- 5 sinnvoll bearbeitete Übungen Semester 16.9.08
- mind. an 2 von 3 Klausuren teilnehmen in Jahr ← Bonuspunkte?

- Analysis by it's history
- Amann u. Escher Buch Analysis1

Analysis

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$

Notationen

$\neg$ Negation

$\forall$ für alle, für jedes

$\exists$ es gibt ein.. (mind. 1)

$\exists!$ es gibt genau ein..

$\nexists$ es gibt kein..

$A \wedge B$ 'A und B' Die Aussage $A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn A und B wahr sind.

$A \vee B$ "A oder B" $A \vee B$ ist wahr, wenn A oder und B wahr sind.

$A \Rightarrow B$ aus A folgt B, A hinreichend für B, B notwendig für A

Aussage B ist wahr, wenn A wahr ist

$A \Leftrightarrow B$ A und B sind äquivalent, $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$

Um $A \Rightarrow B$ zu zeigen:

1. Direkter Beweis:

   $A \Rightarrow C$, $C \Rightarrow B$

2. Kontraposition

   $\neg B \Rightarrow \neg A$

3. Widerspruch

   $A \wedge \neg B \Rightarrow C$ C ist eine falsche Aussage!

Notationen

$\setminus$ relatives Komplement $\{1,3,6\} \setminus \{2,4,6\} = \{1,3\}$

Satz: Die Aussage $A(n): 1+2+3+\dots n = \frac{n(n+1)}{2}$ ist wahr

Beweis:

IA: $A(0)$ $0 = \frac{0(0+1)}{2}$ ✓

IS: Voraussetzung: $A(n)$ gilt für n

$A(n+1)$ $1+2+3+\dots+(n+1) = (1+2+3+\dots+n)+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$

$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ $\square$ $= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Variante: Sei $A(n)$ eine Aussage, die $\forall n \geq k$ (k eine $\in \mathbb{N}$) definiert

I). $A(k)$ ist richtig

II). $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ $\forall n \geq k$

Dann gilt $A(n)$ $\forall n \geq k$.

Satz: $A(n) = 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Beweis:

IA: $n=1$ $1 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$ ✓

IS: $A(n)$ ist richtig. ← Annahme

$1^2+\dots(n+1)^2 = (1^2\dots+n^2)+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}$

Notation: Sei a_k eine Zahl die $k \in \mathbb{N}$ abhängt

z.B. $a_k := k^2$, $a_k = \frac{k(k+1)}{2}$

$\sum_{k=0}^{n} a_k := a_0 + a_1 + a_2 \dots + a_n$

$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ | $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ← zu zeigen als Hausaufgabe ✓

Kombinatorik

Satz: Die Anzahl aller Anordnungen n verschiedener Elemente ist $n!$

z.B.: $n=3$ $\times, \nabla, \bigcirc$

$\times\nabla\bigcirc$ $\nabla\bigcirc\times$ $\bigcirc\nabla\times$
$\times\bigcirc\nabla$ $\nabla\times\bigcirc$ $\bigcirc\times\nabla$ } 6 Möglichkeiten $= 3!$

Beweis: Induktion

IA. $n=1$ klar $1! = 1$

IS: Annahme: $\exists n!$ Anordnungen von n Elementen

$n+1$ Elemente

zunächst wählen wir 1 Element als ~~erstes~~. $n+1$ Möglichkeiten

$\Rightarrow n!$ Weisen um Zahl zuordnen $\Rightarrow (n+1) \cdot n! \overset{\text{def.}}{=} (n+1)!$ $\square$

Definition: Eine Abbildung heisst $f: M \to N$

injektiv, falls $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

surjektiv, falls $\forall y \in N \ \exists x \in M \ \ y = f(x)$

bijektiv, falls f injektiv u. surjektiv ist

Satz: $f: M \to N$ ist ~~genau dann~~ Umkehrabbildung

bijektiv $\Leftrightarrow \exists g: N \to M$

$g(f(x)) = x \quad \forall x \in M$

$f(g(y)) = y \quad \forall y \in N$

Beweis: Als Übung (mit def. von inj u. surj)

$\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

			1		1				$n=1$
		1		2		1			$n=2$
	1		3		3		1		$n=3$
1		4		6		4		1	$n=4$

$\binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 2$

↳ Pascalsches Dreieck

Binomialentwicklung

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{=n}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n$$

$$n \in \mathbb{N} \quad = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k = 1 + n \cdot x + \dots$$

__Beweis:__ Wie bekommen wir x^k?
Wir brauchen x aus k zu wählen.

$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$

$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$

$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$

__Korollar:__ $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

__Beweis:__ $x = 1$ nach Binomialentwicklung

__Korollar:__ Die Anzahl Teilmengen einer n-elementigen Menge ist 2^n.
↳ Für alle Teilmengen, egal wie viele Elemente sie enthalten

$\mathcal{P}(X) = 2^X$

$\mathbb{Z} = \{\text{ganze Zahlen}\}$; $0, 1, 2, 3, -1, -2, -3 \dots$

$\cap$

$\mathbb{Q} = \{\text{rationale Zahlen}\}$; auch Brüche $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

- In $\mathbb{Z}$ kann man auch subtrahieren.
- In $\mathbb{Q}$ kann man auch dividieren, ausser durch 0.

$\mathbb{R} = \{\text{reelle Zahlen}\}$ z.B $\sqrt{2}$, π irrationale Zahlen $= \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\cup$

$\mathbb{Q}$

2). $\mathbb{R}$ ist ein archimedisch angeordneter Körper, das heisst:
$\exists\, \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$
wir schreiben $a>0$ falls $a \in \mathbb{R}^+$

A1: $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt genau ein der drei Relationen
$a>0,\ a=0,\ a<0$ Notation: $a \notin \mathbb{R}^+ \to$ nur $a<0$, $a \neq 0$

A2: $a>0,\ b>0 \Rightarrow a+b>0,\ ab>0 \quad \forall a,b$

A3: (Archimedisches Axiom)
$\forall a\, \exists n \in \mathbb{N} : n-a>0$

- Ein Körper der nur A1 u. A2 erfüllt ist ein angeordneter Körper.
- $\mathbb{Q}$ ist auch ein archimedisch angeordneter Körper.
- ~~Für~~ A1, A2, A3 gilt auch auf $\mathbb{Z}$

Notation: $a<0$ wenn $-a>0$
$a>b$ wenn $a-b>0$
$a<b$ wenn $b>a$
$a \leq b$ wenn $a<b \vee a=b$
$a \geq b$ wenn $b \leq a$

Satz: Für einen angeordneten Körper gelten folgende Aussagen:
1). $\forall a,b$ gilt genau eine der Relationen
$a<b,\ a=b,\ a>b$
2). $a>b \wedge b>c \Rightarrow a>c$
3). $a>b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ falls $b>0$
$a+c>b+c \quad \forall c>0$
$ac>bc \quad \forall c>0$
$ac<bc \quad \forall c<0$
4). $a>b$
$\alpha>\beta \Rightarrow a+\alpha>b+\beta$
$a\cdot\alpha > b\beta$ falls $b>0,\ \beta>0$
5). $a \neq 0 \Rightarrow a^2>0$
6). $\forall n \in \mathbb{N}^+ : n>0,$
$\mathbb{N}\setminus\{0\}$

(b) $q < 1$, sei $q' = 1/q > 1$

Sei $K = 1/\varepsilon$

(i) $\exists n: q'^n > K \Rightarrow 1/q^n > 1/\varepsilon \Rightarrow \varepsilon > q^n$ $\square$

Der Absolutbetrag

$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$ $\quad a \in \mathbb{R}$

$|\,|: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ = \{x \geq 0\}$

Satz: $\forall a \quad a \leq |a|$

Satz: $\forall a, b$ gilt i) $|ab| = |a||b|$

ii) $|a+b| \leq |a| + |b|$ Dreiecksgleichung

iii) $||a| - |b|| \leq |a-b|$

Vollständigkeit

$\mathbb{Q}$ ist nicht so gut, denn es gibt wichtige Zahlen die nicht zu $\mathbb{Q}$ gehören z.B. $\sqrt{2}$.

Satz: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

genauer: $\nexists x \in \mathbb{Q}: x^2 = 2$

Beweis: Widerspruchsbeweis

Annahme: $x \in \mathbb{Q}$ und $x^2 = 2$

$\exists p, q \in \mathbb{N}$ mit $q \neq 0$ so dass $x = \frac{p}{q}$, p, q teilfremd

$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow 2$ teilt p^2

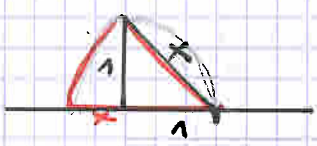
$\Rightarrow 2$ teilt p $\lightning \to 2$ teilt p nicht $\to 2$ teilt p^2 nicht!

$\Rightarrow \exists p' \in \mathbb{N}$ $p = 2p' \Rightarrow 4p'^2 = 2q^2 \Rightarrow 2p'^2 = q^2 \Rightarrow 2$ teilt q^2

$\Rightarrow 2$ teilt q $\lightning$ p, q sind aber nach Annahme teilfremd! $\square$

Geometrisches Modell

$x^2 = 2$



Vollständigkeitsaxiom

Intervallschachtelungsprinzip:

Für jede Intervallschachtelung $I_1, I_2, \ldots$ gibt es $x \in \mathbb{R} : x \in I_n \ \forall n$
d.h. $\bigcap_n I_n \neq \emptyset$

Satz: Diese ist eindeutig bestimmt. d.h. $\exists! x \in \mathbb{R} : x \in I_n \ \forall n$

Beweis: Widerspruchsbeweis
Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha \in I_n, \beta \in I_n \ \forall n$
$\alpha \neq \beta$ $\quad a_n < \alpha \leq b_n \ \forall n$
z.B. $\alpha < \beta$ $\quad a_n < \beta < b_n \ \forall n$
$[\alpha; \beta] \subset I_n \quad \forall n$

Sei $\xi \in [\alpha; \beta] \Rightarrow \alpha \leq \xi < \beta \Rightarrow a_n \leq \xi \leq b_n \ \forall n$
$\Rightarrow \xi \in I_n \ \forall n$

$\varepsilon := |[\alpha; \beta]| = \beta - \alpha > 0$
$|I_n| \geq \varepsilon \ \forall n \Rightarrow$ I2 gilt nicht ↯

Bemerkung: Dieses Prinzip gilt auf $\mathbb{Q}$ nicht!.

Bsp: Approx von $\sqrt{2}$ durch Zahlen
$a_n \in \mathbb{Q}$ $\quad I_n = \{x \in \mathbb{Q} : a_n < x < b_n\}$
$b_n \in \mathbb{Q}$ $\quad$ Intervallschachtelung
$x \in I_n \ \forall n \rightarrow x^2 = 2 \quad x \notin \mathbb{Q}$

In $\mathbb{R}$ ist $y^k = x$ $(x > 0)$ lösbar

Satz: Sei ~~x eine po~~ $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$
Sei $k \in \mathbb{N}^+$, $\exists! y \in \mathbb{R} : y^k = x$

Notation: $y = \sqrt[k]{x} = x^{1/k}$

Existenzbeweis
3 Fälle: 1) $x = 1$
2) $x > 1$
3) $x < 1$

Lemma: Die Folge der Intervalle $I_n^k := [a_n^k, b_n^k]$ ist auch eine IS

Beweis: $1 \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$

$\Rightarrow \quad a_n^k \leq a_{n+1}^k < b_{n+1}^k \leq b_n \Rightarrow I_{n+1}^k \subset I_n^k \ \forall n$

$$|I_n^k| = b_n^k - a_n^k = (b_n - a_n)(b_n^{k-1} + a_n b_n^{k-2} + a_n^2 b_n^{k-3} + \ldots + a_n^{k-2} b_n + a_n^{k-1})$$

$a_n < b_n < b_1$

$b_n^i \cdot a_n^{k-i-1} \leq b_n^{k-1} \Rightarrow (I_n^k) \leq (b_n - a_n) \cdot (k) \cdot (b_n^{k-1})$

$$\leq \underset{\substack{\| \\ |I_n|}}{(b_n - a_n)} k \cdot b_1^{k-1} = \frac{2(k-1)}{2^n} \cdot k \cdot b_1^{k-1}$$

$\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n: \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2(k-1) k b_1^{k-1}} \Rightarrow \exists n \ |I_n^k| < \varepsilon$

$\square$

- $y^k \in I_n^k \quad \forall n$
- $x \in I_n^k \quad \forall n$

$\Rightarrow y^k = x \qquad y \geq 1$

Falls: $x < 1 \qquad x' = \frac{1}{x} > 1 \ \exists y': y'^k = x'$

$\frac{1}{y^k} = \frac{1}{x} \qquad y^k = x$

$\exists$ Bijektion $\mathbb{N} \to 2\mathbb{Z}$

$\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$

$\nexists \qquad \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es gibt mehr $\mathbb{R}$ als $\mathbb{N}$

Beispiel: • $M = \mathbb{R}$ ist nicht beschränkt (archimedisches Axiom)
• $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ nicht beschränkt
• $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ist nach unten beschränkt und besitzt ein Minimum, die 0
• Die Intervalle $\underset{1}{(a;b)}$, $\underset{2}{[a;b]}$, $\underset{3}{(a;b]}$, $\underset{4}{[a;b)}$ sind beschränkt.
a ist eine untere Schranke, b eine obere S.
2: a und b Minimum u. Maximum
3: b ist ein Maximum
4: a ist ein Minimum

Lemma: $(a;b)$ besitzt kein Minimum und kein Maximum

Beweis: Sei $x \in (a;b)$

$$x' := \frac{x+b}{2} \in (a;b) \quad x < x' < b$$

wäre x ein Maximum, so wäre x' obere Schranke. Aber x' ist auch ein Element von $(a;b)$, $x' > x \Rightarrow x$ keine obere Schranke

Die unendlichen Intervalle:

$a \in \mathbb{R}$

$[a;\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ + $(a;\infty) : \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ = nach unten besch

$(-\infty; a]$ $\quad x \leq a$

$(-\infty; a)$ $\quad x < a$

$(-\infty; \infty) = \mathbb{R}$

Definition: Eine kleinste obere Schranke für M heisst Supremum von M. Eine grösste untere Schranke für M heisst Infimum von M

Genauer gesagt s ist supremum von M falls
1). s ist eine obere Schranke von M
2). ist s' eine obere Schranke und $s' \leq s$, so ist $s' = s$

Beweis: Sei $\underset{\neq \emptyset}{A} \subset \mathbb{Z}$. Sei $y \in \mathbb{R}$ untere Schranke von A

Arch. Axiom $\Rightarrow \exists v \in \mathbb{Z} : v < y$

$A' := \{x+v, x \in A\} =: A+v \mid \underset{\neq \emptyset}{A'} \subset \mathbb{N} \overset{\text{Satz}}{\Rightarrow}$

A' besitzt ein Minimum $m \Rightarrow m-v$ Minimum von A

Maximum: A nach oben beschränkt, $A \neq \emptyset$

$A' := \{-x, x \in A\} = -A$

$A' \neq \emptyset$ von unten beschränkt

$\Rightarrow A'$ hat ein Minimum m

$\Rightarrow -m$ das Maximum von A

Korollar 2: zwischen je zwei verschiedenen reellen Zahlen gibt es eine rationale Zahl.

Beweis: Seien $x, y \in \mathbb{R}$ z.B. $x < y$
$x \neq y$

zu zeigen: $\exists q \in \mathbb{Q} : x < q < y$

- arch. Axiom $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{x-y} > 0$

Sei $A := \{k \in \mathbb{Z} : k > nx\}$

arch. Axiom $\Rightarrow A \neq \emptyset$

nach unten beschränkt $\Rightarrow A$ besitz Minimum $m \in A$

$m \in A \Rightarrow m > nx \quad q := \frac{m}{n} \quad x < q$

$m-1 \leq nx \mid y = y-x+x > \frac{1}{n} + x \geq \frac{1}{n} + \frac{m-1}{n} = \frac{m}{n} = q$

Satz: Jede nach oben beschränkte nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt das Supremum

Jede nach unten beschränkte nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt das Infimum.

Bemerkung: Die Supremumeigenschaft gilt auf $\mathbb{Q}$ nicht!

Bsp: $M = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ $M \subset \mathbb{Q}$, $M \neq \emptyset$

M nach oben beschränkt, aber M besitzt kein Supremum in $\mathbb{Q}$

(10)
30.9.08

Satz: Supremumeigenschaft $\Rightarrow$ Intervallschachtelungsprinzip

Beweis: Sei $I_n = [a_n; b_n]$ IS

Sei $A = \{a_0, a_1, a_2 \dots\}$ $\forall n$ $a_n < b_n \leq b_1$

$\Rightarrow$ A nach oben beschränkt

$\Rightarrow \exists!\ s =$ supremum A

zu zeigen: $s \in I_n\ \forall n$

- $s \geq a_n$, da s eine obere Schranke von A ist
- $\forall n\ b_n$ obere Schranke von A

$\Rightarrow b_n \geq s$

s kleinste obere Schranke.

ISP $\Leftrightarrow$ SE zwei äquivalente Formulierungen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

Komplexe Zahlen

in $\mathbb{R}$: $y^k = x \geq 0$

$x < 0$?

$\mathbb{R}$ angeordneter Körper $\Rightarrow y^k \geq 0 \ \forall y \in \mathbb{R}$

Trick: Man führt ein neues Symbol i ein, mit der Eigenschaft $i^2 = -1$ imaginäre Einheit

Rechenregel ai, $a \in \mathbb{R}$

$ai = ia$

$(ab)i = a(bi)$

Addition: $a + bi$ allg. Form der Komplexen Zahlen

$(a+bi) + (c+di) = a + c + (b+d)i$

$(a+bi)(c+di) = ac + adi + ibc + \underbrace{i^2 bd}_{-bd \text{ da } i^2 = -1}$

$= (ac - bd) + (ad + bc)i$

$\mathbb{C}$ Menge der Komplexen Zahlen

$\mathbb{C} = \{a + bi, a, b \in \mathbb{R}\} = \{(a,b), a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$

Verknüpfungen $+, \cdot$ auf $\mathbb{C}$

$(a,b) + (c,d) := (a+c, b+d)$

$(a,b) \cdot (c,d) := (ac - bd, ad + bc)$

Mengentheoretische Definition von $\mathbb{C}$

$i = (0,1)$ $\quad (0,1) \cdot (0,1) = (-1, 0)$

$(a, 0) \cdot (c, d) = (ac, ad)$

$\mathbb{C}$ ist ein zweidimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$

Satz: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper

Beweis: K1: Kommutativität

K2: Assoziativität: $((a,b) + (c,d)) + (e,f) =$

$((c,d) + (e,f)) + (a,b)$

zur Übung

K4: Distributivität: $(a,b) \cdot ((c,d) + (e,f)) =$

$(a,b) \cdot (c,d) + (a,b)(e,f)$

K3 ii). $wx = z \ , w \neq 0$ d.h. $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$

$$(\alpha + i\beta)\cdot(\xi + i\eta) = \gamma + i\delta \quad ⊛$$

$$(\alpha\xi - \beta\eta) + i(\alpha\eta + \beta\xi) \Rightarrow \begin{cases} \alpha\xi - \beta\eta = \gamma \\ \alpha\eta + \beta\xi = \delta \end{cases}$$

<u>Trick:</u> Man multipliziert ⊛ mit $\alpha - i\beta$

$$\underbrace{(\alpha - i\beta)(\alpha + i\beta)}(\xi + i\eta) = (\alpha - i\beta)(\gamma + i\delta)$$

$$\alpha^2 - i^2\beta^2 + i(\alpha\beta - \beta\alpha) = \alpha^2 + \beta^2 + i0$$

$$(\alpha^2 + \beta^2 + i0)(\xi + i\eta) = (\alpha - i\beta)(\gamma + i\delta)$$

$$(\alpha^2 + \beta^2)\xi + i(\alpha^2 + \beta^2)\eta = \alpha\gamma + \beta\delta + i(\alpha\delta - \beta\gamma)$$

$$\begin{cases} (\alpha^2 + \beta^2)\xi = \alpha\gamma + \beta\delta & \rightarrow \xi = \dfrac{\alpha\gamma + \beta\delta}{(\alpha^2 + \beta^2)} \\ (\alpha^2 + \beta^2)\eta = \alpha\delta - \beta\gamma & \eta = \dfrac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha^2 - \beta^2} \end{cases}$$ ← Lösung

$$\alpha \neq 0, \beta \neq 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$$

<u>Spezialfall</u> $wx = w \neq 0$

$$x = \boxed{1 = 1 + i0}$$

$$w = z \ , \alpha = \gamma \ , \beta = \delta$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = 1$$

$$\eta = \frac{\alpha\beta - \beta\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} = 0$$

$\underline{wx = z}$, $w \neq 0$ $\quad (w = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \wedge \beta = 0)$

$w = \alpha + i\beta$ $\quad \alpha \neq 0, \beta \neq 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

$z = \gamma + i\delta$

$x = \xi + i\eta$

$$\xi = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\eta = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$1 = 1 + i0$

$wx = 1$, $z = 1$ d.h. $\gamma = 1, \delta = 0$ $\quad x = \frac{1}{w}$

$$\xi = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \ , \ \eta = \frac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\boxed{\frac{1}{\alpha + i\beta} \quad \alpha \neq 0, \beta \neq 0 \quad = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha^2 + \beta^2}}$$

Beweis von 5).

$z = x + iy$

$\bar{z} = x - iy$

$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$

Definition: Der Betrag

$$\boxed{|z| := \sqrt{z\bar{z}} \in \mathbb{R}^+ \qquad |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}}$$

Satz: Es gelten folgende Eigenschaften

a) $|z| > 0 \quad \forall z \neq 0$

$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

$|a + i0| = |a|$ absolut Betrag

b). $|\bar{z}| = |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$

c). $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$

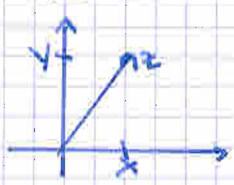
$|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$

$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

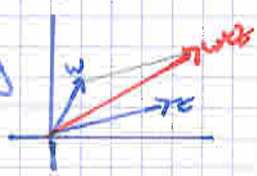
$|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

d). $|zw| = |z|\,|w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

e) $|z+w| \leq |z| + |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$ Dreiecksungleichung



$z = x + iy$



Beweis von e

$|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) =$

$z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} = |z|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + |\bar{w}|^2$

$= |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\, z\bar{w} + |\bar{w}|^2 \leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |\bar{w}|^2$

$|z+w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |\bar{w}|^2$

$= (|z| + |\bar{w}|)^2$

$= (|z| + |w|)^2$

$\Rightarrow |z+w| \leq |z| + |w|$

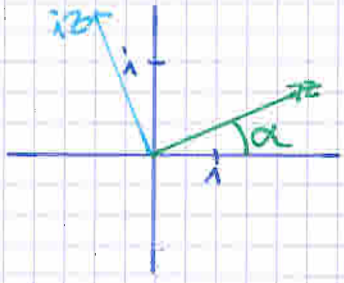
$z \neq 0 \quad |z(w_1 - w_2)| = \underbrace{|z|}_{\text{Streckungsfaktor}} \cdot |w_1 - w_2|$

Ähnlichkeitstransformation

$w = 0 \mapsto 0$

$1 \mapsto z$

$i \mapsto iz$



Streckung mit Streckungsfaktor $|z|$ + Drehung mit Winkel α

Sei $z \neq 0$: $\exists!\, r > 0,\ z' \in \mathbb{C}\ |z'| = 1 \rightarrow z = rz'$

$r := |z|$

$z' := \frac{z}{r}$

$\Downarrow$

$|z'| = 1$

$z' = x + iy$

$x^2 + y^2 = 1 \quad \exists \alpha \quad x = \cos\alpha,\ y = \sin\alpha$

$\Downarrow$

$\boxed{z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)}$ Polardarstellung

Übung: $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$

$zw = r \cdot s(\cos(\alpha+\beta) + i \cdot \sin(\alpha+\beta))$

Inversion

$\varphi: \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$z \mapsto \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2}$

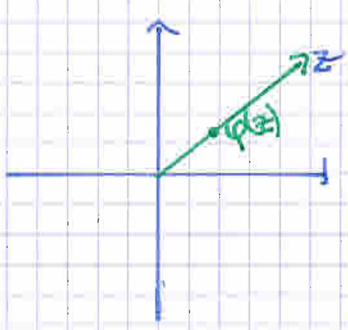
$\psi: z \mapsto \frac{1}{z} \qquad \varphi: z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$

$\psi(z) = \overline{\varphi(z)}$ Spiegelung um x-Achse

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2}$

$\varphi(z) = \frac{z}{|z|^2}$



$z, \varphi(z)$ gehören zur gleichen Geraden, die durch 0 geht

Fixpunkte: $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$; $\varphi(z) = z$

$\frac{1}{\bar{z}} = z \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = 1$ d.h. $z \in$ Kreis um 0 mit Radius 1.

Beweis:

Fall 1: $b = 0$, $a = 1$

$z^2 = -c$

- $-c \geq 0$, $z_\pm = \pm\sqrt{-c}$
- $-c < 0$, $z_\pm := \pm i \cdot \sqrt{c}$
- $c \notin \mathbb{R}$:

$\gamma := -c$

$z^2 = \gamma$

x^2+y^2

$|z|^2 = |\gamma|$

$z = x + iy$

$\gamma = \alpha + i\beta$

$x^2 - y^2 + 2ixy = \alpha + i\beta$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha \\ 2ixy = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = \alpha + |\gamma| \geq 0 \\ 2y^2 = |\gamma| - \alpha \geq 0 \end{cases}$$

$|\underbrace{\operatorname{Re}\gamma}_{=|\alpha|}| \leq |\gamma|$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{|\gamma|+\alpha}{2}}$, $y = \pm\sqrt{\frac{|\gamma|-\alpha}{2}}$

- $\beta \geq 0 \Rightarrow x, y$ gleiches Vorzeichen: $++$, $--$
- $\beta < 0 \Rightarrow$ $+-$, $-+$

$\beta > 0 \quad z_\pm = \left(\sqrt{\frac{|\gamma|+\alpha}{2}} + i\sqrt{\frac{|\gamma|-\alpha}{2}}\right)$

$\beta < 0 \quad z_\pm = \pm\left(\sqrt{\frac{|\gamma|+\alpha}{2}} - i\sqrt{\frac{|\gamma|-\alpha}{2}}\right)$

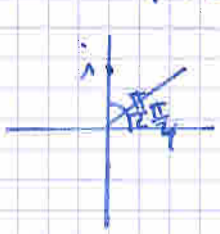
Beispiel: $z^2 = 3i$

$z = x + iy$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \qquad x^2 = \frac{3}{2} = y^2$$

$\beta > 0\ (3) \Rightarrow z_\pm = \sqrt{\frac{3}{2}}\,(1+i)$

$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}(1+i)\right)^2 = \frac{3}{2}(1+i)^2 = \frac{3}{2}(1+2i-1) = 3i$



Beispiel: $z^3 = 1$

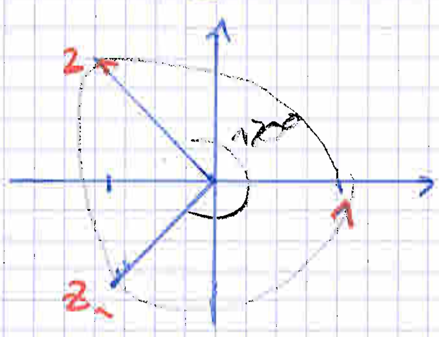
$z = 1$ ist Lösung

$z^3 - 1 = (z-1)(z^2 - z + 1)$

$z^2 + z - 1 = 0$

$z_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, $\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$



$az^2 + bz + c = 0$

Fall $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

$a\bar{z}^2 + b\bar{z} + c = 0$

z Lösung $\Leftrightarrow$ $\bar{z}$ Lösung $\longrightarrow$ z, $\bar{z}$ $z \notin \mathbb{R}$

Fundamentalsatz der Algebra

Jede Gleichung $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$ mit $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$ besitzt in $\mathbb{C}$ mindestens eine Lösung

Laplace 1795

Gauss 1799 (Funktionentheorie) } Beweise

Argand 1814

Satz: Es gibt keine Anordnung auf $\mathbb{C}$, die mit der Körperstruktur verträglich ist. D.h. $\mathbb{C}$ kein angeordneter Körper

Definition: Eine Folge die gegen 0 konvergiert (d.h. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$) heisst <u>Nullfolge</u>

$\lim a_n \to a \Leftrightarrow b_n = a_n - a$ ist eine Nullfolge

Satz: Konvergiert eine Folge, so ist ihr Grenzwert eindeutig bestimmt.

Beweis: Widerspruchsbeweis

Seien a und a' Grenzwerte der gleichen Folge a_n.

wenn beliebig gewählt

$a \neq a'$.

$\varepsilon := 1/3\,|a - a'| > 0 \Rightarrow \exists N: |a_n - a| < \varepsilon \;\forall n > N$

nur zur Vereinfachung der Rechnung

$\exists N': |a_n - a'| < \varepsilon \;\forall n > N'$

$M := \max\{N, N'\} \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \wedge |a_n - a'| < \varepsilon \;\forall n > M$

$3\varepsilon = |a - a'| = |(a - a_n) + (a_n - a')| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| < 2\varepsilon \;\forall n > M$ ↯

Dreiecksungleichung

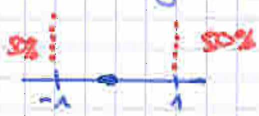
geht nicht da ε streng positiv

$3\varepsilon < 2\varepsilon \Rightarrow \varepsilon < 0$ ↯

Beispiel: von nicht konvergenten Folgen

$a_n = (-1)^n$

$1, -1, 1, -1, \dots$



Übung:

$a_n = n$

Geometrische Auffassung

Sei $K_\varepsilon(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \varepsilon\}$

die Kreisscheibe mit Mittelpunkt a und Radius ε

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\exists N \in \mathbb{R}$ s.d. $a_n \in K_\varepsilon(a) \;\forall n > N$

$\Updownarrow$

$\lim a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ liegen nur endlich viele a_n ausserhalb von $K_\varepsilon(a)$.

Notation: Sei $A(n)$ eine Familie von Aussagen $n \in \mathbb{N}$

Man sagt:

- Fast alle $A(n)$ sind richtig, falls $A(n)$ ist nur für endlich viele n falsch, oder $A(n)$ gilt für fast alle n.

$\Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{R} : A(n)$ richtig $\forall n > N$

2). $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{R}: |\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon \ \forall n > N$

Fall $a \geq 1$: $x_n := \sqrt[n]{a} - 1$

Bernoulli $x_n > 0$, trivial $x_n = 0$

$$a = (1+x_n)^n \geq 1 + n x_n > n \cdot x_n$$

$x_n < \frac{a}{n}$ es genügt $\frac{a}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{a}{\varepsilon}$

$N := \frac{a}{\varepsilon}$ $\quad \forall n > N \quad \underset{|\sqrt[n]{a}-1|}{\overset{\shortparallel}{x_n}} < \frac{a}{n} < \varepsilon$ $\quad \square$

Fall $a < 1$ folgt später.

3). $|\sqrt[n]{n} - 1|$

Binomialentwicklung

$x_n := \sqrt[n]{n} - 1 > 0$

$$n = (1+x_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_n^k$$

$$\geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$$

$(n-1) \geq \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 \Rightarrow x_n^2 \leq \frac{2}{n}$

d.h. $x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}$ es genügt: $\sqrt{\frac{2}{n}} < \varepsilon$

$\frac{2}{n} < \varepsilon^2 \iff n > \frac{2}{\varepsilon^2} =: N$

$\forall n > N: \underset{|\sqrt[n]{n}-1|}{\overset{\shortparallel}{x_n}} < \varepsilon$

4). zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{R}: |q^n| < \varepsilon: \forall n > N$

5). im Buch S. 43

<u>Rechenregeln</u>

1). Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen

$a_n \to a$ und $b_n \to b$

Dann: a). $a_n + b_n \to a + b$

b). $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$

c). Ist $b \neq 0$, dann $\exists k: b_n \neq 0 \ \forall n > k$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

c). $b_n \to b \neq 0$

Sei $\eta = 1/2 |b| > 0$

$b_n \to b$: $\exists K : |b_n - b| < \eta \quad \forall n > K$

$b = b - b_n + b_n$

$\underset{\overset{\|}{2\eta}}{|b|} \leq |b - b_n| + |b_n| < \eta + |b_n|$

$\Rightarrow b_n > \eta = \frac{|b|}{2} > 0 \quad \forall n > K$

d.h. $b_n \neq 0$

Fall 1: $a_n = 1 \; \forall n$

zuzeigen: $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b_n}$

$b_n \to b \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \underset{\geq K}{N} : |b_n - b| < 1/2 \, \varepsilon |b|^2 \quad \forall n > N$

$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n||b|} < 1/2 \, \varepsilon \frac{|b|}{|b_n|} < 1/2 \, \varepsilon^2 = \varepsilon \quad \forall n > N$

Allg Fall: $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim a_n \cdot \frac{1}{b_n} \overset{(b)}{=} \underset{\text{1-Fall}}{\lim a_n} \cdot \lim \frac{1}{b_n}$
$= a \cdot \frac{1}{b}$

$\lim \sqrt[n]{a} = 1 \quad \forall a > 0$,

$a < 1$

$b = \frac{1}{a}$

$\lim \sqrt[n]{a} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{b}} = 1$

14.10.08

Regel II: $a_n \to a$ Dann

	Beweisidee:
(i) $\lvert a_n \rvert \to \lvert a \rvert$	$\lvert \lvert a_n \rvert - \lvert a \rvert \rvert \leq \lvert a_n - a \rvert$
(ii) $\overline{a_n} \to \overline{a}$	$\lvert \overline{a_n} - \overline{a} \rvert = \lvert a_n - a \rvert$
(iii) $\mathrm{Re}\, a_n \to \mathrm{Re}\, a$	$\lvert \mathrm{Re}\, a_n - \mathrm{Re}\, a \rvert \leq \lvert a_n - a \rvert$
(iv) $\mathrm{Im}\, a_n \to \mathrm{Im}\, a$	$\lvert \mathrm{Im}\, a_n - \mathrm{Im}\, a \rvert \leq \lvert a_n - a \rvert$

Korollar 1: $a_n \in \mathbb{R} \; \forall n$

$a_n \to a$

Dann ist $a \in \mathbb{R}$.

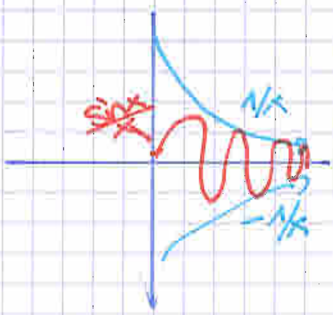
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[q]{n^s} = 1 \quad s>0,\ s\in\mathbb{Q}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = \max\{a,b\} \quad a,b \geq 0$

} im Buch

$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$: $-1 \leq \sin n \leq 1 \quad \forall n$

$\underbrace{-\frac{1}{n}}_{\to 0} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}$



Definition: Zwei Folgen (a_n) und (b_n) heissen asymptotisch gleich und man schreibt $\boxed{a_n \simeq b_n}$ falls

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Bemerkung: $a_n \to a \Rightarrow b_n \to a$
$b_n \to b \Rightarrow a_n \to b$ wenn $a_n \simeq b_n$

Beweis: • $a_n \to a$ $\quad c_n := \frac{a_n}{b_n} \to 1$

$$b_n = \frac{a_n}{c_n} \xrightarrow{\text{Regel}} \frac{a}{1} = a$$

• $b_n \to b$ $\quad c_n = b_n c_n \xrightarrow{\text{Regel}} b \cdot 1 = b$

$a_n \simeq b_n \Rightarrow c_n$ und b_n konvergieren oder a_n und b_n konvergieren nicht.

Beispiel: • $a_n = (-1)^n \sqrt[n]{n}$, $b_n = (-1)^n$ } beide konvergieren nicht aber $a_n \simeq b_n$

denn $\frac{a_n}{b_n} = \sqrt[n]{n} \to 1$

• $a_n = n^2 + n$, $b_n = n^2$ } konvergieren beide nicht.

$\frac{a_n}{b_n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1 \Rightarrow a_n \simeq b_n$

Satz: Jede beschränkte monotone Folge konvergiert.
- Ist (a_n) monoton wachsend; $\lim a_n = \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$
- Ist (a_n) monoton fallend; $\lim a_n = \inf\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$

Beweis. $A := \{a_n\}$ A beschränkt
$\Rightarrow \exists!$ $s = \sup(A)$
$t = \inf(A)$

Fall 1: (a_n) monoton wachsend
- s ist obere Schranke $\Rightarrow a_n \leq s \quad \forall n$
- s ist kl. obere Schranke $\Rightarrow s - \varepsilon$ keine ob. Schr. $\forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists a_N > s - \varepsilon$
(a_n) monoton wachsend
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad a_n > s - \varepsilon \quad \forall n > N$
Durch Induktion zu zeigen
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \ s - \varepsilon < a_n < s + \varepsilon \quad \forall n > N$
$\Rightarrow a_n \to s$ $\square$

Fall 2: monoton fallend: ähnlich wie Fall 1

Rekursiv definierte Folgen:

$$a_{n+1} = f(a_0, a_1 \ldots a_n)$$

- Falls man durch Induktion zeigen kann, dass (a_n) beschränkt und monoton ist, weiss man $a_n \to a$

$$a = \lim a_{n+1} = \lim_{n \to \infty} f(a_0, a_1, \ldots a_n)$$

Beispiel: $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 1}{a_n + 1}$, $a_0 > 0$

Falls $a_n \to a$, dann $a = \lim a_{n+1} = \lim \dfrac{2a_n + 1}{a_n + 1}$

$= \dfrac{2a + 1}{a + 1}$ d.h. $a^2 = 2a + 1$

$$a^2 - a - 1 = 0$$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$a_n > 0 \ \forall n \Rightarrow a = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 +$ goldener Schnitt

Satz von BW auf $\mathbb{R}$:

Jede reelle beschränkte Folge a_n besitzt mind. einen HW, und eigentlich genau einen grössten HW h^* und genau einen kleinsten HW h_*

und es gilt: $\forall \varepsilon > 0$

BW*: $a_n < h^* + \varepsilon$ f.a. n

BW$_*$: $a_n > h_* - \varepsilon$ f.a. n

Beweis der Eindeutigkeit Widerspruchsbeweis

unter der Annahme, dass BW* und BW$_*$ gelten

Sei $h' > h^*$, $\varepsilon_0 := \frac{h' - h^*}{2} > 0$

$\Rightarrow a_n < \underbrace{h^* + \varepsilon}_{= h' - \varepsilon_0}$ f.a. n

$h' - \varepsilon_0$ ...... h' $\Rightarrow$ endlich viele $a_n \in I_{\varepsilon_0}(n)$

$\Rightarrow h'$ kein HW (wegen Def.)

h^* heisst Limes superior $h^* = \limsup_{(n\to\infty)} a_n = \overline{\lim}\, a_n$

h_* heisst Limes inferior $h_* = \liminf_{(n\to\infty)} a_n = \underline{\lim}\, a_n$

15.10.08

Beweis: Intervallschachtelungsprinzip Existenzbeweis

Lemma: (a_n) reell, beschränkt. Dann $\exists$ IS $I_k = [A_k; B_k]$ s.d. $\forall k$

(i) $a_n \in [A_k; B_k]$ ∞ viele n

(ii) $a_n \leq B_k$ f.a. n

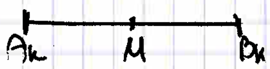
Beweis: $[A_1; B_1]$ s.d. $a_n \in [A_1; B_1]$ $\forall n$

Intervall enthält alle Glieder der Folge a_n

Rekursion: $[A_k; B_k]$ erfüllt i u. ii

$$M := \frac{A_k + B_k}{2}$$

$$[A_{k+1}; B_{k+1}] = \begin{cases} [A_k; M] & \text{falls } a_n \leq M \text{ f.a. n} \\ [M; B_k] & \text{sonst} \end{cases}$$



$[A_k; B_k]$ ist IS

Aber $s_k \geq a_n \quad \forall n \geq k$

↳ $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall k: s_k > h^* - \varepsilon$

$\Rightarrow \forall k \quad s_k \geq h^*$ beschr. monoton fallend $\Rightarrow s \geq h^*$

• BW* : $\forall \varepsilon > 0 \quad a_n > h^* + \varepsilon$ f.a. n

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N: a_n < h^* + \varepsilon \quad \forall n \geq N$

$h^*+\varepsilon$

$n > N \quad S_N = \sup$

$h^* + \varepsilon$ ist obere Schranke für $\{a_n : n \geq N\}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : s_N \leq h^* + \varepsilon$

$\xrightarrow{s_k \text{ mono. fallend}} \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : s_k \leq h^* + \varepsilon \quad \forall k \geq N$

$\Rightarrow s \leq h^*$ ∎

Definition: Sei (a_n) eine Folge komplexer Zahlen. Sei (n_k) eine streng wachsende Folge Indizes

d.h. $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$k \mapsto n_k$

$n_{k+1} > n_k \quad \forall k$

Dann heißt (a_{n_k}) Teilfolge von (a_n)

$a_0, a_1 \ldots$

Bsp. a_{2n} od. a_{n^2} Teilfolgen von a_n

Lemma: Konvergiert (a_n), so konvergieren all ihre Teilfolgen zum genau gleichen Grenzwert.

Beweis: $a_n \to a \quad (a_{n_k})$ Teilfolge

$\exists \varepsilon > 0 \quad |a_n - a| < \varepsilon$ f.a. n

$\Downarrow$

$|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ f.a. k

Bsp: $a_n = (-1)^n$ konvergiert nicht

$a_{2n} \Rightarrow 1$

$a_{2n+1} \Rightarrow -1$

Lemma: Sei (a_n) eine Folge komplexer Zahlen:

h HW von $(a_n) \Leftrightarrow \exists$ Teilfolge von a_n, die gegen a konvergiert

$(a''_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt

(k_ℓ) s.d. $(a''_{n_{k_\ell}})_{\ell \in \mathbb{N}}$ konvergiert

$\Rightarrow (a'_{n_{k_\ell}})$ konvergiert $\Rightarrow (a_{n_{k_\ell}})$ konvergiert

(ii) $(i) \overset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow} (ii)$ $\square$

Satz 1 W.

Definition: Eine Folge (a_n) heisst Cauchyfolge oder Fundamentalfolge falls $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N: |a_n - a_m| < \varepsilon \; \forall n > N, \forall m > N$

Satz: (a_n) Cauchyfolge $\Leftrightarrow$ (a_n) konvergiert

Cauchy-Kriterium

Bemerkung: (a_n) ist Cauchyfolge $\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} (a_{n+k} - a_n) = 0 \; \forall k$

Korollar: (a_n) konvergiert $\Rightarrow (a_n)$ Cauchyfolge

Beweis: $a_n \xrightarrow{n \to \infty} a \Rightarrow a_{n+k} \xrightarrow{n \to \infty} a$

$\Rightarrow a_{n+1} - a_n \to a - a = 0$

- (a_n) Cauchy $\Rightarrow (a_n)$ konvergiert ?
  - Falsch auf $\mathbb{Q}$

Bsp: Sei $a_n \subset \mathbb{Q} \; \forall n$

$a_n \to a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Dann ist (a_n) Cauchyfolge auf $\mathbb{Q}$!

aber sie konvergiert nicht auf $\mathbb{Q}$

Beweis des Cauchy-Kriterium

(a_n) reelle od. komplexe Folge

(a_n) ist Cauchyfolge

zu zeigen: (a_n) konvergiert

Lemma: (a_n) Cauchy $\Rightarrow (a_n)$ beschränkt

Beweis: $\exists N: |a_n - a_m| < 1 \; \forall m, n > N$

$\Rightarrow \exists N: |a_n - a_N| < 1 \quad \forall n \geq N$

$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| < 1 + |a_N|$

$s := \max\{|a_0|, |a_1| \ldots |a_{N-1}|, 1 + |a_N|\}$

$|a_n| \leq s \;\; \forall n$

$\square$

- auf $\mathbb{C}$ gelten 2). und 3).

  2) $\Rightarrow$ 3).

  3). $\Rightarrow$ 2). Cauchy-Krit $\Rightarrow$ bes. Folgen besitzen HP

$\mathbb{C}$ ist ein vollständiger Körper

d.h. Cauchyfolgen konvergieren

Die uneigentliche Konvergenz

Definition: Sei (a_n) eine reelle Folge. Man sagt:

$\lim a_n = +\infty$

(a_n konv. gg ∞)

wenn $\forall K \exists N : a_n > K \quad \forall n > N$

$\lim a_n = -\infty$ wenn: $\forall K \exists N : a_n < K \quad \forall n > N$

Beispiel: $a_n = n$

$\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} (-n) = -\infty$

$a_n = (-1)^n$ konvergiert nicht

$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ mit Ordnungsrelation

$x < +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$ angeordnete Menge

$x > -\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$ erweiterte Zahlengerade kein Körper!

$-\infty < +\infty$

$+\infty \cdot 0 = ?$

$+\infty + (-\infty) = ?$

Definition: $(a, +\infty] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x > a\} = (a, +\infty) \cup \{+\infty\}$

$[-\infty, a) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x < a\}$

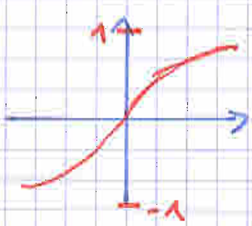
Umgebungen $\pm\infty$

$a_n \to \pm\infty \Leftrightarrow$ Jede Umgebung $\pm\infty$ f. a. a_n enthält. $\Leftrightarrow \sigma(a_n) \to \pm 1$

d.h. $a_n \to \pm\infty \Leftrightarrow \frac{a_n}{1+|a_n|} \to \pm 1$

$\sigma : \overline{\mathbb{R}} \to [-1; 1]$

$$\sigma(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+|x|} & , x \in \mathbb{R} \\ 1 & , x = +\infty \\ -1 & , x = -\infty \end{cases}$$



Funktionen (Kap 4)

$f: X \to \mathbb{C}$ komplexartige Funktionen

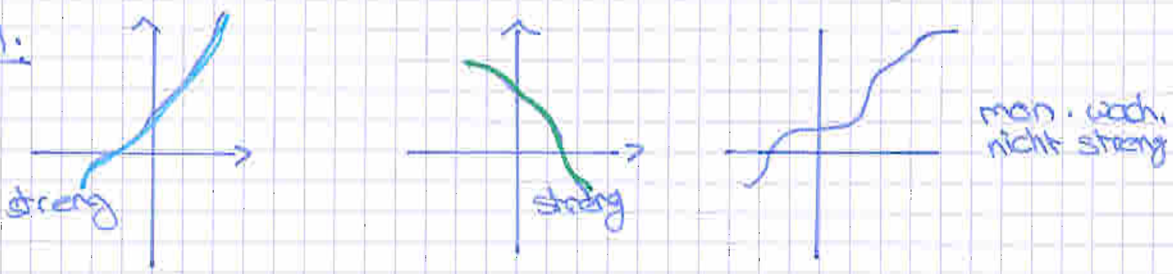
$\searrow \mathbb{R}$ reellartige Funktionen

- Definitionsbereich
- Wertebereich
- Graph

Definition: $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, heißt

- streng monoton wachsend, falls $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \overset{<}{\leq} f(x_2)$
- streng monoton fallend, falls $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \overset{>}{\geq} f(x_2)$
- monoton falls, f monoton wachsend oder fallend.

Beispiel:



Bemerkung: f streng monoton $\Rightarrow f$ injektiv

$\Rightarrow \exists !$ Umkehrfunktion

$g: f(x) \Rightarrow x$

Punktweise Definitionen

$f, g: X \to \mathbb{C}$

$f+g$, fg, $\frac{f}{g}$, $\bar{f}$, $|f|$, $f \circ g$, $\operatorname{Im} f$ $\leftarrow$ alle auch $X \to \mathbb{C}$

$(g(x) \neq 0 \ \forall x)$

$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$

$(fg)(x) := f(x) \cdot g(x)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$\bar{f}(x) := \overline{f(x)}$

$(\operatorname{Re} f)(x) := \operatorname{Re} f(x)$

$(\operatorname{Im} f)(x) := \operatorname{Im} f(x)$

Korollar 1: Ein Polynom vom Grad $n > -\infty$ hat höchstens n Nullstellen.

Korollar 2: Stimmen zwei Polynome vom Grad $\leq n \; (> -\infty)$ an $n+1$ Stellen überein, so sind die Polynome gleich

Korollar 3: Sei $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots$

$g = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1}$

Dann sind $\underbrace{f(x) = g(x) \; \forall x}_{f=g \text{ als Funktion}} \Leftrightarrow \underbrace{a_i = b_i \; \forall i}_{f=g \text{ als Polynom}}$

Korollar 3 gilt auf unendliche Körper z.B. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Die allgemeinen Binomialkoeffizienten

$z \in \mathbb{C}, \; k \in \mathbb{Z}$

$$\binom{z}{k} := \begin{cases} \frac{z(z-1)\dots(z-k+1)}{k!} & ; k > 0 \\ 1 & ; k = 0 \\ 0 & ; k < 0 \end{cases}$$

Bemerkung 1: $z, k \in \mathbb{N}, \; k \leq z$ sind gewöhnliche Binomialkoeffizienten

Bemerkung 2: $z \in \mathbb{N}, \; k > z \quad \binom{z}{k} = 0$

Motivation: $(1+x)^s = \sum_{k=0}^{N} \binom{n}{k} x^k \quad \forall N \geq s$

$= \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} \binom{n}{k} x^k$

Bemerkung: $\underset{|x|<1}{(1+x)^z} = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} \binom{z}{k} x^k \leftarrow$ Reihe

Beispiel: $\binom{z}{0} = 1 \quad \binom{z}{1} = z \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \dots$ Approximation der $\sqrt{}$

Additionssatz der Binomialkoeffizienten

$\forall s, t \in \mathbb{C}, \; \forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \binom{t}{n-k} = \binom{s+t}{n} \quad *$$

Beispiel: $\frac{z}{1+z} = \frac{z-z^2}{1-z^2}$

Definition: α heisst Pol der rationalen Funktion R, wenn es eine Darstellung $R = \frac{f}{g}$ gibt mit:

1) $f(\alpha) \neq 0$
2) $g(\alpha) = 0$

(auch n-facher Pol)
α ist Pol der n-ten Ordnung, falls α eine n-fache Nullstelle von g ist.
d.h. $g(z) = (z-\alpha)^n \cdot h(z) \quad h(z) \neq 0$

Lemma der Abspaltung eines Hauptteils:

Ist α ein n-facher Pol von R, dann $\exists!$ Zerlegung $R = H + R_0$ so dass:

1). R_0 besitzt keinen Pol in α.
2). $H(z) = \frac{\alpha_n}{(z-\alpha)^n} + \frac{\alpha_{n-1}}{(z-\alpha)^{n-1}} + \dots + \frac{\alpha_2}{(z-\alpha)^2} + \frac{\alpha_1}{(z-\alpha)}$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $\alpha_n \neq 0$

Hauptteil von R

Beweis durch Induktion in Königsberger

Auf $\mathbb{C}$: $R = \frac{f}{g}$

Fundamentalsatz der Algebra
$\Rightarrow g(z) = (z-\alpha_1)^{n_1}(z-\alpha_2)^{n_2} \dots (z-\alpha_s)^{n_s}$

α_i = Nullstellen $i = 1, \dots, s$
n_i = Vielfachheit von α_i

Annahme: $f(\alpha_i) \neq 0 \ \forall i$

Sei H_i Hauptteile von R an α_i.

d.h. $H_i = \frac{b_{in_i}}{(z-\alpha_i)^{n_i}} \frac{b_{in_2}}{(z-\alpha_i)^{n-1}}$

Dann: $\boxed{R = H_1 + H_2 + \dots + H_s + q}$ $\quad q(\alpha_i) \neq 0 \ \forall i$ und q hat keine Pole.
$\hookrightarrow q$ ist Polynom

q heisst Polynomanteil von f.

Reihen

" Summe von unendlich vielen Summanden"

Beispiel: • Paradoxon von Zeno

$A \quad | \quad || \quad B$ unendlich viele Schritte

$|AB| = 1$

$s_i :=$ Länge nach den i-ten Schritt

$s_1 = 1/2$

$s_2 = 1/2 + 1/4$

$s_3 = 1/4 + 1/4 + 1/8$

$s_i = 1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots = 1$

- Sei (a_n) Folge

$$s_n := a_0 + a_1 + a_2 + \ldots a_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Induktiv: $\begin{cases} s_0 := a_0 \\ s_{n+1} := s_n + a_{n+1} \end{cases}$

- Die Folge (s_n) heisst unendliche Reihe oder Reihe mit Gliedern a_k.
- Jeder Term s_n heißt Partialsumme.

Bemerkung: Jede Folge (s_n) kann man als Reihe betrachten mit Gliedern $a_k := s_k - s_{k-1}$

- Konvergiert die ~~Folge~~ (s_n), so heisst ihr Grenzwert die Summe oder der Wert der Reihe

man schreibt:

$$s_n \to s \qquad s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Bemerkung: $\sum_{k=0}^{\infty}$ hat zwei Bedeutungen

1). $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist eine abstrakte Notation für die Folge (s_n) der Partialsumme

2). Falls die Reihe konvergiert, bezeichnet $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ auch die Summe $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Bemerkung: • $\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2}$, $z=-1$ ' $\sum(-1)^k = 1/2$ " Falsch, da -1 nicht als z zugelassen.

2). Die harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Lemma: $\sum \frac{1}{k} = +\infty$

Beweis: $S_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n = 1 + 1/2 + \dots + 1/2^r + \dots + 1/n$

Sei $r \in \mathbb{N}$: $n \geq 2^r$

$S_n \geq 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/2^r \overset{Ass.}{=}$ ~~$1 + (1/2 + 1/3) + (1/4 + 1/5 + 1/6) + \dots (\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \dots \frac{1}{2^k+2^k})$~~

nicht weiter geschr. siehe Buch S. 60°

$= 1 + 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) + \dots + $ 2^k Glieder

$2^0 \quad 2^1 \quad 2^2$

$\left(\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \dots + \frac{1}{2^k+k}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{r-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^r}\right) \geq 1 + \frac{r}{2}$

2^k-Gl

• $\left(\frac{1}{2^k+1} + \dots + \frac{1}{2^k+2^k}\right) \geq 2^k \frac{1}{2^{k+1}} = 1/2$

jeder Summand $\geq$ ~~dem~~ $\frac{1}{2^{k+1}}$

S. 60°

3). $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$

Beweis: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

$= (1 - \cancel{1/2}) + (\cancel{1/2} - \cancel{1/3}) + (\cancel{1/3} - \cancel{1/4}) + \dots + (1/n - 1/(n+1)) = 1 - \frac{1}{n+1}$

Durch Induktion $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

$s_n \to 1$

• Notwendige Konvergenzbedingung:

Konvergiert $\sum a_k$, so ist (a_k) eine Nullfolge.

Beweis: $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$

$S_n \to S$

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$\lim a_n = \lim(S_n - S_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = S - S = 0$

$\sum \left(\frac{1}{(2^{s-1})}\right)$ konvergiert

$\frac{1}{(2^{s-1})} < 1$ für $s > 1$

$$s_n \le \sum_{k=0}^{r-1} \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^k < \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^k = \frac{1}{1-2^{1-s}} \quad \forall n$$

$\Rightarrow$ $\{s_n\}$ ist beschränkt $\Rightarrow$ Reihe konvergiert

$$\boxed{0 < \zeta(s) < \frac{1}{1-2^{1-s}}, \quad s>1}$$

Fall 2: $s \le 1$

$$\frac{1}{k^s} \ge \frac{1}{k} \quad \forall k$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^s} \ge \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}$$

Partialsumme der Harmonischen Reihe die divergiert

$\Rightarrow$ s_n unbeschränkt $\Rightarrow$ $\lim s_n = +\infty$ ☒

Man kann $\zeta(s)$ für alle geraden s explizit beschreiben

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \ldots$$

$\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$ nicht berechenbar

Beispiel 2: b-adische Brüche

Sei $b \in \mathbb{N}$ $b \ge 2$ (z.B. $b = 10$)

Der b-adische Bruch mit Ziffern $z_1, z_2 \ldots$ ist

$$\boxed{0,z_1 z_2 \ldots := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{b^k}, \quad z_k \in \{0,1,\ldots,b-1\} \quad \forall k}$$

so kann jede Zahl zw. 0 u. 1 dargestellt werden ($\in \mathbb{R}$)

$\forall z_1 \ldots z_k \in \{0,1,\ldots,b-1\}$

konvergiert die Reihe

$s_n = \sum_{k=0} \frac{z_k}{b^k}$ monoton steigend ≥ 0

zu zeigen: $\{s_n\}$ beschränkt

$z_k \le b-1 \quad \forall k$

$$s_n \le \sum_{k=1}^{n} \frac{b-1}{b^k} = (b-1) \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b^k}$$

$b \ge 2 \Rightarrow \left|\frac{1}{b}\right| < 1$ $\qquad < (b-1)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{b}} - 1\right)$

$$= (b-1)\left(\frac{b}{b-1} - 1\right) = b - b + 1 = 1$$

Konvergenzkriterium von Leibniz

Sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge, dann:

1). $\sum (-1)^n a_n =: s$ konvergiert

2). $|s - \sum_{n=0}^{k} (-1)^n a_n| \le a_{k+1} \quad \forall k$

Beweis:

Fall 1: $a_n = 0$ f. a. n

dann $\sum (-1)^n a_n$ endliche Summe

Fall 2: andernfalls, d.h.

$\exists N: \ a_n > 0 \ \forall n > N \quad \Rightarrow a_n > 0 \ \forall n$

- $S_k = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n a_n$

$S_{k+1} = S_k + (-1)^{k+1} a_{k+1}$

$= S_{k-1} + (-1)^k a_k + (-1)^{k+1} a_{k+1}$

$\Rightarrow S_{k+1} - S_{k-1} = (-1)^k \underbrace{(a_k - a_{k+1})}_{\ge 0 \text{ da monoton fallend}} \quad \begin{cases} \ge 0 & k \text{ gerade} \\ \le 0 & k \text{ ungerade} \end{cases}$

$S_1 \le S_3 \le S_5 \le S_7 \dots$

$\dots S_6 \le S_4 \le S_2 \le S_0$

$S_{2k+1} = S_{2k} + (-1)^{2k+1} a_{2k+1} = S_{2k} - \overset{\ge 0}{a_{2k+1}}$

$\Rightarrow S_{2k+1} \le S_{2k} \quad \forall k$

$I_k := [S_{2k+1}; S_{2k}]$

$S_{2k-1} \le S_{2k+1} \le S_{2k} \le S_{2k-2} \quad \forall k$

$\Rightarrow I_k \subset I_{k-1} \quad \forall k$

$|I_k| = S_{2k} - S_{2k+1} = a_{2k+1} \to 0$

(1) und (2) (I_n) Intervallschachtelung

Sei $s \in I_k \ \forall k$

zu zeigen 2).

$s \in I_k \quad S_{2k+1} \le s \le S_{2k}$

$S_{2k} - s \le |I_k| = a_{2k+1} \le a_{2k}$

$s - S_{2k+1} \le |I_k| = a_{2k+1}$

d.h. $\forall r \ |s - S_r| \le a_r \Rightarrow 2).$

$a_r \to 0 \Rightarrow S_r \to s$

Wir können auch annehmen:

$N \geq p$ dann $\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \overset{\text{Dreiecksungl.}}{<} \sum_{k=m}^{n} |b_k|$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists N : \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon \quad \forall n \geq m > N$

$\Rightarrow \sum a_n$ konvergiert

$$\left|\sum_{n=p}^{\infty} a_n\right| = \left|\lim_{k\to\infty} \sum_{n=p}^{k} a_n\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\sum_{n=p}^{k} a_n\right| \overset{\text{Ordnung}}{\leq} \lim_{k\to\infty} \sum_{n=p}^{k} |a_n|$$
$$\leq \lim \sum_{n=p}^{k} |b_n| = \sum_{n=p}^{\infty} |b_n|$$

$\boxtimes$

Beweis 2).: ist die Kontraposition von 1). $\boxtimes$

Beispiel: $\sum \frac{1}{n^s} = +\infty \quad s \leq 1$

Beweis: $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^s}$ $\quad \frac{1}{n^s} \geq \frac{1}{n} \quad \forall n$

$\sum \frac{1}{n} = +\infty \overset{2)}{\Rightarrow} \sum \frac{1}{n^s} = +\infty$

Definition: Eine Reihe $\sum a_n$ heisst absolut konvergent, wenn $\sum |a_n|$ konvergiert.

Bemerkung: absolut konvergent $\Rightarrow$ konvergent
$\cancel{\Leftarrow}$

Beweis: $b_n = a_n$

$\cancel{\Leftarrow}$ Bsp: $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ konvergiert aber nicht absolut!

Definition: Sei $R(P) = \sup\{r \in \mathbb{R} / P(a)\}$ konvergent

$R(P)$ heisst Konvergenzradius von der Potenzreihe P

Kurz schreibt man einfach R

Bemerkung: $R = \infty$ ist erlaubt

Satz: Sei R der Konvergenzradius zu P dann:

a). $\forall |z| < R$ konvergiert P absolut

b). $\forall |z| > R$ divergiert $P(z)$

Beweis: Sei $|z| < R$, Sei $r : |z| < r < R$

Nach Definition von R konvergiert $P(r)$

$\overset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow}$ $P(z)$ konvergiert absolut

Lemma: $P(z_0)$ konvergiert $\Rightarrow$ $P(z)$ konvergiert für $|z| < |z_0|$

b). $|z| > R$ wäre $P(z)$ konvergent, so wäre auch

$P(r)$ konvergent $\forall R < r < z$ ↯ zur Def. von Supremum

Formeln zur Berechnung des Konvergenzradius

- $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

1): Cauchy - Hadamard

$R = \frac{1}{L}$, $L := \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$

2). Euler: konvergiert $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to q$ so ist $R = \frac{1}{q}$

Notation: $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$ ($\Rightarrow$ Reihe konv. für alle z)

Beweis1: Sei $z \neq 0$

dann $L^* := \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$

- $|z| < \frac{1}{L} \Rightarrow L^* < 1 \Rightarrow P(z)$ konvergiert
- $|z| > \frac{1}{L} \Rightarrow L^* > 1 \Rightarrow P(z)$ divergiert
- Sei nun $L = \infty \Rightarrow L^* = \infty \Rightarrow P(z)$ divergiert $\forall z \neq 0$
  $\Rightarrow R = 0$
- Sei $L = 0 \Rightarrow L^* = 0 \Rightarrow P(z)$ konvergiert $\forall z \Rightarrow R = \infty$

$\boxed{3}$

5
6

Satz: Cauchy

Annahme: 1). $\sum a_n$ konvergiert absolut

2). $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ (konvergent)

3). $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$ (konvergent)

4). c_n ist definiert wie in Definition

dann: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert und hat den Wert $A \cdot B$

Beweis: kürze ab: $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$

$C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$, $\beta_n = B_n - B$

rechne aus: $C_n = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \dots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0) =$

$a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \dots + a_n B_0 =$

$= a_0 (B + \beta_n) + a_1 (B + \beta_{n-1}) + \dots + a_n (B + \beta_0)$

$= A_n B + \underbrace{(a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \dots + a_n \beta_0)}_{\gamma_n}$

Aus Voraussetzung: $A_n \to A \Rightarrow A_n B \to A B$

Falls wir zeigen: $\gamma_n \to 0$ sind wir fertig, denn $C_n \to AB$

Behauptung: $\gamma_n \to 0$

Beweis: wir wissen: 1). $\sum |a_k| = \alpha \in \mathbb{R}$

2). $\beta_n \to 0$ (weil $B_n \to B$)

3). $a_n \to 0$ (weil $\sum a_n$ konv.)

Sei $\varepsilon > 0$, dann $\exists N$ s.d. $|\beta_n| < \varepsilon \; \forall n \geq N$ (aus 2).)

$|\gamma_n| \leq |\beta_0 a_n + \dots + \beta_N a_{n-N}| + |\beta_{N+1} a_{n-N-1} + \dots + \beta_n a_0|$

$\leq |\beta_0 a_n + \dots + \beta_N a_{n-N}| + \varepsilon \cdot \sum_{k=0}^{n-N-1} |a_k|$

$\leq | \quad " \quad | + \varepsilon \cdot \alpha$ (wegen 1).)

halte N fest und wegen 3). $\exists N_1 \geq N$ s.d. $|\beta_0 a_n + \dots + \beta_N a_{n-N}| \leq \varepsilon \; \forall n \geq N_1$

$\Rightarrow |\gamma_n| \leq \varepsilon + \varepsilon \cdot \alpha \quad \forall n \geq N_1 \geq N$

$= (1 + \alpha)\varepsilon$

dies gilt $\forall \varepsilon > 0$, damit $\gamma \to 0 \Rightarrow A_n B \to AB$ $\boxed{}$

Anwendungen zu Potenzreihen

Sei $f(z) = \sum a_j z^j$, $g(z) = \sum b_k z^k$ } Beide absolut konvergent in z

Dann $f(z) g(z) \overset{CP}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n$

Wähle $N_0 = \max\{n_k \mid 0 \leq k \leq N\}$

Dann $\{1, 2, \ldots N\} \subset \{\tau(0), \tau(1), \ldots, \tau(N_0)\}$

wir betrachten $s_n' - s_n = \sum_{j=0}^{n} a_{\tau(j)} - \sum_{j=0}^{n} a_j$

[Sei nun $n > N_0$ und $n > N$]

und wir sehen $s_n' - s_n$ keinen Terme $a_1, a_2, \ldots a_N$ enthält

$|s_n' - s_n| \leq \sum_{\{j : \tau(j) > N\}}^{n} |a_{\tau(j)}| \leq \sum_{j=N+1}^{n} |a_j| \leq \varepsilon$ (aus CK) $\forall n \geq \max\{N_0, N\}$

$|s_n' - s| \leq \underbrace{|s_n' - s_n|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|s_n - s|}_{<\varepsilon}^{(s = \lim s_n)} < 2\varepsilon \Rightarrow s_n' \to s$

Wähle $N_2 \geq N_1$ s.d. $|s_n - s| < \varepsilon$ $\forall$

3 11.11.08

$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$
$g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i$
Falls f und g absolut konvergieren;

$f(z) g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \qquad c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$

vom letzten Mal

$B_s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} z^n$, $s \in \mathbb{C}$ Binomialreihe

$|z| < 1 \Leftarrow$ Reihe konvergiert absolut $\forall s$

$B_s(z) \cdot B_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \binom{t}{n-k} = \binom{s+t}{n}$

$\Rightarrow B_s(z) \cdot B_t(z) = B_{s+t}(z)$, $|z| < 1$ ist wieder Binomialreihe

Korollar: $\forall s \in \mathbb{Q}, \forall x \in (-1; 1)$
$B_s(x) = (1+x)^s$ [eigentlich $s \in \mathbb{R}$]

Beweis: Fall 1: $s \in \mathbb{N}$ ✓ Binomialformel
Fall 2: $s \in \frac{p}{q}$, $p > 0$, $q > 0$

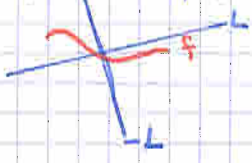
$(B_{\frac{p}{q}}(x))^q = \underbrace{B_{\frac{p}{q}}(x) \cdot B_{\frac{p}{q}}(x) \cdot \ldots \cdot B_{\frac{p}{q}}(x)}_{q\text{-mal}} = B_{\underbrace{\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \ldots \frac{p}{q}}_{q\text{-mal}}}(x) = B_p(x) \quad p \in \mathbb{N}$

$\overset{\text{aus Fall 1}}{=} (1+x)^p$

11.11.08
(4)

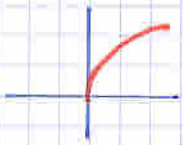
Definition 3: $f: D \to \mathbb{C}$ heisst Lipschitz-stetig, wenn $\exists L \geq 0$ s.d. $\forall x, y \in D$: $|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|$. L heisst Lipschitz-konstante.

geometrisch: $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$



f bleibt im Kegel

Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$, $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ nicht Lipschitz-stetig



- $L < 1$ so heisst f eine Kontraktion

Lemma: Ist $f: D \to \mathbb{C}$ Lipschitz-stetig, so ist f in D stetig.
Bemerkung: Stetigkeit $\not\Rightarrow$ Lipschitz-stetigkeit. Beispiel $f(x) = \sqrt{x}$

Beweis: Fall 1: $L \neq 0$

$\forall \varepsilon > 0$: $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$

$|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \overset{\text{L-stet.}}{\leq} L \cdot |x - x_0| < L \cdot \delta = \varepsilon$

Fall 2: $L = 0 \Rightarrow f$ konstant

Korollar: Folgende Funktionen sind L-stetig und deshalb stetig:

a). $f(z) = az + b$, $\forall a, b \in \mathbb{C}$

b). $f(z) = |z|$

$f(z) = \bar{z}$ $\qquad L = 1$

$f(z) = \operatorname{Re} z$

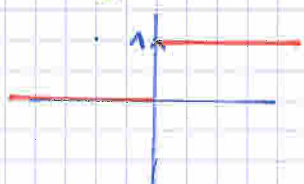
$f(z) = \operatorname{Im} z$

Beweis: $|f(z) - f(w)| = |a(z-w)| = |a||z-w|$ $\quad L = |a|$

Beispiele von nicht stetigen Funktionen:

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$



in 0 nicht stetig.

Definition: $f: D \to \mathbb{C}$ heißt folgenstetig in einem $a \in D$, wenn $\forall$ Folgen (x_n) mit $x_n \in D \ \forall n$, die gegen a konvergiert, konvergiert $(f(x_n))$ gegen $f(a)$.

$$f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

Folgenkriterium für Stetigkeit

f stetig in $a \Leftrightarrow f$ folgenstetig in a

Beweis: "$\Rightarrow$" Sei f in x_0 stetig

$\overset{\text{Def}}{\Longrightarrow}$ $\varepsilon > 0 \ \exists$ D-Umg. U von a s.d. $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Sei (x_n), $x_n \in D \ \forall n$ $x_n \to a$

Also $x_n \in U$ f.a. n

$\Rightarrow |f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$ f.a. n

$\Rightarrow f(x_n) \to f(a)$ $\square$

"$\Leftarrow$" Kontraposition

Sei f nicht stetig in a

$\forall \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in D$ s.d. $|x - a| < \delta$ und $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$

Sei $\delta = \frac{1}{n}$, sei $x_n \in D$ s.d. $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ u. $|f(x_n) - f(a)| > \varepsilon$

$|x_n - a| < \frac{1}{n} \ \forall n \Rightarrow x_n \to a$

$|f(x_n) - f(a)| > \varepsilon \ \forall n \Rightarrow f(x_n) \not\to f(a)$

$\Rightarrow f$ nicht stetig in a $\square$

Regel I: Seien $f, g: D \to \mathbb{C}$ stetig in $x_0 \in D$
dann sind $f+g$ und fg stetig in x_0
Falls $g(x_0) \neq 0$ ist $\frac{f}{g}$ in einer Umgebung von x_0 stetig

Lemma: Sei $g: D \to \mathbb{C}$ stetig in $x_0 \in D$, dann $\exists$ D-Umgebung V von x_0 s.d. $|g(x)| \geq \frac{1}{2} |g(x_0)| \ \forall x \in V$

Insbesonders: $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow g$ keine Nullstellen in V besitzt.

Regel III: Sei $f:[a;b] \to \mathbb{C}$ stetig und injektiv.
Sei $B = f([a;b])$
Sei $g: B \to [a;b] \subset \mathbb{R}$ ihre Umkehrfunktion
dann ist auch g stetig.

Beweis: Sei $x_0 \in [a;b]$
$y_0 = f(x_0)$

zu zeigen: g in y_0 folgenstetig.
$g(y_0) = x_0$
Sei (y_n) Folge $y_n \in B$: $y_n \to y_0$
Sei $x_n = g(y_n)$
zu zeigen: $x_n \to x_0$
(x_n) Folge in $[a;b]$ beschränkt
Sei x_{n_k} eine konvergente Teilfolge
$\xi = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$

$$f(\xi) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) \overset{f \text{ stetig}}{=} \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} \underset{\overset{\shortparallel}{f(g(y_{n_k}))}}{y_{n_k}} = y_0$$

$\overset{f \text{ injektiv}}{\Rightarrow} \xi = x_0$

Jede konvergente Teilfolge von (x_n) konvergiert gegen x_0.
wenn Folge beschr. $\to x_n \to x_0$

Beispiel: $f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}$, stetig, $f: \underset{\forall b}{[0;b]} \xrightarrow{\text{injektiv}} \mathbb{R}$

$g(x) = \sqrt[k]{x}$ $\quad g: [0;b^k] \to \mathbb{R}$ stetig $\forall b$

Korollar: $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt[k]{x}$ stetig

Korollar 2: Sei $f: D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0, $f(x_0) > 0$
dann ist $\sqrt[k]{f}$ in einer Umgebung von x_0 definiert und stetig in x_0

Approximation von Funktionen und Potenzreihen

$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ Polynom

$\lim_{n\to\infty} f_n(z)$ stetig?

Im Allg.: Folgen von Funktionen

<u>Lemma:</u> Eine Potenzreihe $\sum a_n z^n$ mit Konvergenzradius R konvergiert normal in jeder Kreisscheibe $K_r(0) := \{ z \in \mathbb{C} : |z| < r \}$ mit $r < R$

<u>Beweis:</u> $f_n(z) = a_n z^n$

$\| f_n(z) \|_{K_r(0)} = |a_n| \, \| z^n \|_{K_r(0)} = |a_n| \cdot r^n$

$\| z^n \|_{K_r(0)} = \sup |z^n| = r^n \, , \, z \in K_r(0)$

$r < R \overset{\text{def}}{\Longrightarrow} \sum a_n r^n$ konvergent

<u>Bemerkung:</u> Es kann passieren, dass die Reihe in $K_R(0)$ nicht normal konvergiert.

<u>Beispiel:</u> $\sum z^n \; , R = 1$

$\sup\limits_{z \in K_1(0)} |z^n| = 1$

$\sum \| z^n \|_{K_1(0)} = \sum 1^n = +\infty$

<u>Im Allg:</u> K_R konvergiert die Potenzreihe absolut $K_r, r < R$ konvergiert sie normal

<u>Lemma:</u> Konvergiert $\sum f_n$ normal, so konvergiert sie punktweise.

<u>Beweis:</u> Majorantenkriterium

<u>Satz:</u> Konvergiert $\sum f_k$ normal auf D und ist f_k stetig in $x_0 \in D \; \forall k$, so ist $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ auch stetig in x_0

<u>Beweis:</u> $\forall \varepsilon > 0$

normal Konvergenz $\Rightarrow \exists n : \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \| f_k \|_D < \frac{1}{3} \varepsilon$

$|f(x) - f(x_0)| = \left| \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x_0) \right| =$

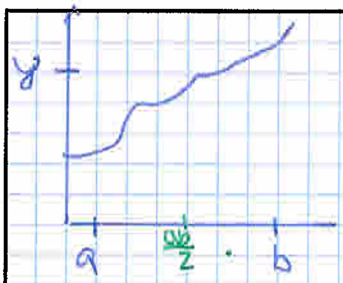
$= \left| \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) + \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x_0) - \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x_0) \right|$

$\leq \left| \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x_0) \right| + \left| \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x_0) \right| + \left| \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x_0) \right| \quad (*)$

$\left| \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \overset{\text{Majorante}}{\leq} \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \| f_k \|_D < \frac{1}{3} \varepsilon \quad \forall x \in D$

$|f_k(x)| \leq \| f_k \|_D \quad \forall n$

$(*) < \left| \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} \right| + \frac{2}{3} \varepsilon$



offensichtlich ist $[a_n, b_n]$ Intervallschachtelung

$\exists c$ welches in allen $[a_n; b_n]$ enthalten ist

$a_n \to c \quad b_n \to c$

$f(a_n) \le y \ \forall n$

$f(b_n) \ge y \ \forall n$ f stetig

$f(c) = f(\lim a_n) \overset{\le}{=} \lim f(a_n) \le y \le \lim f(b_n) = f(\lim b_n) = f(c)$

$\Rightarrow f(c) = y$ $\square$

<u>Korollar:</u> Die Gleichung $x^n = \alpha$ mit $\alpha \ge 0$ hat eine Lösung. $n \ge 1$

<u>Beweis:</u> $f(x) = x^n - \alpha$ stetig $n \ge 1$

$f(0) = -\alpha \le 0$

$f(1+\alpha) = \underbrace{(1+\alpha)}^n - \alpha \ge 1 + n\alpha - \alpha = 1 + (n-1)\alpha \ge 0$

$\Rightarrow$ f hat Nullstelle in $[0, 1+\alpha]$

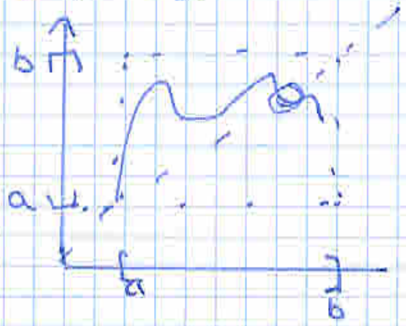
<u>Fixpunktsatz:</u>

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

$f([a,b]) \subseteq [a,b]$

dann besitzt f einen Fixpunk

d.h. $\exists c \in [a,b] : f(c) = c$



<u>Beweis:</u> $g(x) := f(x) - x$ stetig

$g(a) = f(a) - a \ge 0$

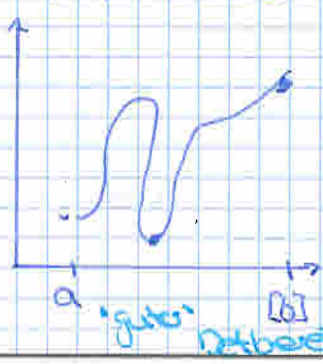
$g(b) = f(b) - b \le 0$

$\Rightarrow$ g besitzt eine Nullstelle c in $[a,b]$

$f(c) - c = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$ $\square$

<u>Stetige Funktionen auf kompakten Mengen</u>

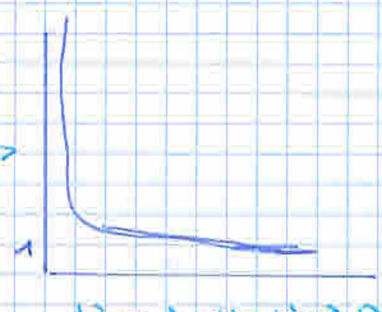
Stetige Funktionen auf 'guten' Definitionsbereichen besitzen immer ein Maximum und Minimum.



'guter' Def.bereich

$f(0,\infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{x}$



hier 'schlechter' Def.bereich

Mengen ist wieder abgeschlossen.

$(A_i)_{i\in I}$ A_i abg. $\forall i\in I \Rightarrow \bigcap_{i\in I} A_i$ abg.

Beweis: i). Induktion

• $k=2$ A_1, A_2 abgeschlossen

Sei $(p_n) \in A_1 \cup A_2$ konvergent $p_n \to p$ p_n nicht nur endlich viele Terme in A_1 und A_2 haben kann

$\Rightarrow \exists$ Teilfolge $(p_{n_k}) \in A_1\ \forall k \Rightarrow p_{n_k} \to p$ u. $p \in A_1$ da abg.

oder $(p_{n_k}) \in A_2\ \forall k \Rightarrow p_{n_k} \to p$ u. $p \in A_2$ da abg.

$\Rightarrow \lim p_n = p \in A_1 \cup A_2$

• $k>2$: $A_1 \cup .. \cup A_k = \underbrace{\underbrace{(A_1 \cup .. \cup A_{k-1})}_{\text{nach Vorausetz. abg}} \cup \underbrace{A_k}_{\text{abg}}}_{\Rightarrow \text{ abg.}}$ $\square$

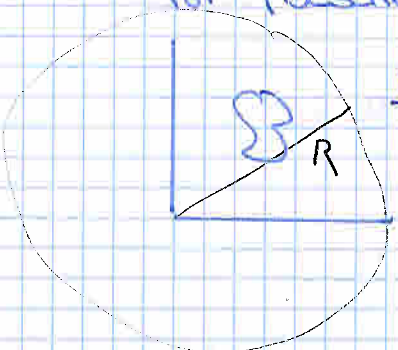
ii). $p_n \to p \wedge p_n \in \bigcap_{i\in I} A_i$

$\Rightarrow p_n \in A_i\ \forall i\in I \Rightarrow \lim p_n \in A_i\ \forall i \in I \Leftrightarrow \lim p_n \in \underset{i\in I}{A_i}$ $\square$

Bemerkung: Die Vereinigung unendlich vieler abgeschlossener Mengen muss nicht abgeschlossen sein

$A_n = [\frac{1}{n}, 1]$ $n\in\mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = (0,1)$

Definition: $K \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ~~heißt~~ kompakt falls K abgeschlossen und beschränkt ist (beschränkt: $\exists R > 0\ \forall z\in K\ |z| \le R$)



Beispiel:
- $[a,b]$ kompakt
- $[a,\infty]$ nicht kompakt
- $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ nicht kompakt.

Lemma: i). Endliche Vereinigungen kompakter Mengen sind kompakt

ii) Der Durchschnitt beliebig vieler kompakter Mengen ist kompakt.

iii) A abg. K kompakt $\Rightarrow A \cap K$ kompakt.

Satz von Maxima und Minima:

Sei $f: K \to \mathbb{R}$ stetig und K kompakt, dann nimmt f Maxima und Minima in K an. d.h. $\exists \xi_1, \xi_2 \in K: \forall z \in K$ $f(z) \le f(\xi_1)$

$f(z) \ge f(\xi_2)$

Beweis: $f(K) \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt

$\Rightarrow \sup f(K), \inf f(K)$ existieren

$a_n \in f(K) \quad a_n \to \sup(f(K))$

$b_n \in f(K) \quad b_n \to \inf(f(K))$

da $f(K)$ abgeschlossen $\Rightarrow$ $\max f(K)$ und $\min f(K)$ existieren $\square$

19.11.08

Anwendungen:

1. K kompakt, $x \notin K$, $K \subset \mathbb{C}$

$d_x: \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \; y \mapsto |y-x|$

$f = d_x|_K : K \to \mathbb{R}$

1. d_x stetig: $|f(y) - f(x)| = ||y-x| - |z-x||$

$|z-x| = |(z-y)+(y-x)| \le |z-y| + |y-x|$

$\Rightarrow |z-x| - |y-x| \le |z-y|$

$|y-x| = |(y-z)+(z-x)| \le |y-z| + |z-x|$

$\Rightarrow |y-x| - |z-x| \le |y-z|$

insgesamt: $\left.\begin{array}{l} |z-x| - |y-x| \le |z-y| \\ |y-x| - |z-x| \le |z-y| \end{array}\right\} \Rightarrow ||z-x| - |y-x|| \le |z-y|$

$\Rightarrow |f(y) - f(z)| = ||y-x| - |z-x|| \le |z-y|$

d.h. $\forall x,y,z \in \mathbb{C}: |z-y| < \varepsilon \Rightarrow |f(y) - f(z)| < \varepsilon$

d.h. $f = d_x|_K : K \to \mathbb{R}$ stetig u. K kompakt

$\overset{\text{Satz}}{\Longrightarrow} \exists m, M \in K: \forall k \in K: |m-x| \le |k-x| \le |M-x|$

$\forall \delta > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, n' \geq N : |x_n - x_{n'}| < \delta$

Abstände zw. Punkten auf Graph werden kleiner u. gehen geg. 0

$\varepsilon = 1/2, \forall \delta > 0\ \exists x, x' \in (0,1] : |x - x'| < \delta$
$: |f(x) - f(x')| = 1 > 1/2$

Satz: Sei K kompakt, $f: K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Funktion auch gleichmässig stetig.

Beweis: ang.: f nicht gleichmässig stetig d.h.:
$\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall \delta > 0 : x, x' \in K : |x - x'| < \delta : |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon_0$
insbesondere: $\delta_n = \frac{1}{n}$ finde x_n, x_n' mit $|x_n - x_n'| < \frac{1}{n}$ und
$|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon_0$
$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$, K beschränkt $\Rightarrow \exists$ konvergente Teilfolge
$(x_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}} \to y \in K$ (K abgeschlossen)

$\lim_{n \to \infty} x_{n(k)} = y \Rightarrow$

$\lim_{k \to \infty} x'_{n(k)} = y$ $\quad (|x_n' - y| \leq \underbrace{|x_{n(k)} - x'_{n(k)}|}_{\leq 1/n(k)\ \to\ 0} + \underbrace{|x_{n(k)} - y|}_{\to\ 0})$

$\lim_{k \to \infty} f(x_{n(k)}) \overset{f \text{ stetig}}{=} f(y) \overset{f \text{ stetig}}{=} \lim_{n \to \infty} f(x'_{n(k)})$ ↯

Widerspruch zu $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$(\Rightarrow |\lim_{k \to \infty} f(x_{n(k)}) - \lim f(x'_{n(k)})| \geq \varepsilon_0)$

Bemerkung: Satz vom Minimum $\Rightarrow$ Satz (Fundamentalsatz der Algebra): Jedes Polynom vom Grad ≥ 1 mit komplexen Koeffizienten hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.
($\mathbb{C}$: $\mathbb{R}$ & $\sqrt{-1}$ dazugegeben, $x^2 + 1 = 0$ hat Nullstelle)
Beweis: Königsberger S. 92 f.

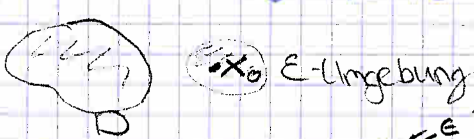
Stetige Fortsetzung & Grenzwert von Funktionen

$f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \notin D$

Frage: 1. gibt es eine Funktion $F: D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ stetig mit $F|_D = f$?
2. falls ja, wie viele verschiedene F gibt es?

jedes solche F wird stetige Fortsetzung von f in x_0 genannt.

Warum ist $F(x)$ bei $x = x_0$ stetig? x_0 kein HP $\Rightarrow$
$\exists\, \tilde{\varepsilon} > 0 : (\tilde{\varepsilon}\text{-Umgebung von } x_0) \cap D = \emptyset$
$\{z : |z - x_0| < \tilde{\varepsilon}\}$



$\varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall_{\in D \cup \{x_0\}} |x - x_0| < \delta : |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$
$\delta = \tilde{\varepsilon} : |x - x_0| < \tilde{\varepsilon} \ \& \ x \in D \cup \{x_0\} \Rightarrow x = x_0 :$
$|F(x) - F(x_0)| = |F(x) - F(x_0)| = 0 < \varepsilon$

<u>Fall 2:</u> x_0 ist HP von D

<u>Lemma:</u> Sei x_0 HP von D, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es höchstens eine stetige Fortsetzung von f in x_0.

<u>Beweis:</u> x_0 HP von D $\Rightarrow \exists$ Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$
ang.: $F : D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ stetig & $F|_D = f$
$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \overset{F|_D = f}{=} \lim_{n\to\infty} F(x_n) \overset{F \text{ stetig}}{=} F(x_0)$

$\Rightarrow F(x_0)$ festgelegt durch f ☐

<u>Definition:</u> Sei x_0 HP von D, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig
Man sagt: "f hat in x_0 den Grenzwert $\underset{\in \mathbb{R}}{a}$" $\Leftrightarrow \exists F :$
$D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ stetig $F|_D = f$, $F(x_0) = a$

<u>Bemerkung:</u> $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, $f(x) \to a$ für $x \to x_0$, f konvergiert für $x \to x_0$ gegen a.

25.11.08

$f : D \to \mathbb{C}$ $\quad x_0$ HP in D

Fortsetzung: $F : D \cup \{x_0\} \to \mathbb{C}$

$$F(x) : \begin{cases} f(x) & q \in D \setminus \{x_0\} \\ a & \cancel{x} = x_0 \end{cases}$$

F heißt die stetige Fortsetzung von f in x_0, falls f stetig ist

In diesem Fall: $\boxed{\begin{array}{l} a = \lim_{x\to x_0} f(x) \\ a \text{ ist Grenzwert von } f \text{ für } x \text{ gegen } x_0 \end{array}}$

$$(1+x)^s = B_s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{s}{k} x^k$$

$$\frac{B_s(x) - 1}{x} = \sum_{k \geq 1} \binom{s}{k} x^{k-1}$$ ← Reihe konvergiert absolut in $(-1; 1)$
← stetige Fortsetzung von $f(x) = \frac{(1+x)^s - 1}{x}$

$\overset{\shortparallel}{F(x)} \to$ stetig in $(-1; 1)$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists$ punktierte Umgebung U^* von x_0 s.d. $\forall x \in U^*$ gilt: $|f(x) - a| < \varepsilon$

Rechenregeln

I: $f(x) \to a$, $g(x) \to b$ für $x \to x_0$

$$\left.\begin{array}{l} i) \; f+g \to a+b \\ ii) \; f \cdot g \to a \cdot b \\ iii) \; \frac{f}{g} \text{ für } b \neq 0 \to \frac{a}{b} \end{array}\right\} x \to x_0$$

Beweis: i) F stetige Fortsetzung von f in x_0

G " " von g in x_0

$\Rightarrow F+G$ " " von $f+g$ in x_0

und $(F+G)(x_0) = F(x_0) + G(x_0) = a+b$

II: $D \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} \mathbb{C}$

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ \in HP}} f = a^{\in E}$, g in $a \in E$ stetig

Dann: $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = g(a)$

Korollar: $f(x) \to a$ für $x \to x_0$ so:

$\operatorname{Re} f(x) \to \operatorname{Re} a$

$\operatorname{Im} f(x) \to \operatorname{Im} a$

$\bar{f}(x) \to \bar{a}$

$|f(x)| \to |a|$

Insbesonders: $f: D \to \mathbb{R}$, $\lim f = a \Rightarrow a \in \mathbb{R}$

III: $f \to a$, $g \to b$ $x \to x_0$, $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in U^*$ von x_0

$\Rightarrow a \leq b$

Beweis: F stetige Fortsetzung von f in x_0

G " " " g in x_0

$G - F \geq 0 \quad \forall x \in U^*$

$\Rightarrow F(x_0) - G(x_0) \geq 0$

Einseitige Grenzwerte

Sei x_0 HP in $D \subset \mathbb{R}$

$D_+ := D \cap (x_0; +\infty)$

$D_- := D \cap (-\infty; x_0)$

Sei $f: D \to \mathbb{C}$

Definition 1). f hat in x_0 einen rechtsseitigen Grenzwert a, wenn $f|_{D_+}$ in x_0 den Grenzwert a hat.

In diesem Fall schreibt man: $\lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x) = a = f(x_0^+)$

f hat in x_0 einen linksseitigen Grenzwert a, wenn $f|_{D_-}$ in x_0 den Grenzwert a hat

In diesem Fall schreibt man: $\lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x) = a = f(x_0^-)$

$f(x_0^+) = a$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ s.d. $\forall x \in D$ mit • $|x - x_0| < \delta$ • $x > x_0$ gilt $|f(x) - a| < \varepsilon$

$f(x_0^-) = a$

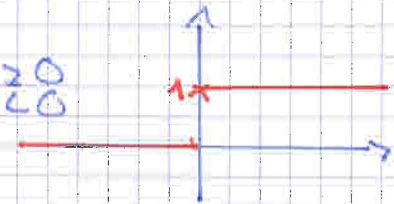
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ s.d. $\forall x \in D$ mit • $|x - x_0| < \delta$ • $x_0 > x$ gilt $|f(x) - a| < \varepsilon$

2). Ist $x_0 \in D$ und $f(x_0^+) = f(x_0)$, so sagt man, dass f in x_0 rechtsseitig stetig ist.

Ist $x_0 \in D$ und $f(x_0^-) = f(x_0)$, so sagt man, dass f in x_0 linksseitig stetig ist.

Beispiel: $D = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$

$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$



$f(0) = 1$

$f(0^+) = 1 = f(0) \Rightarrow$ rechtsseitig stetig

$f(0^-) = 0 \neq f(0)$

Satz: Sei $f: (a; b) \to \mathbb{R}$ beschränkt und monoton, dann besitzt f einseitige Grenzwerte $\forall x_0 \in [a; b]$.

Beweis: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{a_n x^n} \overset{\text{Reduktionsf.}}{=} \lim\limits_{\xi\to 0} \frac{P(\frac{1}{\xi})}{a_n \frac{1}{\xi^n}} = \frac{1}{a_n} \lim\limits_{\xi\to 0} \xi^n (a_n \frac{1}{\xi^n} + \ldots + a_0)$

$= \frac{1}{a_n} \lim\limits_{\xi\to 0} (a_n + a_{n-1}\xi + \ldots + a_0 \xi^n) = \frac{1}{a_n} \cdot a_n = 1$ ☐

Satz: Sei $f: (c;+\infty) \to \mathbb{R}$ ($(-\infty, c)$), beschränkt, monoton, dann besitzt f in $\pm\infty$ den Grenzwert.

Beweis: $d \in (c;\infty)$, $d > 0$

$\varphi: (0; 1/d) \to \mathbb{R}$

$\varphi(\xi) = f(1/\xi)$

φ beschränkt monoton

$\Rightarrow \varphi$ besitzt einseitige Grenzwerte für $\forall x_0 \in [0; 1/d]$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{\xi \downarrow 0} \varphi(\xi) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ☐

Cauchy-Kriterium

Sei $f: (c, +\infty) \to \mathbb{C}$. Dann besitzt f in $+\infty$ den Grenzwert $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N: |f(x) - f(x')| < \varepsilon \quad \forall x, x' > N$

Notation: $+\infty$ ist HP von $D \subset \mathbb{R}$, wenn D von oben nicht beschränkt ist.

$-\infty$ ist HP von $D \subset \mathbb{R}$, wenn D von unten nicht beschränkt ist.

Uneigentliche Konvergenz

Definition: Sei $f: D \xrightarrow{\subset \mathbb{R}} \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ist HP von D.

f hat in x_0 den uneigentlichen Grenzwert $\pm\infty$, wenn $\forall k$ s.d. $\exists$ punktierte Umgebung von x_0 s.d. $f(x) \gtrless k \quad \forall x \in U^*$

Rechenregeln $x \to x_0$

a). $\frac{1}{f(x)} \to 0$, $f(x) \gtrless 0 \Rightarrow f(x) \to \pm\infty$

b). $|f(x)| \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \to 0$

c). $f(x) \to +\infty$, $\underbrace{g(x) \geq A}_{\text{von unten beschr.}} \Rightarrow f + g \to +\infty$

d). $f(x) \to +\infty$, $g(x) \geq A > 0 \Rightarrow f \cdot g \to +\infty$

Ferner gilt: $f(z) = \exp(cz) \quad \forall z$, deshalb ist f stetig in $\mathbb{C}$.

Beweis: • $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f(z) = f\left(n\frac{z}{n}\right) = f\Big(\overbrace{\frac{z}{n}+\frac{z}{n}+\dots\frac{z}{n}}^{n\text{-mal}}\Big) \overset{(1)}{=} \underbrace{f\left(\frac{z}{n}\right)f\left(\frac{z}{n}\right)\dots f\left(\frac{z}{n}\right)}_{n\text{-mal}} = \left(f\left(\frac{z}{n}\right)\right)^n$$

$\Rightarrow$ konstante Folge $\forall z$

$$\Rightarrow f(z) = \lim_{n\to\infty}\left(f\left(\frac{z}{n}\right)\right)^n$$

f ist durch ihre Werte in eines Umgebung von 0 bestimmt

• $f(0) = ?$

$1) \Rightarrow \underbrace{f(0+0)}_{=f(0)} = f(0)f(0)$

$f(0) = 0$ od. $f(0) = 1$

Wäre $f(0)=0$, so wäre $\nexists \lim_{z\to 0} \frac{f(z)-1}{z}$

$\Rightarrow f(0) = 1$

• $f(0)\cdot f(z) = f(0+z) = f(z) \quad \forall z$

Wäre $f(0)=0$ so wäre $f(z)=0 \ \forall z$ ↯

$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-1}{z} = \lim_{z\to 0} -\frac{1}{z}$ ↯

• $\boxed{f(z) = \lim_{n\to\infty}\left(f\left(\frac{z}{n}\right)\right)^n} \quad z \neq 0$

$z_n := \left(f\left(\frac{z}{n}\right)-1\right)^n$

d.h. $f\left(\frac{z}{n}\right) = 1 + \frac{z_n}{n}$

$f(z) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n$, $\lim_{n\to\infty} z_n = z\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{z}{n}\right)-1}{z/n} =$

$= z\lim_{n\to\infty}\frac{f(w_n)-1}{w_n} = z\lim_{w\to 0}\frac{f(w)-1}{w} = cz \quad \left(w = \frac{z}{n}\right)$

$\boxed{\lim_{n\to\infty} z_n = cz} \overset{\text{Fund.}}{\Rightarrow} \boxed{f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(cz)^k}{k!} = \exp(cz)}$

Fundamentallemma: Sei (w_n) Folge mit $w_n \to w$, dann

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{w_n}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k}{k!}$$

Eigenschaften von exp z:

- $\exp(-z)\cdot\exp(z) = \exp 0 = 1$

$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l}\cdot\ \exp z \neq 0 \quad \forall z\in\mathbb{C}\\ \cdot\ (\exp z)^{-1} = \exp(-z)\end{array}}$

$e := \exp 1$

$\boxed{\begin{array}{l} e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\\ e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\end{array}}$ $\Rightarrow e\in\mathbb{R}$

Satz: $e\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Lemma: $\forall r\in\mathbb{Q}: \exp r = e^r$

Beweis: 1). $r\in\mathbb{N}$

$\exp r \overset{E_4}{=} (\exp 1)^r = e^r$

2). $r \in \frac{p}{q} > 0$

$p>0, q>0$

$(\exp r)^q \overset{E_4}{=} \exp(qr) = \exp p \overset{1}{=} e^p > 0$

$\exp r = \sqrt[q]{e^p} = e^{p/q} = e^r$

3). $r\in\mathbb{Q}, r<0$

$\exp r = \frac{1}{\exp(-r)} \overset{2}{=} \frac{1}{e^{-r}} = e^{r}$

$-r>0$

Annahme: $\exp z > 0 \quad \forall z\in\mathbb{Q}^+$

$\sum \frac{r^k}{k!} > 0 \quad r>0$

Definition: $\forall z\in\mathbb{C}\ \ e^z := \exp z$ „analytische Fortsetzung"

$\exp|_{\mathbb{R}}$

$\cdot\ \mathbb{Q}\to\mathbb{R}$

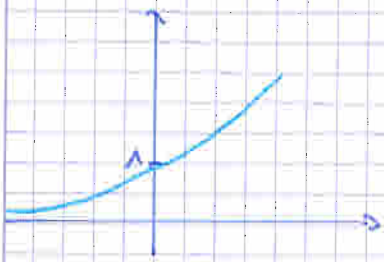
$r\mapsto e^r \quad \forall x\in\mathbb{R}$: HP von $\mathbb{Q}$

$\exp x$, $x\in\mathbb{R}$ stetige Fortsetzung von e^r

Satz: a). $\forall x\in\mathbb{R}; \exp x\in\mathbb{R}_*^+$

b). $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_*^+$ ist streng monoton wachsend

c) $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_*^+$ ist bijektiv



Satz von Wachstum:

$\forall n \in \mathbb{N}$: 1). $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\exp x}{x^n} = +\infty$

2). $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n \exp x = 0$

Beweis 1). $x > 0$

$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots$

$> \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad \forall n$

$\frac{\exp x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!} \xrightarrow{x \to \infty} + \infty$

2). $y = -x$

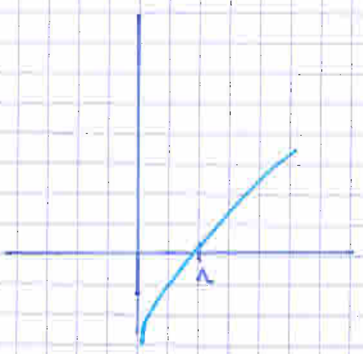
$\exp x = \exp -y = \frac{1}{\exp y}$

$y \to +\infty$

wie 1).

$\exists!$ Umkehrabbildung $\ln: \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ sie heisst natürlicher Logarithmus

$x = e^y \Leftrightarrow y = \ln x$ (log statt ln)



stetige Funktion

Satz: 1) $\ln(xy) = \ln x + \ln y \quad \forall x, y > 0$

2). $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Beweis: 1). $\exp \ln(xy) = x \cdot y = \exp(\ln x)\exp(\ln y) = \exp(\ln x + \ln y)$ ☐

2). sei (x_n) Nullfolge, $y_n := \ln(1 + x_n)$

$\Rightarrow$ y_n ist Nullfolge da ln stetig ist

$\lim\limits_{n \to \infty} \ln(1+x_n) \overset{\text{stetig}}{=} \ln(\lim\limits_{n \to \infty}(1+x_n)) = \ln 1 = 0$

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \mapsto x^\lambda$, $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}$
$\,\shortparallel$
$\exp \lambda \ln x$

$\lambda = a \in \mathbb{R}$: $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^a$

- $\lim\limits_{x\to\infty} x^a = \begin{cases} +\infty & a>0 \\ 0 & a<0 \end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to 0} x^a = \begin{cases} 0 & a>0 \\ +\infty & a<0 \end{cases}$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0 \quad \forall a>0$

- $\lim\limits_{x\to 0} x^a \ln x = 0 \quad \forall a>0$

Bemerkung: $a>0$: $\lim\limits_{n\to 0} x^a = 0$

Notation: $0^a = 0$, $a>0$

Die Logarithmusreihe

$$L(z) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^n}{4} \cdots$$

$R = 1$

Satz: $x \in (-1;1)$ gilt $\boxed{\ln(1+x) = L(x)}$

Beweis: $B_s(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} z^n$

$B_s(0) = 1$

$B_0(z) = 1 \quad , |z| < 1$

$s \neq 0 \quad \frac{B_s(z) - 1}{s} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s}\binom{s}{n} z^n =: F(s,z)$

zu zeigen: $s \mapsto F(s,z)$ stetig $\forall z$, $|z|<1$

$\Rightarrow \lim\limits_{s\to 0} \frac{B_s(z)-1}{s} = F(0;z)$

$F(s;z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(s,z)$, $f_n(s;z) = \frac{1}{s}\binom{s}{n} z^n$

- f_n stetig
- f_n beschränkt, • $\sum \|f_n\| < \infty$

Trigonometrische Funktionen

Bemerkung: $\overline{e^z} = \overline{\sum \frac{z^n}{n!}} = \sum \frac{\overline{z}^n}{n!} = e^{\overline{z}}$

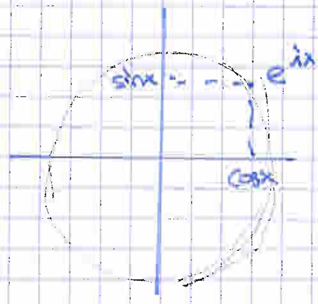
$z = ix,\ x \in \mathbb{R},\ \overline{z} = -ix = -z$

$\Rightarrow \overline{e^{ix}} = e^{-ix} = \frac{1}{e^{ix}}$

$\Rightarrow |e^{ix}| = e^{ix} \cdot \overline{e^{ix}} = 1$

$\mathbb{R} \to S^1$

$x \mapsto e^{ix}$



$\cos x := \operatorname{Re} e^{ix}$

$\sin x := \operatorname{Im} e^{ix}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \end{aligned}}$$

$|e^{ix}| = 1$

$\quad \| $

$|\operatorname{Re} e^{ix}|^2 + |\operatorname{Im} e^{ix}|^2$

$\Rightarrow \boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$

Verallgemeinerung:

$$\forall z \in \mathbb{C}: \boxed{\begin{aligned} \cos z &:= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \\ \sin z &:= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow \boxed{e^{iz} = \cos z + i \sin z} \\ &\Rightarrow \boxed{\cos^2 z + \sin^2 z = 1} \end{aligned}$$

Im Allg. $\sin z \in \mathbb{C},\ \cos z \in \mathbb{C}$

$e^{i(z+w)} = \cos(z+w) + i\sin(z+w)$

$\quad \|$

$e^{iz} e^{iw} = (\cos z + i \sin z)(\cos w + i \sin w)$

$= (\cos z \cdot \cos w - \sin z \sin w) + i(\cos z \sin w + \sin z \cdot \cos w)$

$$\Rightarrow \boxed{\forall x,y \in \mathbb{R}: \begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{aligned}}$$

$\Rightarrow \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

$x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x$

Korollar 1: $\sin x > 0,\ x \in (0;2]$

Korollar 2: cos fällt streng monoton in $[0;2]$

Beweis: 2). $\cos x - \cos y = -\frac{1}{2} \sin\frac{x+y}{2} \sin\frac{x-y}{2}$

Satz: cos hat genau eine Nullstelle in $[0;2]$

Beweis: • $\cos 0 = +1$

• $\cos 2 < 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{4!} = -\frac{1}{3}$

cos stetig $\overset{ZWS}{\Longrightarrow}$ $\exists$ Nullstelle in $[0;2]$ weil + auf einer Seite u. − auf der anderen

cos streng monoton $\Rightarrow$ $\exists!$ Nullstelle $\xi \in [0;2]$ □

Definition: Man nennt diese Nullstelle $\frac{\pi}{2}$

$\pi := 2\xi$

Bemerkung: • $\boxed{\cos\frac{\pi}{2} = 0}$

$\cos^2\frac{\pi}{2} + \sin^2\frac{\pi}{2} = 1$

$\Rightarrow \sin^2\frac{\pi}{2} = 1$

• $\sin\frac{\pi}{2} > 0 \Rightarrow \boxed{\sin\frac{\pi}{2} = 1}$

• $e^{i\pi} \cdot \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

$e^{i\pi} = i^2 = -1$ $\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$

$\boxed{e^{2\pi i} = 1}$

$$\boxed{\begin{aligned} e^{z + i\frac{\pi}{2}} &= ie^{z} \\ e^{z+i\pi} &= -e^{z} \\ e^{z+2i\pi} &= e^{z} \end{aligned}}$$

e^z besitzt die rein imaginäre Periode $2\pi i$.

Korollar: $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2\pi i k,\ k \in \mathbb{Z}$

Beweis: "$\Leftarrow$": $e^{2\pi i k} = (e^{\pi i})^k = 1^k = 1$.

"$\Rightarrow$": $z := x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$

$|e^{x+iy}| = 1$

$\overset{\shortparallel}{|e^x| \cdot |\underbrace{e^{iy}}_{=1}|} = |e^x| = e^x$

$e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$\Rightarrow$ diese Gleichung hat nur imaginäre Lösungen $z = iy$

$e^{iy} = \cos y + i \sin y = 1$

$\begin{cases} \cos y = 1 \\ \sin y = 0 \end{cases}$

$\sin y = 0 \Leftrightarrow y = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\cos(k\pi) = (-1)^k$

$\overset{\shortparallel}{1} \Rightarrow k = 2s,\ s \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ also k gerade

$\boxed{}$

Satz: Auf $\mathbb{C}$ besitzt $\cos z$ genau die Nullstellen

$z = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z}$

Auf $\mathbb{C}$ besitzt $\sin z$ genau die Nullstellen

$z = k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z}$

Beweis: Für $\sin z$: $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$\sin z = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = e^{-iz}$

$\Leftrightarrow e^{2iz} = 1$

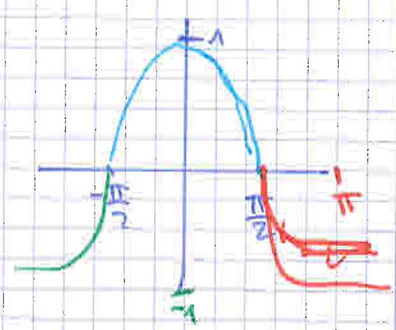
$\Leftrightarrow 2iz = 2\pi i k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow z = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{}$

- $\cos 0 = 1$, $\frac{\pi}{2}$ Nullstelle
- $\cos$ streng monoton fallend in $[0; \frac{\pi}{2}]$
- $\cos$ gerade

$\cos(x + \pi) = -\cos x$



Polarkoordinaten

Sei $z \in \mathbb{C}$, $\exists r,\varphi: z = r e^{i\varphi}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in [0; 2\pi)$

• $z \neq 0 \Rightarrow \exists!\, r, \varphi$

Beweis: • $z = 0$ $r = 0$

• $z \neq 0$; $r = |z|$

$$\frac{z}{r} = \xi + i\eta \quad , \xi, \eta \in \mathbb{R}$$

$$\xi^2 + \eta^2 = 1$$

$$\xi = \cos\varphi$$

$$\eta = \sin\varphi$$

$\underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{\varphi}}$ heisst ein Argument von z.

$$e: \mathbb{R} \to S^1 := \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$$
$$\varphi \mapsto e^{i\varphi}$$

• e ist Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{R}, +) \to (S^1, \cdot)$

• e ist surjektiv

• $\ker e := e^{-1}(1) = \{\varphi \in \mathbb{R} : e(\varphi) = 1\} = 2\pi\mathbb{Z}$

$$S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

Satz: Die Gleichung $z^n = 1, n \in \mathbb{N}^+$, besitzt genau die n Lösungen:

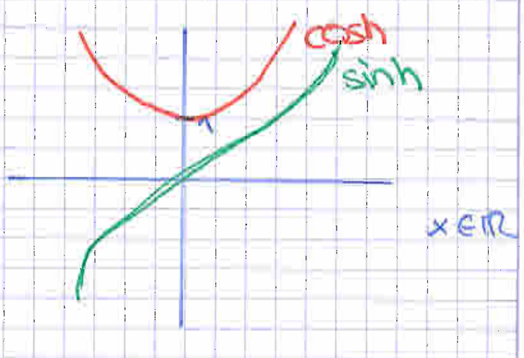
$$\xi_k = e^{\frac{2\pi i k}{n}} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin\frac{2\pi k}{n}$$ Einheitswurzeln

$$k = 1, 2, \dots, n$$

Beweis: • $\xi_k^n = 1 \quad \forall n$

• $\xi_k \neq \xi_l \quad k \neq l$

Definition: Hyperbolische Funktionen



$$\boxed{\begin{aligned} \cosh z &:= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\ \sinh z &:= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \end{aligned}}$$

$$\cosh z = \cos(iz)$$
$$\sinh z = i \sin(iz) \Rightarrow \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

<u>Definition</u>: $f: I \to \mathbb{R}$, heisst in I differenzierbar, wenn sie in jeden $x_0 \in I$ differenzierbar ist.

<u>Satz</u>: a). $Dx^n = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^+$
b). $De^{cx} = ce^{cx}$
c). $Da^x = a^x \ln a$
d) $D \ln x = \frac{1}{x}$

<u>Beweis</u>: b und c sind die Grenzwerte, die wir schon berechnet haben.

z.B. $De^{cx} = \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{e^{c(x+h)}}^{= e^{cx} \cdot e^{ch}} - e^{cx}}{h}$

$= e^{cx} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^{ch} - 1}{ch} = ce^{cx}$

a). $Dx^n = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h^2 + \dots - x^n}{h}$

$= \lim_{h \to 0} nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h + \dots$

$= nx^{n-1}$

10.12.08

MWS: $[a;b] \to \mathbb{R}$ stetig
f differenzierbar in $(a;b)$
$\Rightarrow \quad \exists\, \xi \in (a;b)$ s.d. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

Monotonie-kriterium

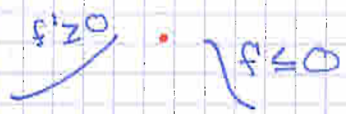
$f:(a;b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar

Dann: $f' > 0 \Rightarrow f$ streng monoton wachsend
$f' < 0 \Rightarrow f$ streng monoton fallend
$\cancel{\Leftarrow}$ i.A. nicht Bsp. $f(x) = x^3$
streng monoton wachsend aber
f' nicht über all >0.

$f' \geq 0 \Leftrightarrow f$ monoton wachsend
$f' \leq 0 \Leftrightarrow f$ monoton fallend

Beweis: '$\Leftarrow$' Definition Ableitung
'$\Rightarrow$' Seien $x_1, x_2 \in (a,b)$
$x_2 > x_1$
f in $[x_1;x_2]$ stetig, differenzierbar
$\overset{MWS}{\Longrightarrow} \underset{x_1<\xi<x_2}{\exists \xi}: f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$

- $f' > 0 \Rightarrow f'(\xi) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ $\square$



Kriterium für Extrema

Sei $f^*: (a;b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar
sei $x_0 \in (a;b)$: $f'(x_0) = 0$
Dann ist x_0 ein

- Maximum, wenn $f' \leq 0$ $(a;x_0)$ und $f' \geq 0$ $(x_0;b)$
- Minimum, wenn $f' \geq 0$ $(a;x_0)$ und $f' \leq 0$ $(x_0;b)$

Satz: sei $f: I \to \mathbb{C}$, differenzierbar
f konstant $\Leftrightarrow \underset{\forall x \in I}{f'(x) = 0}$

10.12.08

Beweis: Seien $x_1, x_2 \in I$, $x_2 > x_1$ $\exists c \in \mathbb{C}: |c| = 1$ s.d.

$|f(x_2) - f(x_1)| = c \cdot (f(x_2) - f(x_1))$

$\varphi(x) := \operatorname{Re}(c f(x))$

$\varphi: I \to \mathbb{R}$, stetig, differenzierbar

$\overset{\text{MWS}}{\Longrightarrow} \exists \xi \in (x_1; x_2)$ s.d. $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = \varphi'(\xi)(x_2 - x_1)$

$\varphi'(x) = \operatorname{Re}(c f'(x)) \leq |c f'(x)|$

$\overset{|c|=1}{=} |f'(x)| \leq L$

$|f(x_2) - f(x_1)| = \varphi(x_2) - \varphi(x_2) \overset{?}{=} (x_2 - x_1)\varphi'(\xi)$

$\leq (x_2 - x_1) \cdot L = |x_2 - x_1| \cdot L$

$\boxed{}$

Definition: Sei $f: I \to \mathbb{C}$ differenzierbar. Ist $f': I \to \mathbb{C}$ stetig, so heisst f stetig differenzierbar

Korollar: Ist $f: I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und ist I kompakt, so ist f Lipschitz-stetig.

Beweis: f' stetig, I kompakt $\Rightarrow f$ besitzt Maxima u. Minima

$\Rightarrow f'$ beschränkt $\Rightarrow$ Schrankensatz $\Rightarrow f$ Lipschitz-stetig

Verallgemeinerung des MWS

Seien $f, g: [a;b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $(a;b)$ differenzierbar.

Sei $g(x) \neq 0$ $\forall x \in (a;b)$. Dann: $\exists \xi \in (a;b)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$ insbes.: $g(b) \neq g(a)$.

Beweis: Wäre $g(b) = g(a)$ gibt es ξ mit $g(x) = 0$.

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$$

F stetig, diff. $\Rightarrow F(\xi) = 0$

$F(a) = F(b)$

L'Hopitalsche Regel

Seien $f, g: (a;b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a;b)$

Gellte eine der Folgenden Bedingungen.

a). $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ für $x \downarrow a$

b). $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ für $x \downarrow a$

Konvergiert $\frac{f'}{g'}$ für $x \downarrow a$, so konvergiert auch $\frac{f}{g}$ und $\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

10.12.08

Sei $f := \sum_{n=0}^{\infty} f_n$, f_n differ. $\forall n$

$f' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n$?

Im Alg: Nein! $DZ \neq ZD$

Bedingungen!

Lemma: Seien $f_n := I \to \mathbb{C}$, in $x_0 \in I$ differenzierbar und

1). $\sum f_n$ konvergiert punktweise in I

2). $\sum f'_n(x_0)$ konvergiert

3) $\forall n$ ist f_n L_n-lipschitz-stetig und $\sum L_n$ konvergiert

Dann ist $f = \sum f_n$ in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x_0)$

Unter diesen Voraussetzungen $DZ = ZD$

Beweis: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ s.d. $\underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} L_n < \frac{\varepsilon}{3}}_{3).}$, $\underbrace{\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} f'_n(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}}_{2).}$

$\forall x \in I \setminus x_0$

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \sum_{n=N+1}^{\infty} f'(x_0)\right| \overset{1)}{=} \left|\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right]\right| \leq$$

$$\sum_{n=0}^{N}\left|\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} - f'_n(x_0)\right| + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\frac{f_n(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|}_{\overset{3)}{\leq} \sum_{n=N+1} L_n} + \sum_{n=N+1}\left|f'_n(x_0)\right|$$

$$\leq \underbrace{\sum_{n=0}^{N}\left|\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} - f'_n(x_0)\right|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} L_n}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} f'_n(x_0)\right|}_{< \frac{\varepsilon}{3}}$$

f_n in x_0 diff $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists$ punktierte Umgebung U^* von x_0

s.d. $\left|\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} - f'_n(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3(N+1)}$

$\boxed{}$

Korollar: Seien $f_n : I \to \mathbb{C}$ differenzierbar und

a). $\sum f_n$ konvergiert punktweise auf I

b). $\sum f'_n$ konvergiert normal

Dann ist f differenzierbar und $f'(x) = \sum f'_n(x)$ $\forall x \in I$