinearform

Rang $\text{Rang } s \mid \dim V \Leftrightarrow s$ ist ausgeartet. $U :=$ Ausartungsraum. \bar{s} induzierte Bilinearform auf $\bar{V} := V/U$ (nicht ausgeartet)

Diskriminante für s nicht ausgeartet: $\text{disc}(s) \in \mathbb{K}^*/(K^*)^2$

Beispiel 21. $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, V = \mathbb{Q}^2$ Bilinear entsprechend zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

- Beide: Rang 2, Diskriminante 1
- nicht äquivalent

Bemerkung 31. Die Frage, ob eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf $V := \mathbb{Q}^2$ der Diskriminante 1 äquivalent zum Standardskalarprodukt ist, können wir nur beantworten mittels einem Resultat aus der Zahlentheorie.

Satz 5. s nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf \mathbb{Q}^2 $\text{disc}(s) = 1 \implies \exists B$ Basis mit

$$M_B(s) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$$

Dann: s ist äquivalent zum Standardskalarprodukt \Leftrightarrow

$$\exists v \in V, s(v, v) = 1 \text{ d.h. } \exists x, y \in \mathbb{Q} : ax^2 + ay^2 = 1$$

\Leftrightarrow

$$\exists x, y \in \mathbb{Q} \text{ mit } x^2 + y^2 = a$$

Bemerkung 32. Ein Resultat aus der Zahlentheorie gibt uns eine Charakterisierung von Summen zweier Quadrate in \mathbb{Q} : für $a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$:

$$\exists x, y \in \mathbb{Q} : x^2 + y^2 = a \Leftrightarrow \exists x, y \in \mathbb{Z} : x^2 + y^2 = a$$

$\Leftrightarrow a > 0$ und jede Primzahl $p = 4k + 3$ ($k \in \mathbb{N}$) kommt mit gerader Vielfachheit in der Primzahlzerlegung von a vor. Der Beweis nutzt

$$(x_1 x'_1 - x_2 x'_2)^2 + (x_1 x'_2 + x_2 x'_1)^2 = (x_1^2 + x_2^2)(x_1'^2 + x_2'^2)$$

Satz von Fermat: p Primzahl

$$\exists x, y \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 = p \Leftrightarrow p = 2 \vee 4 \mid (p - 1)$$

Argument vom letzten Mal (auszuschließen $a = 3$)

Fazit 10. Zurück zum Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Wir wissen: eine symmetrische Bilinearform $s: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ($\dim_{\mathbb{R}} V < \infty$) ist durch die Signatur (r_+, r_-, r_0) charakterisiert.

$$A: M_B(s) \rightarrow P_A(t) = \prod_{i=1}^n (t - \lambda_i)$$

$$\begin{aligned} r_+ &= \#\{i \mid \lambda_i > 0\} \\ r_- &= \#\{i \mid \lambda_i < 0\} \\ r_0 &= \#\{i \mid \lambda_i = 0\} \end{aligned}$$

und

$s > 0 \Leftrightarrow$ Signatur $(n, 0, 0) \Leftrightarrow \lambda_i > 0 \forall i \Leftrightarrow$ Koeff. $P_A(t)$ hat alternierende Vorzeichen

Definition 24. Hauptminor Sei $A = (a_{ij}) \in (n \times n, \mathbb{K})$. Wir schreiben A_k für die Teilmatrix $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$, für $1 \leq k \leq n$. Der k -te Hauptminor von A ist $\det(A_k)$

Bemerkung 33. $\dim_{\mathbb{R}} < \infty$, $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform. Wann ist s positiv? Es ist notwendig, aber nicht hinreichend, dass $\det(A) > 0$ für eine darstellende Matrix A .

Proposition 12. Hauptminorenkriterium von Jacobi-Sylvester Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform und A eine darstellende Matrix. Dann ist s positiv definit $\Leftrightarrow \det(A_k) > 0$, $k = 1, \dots, n$ $n = \dim V$

Beweis 20. \Rightarrow Ist $s > 0$, so ist $s|_W > 0$ für alle Untervektorräume $S \subset V$. Sei $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis mit $A = M_B(s)$. Sei $V_k := \text{span}(v_1, \dots, v_k)$ für $1 \leq k \leq n$. Dann haben wir:

$$M_{(v_1, \dots, v_k)}(s|_{V_k}) = (s(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq k} = (A_k)$$

Weil $s|_{V_k} > 0$, folgt: $\det(A_k) > 0$.

\Leftarrow Durch eine Induktion nach n :

IA: $n = 1$

IS: Wir nehmen das Resultat an für einen Vektorraum der Dimension $n - 1$. Seien $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ $A = M_B(s)$. Wir haben

- aus $\det(A) > 0$ folgt: s ist nicht ausgeartet
- aus $\det(A_1) > 0$ folgt $a_{11} > 0$

Wir haben $V = \text{span}(v_1) \oplus V_1^\perp$. Es genügt zu zeigen, dass $s|_{V_1^\perp}$ positiv definit ist. Eine Basis von V_1^\perp sieht so aus: Sei $c_i := \frac{a_{1i}}{a_{11}}$ und $\tilde{v}_i := v_i - c_i v_1$ für $i = 2, \dots, n$.

$$\begin{aligned} s(v_1, \tilde{v}_1) &= s(v_1, v_1) - c_1 s(v_1, v_1) = a_{11} - c_1 a_{11} = 0 \\ (\tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_n) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -c_2 & 1 & & \\ -c_3 & & 1 & \\ & & & \ddots \\ -c_n & & & & 1 \end{pmatrix} \\ (\tilde{a}_{ij})_{2 \leq i, j \leq n} \tilde{a}_{ij} &= s(\tilde{v}_i, \tilde{v}_j) = a_{ij} - c_i a_{11} + c_i c_j a_{11} = a_{ij} - c_i a_{1j} \\ \text{weil } c_i c_j a_{11} &= \frac{a_{1i}}{a_{11}} a_{1j} = c_j a_{1i} \end{aligned}$$

Wir haben für $s \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -c_2 & 1 & & \\ -c_3 & & 1 & \\ & & & \ddots \\ -c_k & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{k1} & & & a_{kk} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} - c_2 a_{12} & \cdots & a_{2k} - c_2 a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{2k} - c_k a_{12} & \cdots & a_{kk} - c_k a_{1k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{k2} & \cdots & \tilde{a}_{kk} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \det(A_k) &= a_{11} \det(\tilde{a}_{ij})_{2 \leq i, j \leq k} \end{aligned}$$

Aus $\det(A_k) > 0$ und $a_{11} > 0$ folgt:

$$\det(\tilde{a}_{ij})_{2 \leq i, j \leq k} > 0, \text{ für } k = 2, \dots, n$$

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt $s|_{v_1^\perp} > 0$

3 Multilineare Algebra

3.1 Dualvektorräume

Definition 25. Dualvektorraum / Linearformen Sei \mathbb{K} ein Körper und V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Der Dualvektorraum ist $V^* := \text{Hom}(V, \mathbb{K})$. Elemente von V^* heißen Linearformen. V^* ist ein \mathbb{K} -Vektorraum, mit Addition von Abbildungen und Multiplikation durch Skalare.

Eigenschaften 12. Sei $B = (v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V .

- Koeffizient von v_i

$$v_i^* : v = \sum_{j \in I} a_j v_j \mapsto a_i$$

- Summe von Koeffizienten

$$\sum v_i^* : v = \sum_{j \in I} a_j v_j \mapsto \sum a_i$$

wohldefiniert, weil nur endlich viele a_j sind $\neq 0$

- Operationen auf Funktionsräumen, z.B. $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$
- Standardkoordinaten: $n \in \mathbb{N}_{>0}$, $V = \mathbb{K}^n$, Standardbasis e_1, \dots, e_n

$$e_i^* : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

Bemerkung 34. Ist $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V , so ist $B^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ eine Basis von V^* . Denn zu $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ haben wir $c_i := f(v_i)$, dann

$$f \text{ linear} \implies f\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i a_i$$

Das zeigt, dass V^* ist von v_1^*, \dots, v_n^* aufgespannt. Lineare Unabhängigkeit von v_1^*, \dots, v_n^* ist klar. Deshalb haben wir einen Isomorphismus $V \rightarrow V^*$, gegeben durch $v_i \mapsto v_i^* \forall i$. Falls $\dim V = \infty$ mit Basis $(v_i)_{i \in I}$, dann ist V^* nicht von den $v_i^*, i \in I$ aufgespannt, z.B.

$$\sum_{i \in I} \notin \text{span}(v_i^*)_{i \in I}$$

$\phi : V \rightarrow \mathbb{K}$ mit $\phi(v_i) \neq 0$ nur für endlich viele $i \in I$

Beispiel 22. $V = \mathbb{K}$ mit Standardbasis (e_1, \dots, e_n) . Dann hat V^* die Standardbasis (e_1^*, \dots, e_n^*) und wir haben den Isomorphismus

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n &\rightarrow (\mathbb{K})^* \\ e_i &\mapsto e_i^* \quad \forall i \end{aligned}$$

Bemerkung 35. Es ist nicht überraschend, dass der Isomorphismus $V \rightarrow V^*$ assoziiert zu einer Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ abhängig von der Basis ist.

Bemerkung 36. Sei $V \subset \mathbb{K}^n$ ein Untervektorraum. V kann durch eine Basis gegeben werden, oder durch Gleichungen.

$$V = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x - y + z = 0 \right\}$$

ist eine Linearform auf \mathbb{K}^n

Definition 26. orthogonaler Raum Sei W ein \mathbb{K} -Vektorraum und $V \subset W$ ein Untervektorraum. Der Untervektorraum

$$V^0 = \{\phi \in W^* : \phi(v) = 0 \ \forall v \in V\} \subset W^*$$

heisst der zu V orthogonale Raum. Falls $\dim V < \infty$, dann haben wir $\dim V^0 = \dim W - \dim V$. Basis von

$$W^* = \overbrace{W_1, \dots, W_d, \dots, W_n}^{\text{von } V}$$

Dann:

$$V^0 = \text{span}(w_{d+1}^*, \dots, w_n^*)$$

Definition 27. duale Abbildung Sei $V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung von \mathbb{K} -Vektorräumen. Dann gibt es eine lineare Abbildung $F^* : W^* \rightarrow V^*$, die duale Abbildung, gegeben durch Komposition mit F

$$\psi : V \rightarrow K \mapsto F^*(\psi) := \psi \circ F$$

Dann

$$V^0 = \ker(W^* \rightarrow V^*)$$

Aus der Dimensionsformel bekommt man nochmals

$$\dim V^0 = \dim W^* - \dim V^*$$

Eigenschaften 13. duale Abbildung

- falls $W = V$, gilt $(id_V)^* = Id_{V^*}$
- Ist auch $G : U \rightarrow V$ gegeben, so haben wir

$$G^* F^* \psi = (F \circ G)^* \psi$$

Das nennt man Funktorialität.

Bemerkung 37. Man kann zeigen, dass zu $U \subset V$ bekommt man eine surjektive duale Abbildung $V^* \rightarrow U^*$

$$(\psi : V \rightarrow \mathbb{K}) \mapsto \psi|_U$$

Proposition 13. Seien V und W endlich dimensionale \mathbb{K} -Vektorräume mit Basen $A = (v_1, \dots, v_n)$ und $B = (w_1, \dots, w_m)$. Sei $F : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung mit darstellender Matrix M . Dann ist $F^* : W^* \rightarrow V^*$ bezüglich der dualen Basen $A^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$, $B^* = (w_1^*, \dots, w_m^*)$ durch die Matrix M^t dargestellt. Wir schreiben $M = (a_{ij})$. Das bedeutet:

$$F(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$$

Es folgt

$$F^*(w_i^*)(v_j) = i\text{-te Komponente von } F(v_j) = a_{ij}$$

Das ist zu sagen, die darstellende Matrix von F^* ist die Matrix (a_{ji})

$$F^*(w_i^*) = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j^*$$

Eigenschaften 14. $F : V \rightarrow W$

•

$$\underbrace{(\operatorname{Im} F)^0}_{\text{alle } W \xrightarrow{\phi} \mathbb{K} \text{ mit } \phi|_{\operatorname{Im} F} = 0} = \underbrace{\operatorname{Ker} F^*}_{\text{alle } W \xrightarrow{\phi} \mathbb{K} \text{ mit } \phi \circ F = 0}$$

Da

$$\phi|_{\operatorname{Im} F} = 0 \Leftrightarrow \phi \circ F = 0$$

haben wir die Gleichung.

•

$$(\operatorname{Ker})^0 = \operatorname{Im}(F^*)$$

 \supset offensichtlich

 \subset folgt aus der Surjektivität von $W^* \rightarrow (\operatorname{Im} F)^*$

 Wir betrachten $\phi : V \rightarrow \mathbb{K}$ mit $\phi|_{\operatorname{Ker} F} = 0$

$$w \rightarrow W, w = F(v) \text{ für ein } v \in V$$

$$w \rightsquigarrow \bar{\phi}(w) = \phi(v)$$

Ist

$$w = F(v')$$

dann ist

$$v' - v \in \operatorname{Ker} F$$

und

$$\phi(v') - \phi(v) = \phi(v' - v) = 0$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & K \\ & \searrow & \nearrow \bar{\phi} \\ & \operatorname{Im} F & \\ \exists \underbrace{\psi}_{\in W^*} & \mapsto & \underbrace{\bar{\phi}}_{\in (\operatorname{Im} F)^*} \end{array}$$

d.h.

$$\psi : W \rightarrow \mathbb{K}$$

mit

$$\psi|_{\operatorname{Im} F} = \bar{\phi}$$

Das zeigt:

$$F^*(\psi) = \phi$$

Bemerkung 38. An dem Diagramm haben wir eine Bijektion zwischen $\phi \in V^*$ mit $\phi|_{\operatorname{Ker} F} = 0$ und $\bar{\phi} \in (\operatorname{Im} F)^*$

$$\xrightarrow{\dim W < \infty} \dim(\operatorname{Im} F) = \dim(\operatorname{Im} F)^* = \dim(\operatorname{Ker} F)^0 = \dim \operatorname{Im}(F^*)$$

$$\xrightarrow{\dim V, \dim W < \infty} \operatorname{rang}(F) = \operatorname{rang}(F^*)$$

 Keine Überraschung! $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^t)$
Beispiel 23.

$$\mathbb{R}[x]^{\leq 2} \xrightarrow{(ev_{-1}, ev_1)} \mathbb{R}$$

surjektiv

$$\implies (\operatorname{Im} F)^0 = 0$$

Interpretation:

$$\alpha f(-1) + \beta f(1) = 0 \quad \forall f \in \mathbb{R}[x]^{\leq 2} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

$$\operatorname{Ker}((\alpha, \beta) \mapsto (f \mapsto \alpha f(-1) + \beta f(1)))$$

$$\begin{aligned} \text{Ker}(ev_{-1}, ev_1) &= \text{span}(x^2 - 1) \\ \implies \text{Ker}(ev_{-1}, ev_1)^0 &= \left\{ \mathbb{R}[x]^{\leq 2} \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}, \phi(x^2 - 1) = 0 \right\} = \text{span} \left(\frac{1}{2} ev_0'' + ev_0, ev_0' \right) \end{aligned}$$

und

$$= \text{Im}(ev_{-1}, ev_1)^* = \text{span}(ev_{-1}, ev_1)$$

weil

$$\begin{aligned} ev_{-1} &= \frac{1}{2} ev_0'' - ev_0' + ev_0 \\ ev_1 &= \frac{1}{2} ev_0'' + ev_0' + ev_0 \end{aligned}$$

3.2 Der Bidualraum $V \rightsquigarrow V^* \rightsquigarrow V^{**}$

Definition 28. kanonische lineare Abbildung $\dim V < \infty \implies$ ein Isomorphismus $V \rightarrow V^*$ wird durch die Auswahl einer Basis bestimmt. Dagegen haben wir eine Abbildung $V \rightarrow V^{**}$ unabhängig von der Basis, so:

$$v \mapsto \left(\begin{array}{c} V^* \xrightarrow{ev_v} \mathbb{K} \\ (\phi : V \rightarrow \mathbb{K}) \mapsto \phi(v) \end{array} \right)$$

Dies heisst kanonische lineare Abbildung und ist ein Isomorphismus falls $\dim V < \infty$

Bemerkung 39. Im Allgemeinen ist die kanonische Abbildung $V \rightarrow V^{**}$ injektiv:

$$\begin{aligned} [\text{Sei } v \in V \text{ mit } v \neq 0] &\xrightarrow{\text{span}(v) \subset V} V^* \rightarrow \text{span}(V)^* \\ &\phi \mapsto \psi : v \mapsto 1 \text{ (d.h. } \phi(v) = 1) \\ \implies ev_1(\phi) &\neq 0 \end{aligned}$$

$$\dim V < \infty \implies \dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$$

Dann:

$$\implies V \rightarrow V^{**} \text{ injektiv} \Leftrightarrow \text{bijektiv}$$

Oft schreibt man $V = V^{**}$ für V ein Vektorraum mit $\dim V < \infty$. Das bedeutet immer, dass V und V^{**} identifiziert wird, durch den kanonischen Isomorphismus.

Beispiel 24. $V = \mathbb{K}^n$ mit Standardbasis e_1, \dots, e_n .

$V^* = (\mathbb{K}^n)^*$ hat die duale Basis e_1^*, \dots, e_n^*

$V \rightarrow V^{**}$ mit einer Abbildung

$$e_i \mapsto \left(\begin{array}{c} \phi : (\mathbb{K}^n)^* \rightarrow \mathbb{K} \mapsto \phi(e_i) \\ e_j^* \mapsto \delta_{ij} \end{array} \right) = e_i^{**}$$

Bemerkung 40. Sei $F : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung von endlichdimensionalen Vektorräumen. Dann ist $F^{**} = F$, im folgenden Sinn:

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{F} & W & \dashrightarrow & W^* \xrightarrow{F^*} V^* \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim & \swarrow & \\ V^{**} & \xrightarrow{F^{**}} & W^{**} & & \end{array}$$

Wobei \sim einen kanonischen Isomorphismus darstellt.

Daraus folgt, dass

$$V \xrightarrow{F} W \rightsquigarrow W^* \xrightarrow{F^*} V^* \rightsquigarrow V^{**} \xrightarrow{F^{**}} W^{**}$$

kommutativ ist.

Bemerkung 41.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \xrightarrow{\quad} & & \\
 v \in V & & \xrightarrow{\quad} & & F(v) \in V \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & V & \longrightarrow & W & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & V^{**} & \longrightarrow & W^{**} & \\
 \phi \mapsto \phi(v) \in V^{**} & & & & \psi \mapsto \psi(F(v)) \\
 & & & & = \downarrow \\
 & & & & \psi \mapsto F^*(\psi)(v)
 \end{array}$$

Falls $\dim W < \infty$ und $V \subset W$, dann haben wir $V^{00} = V$ im folgenden Sinn

$$\begin{aligned}
 \dim &= \dim W - \dim V \\
 \underbrace{\quad}_{V^0} &\subset W^* \\
 \dim &= \dim W - (\dim W - \dim V) \dim V \\
 \underbrace{\quad}_{V^{00}} &\subset W^{**} \xrightarrow{\sim} W \supset V
 \end{aligned}$$

Das Bild von V unter dem kanonischen Isomorphismus ist V^{00} .
Sei $v \in V$ $ev_1 \in V^{00}$

$$\phi \in W^*, \phi(v) = 0 \quad \forall \phi \in V \implies \phi(v) = 0$$

Beispiel 25.

$$\begin{aligned}
 W &= \mathbb{R}^3 \\
 V &= \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \implies V^0 = \text{span}(e_1^* - e_2^* - e_3^*) = \text{span}(e_1 + e_3, -e_2 + e_3) \\
 V^{00} &= \text{span}(e_1^{**} + e_2^{**}, e_1^{**} + e_3^{**})
 \end{aligned}$$

3.3 Zusammenhang zwischen Dualraum und bilinearen Abbildungen

- schon gesehen, z.B. bei der Definition “nicht ausgeartet”
- jetzt explizit

Definition 29. bilineare Abbildung Sei \mathbb{K} ein Körper, v und W Vektorräume über \mathbb{K} . Eine Abbildung $b : V \times W \rightarrow \mathbb{K}$ heisst bilinear falls

$$w \mapsto b(v, w) \text{ ist linear } \forall v \in V$$

und

$$v \mapsto b(v, w) \text{ ist linear } \forall w \in W$$

$$[(w \mapsto b(v, w)) \in W^*]$$

Bemerkung 42. Im Fall $W = V$ ist dies genau zu sagen, dass b eine Bilinearform ist. Also haben wir Abbildungen

$$b' : V \rightarrow W^*$$

und

$$b'' : W \rightarrow V^*$$

Aus der Definition folgt, dass b' und b'' sind linear.

Definition 30. nicht ausgeartet Eine bilineare Abbildung $b : V \times W \rightarrow \mathbb{K}$ ist nicht ausgeartet, falls $b' : V \rightarrow W^*$ und $b'' : W \rightarrow V^*$ injektiv sind.

Bemerkung 43. Falls V und W endlich dimensional sind, ist es nur möglich, eine nicht ausgeartete bilineare Abbildung zu haben, wenn $\dim V = \dim W$. Falls $\dim V = \dim W$: “injektiv” oben ist äquivalent zu “bijektiv”.

Beispiel 26. • V beliebig, dann ist

$$\begin{aligned} V \times V^* &\rightarrow \mathbb{K} \\ (v, \phi) &\mapsto \phi(v) \end{aligned}$$

stets nicht ausgeartet.

$$\begin{aligned} b' : V &\rightarrow V^{**} \\ v &\mapsto ev_v \end{aligned}$$

ist die kanonische Abbildung, ist injektiv

$$\begin{aligned} b'' : V^* &\rightarrow V^* \\ \phi &\mapsto \phi \end{aligned}$$

ist id_{V^*} ist ein Isomorphismus

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \langle, \rangle$ Skalarprodukt auf V .

$$b(v, w) := \langle v, w \rangle$$

b' und b'' sind gleich, definiert als Ψ

$$\sim \Psi : V \rightarrow V^*$$

injektiv

Bemerkung 44. Das zeigt, dass jedes Skalarprodukt nicht ausgeartet ist. Und: falls $\dim_{\mathbb{R}} V < \infty$ ist Ψ ein Isomorphismus. Ψ heisst kanonisch. (kanonische Abbildung bzw. kanonischer Isomorphismus)

Eigenschaften 15. V , $\dim V = n$, mit Skalarprodukt, kanonischer Isomorphismus Ψ

- Für $U \subset V$ Untervektorraum gilt

$$\Psi(U^\perp) = U^0$$

- Für $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine orthonormal Basis haben wir

$$\Psi(v_i) = v_i^*$$

für $i = 1, \dots, n$, wobei (v_1^*, \dots, v_n^*) die duale Basis ist. zeigen:

$$\begin{aligned} \underbrace{\Psi(U^\perp)}_{\dim = \dim V - \dim U} &\subset \underbrace{U^0}_{\dim = \dim V - \dim U} \quad \text{klar} \\ \left\langle v_i, \sum_{j=1}^n a_j v_j \right\rangle &= a_i \\ v_i^* \left(\sum_{j=1}^n a_j v_j \right) &= a_i \end{aligned}$$

Beispiel 27. Graphiker gesucht ;)

Bemerkung 45. Wir haben zwei kanonische Abbildungen:

$$V \rightarrow V^{**} \text{ für beliebiges } V / \mathbb{K}$$

$$V \xrightarrow{\Psi} V^* \text{ für } V/\mathbb{R} \text{ mit Skalarprodukt}$$

Definition 31. adjugierte Abbildung V, W euklidische Vektorräume

$$F : V \rightarrow W \text{ lineare Abbildung}$$

adjugiert: $F^{ad} : W \rightarrow V$ ist adjugiert zu F falls gilt

$$\langle F(v), w \rangle = \langle v, F^{ad}(w) \rangle \quad \forall v \in V, w \in W$$

Bemerkung 46.

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{F^{ad}} & W \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Psi \\ V^* & \xleftarrow{F^*} & W^* \end{array}$$

$$\begin{aligned} F^*(\Psi(w))(v) &= \Psi(w)(F(v)) = \Phi(F^{ad}(w))(v) \\ \implies F^*(\Psi(w)) &= \Phi(F^{ad}(w)) \text{ in } V^* \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass das Diagramm kommutiert

Bemerkung 47. Seien v_1, \dots, v_n orthonormale Basen von V , w_1, \dots, w_m für W \rightsquigarrow duale Basen v_1^*, \dots, v_n^* und w_1^*, \dots, w_m^* Bezüglich orthonormaler Basen ist F^{ad} durch die transponierte Matrix gegeben: Sei

$$F \leftrightarrow A \in M(m \times n, \mathbb{R})$$

dann, aus Prop 49 (13?):

$$F^* \leftrightarrow A^t \in M(m \times n, \mathbb{R}) \implies F^{ad} \leftrightarrow A^t \text{ weil } \Phi(v_i) = v_i^*, \Psi(w_i) = w_i^* \quad \forall i$$

Beispiel 28. $V = \mathbb{R}^2$ mit Skalarprodukt, $W = \mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ mit

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) \, dx$$

$$\begin{aligned} F : V &\rightarrow W \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha + \beta x + \alpha x^2 \end{aligned}$$

Basis von W $1, x, x^2$

$V^* = (\mathbb{R}^2)^*$ mit Basis e_1^*, e_2^*

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{F^{ad}} & W \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Psi \\ V^* & \xleftarrow{F^*} & W^* \end{array}$$

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{\Psi} V^* \\ e_1 &\mapsto e_1^* \\ e_2 &\mapsto e_2^* \end{aligned}$$

W^* hat die duale Basis $1^*, x^*, x^{2*}$.

Wir berechnen Ψ explizit:

$$\Psi(1) = \left(f \mapsto \int_{-1}^1 f(x) \, dx \right)$$

$$\begin{aligned}
W &\xrightarrow{\Phi} W^* \\
1 &\mapsto 2(1^*) + \frac{2}{3}(x^{2*}) \\
x &\mapsto \dots \\
x^2 &\mapsto \dots
\end{aligned}$$

Dann:

$$F^*(\psi(1)) = \left((\alpha, \beta) \int_{-1}^1 \alpha + \beta x + \alpha x^2 \, dx = 2\alpha + \frac{2}{3}\alpha = \frac{8}{3}\alpha \right)$$

d.h.

$$\frac{8}{3}e_1^* \xrightarrow{\Phi^{-1}} \left(\frac{8}{3}, 0 \right)$$

Ähnlich:

$$F^*(\Psi(x)) = \left((\alpha, \beta) \mapsto \int_{-1}^1 \alpha x + \beta x^2 + \alpha x^3 \, dx = \frac{2}{3}\beta \right)$$

und

$$F^*(\Psi(x^2)) = \left((\alpha, \beta) \mapsto \int_{-1}^1 \alpha x^2 + \beta x^3 + \alpha x^4 \, dx = \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{5}\alpha = \frac{16}{15}\alpha \right)$$

d.h.

$$\begin{aligned}
F^{ad}(1) &= \left(\frac{8}{3}, 0 \right) \\
F^{ad}(x) &= \left(0, \frac{2}{3} \right) \\
F^{ad}(x^2) &= \left(\frac{16}{15}, 0 \right)
\end{aligned}$$

$$F^{ad}(a + bx + cx^2) = \left(\frac{8}{3}a + \frac{16}{5}c, \frac{2}{3}b \right)$$

Check:

$$\int_{-1}^1 (\alpha + \beta x + \alpha x^2) (a + bx + cx^2) \, dx \stackrel{?}{=} \left\langle (\alpha, \beta), \left(\frac{8}{3}a + \frac{16}{15}c, \frac{2}{3}b \right) \right\rangle$$

Skalarprodukt:

$$\alpha \left(\frac{8}{3}a + \frac{16}{15}c \right) + \beta \left(\frac{2}{3}b \right)$$

Integral:

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^1 a\alpha + (b\alpha + c\beta)x + (c\alpha + b\beta + a\alpha)x^2 + (c\beta + \alpha b)x^3 + c\alpha x^4 \, dx = \\
&= 2a\alpha + \frac{2}{3}(a\alpha + b\beta + c\alpha) + \frac{2}{5}c\alpha
\end{aligned}$$

stimmt.

Bemerkung 48. Wir könnten F^{ad} auch durch die Wahl einer orthonormalen Basis von W berechnen.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{5}{2}}\sqrt{\frac{-1+3x^2}{2}}$$

Dann:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} & \end{pmatrix}$$

und so

$$A^t = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow F^{ad}$$

Bemerkung 49. Jetzt betrachten wir den Fall $W = V$, also $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine Bilinearform. Da b' und b'' genau durch das “Umtauschen” von V und W unterschieden

$$\begin{aligned} b' : V &\rightarrow V^*, v \mapsto (w \mapsto b(v, w)) \\ b'' : V &\rightarrow V^*, w \mapsto (v \mapsto b(v, w)) \end{aligned}$$

haben wir Interpretation von Bedingungen über b :

- b symmetrisch $\Leftrightarrow b'' = b'$
- b schiefsymmetrisch $\Leftrightarrow b'' = -b'$

Bemerkung 50. Sei jetzt $\dim_{\mathbb{K}} < \infty$. Dann haben wir $b'' = (b')^*$ in folgendem Sinne: Dual zu $b' : V \rightarrow V^*$ ist

$$\begin{array}{ccc} V^{**} & \xrightarrow{(b')^*} & V^* \\ \uparrow \sim & & \uparrow \\ V & & v \end{array} \quad ev_V \longmapsto ev_V \circ b'$$

(ev_V = Auswertungsabbildung an $v \in V$)

Wobei:

$$ev_V \circ b'(v') = ev_V (w \mapsto b(v', w)) = b(v', v)$$

Da

$$b'' : V \rightarrow V^*$$

durch

$$v \mapsto (v' \mapsto b(v', v))$$

definiert ist, haben wir Gleichheit.

Eigenschaften 16.

$$b \text{ symmetrisch} \iff b'' = b' \iff (b')^* = b'$$

$$b \text{ schiefsymmetrisch} \iff b'' = -b' \iff (b')^* = -b'$$

Bemerkung 51. Falls $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$, s symmetrisch und nicht ausgeartet führt zu

$$b' (= b'') : V \xrightarrow{\sim} V^*$$

Bemerkung 52. Spezialfall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, V euklidisch, dann ist das gerade das, was Ψ hiess:

Untervektorraum $U \subset V, U^\perp \subset V$ sowie $U^0 \subset V^*$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\sim} & V^* \\ \downarrow \cup & & \downarrow \cup \\ U^\perp & & U^0 \end{array}$$

Bemerkung 53. Was passiert, falls $K = \mathbb{C}$? Dann sind wir an sesquilinearen Abbildungen interessiert.

$$s : V \times W \rightarrow \mathbb{C}$$

Dann gibt es immer noch eine Abbildung

$$s'' : W \rightarrow V^* \quad w \mapsto (v \mapsto s(v, w))$$

aber diese ist nicht mehr linear.

Beispiel 29. $V = \mathbb{C}[x], s : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$

$$s(f, g) = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} \, dx$$

Dann z.B.

$$1 \xrightarrow{s''} \left(f \mapsto \int_0^1 f(x) \, dx \right)$$

also: Durchschnittswert auf $[0, 1]$

aber:

$$i \xrightarrow{s''} \left(f \mapsto -i \int_0^1 f(x) \, dx \right)$$

also: $(-i) \cdot$ Durchschnittswert auf $[0, 1]$

Damit ist s'' semilinear.

Definition 32. semilinear Eine Abbildung $t : V \rightarrow W$ zwischen \mathbb{C} -Vektorräumen heisst semilinear, falls:

- $t(v + v') = t(v) + t(v') \quad \forall v, v' \in V$
- $t(\lambda v) = \bar{\lambda} t(v) \quad \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{C}$

Definition 33. kanonischer Semi-Isomorphismus Falls V ein unitärer Vektorraum ist, mit Skalarprodukt

$$s : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

so erhalten wir (was oben s'' heisst, nennen wir hier Ψ)

$$\Psi : V \rightarrow V^* \text{ kanonischer } \underbrace{\text{Semi}}_{\text{semilinear}} \underbrace{\text{-Isomorphismus}}_{\text{bijektiv}}$$

Bemerkung 54. Wie vorher haben wir zu einem Endomorphismus

$$F : V \rightarrow V$$

den adjugierten Endomorphismus

$$F^{ad} : V \rightarrow V$$

gegeben durch

$$F^{ad} := \Psi^{-1} \circ F^* \circ \Psi$$

Eigenschaften 17. adjugierter Endomorphismus

•

$$s(F(v), w) = s(v, F^{ad}(w)) \quad \forall v, w \in V$$

•

$$\text{Im } F^{ad} = (\text{Ker } F)^\perp$$

•

$$\text{Ker } F^{ad} = (\text{Im } F)^\perp$$

- Ist B eine Orthonormalbasis von V und A die darstellende Matrix von F bezüglich B , dann ist \bar{A}^t die darstellende Matrix von F^{ad}

Satz 6.

$$F \text{ ist unitär diagonalisierbar} \iff F \circ F^{ad} = F^{ad} \circ F$$

Definition 34. F normal F heisst normal, falls

$$F \circ F^{ad} = F^{ad} \circ F$$

3.4 Anwendung des Dualraums

das duale Polytop $\mathbb{K} = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^n$

Definition 35. konvexe Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft $\forall s, t \in S: s$ und t sind wegzusammenhängend.

Definition 36. konvexe Hülle konvexe Hülle von $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$\bigcap_{S \subset \mathbb{R}^n, S \text{ konvex}, \Gamma \subset S} S$$

“kleinste konvexe Menge, in der Γ enthalten ist”

Definition 37. konvexes Polytop die konvexe Hülle von einer endlichen Menge in \mathbb{R}^n

Definition 38. innerer Punkt Das Polytop P hat $O \in \mathbb{R}$ als inneren Punkt falls:

- $O \in \mathbb{R}$
- $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(0) \subset P$

Definition 39. Ist ein Polytop mit $O \in \mathbb{R}$ als inneren Punkt, so definieren wir

$$P^* = \{\phi \in (\mathbb{R}^n)^* : \phi(v) \leq 1 \ \forall v \in P\}$$

Definition 40. duales Polytop P^* ist ein konvexes Polytop $O \in (\mathbb{R}^n)^*$ als innerem Punkt. P^* heisst duales Polytop.

Bemerkung 55.

$$P^{**} = P$$

Bemerkung 56. Konstruktion des dualen Polytops: l Hyperebene, so dass P auf einer Seite von l liegt (inklusive l selbst) \rightsquigarrow Gleichung von l schreiben als

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 1$$

$$P \subset \{(x_1, \dots, x_n) \mid \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \leq 1\}$$

\rightsquigarrow

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in P^*$$

(Skizze (Freiwilliger gesucht }:-))

$$\text{Facetten von } P \rightsquigarrow \text{Ecken in } P^*$$

(P^*) konvexe Hülle

Beispiel 30. • Der Tetraeder ist selbstdual.

- Der Würfel dual zum Oktaeder.
- Der Dodekaeder ist dual zum Ikosaeder.

3.5 Das Tensorprodukt

$$V \rightsquigarrow V^* \text{ Linearformen}$$

Wir möchten eine Redeweise haben, genug flexibel für solche Situationen. Eine nützliche Konstruktion dafür ist das Tensorprodukt.

Definition 41. Tensorprodukt Sei \mathbb{K} ein Körper und V und W Vektorräume über \mathbb{K} . Ein \mathbb{K} -Vektorraum heisst Tensorprodukt von V und W , geschrieben $V \otimes W$, falls, eine bilineare Abbildung

$$\eta : V \times W \rightarrow V \otimes W$$

gegeben ist, die folgende universelle Eigenschaften erfüllt:

Zu jedem \mathbb{K} -Vektorraum U mit bilinearer Abbildung

$$\xi : V \times W \rightarrow U$$

gibt es eine eindeutige lineare Abbildung

$$\xi' : V \otimes W \rightarrow U$$

so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V \times W & & \\ \downarrow \eta & \searrow \xi & \\ V \otimes W & \xrightarrow{\xi'} & U \end{array}$$

kommutiert.

Bemerkung 57. Es ist noch unklar, wie die Elemente von $V \otimes W$ aussehen, oder ob $V \otimes W$ gar existiert. Auch unklar: warum.

Korollar 12. Aus der Definition folgt: $V \otimes W$, falls es existiert, ist eindeutig bis auf Isomorphismus.

Bemerkung 58. Seien

$$\eta : V \times W \rightarrow V \otimes W$$

und

$$\tilde{\eta} : V \times W \rightarrow \widetilde{V \otimes W}$$

gegeben, beide erfüllen die universellen Eigenschaften. Wir wenden die universelle Eigenschaft an, mit $U := \widetilde{V \otimes W}$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & & \\ \downarrow \eta & \searrow \tilde{\eta} & \\ V \otimes W & \xrightarrow{\zeta} & \widetilde{V \otimes W} \end{array}$$

Wir wenden die universelle Eigenschaft an mit $U := V \otimes W$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & & \\ \downarrow \tilde{\eta} & \searrow \eta & \\ \widetilde{V \otimes W} & \xrightarrow{\tilde{\zeta}} & V \otimes W \end{array}$$

Wir wenden die universelle Eigenschaft an mit $U := V \otimes W$

$$\begin{array}{ccc} V \times W & & V \times W \\ \downarrow \eta & \searrow \eta & \downarrow \eta & \searrow \eta \\ V \otimes W & \xrightarrow{\tilde{\zeta} \circ \zeta} & V \otimes W & V \otimes W & \xrightarrow{1_{V \otimes W}} & V \otimes W \end{array}$$

Beide Diagramme kommutieren

$$\tilde{\zeta} \circ \zeta \circ \eta = \tilde{\zeta} \circ \tilde{\eta} = \eta$$

$$1_{V \otimes W} \circ \eta = \eta$$

Es folgt aus der universellen Eigenschaft, dass

$$\tilde{\zeta} \circ \zeta = 1_{V \otimes W}$$

Wir wenden die universelle Eigenschaft an, mit $U := \widetilde{V \otimes W}$

$$\begin{array}{ccc} V \times W & & V \times W \\ \downarrow \tilde{\eta} & \searrow \tilde{\eta} & \downarrow \tilde{\eta} \searrow \tilde{\eta} \\ \widetilde{V \otimes W} & \xrightarrow{\tilde{\zeta} \circ \zeta} & V \otimes W \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V \times W & & V \times W \\ \downarrow \tilde{\eta} & \searrow \tilde{\eta} & \downarrow \tilde{\eta} \searrow \tilde{\eta} \\ \widetilde{V \otimes W} & \xrightarrow{1_{\widetilde{V \otimes W}}} & \widetilde{V \otimes W} \end{array}$$

Beide Diagramme kommutieren

$$\zeta \circ \tilde{\zeta} \circ \tilde{\eta} = \zeta \circ \eta = \tilde{\eta}$$

$$1_{\widetilde{V \otimes W}} \circ \tilde{\eta} = \tilde{\eta}$$

Es folgt aus der universellen Eigenschaft, dass

$$\zeta \circ \tilde{\zeta} = 1_{\widetilde{V \otimes W}}$$

Ergebnis:

$$V \otimes W \xrightarrow{\zeta} \widetilde{V \otimes W}$$

ist Isomorphismus, inverse zu

$$\tilde{\zeta} : \widetilde{V \otimes W} \rightarrow V \otimes W$$

Fazit 11. universelle Eigenschaft \leadsto Eindeutigkeit bis auf Isomorphismus

Not 4. Tensorprodukt $V \otimes W$ oder $V \otimes_{\mathbb{K}} W$

3.5.1 Existenz vom Tensorprodukt

Bemerkung 59. Es gibt zwei Methoden

- Durch Auswahl von Basen
- Beschreibung als Quotientenvektorraum

Heute: Methode 1

- braucht die Existenz von Basen
- klar fall $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$

oder im Allgemeinen für die, die das Auswahlaxiom gesehen haben.

Proposition 14. Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V und $(w_j)_{j \in J}$ eine Basis von W . Dann existiert das Tensorprodukt $V \otimes W$, mit Basis $(v_i \otimes w_j)_{(i,j) \in I \times J}$ und

$$\eta : V \times W \rightarrow V \otimes W$$

$$\left(\sum_{i \in I} a_i v_i \sum_{j \in J} b_j w_j \right) \mapsto \sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j (v_i \otimes w_j)$$

mit $a_i \neq 0$ für endlich viele i und $b_j \neq 0$ für endlich viele j
Das bedeutet, dass die Elemente von $V \otimes W$

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} c_{ij} (v_i \otimes w_j) \quad c_{ij} \in \mathbb{K}$$

nur endlich viele $c_{ij} \neq 0$.

Beweis 21. Zu verifizieren:

- dass η bilinear ist
- und erfüllt die universelle Eigenschaft

η ist bilinear:

$$\begin{aligned}
 & \eta \left(\sum_{i \in I} a_i v_i, \sum_{j \in J} b_j w_j \right) + \eta \left(\sum_{i \in I} a'_i v_i, \sum_{j \in J} b_j w_j \right) = \\
 &= \sum_{i \in I} a_i b_j (v_i \otimes w_j) + \sum_{(i, j) \in I \times J} a'_i b_j (v_i \otimes w_j) = \\
 &= \sum_{(i, j) \in I \times J} (a_i b_j + a'_i b_j) (v_i \otimes w_j) = \\
 &= \sum_{(i, j) \in I \times J} (a_i + a'_i) b_j (v_i \otimes w_j) = \\
 &= \eta \left(\sum_{i \in I} (a_i + a'_i) v_i, \sum_{j \in J} b_j w_j \right) \\
 &= \eta \left(\sum_{i \in I} a_i v_i + \sum_{i \in I} a'_i v_i, \sum_{j \in J} b_j w_j \right)
 \end{aligned}$$

Beispiel 31. $V = \mathbb{K}^2$, $W = \mathbb{K}[t]$

V hat die Standardbasis (e_1, e_2)

W hat die Basis $(1, t, t^2, \dots)$

$\Rightarrow V \otimes W$ hat die Basis $e_1 \otimes 1, e_1 \otimes t, \dots, e_2 \otimes 1, e_2 \otimes t, \dots$

$$\begin{aligned}
 \eta : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}[t] &\rightarrow \mathbb{K}^2 \otimes \mathbb{K}[t] \\
 ((1, 0), t^2) &\mapsto e_1 \otimes t^2 \\
 ((0, 1), t^3) &\mapsto e_2 \otimes t^3 \\
 ((2, 3), t^4) &\mapsto 2e_1 \otimes t^4 + 3e_2 \otimes t^4
 \end{aligned}$$

Typisches Element von $\mathbb{K}^2 \otimes \mathbb{K}[t]$

$$e_1 \otimes t^2 + e_2 \otimes t^3 + 2e_1 \otimes t^4 + 3e_2 \otimes t^4$$

Mit anderer Schreibweise:

$$(t^2, 0) + (0, t^3) + (2t^4, 0) + (0, 3t^4)$$

oder:

$$(t^2 + 2t^4, t^3 + 3t^4)$$

Definition 42. Sei U ein \mathbb{K} -Vektorraum und

$$\xi : V \times W \rightarrow U$$

eine bilineare Abbildung. Wir definieren

$$\begin{array}{ccc}
 V \times W & & \\
 \downarrow \eta & \searrow \xi & \\
 V \otimes W & \xrightarrow{\xi'} & U \\
 \xi' : V \otimes W & \rightarrow & U
 \end{array}$$

durch

$$\xi'(v_i \otimes w_j) := \xi(v_i, w_j)$$

für $i \in I, j \in J$, und deshalb:

$$\xi' \left(\sum_{(i, j) \in I \times J} c_{ij} v_i \otimes w_j \right) = \sum_{(i, j) \in I \times J} c_{ij} \xi(v_i, w_j)$$

Das Diagramm kommutiert (aus der Bilinearität von ξ)

Die Eindeutigkeit ist durch die identischen Basenvektoren gegeben.

Bemerkung 60.

$$\dim V \otimes W = (\dim V) (\dim W)$$

Not 5. Für $v \in V$, $w \in W$ schreibt man oft $v \otimes w$ für $\eta(v, w)$

Bemerkung 61. Weil

$$(v, w) \mapsto v \otimes w := \eta(v, w)$$

eine bilineare Abbildung ist, haben wir

$$\begin{aligned} v \otimes w + v' \otimes w &= (v + v') \otimes w \\ v \otimes w + v \otimes w' &= v \otimes (w + w') \\ (\lambda v) \otimes w &= \lambda(v \otimes w) = v \otimes (\lambda w) \end{aligned}$$

Rechenregeln für Tensoren

Not 6. Letztes Mal: für Basiselemente v_i, w_j bezeichnet $v_i \otimes w_j$ ein Basiselement von $V \otimes W$

Bemerkung 62. Die Abbildung lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} V \times W &\xrightarrow{\eta} V \otimes W \\ (v_i, w_j) &\mapsto v_i \otimes w_j \end{aligned}$$

Bemerkung 63. Jetzt für beliebige $v \in V$, $w \in W$ bezeichnet $v \otimes w$ das Element

$$\eta(v, w) \in V \otimes W$$

Weil in der Konstruktion wir η durch

$$\eta(v_i, w_j) := v_i \otimes w_j$$

definiert haben, stimmen die beiden Bedeutungen von $v_i \otimes w_j$ überein.

Beispiel 32. Isomorphismus von Vektorräumen über \mathbb{R}

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t] &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}[t] \oplus \mathbb{R}[t] \\ e_1 \otimes t^j &\mapsto (t^j, 0) \\ e_2 \otimes t^j &\mapsto (0, t^j) \end{aligned}$$

Ganz ähnlich

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t] &\xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[t] \\ 1 \otimes t^j &\mapsto t^j \\ i \otimes t^j &\mapsto it^j \end{aligned}$$

\implies für $\gamma \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\gamma \otimes t^j \mapsto \gamma t^j$$

weil:

$$\gamma = \alpha + \beta i \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

haben wir

$$\begin{aligned} \gamma \otimes t^j &= (\alpha + \beta i) \otimes t^j \\ &= \alpha \otimes t^j + \beta i \otimes t^j \\ &= \alpha (1 \otimes t^j) + \beta (i \otimes t^j) \\ &\mapsto \alpha (t^j) + \beta (it^j) \\ &= (\alpha + \beta i) t^j \\ &= \gamma t^j \end{aligned}$$

Proposition 15. Sei $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$ eine Körpererweiterung und V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Dann hat $\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{K}} V$ die Struktur von \mathbb{L} -Vektorraum, mit

$$\alpha(\beta \otimes v) = (\alpha\beta) \otimes v \quad \text{für } \alpha, \beta \in \mathbb{L} \text{ und } v \in V$$

Beweis 22. Wir müssen verifizieren, dass

$$(\alpha, \beta \otimes v) \mapsto (\alpha\beta) \otimes v$$

eine Abbildung von $L \times (L \otimes_{\mathbb{K}} V)$ nach $L \otimes_{\mathbb{K}} V$ beschreibt. D.h. für jedes $\alpha \in L$,
 \exists eine Abbildung $L \otimes V \rightarrow L \otimes V$

$$\begin{array}{ccc}
 L \times V & \xrightarrow{(\beta, \alpha) \mapsto (\alpha\beta, v)} & L \times V \\
 \downarrow \eta & \searrow (\alpha, \beta) \mapsto (\alpha\beta) \otimes v & \downarrow \eta \\
 L \otimes V & \xrightarrow{\text{Aus der u.E.}} & L \otimes V \\
 & & (\alpha, \beta) \mapsto (\alpha\beta) \otimes v
 \end{array}$$

ist bilinear:

$$\begin{aligned}
 (\beta + \beta', v) &\mapsto (\alpha(\beta + \beta')) \otimes v = \\
 &= (\alpha\beta + \alpha\beta') \otimes v && \text{Körpereigenschaft} \\
 &= \alpha\beta \otimes v + \alpha\beta' \otimes v && \text{Rechenregeln für Tensoren}
 \end{aligned}$$

So bekommen wir

$$\begin{aligned}
 L \times (L \otimes V) &\rightarrow L \otimes V \\
 (\alpha, \beta \otimes v) &\mapsto (\alpha\beta) \otimes v
 \end{aligned}$$

Wir müssen auch die Axiome für den Vektorraum über L verifizieren, d.h.:

$$\begin{aligned}
 \alpha(w + w') &= \alpha w + \alpha w' && \text{für } \alpha \in L, w, w' \in L \otimes V \\
 \alpha(\alpha' w) &= (\alpha\alpha') w && \text{für } \alpha, \alpha' \in L, w \in L \otimes V
 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung gilt weil $L \otimes V \dashrightarrow L \otimes V$ über \mathbb{K} -linear ist. Die zweite folgt aus der ersten, falls wir nur den Fall verifizieren, wobei $w = \beta \otimes v$. Dafür benutzen wir

- $L \otimes_{\mathbb{K}} V$ ist von Elementen $\beta \otimes v$ ($\beta \in L, v \in V$) aufgespannt, als \mathbb{K} -Vektorraum (Klar von der Konstruktion)
- Dann können wir schreiben

$$w = \beta_1 \otimes v_1 + \cdots + \beta_\gamma \otimes v_\gamma \quad \gamma \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha(\alpha'(\beta_1 \otimes v_1 + \cdots + \beta_\gamma \otimes v_\gamma)) &= \alpha(\alpha'(\beta_1 \otimes v_1) + \cdots + \alpha'(\beta_\gamma \otimes v_\gamma)) \\
 &= \alpha(\alpha'(\beta_1 \otimes v_1)) + \cdots + \alpha(\alpha'(\beta_\gamma \otimes v_\gamma)) \\
 &= (\alpha\alpha')(\beta_1 \otimes v_1) + \cdots + (\alpha\alpha')(\beta_\gamma \otimes v_\gamma) \\
 &= (\alpha\alpha')(\beta_1 \otimes v_1 + \cdots + \beta_\gamma \otimes v_\gamma)
 \end{aligned}$$

für $w := \beta \otimes v$:

$$\begin{aligned}
 \alpha(\alpha'(\beta \otimes v)) &= \alpha((\alpha'\beta) \otimes v) \\
 &= (\alpha(\alpha'\beta)) \otimes v \\
 &= ((\alpha\alpha')\beta) \otimes v \\
 &= (\alpha\alpha')(\beta \otimes v)
 \end{aligned}$$

Satz 7.

$$\underbrace{\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t]}_{\mathbb{C}\text{-Vektorraum}} \rightarrow \mathbb{C}[t]$$

Beh: dies ist ein Isomorphismus von \mathbb{C} -Vektorräumen. Nur noch zu verifizieren: die \mathbb{C} -Linearität. Im allgemeinen haben wir

$$L \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[t] \xrightarrow{\sim} L[t]$$

L -linearer Isomorphismus

Beweis 23. Sei $\gamma \in \mathbb{C}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t] & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}[t] \\ \downarrow \gamma \cdot () & & \downarrow \gamma \cdot () \\ \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t] & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}[t] \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \gamma' \oplus t^j & \xrightarrow{\quad} & \gamma t^j \\ \swarrow & & \downarrow \\ \gamma(\gamma' \otimes t^j) = (\gamma\gamma') \otimes t^j & \xrightarrow{\quad} & \gamma\gamma' t^j \end{array}$$

Bemerkung 64. Ganz ähnlich

$$L \otimes \mathbb{K}^n \xrightarrow{\sim} L^n$$

L -linearer Isomorphismus. ($n \in \mathbb{N}$) Insbesondere:

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n$$

Definition 43. Komplexifizierung Ist V ein \mathbb{R} -Vektorraum, so heisst der \mathbb{C} -Vektorraum $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ die Komplexifizierung von V

3.5.2 Tensorprodukt von linearen Abbildungen

Definition 44. Tensorprodukt von linearen Abbildungen Sei $V, W, V \otimes_{\mathbb{K}} W, V \times W \xrightarrow{\eta} V \otimes_{\mathbb{K}} W$ und $V', W', V' \otimes_{\mathbb{K}} W', V' \times W' \xrightarrow{\eta'} V' \otimes_{\mathbb{K}} W'$ gegeben, mit linearen Abbildungen

$$\begin{array}{c} V \xrightarrow{\phi} V' \\ W \xrightarrow{\psi} W' \end{array}$$

Dann haben wir:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\phi \times \psi} & V' \times W' \\ \downarrow \eta & & \downarrow \eta' \\ V \otimes W & \xrightarrow{\text{neu}} & V' \otimes W' \end{array}$$

Beh: die Komposition ist bilinear

$$(v, w) \mapsto \psi(v) \otimes \psi(w)$$

(neu) aus der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts von linearen Abbildungen

Not 7. Tensorprodukt von linearen Abbildungen

$$\phi \otimes \psi$$

3.5.3 Spezialfälle

Bemerkung 65. Spezialfall 1 V, V', W, W' endlichdimensional mit gegebenen Basen $\dim V = m$ Basis v_1, \dots, v_m , $\dim W = n$ Basis w_1, \dots, w_n , $\dim V' = m'$ Basis $v'_1, \dots, v'_{m'}$, $\dim W' = n'$ Basis $w'_1, \dots, w'_{n'}$ dargestellt durch ϕ dargestellt als $A \in M(m' \times m, \mathbb{K})$, ψ durch $B \in M(n' \times n, \mathbb{K})$. Wie wir schon gesehen haben, hat $V \otimes W$ die Basis

$$\begin{pmatrix} v_1 \otimes w_1 & \cdots & v_1 \otimes w_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_m \otimes w_1 & \cdots & v_m \otimes w_n \end{pmatrix}$$

und $V' \otimes W'$ hat die Basis

$$\begin{pmatrix} v'_1 \otimes w'_1 & \cdots & v'_1 \otimes w'_{n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v'_{m'} \otimes w'_1 & \cdots & v'_{m'} \otimes w'_{n'} \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die darstellende Matrix von $\phi \otimes \psi$, Basiselement $v_i \otimes w_j$ von $V \otimes W$ geht auf was?

$$\begin{array}{ccc} (v_i, w_j) \mapsto (\phi(v_i), \psi(w_j)) & \xrightarrow{\quad} & (a_{1i}v'_1 + \cdots + a_{m'i}v'_{m'}, b_{1j}w'_1 + \cdots + b_{n'j}w'_{n'}) \\ \downarrow \eta & \searrow \eta' & \\ v_i \otimes w_j & \xrightarrow{\phi \otimes \psi} & (a_{1i}v'_1 + \cdots + a_{m'i}v'_{m'}) \otimes (b_{1j}w'_1 + \cdots + b_{n'j}w'_{n'}) = \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= a_{1i}b_{1j}(v'_1 \otimes w'_1) + a_{1i}b_{2j}(v'_1 \otimes w'_2) + \cdots + a_{1i}b_{n'j}(v'_1 \otimes w'_{n'}) + \\ &\quad a_{2i}b_{1j}(v'_2 \otimes w'_1) + \cdots + a_{2i}b_{n'j}(v'_2 \otimes w'_{n'}) + \\ &\quad \cdots + a_{m'i}b_{1j}(v'_{m'} \otimes w'_1) + \cdots + a_{m'i}b_{n'j}(v'_{m'} \otimes w'_{n'}) \end{aligned}$$

$A \otimes B$ heisst die darstellende Matrix von $\phi \otimes \psi$ und sieht so aus:

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1n} & \cdots & a_{1m}b_{11} & \cdots & a_{1m}b_{1n} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2n} & \cdots & a_{1m}b_{21} & \cdots & a_{1m}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{11}b_{n'1} & a_{11}b_{n'2} & \cdots & a_{11}b_{n'n} & \cdots & a_{1m}b_{n'1} & \cdots & a_{1m}b_{n'n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m'1}b_{11} & a_{m'1}b_{12} & \cdots & a_{m'1}b_{1n} & \cdots & a_{m'm}b_{11} & \cdots & a_{m'm}b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m'1}b_{n'1} & a_{m'1}b_{n'2} & \cdots & a_{m'1}b_{n'n} & \cdots & a_{m'm}b_{n'1} & \cdots & a_{m'm}b_{n'n} \end{pmatrix} \in M(m'n' \times mn, \mathbb{K})$$

Diese Matrix lässt sich in Blockmatrixen unterteilen:

$$\begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & \cdots & a_{2m}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m'1}B & \cdots & a_{m'm}B \end{pmatrix} = A \otimes B$$

Beispiel 33.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 6 \\ 6 & 8 & 9 & 12 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 66. Spezialfall 2 $V' = V$ und $\phi = 1_V$. Dann folgt aus $\psi : W \rightarrow W'$

$$V \otimes_{\mathbb{K}} W \xrightarrow{1_V \otimes \psi} V \otimes_{\mathbb{K}} W'$$

$1_V \otimes \psi$ kann auch mit $V \otimes \psi$ bezeichnet werden.

Beispiel 34. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C} \rightsquigarrow$ Komplexifizierung einer linearen Abbildung

$$\psi : W \rightarrow W' \rightsquigarrow \mathbb{C} \otimes \psi : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} W \rightarrow \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} W'$$

wenn $\dim W, \dim W' < \infty$, darstellende Matrix $B = (b_{ij}), b_{ij} \in \mathbb{R}$, so bekommen wir $\mathbb{C} \otimes B$, mit derselben Grösse, denselben Einträgen, aber als komplexe Zahlen betrachtet. Ähnlich für eine beliebige Körpererweiterung $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$

$$\psi : W \rightarrow W' \rightsquigarrow \mathbb{L} \otimes \psi : \mathbb{L}W \rightarrow \mathbb{L} \otimes W'$$

Bemerkung 67. Spezialfall 3 $V' = W' = \mathbb{K}$, und so $\phi \in V^*, \psi \in W^*$

$$\rightsquigarrow \phi \otimes \psi : V \otimes_{\mathbb{K}} W \rightarrow \underbrace{\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}}_{\text{Basis } (1 \otimes 1) \mapsto 1} \approx \mathbb{K}$$

So können wir schreiben

$$\phi \otimes \psi : V \otimes_{\mathbb{K}} W \rightarrow \mathbb{K}$$

d.h.

$$\phi \otimes \psi \in (V \otimes_{\mathbb{K}} W)^*$$

Anscheinend hat $\phi \otimes \psi$ auch eine Bedeutung als Element von $V^* \otimes_{\mathbb{K}} W^*$. Es gibt einen Zusammenhang:

$$\begin{array}{ccc} V^* \times W^* & & \\ \downarrow & \searrow (\phi, \psi) \mapsto \phi \otimes \psi & \\ V^* \otimes W^* & (V \otimes W)^* & \end{array}$$

Satz 8.

$$\begin{aligned} V^* \times W^* &\rightarrow (V \otimes W)^* \\ (\psi, \phi) &\mapsto \phi \otimes \psi \end{aligned}$$

ist eine bilineare Abbildung.

Beweis 24.

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{(\phi + \tilde{\phi}) \times \psi} & \mathbb{K} \times \mathbb{K} \\ \downarrow & & \downarrow \\ V \otimes W & \xrightarrow{(\phi + \tilde{\phi} \otimes \psi)} & \mathbb{K} \end{array}$$

•

$$(\psi + \tilde{\psi}, \phi) \mapsto (\phi + \tilde{\phi}) \otimes \stackrel{?}{=} \phi \otimes \phi + \tilde{\phi} \otimes \psi$$

ok

• ...

Proposition 16. Sei \mathbb{K} ein Körper und V, W endlichdimensionale Vektorräume über \mathbb{K} . Die oben beschriebene lineare Abbildung

$$V^* \otimes W^* \rightarrow (V \otimes W)^*$$

ist ein Isomorphismus

Beweis 25. Wir rechnen mit Basen. Seien (v_1, \dots, v_n) Basis in V mit dualen Basen (v_1^*, \dots, v_m^*) in V^* . Seien (w_1, \dots, w_m) Basis in W mit dualen Basen (w_1^*, \dots, w_n^*) in W^* . Dann ist $(v_i^* \otimes w_j^*)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ eine Basis von $V^* \otimes W^*$

$$V \xrightarrow{v_i^*} \mathbb{K}$$

$$W \xrightarrow{w_j^*} \mathbb{K}$$

$$V \otimes W \xrightarrow{v_i^* \otimes w_j^*} \mathbb{K}$$

$$v_i \otimes w_j \mapsto \delta_{ik} \cdot \delta_{jl}$$

Wir erkennen das als Basiselement von $(V \otimes W)^*$. Wir können auch $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ interpretieren als Tensorprodukt. V, W Vektorräume über \mathbb{K}

$$(\phi, w) \longmapsto v \mapsto \phi(v)w$$

$$V^* \times W \longrightarrow \text{Hom}(V, W)$$

$$\begin{array}{ccc} & & \nearrow \\ \downarrow & & \\ V^* \otimes W & & \end{array}$$

Beh: Das ist eine bilineare Abbildung ...

Proposition 17. Sei \mathbb{K} ein Körper, V, W endlichdimensionale \mathbb{K} -Vektorräume. Dann ist die lineare Abbildung

$$V^* \otimes W \rightarrow \text{Hom}(V, W)$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis 26. Eine ähnliche Berechnung mit Basen.

Beispiel 35. $V = W = \mathbb{R}^3$ A =

$$e_2^* \otimes e_3 \mapsto \begin{pmatrix} e_1 \mapsto 0 \\ e_2 \mapsto e_3 \\ e_3 \mapsto 0 \end{pmatrix}$$

oder durch eine Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow e_1^* \otimes e_1 + 2e_3^* \otimes e_1 - e_2^* \otimes e_2 + e_3^* \otimes e_2 + e_1^* \otimes e_3 + 2e_2^* \otimes e_3$$

$$= (e_1^* + 2e_3^*) \otimes e_1 + (-e_2^* + e_3^*) \otimes e_2 + (e_1^* + 2e_2^*) \otimes e_3 \stackrel{?}{=} () \otimes () + () \otimes ()$$

Standardbasis (e_1, e_2, e_3) , Basiswechsel von V und W

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Neue Basen von V

$$\begin{aligned}f_1 &= (1, 0, 0) \\f_2 &= (0, 1, 0) \\f_3 &= (-2, 1, 1)\end{aligned}$$

Neue Basen von W

$$\begin{aligned}f_1 &= (1, 0, 1) \\f_2 &= (0, -1, 2) \\f_3 &= (0, 0, 1)\end{aligned}$$

so:

$$\begin{aligned}f_1 &\mapsto g_1 \\f_2 &\mapsto g_2 \\f_3 &\mapsto 0\end{aligned}$$

Das bedeutet, wir können ϕ als

$$f_1^* \otimes g_1 + f_2^* \otimes g_2$$

schreiben.

Zu finden: f_i^* bezüglich (e_1^*, e_2^*, e_3^*) . Zeilen aus der Transformationsmatrix:

$$\begin{aligned}f_1^* &= e_1^* + 2e_3^* \\f_2^* &= e_2^* - e_3^* \\f_3^* &= e_3^*\end{aligned}$$

So haben wir

$$\phi \leftrightarrow (e_1^* + 2e_3^*) \otimes (e_1 + e_3) + (e_2^* - e_3^*) \otimes (-e_2 + 2e_3)$$

checken

$$e_1^* \otimes e_1 + 2e_3^* \otimes e_1 + e_1^* \otimes e_3 + 2e_3^* \otimes e_3 - e_2^* \otimes e_2 + e_3^* \otimes e_2 + 2e_2^* \otimes e_3 - 2e_3^* \otimes e_3$$

Bemerkung 68.

$$V^* \otimes_{\mathbb{K}} W \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$$

lineare Abbildungen als Tensoren

$$V^* \otimes_{\mathbb{K}} V^* \xrightarrow{\sim} (V \otimes_{\mathbb{K}} V)^*$$

Bilinearformen als Tensoren

3.6 (Bi-)lineare Abbildungen als Tensoren

Wir wollen Begriffe wie symmetrisch, alternierend in die Sprache von Tensoren übersetzen.

$$V \times V \xrightarrow{s} \mathbb{K} \qquad s(v, w) = s(w, v) \text{ symmetrisch}$$

oder

$$V \times V \xrightarrow{s} W \qquad s(v, w) = s(w, v) \text{ symmetrisch}$$

$$V \times V \xrightarrow{s} \mathbb{K} \qquad s(v, v) = 0 \text{ alternierend}$$

Definition 45. äusseres Produkt Das äussere Produkt von einem \mathbb{K} -Vektorraum V mit sich selbst ist ein Vektorraum $V \wedge V$ oder $\wedge^2 V$ mit alternierenden bilinearen Abbildung $V \times V \rightarrow V \wedge V$, die die folgende universelle Eigenschaft erfüllt: Für jeden \mathbb{K} -Vektorraum W mit der alternierenden bilinearen Abbildung

$$\xi : V \times V \rightarrow W$$

gibt es eine eindeutige lineare Abbildung

$$V \wedge V \xrightarrow{\xi'} W$$

so dass das Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} V \times V & & \\ \downarrow \eta & \searrow \xi & \\ V \wedge V & \xrightarrow{\xi'} & W \end{array}$$

Bemerkung 69. äusseres Produkt

universelle Eigenschaft \implies Eindeutigkeit bis auf Isomorphismus

Existenz: 2 Möglichkeiten

•

$$V \wedge V = V \otimes V / \text{span}(v \otimes v : v \in V)$$

• durch Basis

Beweis 27. Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V , wo I eine Totalordnung gegeben ist.
Bsp:

- (v_1, \dots, v_n) mit \leq
- (v_1, v_2, \dots) mit \leq
- allg. Existenz (Lemma von Zorn)

Dann können wir $V \wedge V$ konstruieren, mit Basis $(v_i \wedge v_j)_{(i,j) \in I \times I, i < j}$

$$\begin{aligned} V \times V &\xrightarrow{\eta} V \wedge V \\ (v_i, v_j) &\mapsto \begin{cases} v_i \wedge v_j & i < j \\ 0 & i = j \\ -v_j \wedge v_i & i > j \end{cases} \end{aligned}$$

eindeutige Erweiterung zu einer bilinearen Abbildung

$$\left(\sum_{i \in I} a_i v_i, \sum_{j \in I} b_j v_j \right) \mapsto \sum_{i < j} a_i b_j v_i \wedge v_j - \sum_{i > j} a_i b_j v_j \wedge v_i$$

Bemerkung 70. Dies ist eine alternierende bilineare Abbildung und erfüllt die universelle Eigenschaft.

$$\begin{array}{ccc} (v_i, v_j) & V \times V & \\ \downarrow & \searrow \xi & \\ v_i \wedge v_j, i < j & V \wedge V & \xrightarrow{\xi'} W \end{array}$$

ξ' definiert durch

$$\xi'(v_i \wedge v_j) = \xi(v_i, v_j)$$

Aus der universellen Eigenschaft vom Tensorprodukt bekommt man eine lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc}
 V \otimes V & \leftarrow & V \wedge V \\
 (v_i, v_j) & & V \times V \\
 \downarrow & & \downarrow \eta_1 \quad \searrow \eta \\
 v_i \wedge v_j, i < j & & V \wedge V \dashrightarrow W
 \end{array}$$

Explizit:

$$v_i \otimes v_j \mapsto \begin{cases} v_i \wedge v_j & i < j \\ 0 & i = j \\ -v_i \wedge v_j & i > j \end{cases}$$

Bemerkung 71. Rechenregeln für $v, v', w, w' \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned}
 (v + v') \wedge w &= v \wedge w + v' \wedge w \\
 (\lambda v) \wedge w &= \lambda (v \wedge w) \\
 v \wedge v &= 0 \\
 w \wedge v &= -v \wedge w
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v \wedge (w + w') &= v \wedge w + v \wedge w' \\
 v \wedge (\lambda w) &= \lambda (v \wedge w)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V \times V &\xrightarrow{\eta} V \wedge V \\
 (v, w) &\mapsto v \wedge w
 \end{aligned}$$

Beispiel 36. $V = \mathbb{K}^n$ Standardbasis (e_1, \dots, e_n) von $V \rightsquigarrow$ Basis $(e_i \wedge e_j)_{1 \leq i < j \leq n}$ von $V \wedge V$.

$n = 2$

$$\begin{aligned}
 V \wedge V &\cong \mathbb{K} \\
 e_1 \wedge e_2 &\rightsquigarrow 1
 \end{aligned}$$

$n = 3$

$$\begin{aligned}
 V \wedge V &\cong \mathbb{K}^3 \\
 e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3
 \end{aligned}$$

allg. n

$$\dim V \wedge V = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Bemerkung 72. universelle Eigenschaft für $W = \mathbb{K}$ ergibt

$$\begin{array}{ccc}
 V \times V & & \\
 \downarrow & \searrow & \\
 V \wedge V & \dashrightarrow & W
 \end{array}$$

$$\{\text{alternierende Bilinearformen auf } V\} \xhookrightarrow{\quad} \{\text{Bilinearformen auf } V\}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \updownarrow & & \nearrow \\
 (V \wedge V)^* & \hookrightarrow & (V \otimes V)^*
 \end{array}$$

Proposition 18. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Dann haben wir $V^* \wedge V^* \cong (V \wedge V)^* \cong$ der Untervektorraum von $(V \otimes V)^*$ von $\phi : V \otimes V \rightarrow \mathbb{K}$ mit $\phi(v \otimes v) = 0 \forall v \in V$, wobei der erste Isomorphismus aus der universellen Eigenschaft so folgt:

$$\begin{array}{ccc} V^* \times V^* & \xrightarrow{(\phi, \psi)} & \\ \downarrow & \searrow & \\ V^* \wedge V^* & \xrightarrow{\quad} & (V \wedge V)^* \end{array} \quad (v \wedge w) \mapsto \det \begin{pmatrix} \phi(v) & \phi(w) \\ \psi(v) & \psi(w) \end{pmatrix}$$

Beweis 28. Wir wählen eine Basis (v_1, \dots, v_n) von $V \implies v_1^*, \dots, v_n^*$ von $V^* \implies v_i^* \wedge v_j^*$ von $\wedge^2 V^*$ ($1 \leq i < j \leq n$). \implies Basis $v_i \wedge v_j$ von $\wedge^2 V \implies$ Duale Basis $(v_i \wedge v_j)^*$ von $(\wedge^2 V)^*$

$$v_k \wedge v_l \mapsto \det \begin{pmatrix} \delta_{ik} & \delta_{il} \\ \delta_{jk} & \delta_{jl} \end{pmatrix} = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad 1 \leq k < l \leq n$$

$$v_i^* \wedge v_j^* \mapsto (v_i \wedge v_j)^*$$

Da Basiselemente auf Basiselemente 1 zu 1 abgebildet werden, haben wir einen Isomorphismus.

Bemerkung 73. Weitere Themen:

- $\wedge^k V$ k-gerade
- $\wedge^k \phi$ für die lineare Abbildung $\phi : V \rightarrow W$
- $\alpha \wedge \beta \in \wedge^{k+l} V$ für $\alpha \in \wedge^k V$, $\beta \in \wedge^l V$

Bemerkung 74. $\wedge^k V$ ist für $k \in \mathbb{N}_{>0}$ definiert, analog zu $\wedge^2 V$. Eine Abbildung

$$\phi : \overbrace{V \times \dots \times V}^k \rightarrow W$$

heißt

multilinear falls $\forall i, 1 \leq i \leq k \ v_1 \dots v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k, v_i \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \phi(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + v'_i, v_{i+1}, \dots, v_k) &= \phi(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k) + \phi(v_1, \dots, v_{i-1}, v'_i, v_{i+1}, \dots, v_k) \\ \phi(v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda v_i, v_{i+1}, \dots, v_k) &= \lambda \phi(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k) \end{aligned}$$

alternierend falls

$$(i \neq j, v_i = v_j) \implies \phi(v_1, \dots, v_k) = 0$$

Dann wird $\wedge^k V$ definiert als Vektorraum mit multilinearen Abbildung mit der universellen Eigenschaft.

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{V \times \dots \times V}^k & & \\ \downarrow & \searrow \text{multilinear und alternierend} & \\ \wedge^k V & \xrightarrow{\exists!} & W \end{array}$$

Konstruktion ist möglich aus Basis mit Totalordnung. Ist $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis, (I, \leq) Totalordnung, dann ist $(v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots \wedge v_{i_k})_{i_1 < i_2 < \dots < i_k}$ eine Basis von $\wedge^k V$. Spezialfälle: $\underbrace{\wedge^0 V = K}_{\text{Konvention}} \wedge^1 V = V \wedge^2 V = V \wedge V$

Bemerkung 75. Ohne alternierend in der oberen Abbildung bekämen wir $\overbrace{V \times \dots \times V}^k : (U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$ schreibt als $U \otimes V \otimes W$

Beispiel 37. • $V = K^4$ $K^6 \cong \wedge^2 V$

$$e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4$$

• $K^4 \cong \wedge^3 K$

$$e \wedge e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$$

• $K^4 \wedge^4 V$

$$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$$

Allg. $\dim V = n \implies \wedge^k V = \binom{n}{k}$, insbesondere ist Null für $k > n$

Bemerkung 76. Rechenregeln

$$v_1 \wedge \cdots \wedge (v_i + v'_i) \wedge \cdots \wedge v_k = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k + v_1 \wedge \cdots \wedge v'_i \wedge \cdots \wedge v_k$$

$$v_1 \wedge \cdots \wedge (\lambda v_i) \wedge \cdots \wedge v_k = \lambda (v_1 \wedge \cdots \wedge v_k)$$

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_i \wedge v_{i+1} \wedge \cdots \wedge v_k = -v_1 \wedge \cdots \wedge v_{i+1} \wedge v_i \wedge \cdots \wedge v_k$$

$$(\cdots \wedge v \wedge \cdots \wedge v \wedge \cdots) = 0$$

Bemerkung 77. $\phi V \rightarrow W$

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{V \times \cdots \times V}^k & \xrightarrow{\phi \times \cdots \times \phi} & \overbrace{W \times \cdots \times W}^k \\ \downarrow & & \downarrow \\ \wedge^k V & \xrightarrow{\wedge^k \phi} & \wedge^k W \end{array}$$

Beispiel 38. $V = W = \mathbb{R}^2$

$$\phi : V \rightarrow W$$

$$(x, y) \mapsto (x + 2y, 3x + 4y)$$

$$\rightsquigarrow \wedge^2 \phi : \wedge^2 V \rightarrow \wedge^2 W = \wedge^2 \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}$$

$$e_1 \wedge e_2 \mapsto (e_1 + 3e_2) \wedge (2e_1 + 4e_2)$$

$$= e_1 \wedge (2e_1 + 4e_2) + 3e_2 \wedge (2e_1 + 4e_2)$$

$$= 2e_1 \wedge e_1 + 4e_1 \wedge e_2 + 6e_2 \wedge e_1 + 12e_2 \wedge e_2$$

$$= 4e_1 \wedge e_2 - 6e_1 \wedge e_2$$

$$= -2e_1 \wedge e_2$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = -2$$

Wir werden sehen: $\wedge^{\dim V} \rightsquigarrow \det$

Bemerkung 78. In grösserer Allgemeinheit:

$$\wedge^k V \times V \rightarrow \wedge^{k+1} V$$

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k, v_0) \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \wedge v_0$$

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{V \times \cdots \times V}^k & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \wedge^k V \times V & \rightarrow & \wedge^{k+1} V \end{array}$$

für $w_1, \dots, w_l \in V$

$$\begin{array}{ccc} \wedge^k V \otimes \overbrace{V \times \cdots \times V}^l & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \wedge^k V \times \wedge^l V & \xrightarrow{\text{aus uE}} & \wedge^{k+l} V \\ \alpha, \beta \vdash & \longrightarrow & \alpha \wedge \beta \end{array}$$

Eigenschaft:

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha$$

für $\alpha \in \wedge^k V$, $\beta \in \wedge^l V$

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) \wedge (w_1 \wedge \cdots \wedge w_l) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_l$$

Proposition 19. *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einen Körper \mathbb{K} $d := \dim V$, und $\phi: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Dann ist*

$$\wedge^d \phi : \wedge^d V \rightarrow \wedge^d V$$

gegeben durch Multiplikation durch $\det V$

Beweis 29. *Wir nehmen eine Basis (v_1, \dots, v_d) von V . Dann ist $\wedge^d V$ von Dimension 1, erzeugt von $v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$. Ist $A \in M(d \times d, \mathbb{K})$ die darstellende Matrix, so haben wir $\det \phi = \det A$. Es folgt: Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \text{End}(V) &\rightarrow \mathbb{K} \\ \phi &\mapsto (\text{das eindeutig bestimmte } \lambda \in \mathbb{K}) \end{aligned}$$

Wobei λ bestimmt ist durch

$$(\wedge^d \phi)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_d) = \lambda v_1 \wedge \cdots \wedge v_d = \phi(v_1) \wedge \phi(v_2) \wedge \cdots \wedge \phi(v_d)$$

ist

multilinear in den Spalten der darstellenden Matrix

alternierend

bildet 1_V auf $1 \in \mathbb{K}$ ab