OEFENINGEN NUMERIEKE WISKUNDE

OEFENZITTING 10 (PC): SPLINES

1. Inleiding

Genormaliseerde B-splines worden gedefinieerd aan de hand van de recursiebetrekking

$$N_{i,k}(x) = (x - t_i)\frac{N_{i,k-1}(x)}{t_{i+k} - t_i} + (t_{i+k+1} - x)\frac{N_{i+1,k-1}(x)}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} \ ,$$

met

$$\begin{aligned} N_{i,0}(x) &= 1 \quad \text{als} \quad x \in [t_i, t_{i+1}) \\ N_{i,0}(x) &= 0 \quad \text{als} \quad x \notin [t_i, t_{i+1}) \ . \end{aligned}$$

Genormaliseerde B-splines voldoen aan 4 eigenschappen:

lokaliteit: $N_{i,k}(x) = 0$ als $x \notin [t_i, t_{i+k+1}]$.

positiviteit: $N_{i,k}(x) \geqslant 0$, of, in het bijzonder:

$$\begin{aligned} N_{i,k}(x) &= 0 \quad \text{als} \quad x \notin [t_i, t_{i+k+1}] \\ N_{i,k}(x) &> 0 \quad \text{als} \quad x \in (t_i, t_{i+k+1}) \ . \end{aligned}$$

sommatie tot 1: $\displaystyle\sum_{i=-k}^{n-1} N_{i,k}(x) = 1$ voor $x \in [t_0, t_n)$.

continuïteit: $N_{i,k}(x)$ is C^{k-1}–continu.

2. Matlab commando's

Voor het uitwerken van de opgaven moet je `.m`-bestanden gebruiken die je kan vinden op Toledo.

- `y = veelterm(xi,yi,x)` geeft het resultaat van de evaluatie in `x` van de veelterm die interpoleert in de punten `{xi,yi}`. De in- en uitvoerparameters zijn rijvectoren.
- `y = spline(xi,yi,x)` geeft het resultaat van de evaluatie in `x` van de kubische spline die interpoleert in de punten `{xi,yi}`.
- `sp = spmak(knots,coef)` berekent de spline `sp` (=lineaire combinatie van B-splines) waarvan de knooppunten de elementen zijn van de rij `knots` en de coëfficiënten gespecifieerd worden door de vector `coef`. De graad van de spline wordt zodanig gekozen dat het aantal opgegeven coëfficiënten overeenkomt met het aantal verschillende B-splines van die graad mogelijk op de gegeven knooppunten.
- `fnplt(sp)` tekent de B-splinefunctie `sp` zoals ze werd berekend door `spmak`.

3. Oefeningen

Probleem 1. (Genormaliseerde B-splines) Teken met behulp van de commando's `spmak` en `fnplt` een genormaliseerde B-spline van graad 1, 2 en 3. Een B-spline van graad k is op $k+1$ intervallen verschillend van nul.

Probleem 2. Voer volgend commando uit: `fnplt(spmak(0:10, [1,1,1,1,1,1]))`. Wat is de graad van de spline? Verklaar de verschillende delen op de grafiek.

Probleem 3. (Samenvallende knooppunten) De recursiebetrekking voor genormaliseerde B-splines blijft geldig voor samenvallende knooppunten indien we volgende conventie respecteren:

- indien $t_i = t_{i+1} = \ldots = t_{i+k}$ wordt in de recursiebetrekking de eerste term nul gesteld
- indien $t_{i+1} = t_{i+2} = \ldots = t_{i+k+1}$ wordt de tweede term nul gesteld.

Bepaal en teken met behulp van Matlab $N_{0,2}(x)$ voor:

(1) $t_0 = t_1 < t_2 < t_3$,
(2) $t_0 = t_1 = t_2 < t_3$,
(3) $t_0 < t_1 = t_2 < t_3$.

Wat gebeurt er met de continuïteitseigenschap? Is dit een motivatie om *altijd* niet samevallende knooppunten te nemen? Denk daarbij aan het soort curve dat je wil benaderen. Ga na dat $N_{i,k}(t_i) = 1$ als t_i een meervoudigheid $k+1$ heeft.

Probleem 4. (Veeltermen vs splines) Beschouw de functie $y = \frac{x}{1+x^2}$. Teken deze functie over het interval $[-5,\ 5]$ evenals de veelterm en de kubische spline die interpoleren in de punten $\{i, y(i)\},\ i = -5 : 1 : 5$. Vergelijk. Is dit type curve geschikt voor spline/veeltermbenadering?

Probleem 5. (Convergentiegedrag) Herneem vorige oefening en zet de benaderingsfout van de interpolerende veelterm uit in functie van x over het interval $[-5,\ 5]$, waarbij je de interpolatiepunten equidistant kiest met een tussenafstand van 2, 1 en 0.5. Maak één grafiek met logaritmische y-as. Verklaar. Doe hetzelfde voor de interpolerende kubische spline en vergelijk.

Probleem 6. (Transformatie) Benader de functie $y = 20 \tanh\left(\dfrac{1}{20(x-1)^2}\right)$ over het interval $[0,\ 2]$ met de interpolerende veelterm en de kubische spline door de punten $\{i, y(i)\},\ i = 0 : 0.2 : 2$. Bepaal ook een benadering gebaseerd op de interpolerende veelterm van de getransformeerde curve $\frac{1}{y}$. Vergelijk de drie resultaten.