OEFENINGEN NUMERIEKE WISKUNDE

OEFENZITTING 5 (PC): CONDITIE EN STABILITEIT

Kopieer de nodige bestanden op Toledo naar je working-directory.

Probleem 1. (Vierkantsvergelijking) Gebruik het bestand `vierkant.m` om de wortels van een vierkantsvergelijking te berekenen. Ga na hoe beide algoritmes de wortels berekenen en pas die dan toe op

$$x^2 - bx + 2 = 0,$$

voor $b = 10^7$, 10^8, 10^9. Verklaar de verschillen. Welk algoritme is het nauwkeurigst?

Probleem 2. (Wortel van een complex getal) Maak gebruik van `vierkant.m` om de vierkantswortel $x + iy$ van een complex getal $a + ib$ te berekenen. Hint: $a + ib = (x + iy)^2$ en stel reële en imaginaire delen gelijk aan mekaar.

Schrijf hiervoor een functie `[x1,y1,x2,y2] = cwortel(a,b)` waarbij de output overeenkomt met de verschillende versies van `vierkant.m`. Bereken nu de vierkantswortel van $2 - 3i$, $-2 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^{-3}i$ en $2 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^{-3}i$ en vergelijk het resultaat van beide versies met de output van het Matlab commando `sqrt`. (Noot: de output van `sqrt` heeft altijd een positief reëel deel.) Voor welk getal en voor welke versie krijg je een grote relatieve fout en waarom enkel voor dit getal?

Probleem 3. (Numerieke differentiatie) Schrijf een `.m`-file die de afgeleide van de functie $y = 5e^x$ in 0 benadert met behulp van de volgende differentieformule:

$$f'(0) \approx \frac{f(h) - f(0)}{h}.$$

Reken dit uit voor $h = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$. Zet op een grafiek de fout uit in functie van h en verklaar het gedrag. Daarbij kan het nuttig zijn om logaritmische schalen te kiezen. Welke componenten (benadering, afronding, etc) bij de fout zie je? Hoe zie je van de grafiek dat de bovenstaande formule een eerste orde benadering voor de afgeleide is? Een benadering van orde k betekent:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h^k).$$

Probeer ook eens de formule

$$f'(0) \approx \frac{f(h) - f(-h)}{2h}.$$

Wat is nu de orde van de benadering?

Geef een wiskundig bewijs van je observaties dat gebruik maakt van een Taylorreeksontwikkeling. (Hint: schrijf een ontwikkeling voor $f(x_0 + h)$ en $f(x_0 - h)$.)

Probleem 4*. (Conditieonderzoek: dubbel nulpunt) Beschouw het probleem van het zoeken van de nulpunten van de vierkantsvergelijking

$$x^2 - 2x + t = 0.$$

Onderzoek de conditie m.b.t. fouten op de parameter t. Gebruik `vierkant.m` om voor $t \approx 1$ de nulpunten te berekenen en deze te vergelijken met de nulpunten wanneer je een kleine perturbatie op t aanbrengt. Neem bv. $t_1 = 1 - 1 \cdot 10^{-10}$ en $t_2 = t_1 + 1 \cdot 10^{-14}$. Verklaar de relatieve fouten op de berekende nulpunten. Maak ook een grafiek van het (relatief) conditiegetal en van de nulpunten voor $t \in [0, 1]$. Verklaar de resultaten.

Probleem 5*. (Evaluatie van een functie) Beschouw de functie

$$f(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{x}$$

Evalueer de functie voor x-waarden dicht bij 0. Voor $x = 0$ is de limietwaarde $= 2$.
Schrijf hiervoor een .m-bestand. Gebruik hierbij de functie `fl`.
Evalueer de functie voor verschillende waarden van x en voor een verschillend aantal cijfers in de mantisse. Zoek combinaties waarvoor het fout loopt. Waarom loopt het fout?
We kunnen $f(x)$ eenvoudig herschrijven om zo te vermijden dat we twee getallen van elkaar aftrekken die ongeveer even groot en van hetzelfde teken. Vermits $\frac{1}{2}e^x(1 - e^{-2x}) = \sinh(x)$ geldt:

$$f(x) = \frac{2\sinh(x)}{xe^x}$$

Nu bekomen we wel een nauwkeurig resultaat.