OEFENINGEN NUMERIEKE WISKUNDE

OEFENZITTING 7 (PC): HET OPLOSSEN VAN STELSELS LINEAIRE VERGELIJKINGEN

Voor het uitwerken van de opgaven moet je `.m`-bestanden gebruiken die je kan vinden op Toledo.

1. MATLAB–functies voor deze oefenzitting

Genereren van matrices

- `M = genmat(n)` genereert een matrix $M = [A\ b]$ met A een $n \times n$–matrix en b een $n \times 1$–vector. De matrix A is goed geconditioneerd.
- `M = genmatc(n)` genereert een matrix $M = [A\ b]$ met A een $n \times n$–matrix en b een $n \times 1$–vector. De matrix A is slecht geconditioneerd.

De hierboven genoemde functies genereren een stelsel $Ax = b$, waarvan de oplossingsvector x bestaat uit natuurlijke getallen.

Stelsels oplossen (Cursusboek, Deel I, Hoofdstuk 3)

- `G = gauss1(M)` waarbij $M = [A\ b]$ met A een $n \times n$–matrix en b een $n \times 1$–vector. Dit bevel maakt de matrix
$$\left(\begin{array}{c|c|c} & & 1 \\ A & b & \vdots \\ & & n \end{array}\right)$$
aan en past Gauss–eliminatie toe (Cursusboek, Algoritme 3.4).
- `G = gauss2(M)` analoog als `gauss1` maar met optimale rij–pivotering (Cursusboek, Algoritme 3.5).
- `[Q,R] = qr(M)` berekent een QR-factorisatie van de matrix M.
- `x = asubst(G)` voert achterwaartse substitutie uit op het resultaat van `gauss1` of `gauss2` (`x = asubst(R)` resp. op het resultaat van `qr`), en geeft de oplossing x van het stelsel $Ax = b$.

2. Oefeningen

Probleem 1. (De LU-ontbinding)

(1) Stel
$$A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$
Bereken de LU-ontbinding van A met `[L,U] = lu(A)`. Wat is $L * U$? Geef de Matlab-bevelen om uit L en U de determinant van A te berekenen.

(2) Stel
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 9 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$
Bereken opnieuw de LU-ontbinding van A. Wat merk je op als je de matrices L en U bekijkt? Geef een verklaring voor wat er gebeurd is. (Hint: `doc lu`.)

Probleem 2. (Gauss-eliminatie) Gebruik het bevel `genmat` om een 6×7–matrix $M = [A\ b]$ te genereren. Los het stelsel $Ax = b$ op m.b.v. de functies `gauss1`, `gauss2` en `qr`. Je bekomt dus drie oplossingen voor hetzelfde stelsel. Geef de relatieve fout van de drie oplossingen, indien je weet dat de exacte oplossing een vector met natuurlijke getallen is. Bereken ook de residu's. Verklaar de verschillen. Welke methode(s) zijn onstabiel?

Probleem 3. (Conditie) Genereer m.b.v. het bevel `genmatc` een 6×7–matrix $M = [A\ b]$. Wat is het conditiegetal van de matrix A? Los het stelsel op met de functies `gauss2` en `qr`. Bereken de relatieve fout van de oplossingen en de residus, als je weet dat de exacte oplossing uit natuurlijke getallen bestaat. Vergelijk met de resultaten uit de vorige oefening. Wat is de rol van het conditiegetal van de matrix A?

Probleem 4. (QR-stap) Schrijf een functie `[Q,R]=qrstep(M)`, die een QR-factorisatie berekent van een matrix $M = [A\ B]$ van de volgende structuur:

$$M = \left[\begin{array}{ccccc|ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} & b_{1,1} & \cdots & b_{1,p} \\ 0 & a_{2,2} & & a_{2,n-1} & a_{2,n} & b_{2,1} & & b_{2,p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} & b_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1,p} \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{n,n} & b_{n,1} & \cdots & b_{n,p} \end{array}\right]$$

De implementatie moet gebeuren met maximaal $n-1$ Givens rotaties. Een Givens rotatie kan berekend worden met de standaard Matlab functie `givens`.

Test je algoritme (is Q orthogonaal, R bovendriehoeks en $M = Q * R$?). Vergelijk met het resultaat van de Matlab functie `qr`. Merk op dat dit niet noodzakelijk hetzelfde is, waaruit nogmaals blijkt dat de QR-factorisatie niet uniek is.

Hints:

- `A([1 3],:) = G*A([1 3],:)` past de Givens rotatie G toe op de eerste en derde rij van de matrix A.
- Een matrix M met de bovenstaande structuur kan je bv. genereren met

```
M = triu(rand(n,n+p));
M(n,1:n-1) = rand(1,n-1);
```

Probleem 5*. (QR-factorisatie) Door je algoritme $n-1$ keer toe te passen kan je een QR-factorisatie van een willekeurige $n \times (n+p)$-matrix berekenen. Schrijf zulke routine. Nu heb je een alternatief voor het schema uit je cursus, met hetzelfde aantal Givens rotaties.