

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen</b>	<b>2</b>
1.1 Definition . . . . .	2
1.2 Die einfachsten Formeln . . . . .	3
1.3 Die Formel von Binet . . . . .	3
1.3.1 Die Formel . . . . .	3
1.3.2 Beweis durch Eigenwertrechnung . . . . .	4
1.3.3 Das charakteristische Polynom . . . . .	4
1.3.4 Folgerungen . . . . .	4
1.3.5 Fibonacci-Zahlen mit Matrix-Subskript . . . . .	5
1.4 Fibonacci-Zahlen und Binomial-Koeffizienten . . . . .	6
1.5 Grenzwerte mit Fibonacci-Zahlen . . . . .	7
1.6 Die Inversen der Fibonacci-Zahlen . . . . .	7
<b>2 Zahlentheoretische Eigenschaften der Fibonacci-Zahlen</b>	<b>8</b>
2.1 Der ggT von Fibonacci-Zahlen . . . . .	9
2.2 Die Fibonacci-Folge modulo $n$ . . . . .	10
2.2.1 Die Periode der Fibonacci-Folge modulo $n$ . . . . .	10
2.2.2 Die Periode der Fibonacci-Folge modulo $p$ . . . . .	11
2.2.3 Die Verteilung der Fibonacci-Zahlen modulo $n$ . . . . .	13
2.2.4 Summen von Fibonacci-Zahlen modulo $n$ . . . . .	13
2.3 Primitive Teiler . . . . .	14
2.4 Fibonomial-Koeffizienten . . . . .	15
2.4.1 Definition . . . . .	15
2.4.2 Stern-Konfigurationen mit ggT-Eigenschaft . . . . .	16
2.5 Fibonacci-Zahlen als Quadrat- und Kubikzahlen . . . . .	17
2.6 Die Fibonacci-Zahlen als diophantische Menge . . . . .	17
<b>3 Fibonacci-Polynome und Fibonacci-artige Polynome</b>	<b>18</b>
3.1 Fibonacci-Polynome . . . . .	18
3.2 Fibonacci-artige Polynome . . . . .	19
<b>4 Der Satz von Zeckendorf</b>	<b>19</b>
4.1 Der Satz . . . . .	19
4.2 Zeckendorf- oder Fibonacci-Sequenzen . . . . .	20
<b>5 Fibonacci-Bäume</b>	<b>21</b>
5.1 Der Stammbaum der Kaninchen . . . . .	21
5.1.1 Der Stammbaum eine Drohne . . . . .	22
5.2 Die goldene Sequenz . . . . .	22
5.3 Der Fibonacci-Baum und die Zeckendorf-Darstellung . . . . .	23
<b>6 Fibonacci-Zahlen und Kombinatorik</b>	<b>23</b>
6.1 Als Anzahl der Zerlegungen in 1en und 2en . . . . .	23
6.2 Als Anzahl der Spiegelungen an zwei Glasplatten . . . . .	24
<b>A Leonardo von Pisa und das Liber Abaci</b>	<b>25</b>
<b>B Phyllotaxis</b>	<b>26</b>
B.1 Zählen von Spiralen . . . . .	26
B.2 Divergenzwinkel und Kettenbruchentwicklung . . . . .	26
B.3 Ontogenetische Modelle . . . . .	27

# 1 Grundlagen

## 1.1 Definition

Üblicherweise wird die Erfindung der Fibonacci-Zahlen dem italienischen Mathematiker Leonarda von Pisa, der besser unter dem Namen Fibonacci, der Kurzform von filius Bonacci, bekannt ist, zugeschrieben. In der zweiten Version seines Rechenbuchs „Liber Abacci“ (Buch vom Abacus) – die erste Version ist nicht überliefert – taucht folgende Aufgabe auf:

Jemand setzt ein Paar Kaninchen in einen Garten, der auf allen Seiten von einer Mauer umgeben ist, um herauszufinden, wieviele Kaninchen innerhalb eines Jahre geboren werden. Wenn angenommen wird, daß jeden Monat jedes Paar ein weiteres Paar erzeugt, und daß Kaninchen zwei Monate nach ihrer Geburt geschlechtsreif sind, wie viele Paare Kaninchen werden dann jedes Jahr geboren?

Ist  $F_n$  die Anzahl der Paare nach  $n$  Monaten, so sieht man sofort, daß

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad \text{und} \quad F_0 = 1.$$

Wir dagegen definieren:

**1.1.1. Def.:** Die durch

$$F_0 = 0; \quad F_1 = 1 \quad \text{und} \quad F_{n+1} := F_n + F_{n-1}$$

definierten Zahlen  $F_n$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) heißen „Fibonacci-Zahlen“.

Die ersten Fibonacci-Zahlen sind also

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377.$$

Es gibt natürlich viele Verallgemeinerungen der Fibonacci-Zahlen. Viele der folgenden Sätze kann man z.B. für allgemein linear rekursiv definierte Zahlenfolgen formulieren. Besonders wichtige Verallgemeinerungen oder Abwandlungen sind die Folgenden. Ich selber werde aber in diesem Skript fast ausschließlich Formeln und Sätze behandeln, in denen nur die reinen (normalen) Fibonacci-Zahlen vorkommen, und keine Abwandlungen.

### 1.1.2. Abwandlungen:

- (1) Die durch  $L_0 := 2$ ,  $L_1 := 1$  und  $L_{n+1} := L_n + L_{n-1}$  definierten Zahlen heißen „Lucas-Zahlen“. Zwischen den Fibonacci-Zahlen und den Lucas-Zahlen gibt es viele Zusammenhänge, wie z.B.  $L_{2n} + 2(-1)^{n-1} = 5F_n^2$ . Oft kann man Summen von Fibonacci-Zahlen elegant mit Lucas-Zahlen ausdrücken.
- (2) Die durch  $F_0 := 0$ ,  $F_1 = 1$ ,  $F_2 = 2$  (und  $F_3 = 4$ ) und  $F_{n+1} := F_n + F_{n-1} + F_{n-2} (+F_{n-3})$  definierte Folge heißt „Tribonacci-Folge“ bzw. „Quadranacci-Folge“. (Allgemein sind die Anfangswerte  $F_i = 2^{i-1}$ .)
- (3) In der Rekursionsformel  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$  kann man das „+“ auch als Operationssymbol einer abelschen Gruppe auffassen. Im Abschnitt 2.2 werden wir untersuchen, was passiert, wenn man die Fibonacci-Folge in den endlichen zyklischen Gruppen  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  betrachtet. Die Bedingung, daß die Gruppe kommutativ ist, kann auch noch weggelassen werden: Ist  $G$  eine beliebige Gruppe (oder sogar nur eine Halbgruppe), und  $a, b \in G$ , so kann man Fibonacci-artige Folgen  $F_n^{(1)}$  und  $F_n^{(2)}$  definieren durch

$$F_0^{(i)} := a, \quad F_1^{(i)} := b \quad \text{und} \quad F_{n+1}^{(1)} := F_n^{(1)} F_{n-1}^{(1)} \quad \text{bzw.} \quad F_{n+1}^{(2)} := F_{n-1}^{(2)} F_n^{(2)}.$$

## 1.2 Die einfachsten Formeln

In diesem Kapitel werde ich die einfachsten Formeln mit Fibonacci-Zahlen angeben. Insbesondere finden sich darunter Formeln für die Summen von Fibonacci-Zahlen.

Fast alle Formeln in diesem Abschnitt können ganz einfach durch vollständige Induktion bewiesen werden. Ich werde sämtliche Beweise weglassen.

**1.2.3. Determinantenidentität:** Es gilt:

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Für die Frage, warum ich diese Formel Determinantenidentität genannt habe s. die Bemerkungen nach der Formel von Binet (1.3.9.).

**1.2.4. Additionsformel:** Es gilt:

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1} = F_nF_{m-1} + F_{n+1}F_m.$$

Insbesondere gilt:

$$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2, \quad F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2, \quad \text{und } F_{3n} = F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3.$$

*Beweis:* Für  $m = 0$  und  $m = 1$  ist die Formel wahr. Man mache nun eine Induktion nach  $m$  bei festem  $n$ .

**1.2.5. Summen von Fibonacci-Zahlen:** Es gilt:

$$\sum_{k=1}^n F_k = F_{n+2} - 1, \quad \sum_{k=1}^n F_{2k} = F_{2n+1} - 1, \quad \sum_{k=1}^n F_{2k-1} = F_{2n}.$$

**1.2.6. Summen von Quadraten:** Es gilt:

$$\sum_{k=1}^n F_k^2 = F_nF_{n+1}, \quad \sum_{k=1}^n F_kF_{k+1} = \begin{cases} F_{n+1}^2 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ F_{n+1}^2 - 1 & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

**1.2.7. Halbarithmetische Summe:** Es gilt:

$$\sum_{k=1}^n kF_k = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2.$$

Natürlich gibt es noch eine riesigen Haufen anderer Formeln. Besonders schön finde ich die folgenden:

**1.2.8. Noch mehr Formeln** Für passende  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2} = F_n^4 - 1, \quad F_{n+1}^3 - F_{n-1}^3 = F_{3n} - F_n^3.$$

## 1.3 Die Formel von Binet

### 1.3.1 Die Formel

**1.3.9. Satz (Formel von Binet):** Es gilt:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

*Beweis:* Es gibt viele Möglichkeiten, das zu beweisen. Eine z.B. durch vollständige Induktion, wobei man benutzen muß, daß für  $\zeta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  gilt:  $\zeta^2 = 1 + \zeta$  usw..

Eine weitere Möglichkeit ist, daß man die Formel 1.5.20. nimmt, und für die rechte Seite eine Partialbruchzerlegung durchführt, und diese dann in geometrische Reihen entwickelt.

Eine dritte Möglichkeit werden wir gleich besprechen.

### 1.3.2 Beweis durch Eigenwertrechnung

Und zwar beobachten wir, daß gilt:

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Frage ist also, wie wir  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$  explizit ausrechnen können. Dazu suchen wir die beiden Eigenwerte. Diese sind  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  und  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . Als nächstes stellen wir  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  als Linearkombination von Eigenvektoren dar. Dadurch bekommen wir letztendlich wieder genau die Formel von Binet.

Die Methode läßt sich leicht auch verallgemeinern für Folgen, die durch eine lineare Rekursionsformel der Form

$$a_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} c_i a_{n+i}$$

definiert sind.

Obige Formel kann man auch so schreiben:

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n.$$

Aus der Formel  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ . Folgt sofort die Determinantenidentität 1.2.3..

### 1.3.3 Das charakteristische Polynom

Hat man eine allgemeine lineare Rekursionsformel der Art  $a_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} c_i a_{n+i}$ , so macht man den Ansatz  $a_i = x^i$ . Die Rekursionsformel ergibt dann für  $x$  die Gleichung

$$x^k - c_{k-1}x^{k-1} - \dots - c_1x - c_0 = 0.$$

Sind  $x_1$  und  $x_2$  zwei Lösungen, so erfüllen alle Ausdrücke der Form  $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$  ebenfalls die Rekursionsformel. Die Frage ist nun, ob man eine Linearkombination der Lösungen  $x_0, \dots, x_{k-1}$  finden kann, die die Anfangswerte  $a_0, \dots, a_{k-1}$  ergibt:

$$\text{Gibt es } \lambda_0, \dots, \lambda_{k-1} \text{ mit } a_i = \lambda_0 x_0^i + \dots + \lambda_{k-1} x_{k-1}^i?$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem in  $\lambda_i$ , wobei die Matrixeinträge die  $x_i^j$  sind. Sind die  $x_i$  paarweise verschieden, so ist es lösbar (Vandermondersche Determinante).

Im Falle der Fibonacci-Zahlen ist das charakteristische Polynom

$$x^2 - x - 1 \quad \text{und} \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

### 1.3.4 Folgerungen

Die Formel von Binet erlaubt uns, Summen wie  $F_3 + F_6 + F_9 + \dots$  als endliche geometrische Reihen aufzufassen und auszurechnen. Beispiele sind:

**1.3.10. Summen von  $F_{kn}$ :** Es gilt:

$$\sum_{k=1}^n F_{3k} = \frac{1}{2}(F_{3n+2} - 1), \quad \sum_{k=1}^n F_{6k} = \frac{1}{4}(F_{6n+3} - 2).$$

### 1.3.11. Summen von Potenzen der $F_n$ : Es gilt:

$$\begin{aligned} (1) \quad \sum_{k=1}^n F_k^3 &= \frac{1}{10}(F_{3n+2} - 6(-1)^n F_{n-1} + 5) = \frac{1}{2}(F_n F_{n+1}^2 - (-1)^n F_{n-1} + 1), \\ (2) \quad \sum_{k=1}^n F_{2k}^3 &= \frac{1}{20}(F_{6n+3} - 12F_{2n+1} + 10) = \frac{1}{4}(F_{2n+1} - 1)^2 (F_{2n+1} + 2)^2. \end{aligned}$$

*Beweis:* Für die allererste Gleichheit beweise man mit der Formel von Binet zunächst:  $F_n^3 = \frac{1}{5}(F_{3n} - 3(-1)^n F_n)$ . Für die anderen Gleichungen und ähnliche Formeln s. [Clary].

Die Formel von Binet gibt uns genau an, wie schnell die Fibonacci-Zahlen wachsen:

### 1.3.12. Korollar: Für $n \geq 1$ ist $F_n$ diejenige natürliche Zahl, die am nächsten bei $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ liegt.

*Beweis:* Die Zahl  $\eta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  ist vom Betrag her kleiner als 1, und  $\frac{1}{\sqrt{5}}\eta$  ist vom Betrag her kleiner als  $\frac{1}{2}$ .

Ganz ähnlich ist die  $n$ . Tribonacci-Zahl (s. 1.1.2. (2)) diejenige natürliche Zahl, die am nächsten bei

$$\frac{\rho-1}{4\rho-6}\rho^{n-1} \quad \text{mit } \rho = \frac{1}{3}(\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}} + 1)$$

liegt ([Spickerman]).

### 1.3.5 Fibonacci-Zahlen mit Matrix-Subskript

Die Formel von Binet

$$F_n = \frac{\zeta^n - \eta^n}{\sqrt{5}}$$

erlaubt es einen ohne Probleme, Fibonacci-Zahlen mit reellem Index ( $n \in \mathbb{R}$ ) zu definieren.

Ebenso kann man  $F_A$  definieren, wobei  $A$  eine (reelle oder komplexe) quadratische Matrix ist. Hierbei soll für  $x \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$  gelten:

$$x^A := e^{A \ln x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln x)^k A^k}{k!},$$

wobei  $\ln x$  der Hauptwert des Logarithmus sein soll. Es gelten dann viele Formeln ähnlich zu denen, die wir schon hatten. Bezeichnet  $\mathbf{1}$  die Einheitsmatrix, so gilt z.B.

$$F_{A+\mathbf{1}} = F_A + F_{A-\mathbf{1}}, \quad F_{A+\mathbf{1}} F_{A-\mathbf{1}} - F_A^2 = (-1)^A.$$

### 1.3.13. Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow F_A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}(2 \ln \frac{1+\sqrt{5}}{2} - i\pi) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gelten dann solche Sätze wie:

**1.3.14. Proposition:** Ist  $A$  eine reelle diagonalisierbare quadratische (reelle oder komplexe) Matrix, so gilt:

$$\text{Alle Eigenwerte kommen aus } \{0, 1, 5\} \Rightarrow F_A = A.$$

**1.3.15. Problem:** Gegen sei eine Matrix  $A$ . Wir setzen

$$f_0 := A, \quad f_1 := F_A, \quad f_2 := F_{f_1}, \quad f_3 := F_{f_2}, \quad \dots$$

Unter welchen Voraussetzungen konvergiert die Folge  $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ?

Literatur ist [Brugia].

## 1.4 Fibonacci-Zahlen und Binomial-Koeffizienten

**1.4.16. Satz:** Es gilt:

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}.$$

Die Summe läuft also über alle  $k$ , für die  $\binom{n-k}{k} \neq 0$  ist.

*Beweis:* Folgt sofort via Induktion aus  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ .

**1.4.17. Satz:** Für  $n, i \in \mathbb{N}_0$  Es gilt:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{k+i} = F_{2n+i}.$$

*Beweis:* Setzt man  $\zeta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  und  $\eta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ , so bekommt man nach der Formel von Binet (1.3.9.):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{k+i} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\zeta^{k+1} - \eta^{k+i}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\zeta^i (1 + \zeta)^n - \eta^i (1 + \eta)^n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\zeta^{i+2n} - \eta^{i+2n}). \end{aligned}$$

Mit etwas mehr Mühe kann man aus der Formel von Binet eine ganze Menge ähnlicher Formeln herausholen. Einige Beispiele:

**1.4.18. Weitere Summenformeln:** Für  $n, i \in \mathbb{N}_0$  gilt:

$$\begin{aligned} (1) \quad \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} F_{k+i}^2 &= 5^n F_{2(n+i)+1}, \\ (2) \quad \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} F_{k+i-1} F_{k+i} &= 5^n F_{2(n+i)}, \\ (3) \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} F_{r+2ki} &= 5^{\frac{n}{2}} F_i^n F_{r+ni} \quad \text{falls } i \text{ und } n \text{ gerade.}, \\ (4) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{r+2ki} &= 5^{\frac{n}{2}} F_i^n F_{r+ni} \quad \text{falls } i \text{ ungerade und } n \text{ gerade,} \\ (5) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{r+3k} &= 2^n F_{r+2n}. \end{aligned}$$

*Beweis:* Für die ersten beiden Formeln s. [Hoggat1]. (3) bis (5) stammen aus [Long1]. Dieser Artikel enthält noch eine Vielzahl weiterer Formeln.

Auf völlig anderem Weg, nämlich durch Betrachtung der „Diagonalfunktionen dritter Ordnung von Pell-Polynomen“ erhält man dagegen folgende Formeln:

**1.4.19. Noch mehr Formeln:** Für  $n \in \mathbb{N}$  ( $n \geq 1$ ) gilt:

$$\begin{aligned} (1) \quad F_n &= 1 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor} (-1)^i \binom{n-3-2i}{i} 2^{n-3-3i}, \\ (2) \quad &= 2^{n-2} + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor} (-1)^i \frac{n-i-1}{i} \binom{n-2-2i}{i-1} 2^{n-2-3i}. \end{aligned}$$

*Beweis:* Für die Beweise und noch viele weitere Formeln s. [Mahon].

Mit derselben Methode wurde übrigens auch die Formel 1.6.25. bewiesen.

## 1.5 Grenzwerte mit Fibonacci-Zahlen

**1.5.20. Die erzeugende Funktion:** Für  $|x| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

*Beweis:* Zunächst einmal ist wegen  $F_n \leq 2F_{n-1}$ :  $F_n \leq 2^n$ . Die Reihe hat also einen positiven Konvergenzradius. Wir dürfen sie manipulieren:

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k = x + \sum_{k=2}^{\infty} (F_{k-1} + F_{k-2}) x^k = x + x^2 \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k + x \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Daß die Reihe für  $|x| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  konvergiert, sieht man durch Berechnung der Nullstelle von  $1-x-x^2$ , oder einfach mit der Formel von Binet (1.3.9.).

**1.5.21. Kettenbrüche:** Der  $n$ . Näherungsbruch des Kettenbruches

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

ist genau  $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ .

*Beweis:* Folgt sofort via Induktion.

Insbesondere sieht man, daß der Grenzwert des Kettenbruchs genau

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

ist. (Vergl. Formel von Binet (1.3.9.).)

**1.5.22. Weitere Formeln:** Es gilt:

$$9 = \sqrt{3F_2F_4 + F_4 \sqrt{3F_4F_6 + F_6 \sqrt{3F_6F_8 + \dots}}}$$

*Beweis:* s. [Makarov].

## 1.6 Die Inversen der Fibonacci-Zahlen

Formeln, in denen nicht die Fibonacci-Zahlen, sondern ihre Inversen auftauchen, sind deutlich seltener. Nur selten sind sie so einfach zu beweisen, wie die folgende kleine Kuriosität:

**1.6.23. Prop.:** Für  $n \in \mathbb{N}$  ( $n \geq 1$ ) gilt:

$$\arctan \frac{1}{F_{2n}} = \arctan \frac{1}{F_{2n+1}} + \arctan \frac{1}{F_{2n+2}}$$

und

$$\operatorname{artanh} \frac{1}{F_{2n+1}} = \operatorname{artanh} \frac{1}{F_{2n+2}} + \operatorname{artanh} \frac{1}{F_{2n+3}}.$$

*Beweis:* Mit Hilfe der Determinanten-Identität 1.2.3. rechnet man sofort nach, daß  $F_{n-1}(F_n + F_{n+1}) - F_n F_{n+1} = (-1)^n$ . Der Rest folgt dann aus der Additionsformel für die inversen Winkelfunktionen, wie z.B.

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}.$$

Die Umkehrung gilt (fast) auch: Sind für eine Folge die obigen zwei Formeln erfüllt, und noch ein paar andere Voraussetzungen erfüllt, so ist die Folge durch eine einfache lineare Rekursionsformel entstanden (s. [Imada]).

#### 1.6.24. Korollar:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \arctan \frac{1}{F_{2n+1}} = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{artanh} \frac{1}{F_{2n+2}} = \frac{1}{2} \ln 3.$$

(Man beachte, daß  $\operatorname{artanh} \frac{1}{F_2}$  noch nicht definiert ist.)

*Beweis:* Beide Summen sind nach 1.6.23. in Wirklichkeit Teleskopsummen.

Nichttrivial dagegen ist:

**1.6.25. Prop.:** Für  $n \in \mathbb{N}$  ( $n \geq 1$ ) gilt:

$$\sum_{k=1}^n \frac{F_k + (-1)^k}{(F_{k+2} - 1)(F_{k+3} - 1)} = 2 - \frac{F_{n+4} - 1}{F_{n+3} - 1}.$$

*Beweis:* s. [Mahon]. Man kann dies vermutlich aber auch durch Induktion nachrechnen.

**1.6.26. Eine kuriose Eigenschaft von  $F_{11}$ :** Es ist

$$\frac{1}{F_{11}} = \frac{1}{89} = 0,01123595 \dots,$$

Die Dezimalbruchentwicklung von  $1/F_{11}$  fängt also genau mit den Fibonacci-Zahlen an. Das ist kein Zufall, denn wegen der Formel 1.5.20. ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k}{10^{k+1}} = \frac{1}{89}.$$

Man kann sich fragen, ob es noch andere Lösungen der diophantischen Gleichung

$$\frac{1}{F_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k}{m^{k+1}}$$

(also mit  $m, n \in \mathbb{N}$ ) gibt. In [Weger] wird gezeigt, daß die einzigen Lösungen, abgesehen von der obigen ( $n = 11, m = 10$ ) die folgenden sind:

$$\frac{1}{F_1} = \frac{1}{F_2} = 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k}{2^{k+1}}, \quad \frac{1}{F_5} = \frac{1}{5} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k}{3^{k+1}}, \quad \text{und} \quad \frac{1}{F_{10}} = \frac{1}{55} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k}{8^{k+1}}.$$

Dies zu zeigen, ist allerdings nicht besonders einfach.

## 2 Zahlentheoretische Eigenschaften der Fibonacci-Zahlen

Bei einer Folge von natürlichen Zahlen interessiert man sich natürlich für die Primzahlzerlegungen. Also z.B.: Gibt es unter den Fibonacci-Zahlen unendlich viele Primzahlen? Kann man etwas über die Anzahl der Primteiler aussagen. Befinden sich Quadratzahlen, andere Potenzen etc. darunter?



## 2.1 Der ggT von Fibonacci-Zahlen

Ab jetzt bezeichne  $\text{ggT}(a, b)$  den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen  $a$  und  $b$ , und  $\text{kgV}(a, b)$  ihren kleinsten gemeinsamen Vielfach.  $a|b$  bedeute, daß  $a$  ein Teiler von  $b$  ist („ $a$  teilt  $b$ “).

Wie sieht  $\text{ggT}(F_n, F_m)$  aus? Die Antwort ist überraschend einfach:

**2.1.1. Satz:** Für  $m, n \in \mathbb{N}$  ist

$$\text{ggT}(F_n, F_m) = F_{\text{ggT}(m, n)}.$$

*Beweis:* Zunächst zeigen wir, daß  $F_n | F_{kn}$  ( $k \geq 1$ ). Und zwar geht dies einfach durch Induktion über  $k$ .  $k = 1$  ist klar. Und nach der Additionsformel 1.2.4. ist

$$F_{(k+1)n} = F_{kn-1}F_n + F_{kn}F_{n+1}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist dann  $F_n$  ein Teiler von  $F_{kn}$ .

Nun sei an den euklidischen Algorithmus erinnert. Den  $\text{ggT}(m, n)$  bekommt man wie folgt: Ist (oBdA)  $m \geq n$ , so schreibt man

$$\begin{aligned} m &= q_0 n + r_1 && \text{mit } r_1 < n \\ n &= q_1 r_1 + r_2 && \text{mit } r_2 < r_1 \\ r_1 &= q_2 r_2 + r_3 && \text{mit } r_3 < r_2 \\ &\vdots \\ r_{n-1} &= q_n r_n \end{aligned}$$

$r_n$  ist dann der ggT von  $m$  und  $n$ . Genauer gesagt ist

$$\text{ggT}(m, n) = \text{ggT}(n, r_1) = \text{ggT}(r_1, r_2) = \text{ggT}(r_2, r_3) = \dots$$

Wendet man den euklidischen Algorithmus auf  $F_n$  und  $F_{n-1}$  an, so ist stets  $q_i = 1$  und die  $r_i$  durchlaufen die Fibonacci-Zahlen nach unten:  $F_n$  und  $F_{n-1}$  sind teilerfremd. Insbesondere sind dann auch  $F_n$  und  $F_{kn-1}$  teilerfremd.

Sind nun  $r_i$  und  $q_i$  wie oben, so ist:

$$\begin{aligned} \text{ggT}(F_m, F_n) &= \text{ggT}(F_{q_0 n + r_1}, F_n) && | \text{ Additionsformel 1.2.4.} \\ &= \text{ggT}(F_{q_0 n - 1} F_{r_1} + F_{q_0 n} F_{r_1 + 1}, F_n) && | F_n | F_{q_0 n} \\ &= \text{ggT}(F_n, F_{q_0 n - 1} F_{r_1}) && | F_n \text{ und } F_{q_0 n - 1} \text{ sind teilerfremd} \\ &= \text{ggT}(F_n, F_{r_1}) \end{aligned}$$

Auf diese Weise macht man weiter:

$$\text{ggT}(F_m, F_n) = \text{ggT}(F_n, F_{r_1}) = \text{ggT}(F_{r_1}, F_{r_2}) = \dots$$

Am Ende erhält man:  $\text{ggT}(F_m, F_n) = F_{r_n} = F_{\text{ggT}(m, n)}$ .

Wir halten außerdem fest:

**2.1.2. Korollar:** Es gilt:

- (1)  $n|m \Rightarrow F_n | F_m$ .
- (2)  $F_n$  und  $F_{n-1}$  sind teilerfremd.

Die Umkehrung von (1) gilt nicht, da  $F_2 = 1$  ist. So ist  $F_2$  ein Teiler von  $F_3$ , obwohl 2 kein Teiler von 3 ist. Es ist  $\text{ggT}(F_2, F_3) = F_2 = F_1 = F_{\text{ggT}(2, 3)}$ . Abgesehen von diesem Unfall mit der 2 gilt aber auch die Umkehrung.

**2.1.3. Korollar:**

- (1)  $F_n$  ist gerade  $\Leftrightarrow 3|n$ .
- (2)  $3|F_n \Leftrightarrow 4|n$ .
- (3)  $4|F_n \Leftrightarrow 6|n$ .
- (4)  $5|F_n \Leftrightarrow 5|n$ .
- (5)  $7|F_n \Leftrightarrow 8|n$ .

**2.1.4. Korollar:** Ist  $F_n$  eine Primzahl, so ist  $n = 4$ , oder  $n$  ist selber eine Primzahl.

Die Umkehrung gilt nicht: 19 ist eine Primzahl, aber  $F_{19} = 4181 = 37 \cdot 113$ . Die Frage, ob unter den Fibonacci-Zahlen endlich oder unendlich viele Primzahlen sind, ist ungelöst.

**2.1.5. Korollar:** Ist  $\text{ggT}(m, n) = 1$  so gilt:  $(F_n \cdot F_m) | F_{nm}$ .

## 2.2 Die Fibonacci-Folge modulo $n$

### 2.2.1 Die Periode der Fibonacci-Folge modulo $n$

Gibt es zu jeder Zahl  $n$  eine Fibonacci-Zahl  $F_k$  mit  $n|F_k$ ? Die Antwort ist „Ja!“. Um dies zu sehen betrachten wir die Folge  $F_k \bmod n$ . Die Frage ist also, ob es außer  $k = 0$  noch ein anderes  $k$  mit  $F_k = 0 \bmod n$  gibt.

**2.2.6. Satz und Definition:** Die Fibonacci-Folge modulo  $n$  ( $F_k \bmod n$ ) ist periodisch. Die Periode ist  $\leq n^2$ .

Ab jetzt bezeichne  $\lambda(n)$  die Periode der Fibonacci-Folge modulo  $n$ .  $\lambda(n)$  heißt auch manchmal „Wall-Zahl“ (nach D.D. Wall; s. [Wall]).

*Beweis:* Zunächst beachte man, daß die Fibonacci-Folge durch jedes Paar  $(F_n, F_{n+1})$  eindeutig festgelegt ist. Nun gibt es aber nur  $n^2$  Möglichkeiten für  $(F_n, F_{n+1}) \bmod n$ . Daraus folgt die Behauptung.

Wegen  $F_0 = 0 \bmod n$  gibt es unendlich viele  $k$  mit  $F_k = 0 \bmod n$ .

Die Perioden kann man auch so sehen: Man betrachtet die Matrizen  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  in  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . Da die ersten beiden Vektoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  linear unabhängig sind, ist  $\lambda(n)$  genau die kleinste Zahl  $\geq 2$ , für die gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\lambda(n)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Was kann man über die Perioden  $\lambda(n)$  sonst noch aussagen? In diesem Kapitel werden wir uns mit den Perioden beschäftigen, für den Fall, daß  $n$  eine zusammengesetzte Zahl ist.

**2.2.7. Lemma:** Es seien  $m, n \geq 2$ , dann gilt:

$$m|n \Rightarrow \lambda(m) | \lambda(n).$$

*Beweis:* Folgt sofort aus der Definition des  $\lambda(n)$  mit den Matrizen.

**2.2.8. Lemma:** Sind  $m$  und  $n$  teilerfremd, so gilt:

$$\lambda(mn) = \text{kgV}(\lambda(m), \lambda(n)).$$

*Beweis:* Nach obigem Lemma 2.2.7. ist  $\text{kgV}(\lambda(m), \lambda(n)) | \lambda mn$ .

Umgekehrt ist  $F_{\text{kgV}(\lambda(m), \lambda(n))} = 0 \bmod m$  und auch  $\bmod n$ . Und ebenso  $F_{\text{kgV}(\lambda(m), \lambda(n))+1} = 1 \bmod m$  und auch  $\bmod n$ . Nach dem chinesischen Restsatz<sup>1</sup>[?] gibt es aber, da  $m$  und  $n$  teilerfremd sind, in  $\mathbf{Z}/nm\mathbf{Z}$  nur genau eine Restklasse  $[x] = 0 \bmod m$  und  $\bmod n$ , und genau eine  $= 1 \bmod m$  und  $\bmod n$ .  $F_{\text{kgV}(\lambda(m), \lambda(n))}$  und  $F_{\text{kgV}(\lambda(m), \lambda(n))+1}$  müssen diese beiden Restklassen sein. Es gilt also sogar:

$$F_{\text{kgV}(\lambda(m), \lambda(n))} = 0 \bmod mn \quad \text{und} \quad F_{\text{kgV}(\lambda(m), \lambda(n))+1} = 1 \bmod mn.$$

Dies bedeutet:  $\lambda(mn) | \text{kgV}(\lambda(m), \lambda(n))$ .

**2.2.9. Lemma:**  $p$  sei eine Primzahl, und  $k \geq 2$ , dann gilt entweder

$$\lambda(p^k) = \lambda(p^{k-1}) \quad \text{oder} \quad \lambda(p^k) = p\lambda(p^{k-1}).$$

*Beweis:* Wir rechnen hier, ohne es dazuzuschreiben, modulo  $p^k$ . Nach Definition ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\lambda(p^{k-1})} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = p^{k-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit  $a, b \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ . Ist  $a = b = 0$ , so ist  $\lambda(p^k) = \lambda(p^{k-1})$  und wir sind fertig. Ansonsten zeigt man durch wiederholtes Multiplizieren mit  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\lambda p^{k-1}}$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{l\lambda(p^{k-1})} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = lp^{k-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Frage ist nun, für welches  $l$  der erste Summand zum ersten mal verschwindet. Wenn nicht  $a = b = 0$  ist, so ist dies, da  $p$  eine Primzahl ist, zum ersten genau mal für  $l = p$  der Fall.

Eine etwas genauere Analyse zeigt, daß gilt:

$$\lambda(p^k) = p\lambda(p^{k-1}) \quad \Rightarrow \quad \forall l \geq k : \quad \lambda(p^l) = p\lambda(p^{l-1}).$$

Außerdem ist klar, daß es mindestens ein  $k$  gibt, für das dies gilt.

Man vermutet, daß dies für alle  $k \in \mathbf{N}$  gilt:

$$\lambda(p^k) = p^{k-1}\lambda(p).$$

Dies ist allerdings bis heute nicht bewiesen.

Mit Hilfe dieser drei Lemmas können wir, wenn wir mal von der eben angesprochenen ungelösten Frage absehen,  $\lambda(n)$  in Termen der  $\lambda$  der Primfaktoren von  $n$  ausrechnen. Im nächsten Abschnitt werden wir uns der ungleich schwierigeren Frage zuwenden, wie die Perioden  $\lambda(p)$  für Primzahlen  $p$  aussehen.

## 2.2.2 Die Periode der Fibonacci-Folge modulo $p$

Bevor wir anfangen, ein Lemma:

**2.2.10. Lemma:** Ist  $p$  eine Primzahl, so gilt:

$$5^{\frac{p-1}{2}} = \begin{cases} +1 \bmod p & \text{falls } p \equiv \pm 1 \bmod 5, \\ -1 \bmod p & \text{falls } p \equiv \pm 2 \bmod 5. \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>Referenz

*Beweis:* Man sehe in [?] nach, wie man mit den Legendre-Symbolen  $\left(\frac{p}{q}\right)$  rechnet. Und zwar gilt:

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}}.$$

Für  $q = 5$  ergibt sich letztendlich:

$$\left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{p}{5}\right) = \begin{cases} 1 & \text{falls } p \equiv \pm 1 \pmod{5}, \\ -1 & \text{falls } p \equiv \pm 2 \pmod{5}. \end{cases}$$

Denn  $\pm 1$  sind quadratische Reste modulo 5, und  $\pm 2$  sind keine quadratischen Reste.

Außerdem beachte man  $5^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  (kleiner Satz von Fermat).

**2.2.11. Satz:**  $p$  sei eine Primzahl. Dann kann man die Werte von  $F_{p-1}, F_p, F_{p+1}$  modulo  $p$  in folgender Tabelle ablesen.

	$F_{p-1} \pmod{p}$	$F_p \pmod{p}$	$F_{p+1} \pmod{p}$
$p = 2$	1	1	0
$p = 5$	3	0	3
$p \equiv \pm 1 \pmod{5}$	0	1	1
$p \equiv \pm 2 \pmod{5}$	1	-1	0

*Beweis:* Der Beweis erfolgt durch nachrechnen: Man multipliziere die Formel von Binet (1.3.9.) für  $n = p$  und  $n = p + 1$  mit Hilfe des Binomialgesetzes aus. Alle Terme mit  $\sqrt{5}$  müssen sich gegenseitig wegheben.

Da  $p$  eine Primzahl ist, sind fast alle Binomialkoeffizienten, wenn man modulo  $p$  rechnet, Null. Man bekommt auf diese Weise Ausdrücke mit  $5^{\frac{p-1}{2}}$ .  $F_{p-1}$  kann man dann aus  $F_p$  und  $F_{p+1}$  ausrechnen.

Als Korollar erhalten wir:

**2.2.12. Satz:** Es sei  $p \notin \{2, 5\}$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} p \equiv \pm 1 \pmod{5} &\Rightarrow \lambda(p) \mid (p-1), \\ p \equiv \pm 2 \pmod{5} &\Rightarrow \lambda(p) \mid 2(p+1). \end{aligned}$$

Im zweiten Fall kann  $\lambda(p)$  nicht schon ein Teiler von  $p+1$  sein.

Außerdem ist  $\lambda(2) = 3$  und  $\lambda(5) = 20$ .

*Beweis:* Kann man sofort aus der Tabelle in 2.2.11. ablesen. Für  $p = 5$  muß man das halt nachrechnen.

Weitere Resultate zu bekommen, ist ziemlich schwierig. In [Götsch] wird gezeigt:

**2.2.13. Satz:** Es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ prim} \\ p \equiv \pm 1 \pmod{5}}} \frac{\lambda(p)}{p-1} &= C_1 \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x \ln \ln x}{\ln^2 x}\right) \quad \text{mit } C_1 = \frac{342}{595} \prod_p \left(1 - \frac{p}{p^3 - 1}\right) \\ \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ prim} \\ p \equiv \pm 2 \pmod{5}}} \frac{\lambda(p)}{2(p-1)} &= C_2 \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x \ln \ln \ln x}{\ln x \cdot \ln^2 x}\right) \quad \text{mit } C_2 = \frac{1}{4} \prod_{\substack{p \neq 2 \\ p \neq 5}} \left(1 - \frac{p}{p^3 - 1}\right) \end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\liminf_{\substack{p \rightarrow \infty \\ p \text{ prim}}} \frac{\lambda(p)}{p-1} = \liminf_{\substack{p \rightarrow \infty \\ p \text{ prim}}} \frac{\lambda(p)}{2(p+1)} = 0.$$

### 2.2.3 Die Verteilung der Fibonacci-Zahlen modulo $n$

Tauchen in der Fibonacci-Folge  $F_k \bmod n$  alle Zahlen  $0, \dots, n-1$  gleichoft auf? In diesem Abschnitt werden wir die Frage beantworten. Die Frage läßt sich auch ganz allgemein für Folgen definieren:

**2.2.14. Def.:**  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sei eine Folge ganzer Zahlen,  $n \in \mathbb{N}$  und  $A_N(j)$  sei die Anzahl der Folgenglieder  $a_k$  mit  $k \leq N$  und  $a_k = j \bmod n$ .

Dann heißt die Folge  $(a_k)$  „uniform verteilt modulo  $n$ “, falls für alle  $j = 0, \dots, n-1$  gilt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A_N(j)}{N} = \frac{1}{n}.$$

Im Falle der Fibonacci-Zahlen ist dies relativ einfach nachzuprüfen, da sie periodisch modulo  $n$  sind. Sie sind uniform verteilt, falls innerhalb einer Periode alle Zahlen  $0, \dots, n-1$  gleichoft vorkommen.

**2.2.15. Satz:** Die Fibonacci-Zahlen sind genau dann uniform verteilt modulo  $n$ , falls  $n$  eine 5er-Potenz ist:  $n = 5^k$ .

*Beweis:* Wir zeigen nur die eine Richtung.  $n$  enthalte einen Primfaktor  $p \neq 5$ , und wir nehmen an  $(F_n)$  ist uniform verteilt modulo  $n$ .  $j$  sei die Anzahl der durch  $p$  teilbaren Fibonacci-Zahlen mit Index  $y < \lambda(p)$ . Wegen  $\lambda(p) | \lambda(n)$  ist die Anzahl der durch  $p$  teilbaren Fibonacci-Zahlen mit Index  $y\lambda(n)$  dann genau

$$k \frac{\lambda(n)}{\lambda(p)} = \frac{\lambda(n)}{p}.$$

Also:  $kp = \lambda(p)$ . Wir wissen aber (Satz 2.2.12.), daß das für  $p \neq 5$  nicht sein kann.

Für den Beweis, daß  $F_n$  uniform verteilt modulo  $5^k$  ist, s. [Kuipers] und [Niederreiter].

### 2.2.4 Summen von Fibonacci-Zahlen modulo $n$

In diesem Abschnitt werden wir die Summen von Fibonacci-Zahlen modulo  $n$  ausrechnen, wobei die Summe genau über eine Periode genommen wird. Zwar können wir solche Summen sogar in  $\mathbb{Z}$  ausrechnen (s. 1.2.5., 1.2.6. und 1.3.11.), aber hier wird alles noch einfacher, weil wir eine Translationsinvarianz haben:

$$\sum_{k=0}^{\lambda(n)-1} F_k = \sum_{k=N}^{N+\lambda(n)-1} F_k \pmod{n}.$$

Die Ergebnisse sind wie folgt:

**2.2.16. Satz:** Es sei  $n \in \mathbb{N}$ . Werden die folgenden Summen genau über eine Periode und modulo  $n$  ausgerechnet, so gilt:

$$\begin{array}{ll} (a) \quad \sum F_k = 0 & (b) \quad \sum (-1)^k F_k = 0 \\ (c) \quad \sum F_k^2 = 0 & (d) \quad \sum (-1)^k F_k^2 = -\frac{2}{5}\lambda(n) \\ (e) \quad \sum F_k^3 = 0 & (f) \quad \sum (-1)^k F_k^3 = 0 \\ (g) \quad \sum F_k^4 = \frac{6}{25}\lambda(n) & (h) \quad \sum (-1)^k F_k^4 = 0 \\ (i) \quad \sum F_k^5 = 0 & (j) \quad \sum (-1)^k F_k^5 = 0 \\ (k) \quad \sum F_k^6 = 0 & (l) \quad \sum (-1)^k F_k^6 = -\frac{4}{25}\lambda(n). \end{array}$$

In den Fällen (d), (g), (l) sei dabei  $n$  eine Primzahl  $\neq 5$ , Im Fall (h) eine Primzahl  $\neq 3$ , im Fall (i) und (j) eine Primzahl  $\neq 11$ . Für welche Zahlen (k) (und damit (l)) gilt, ist nicht klar.

*Beweis:* Wir zeigen nicht alles.

(a) ist einfach:  $\sum F_k = \sum (F_{k-1} + F_{k-2}) = 2 \sum F_k$ .

Für (b) beobachte, daß  $F_k$  mit Hilfe seiner Rekursionsformel auch für  $k < 0$  definiert ist, und (modulo  $n$ ) auch dort periodisch ist. Und zwar sieht man schnell, daß  $F_{-k} = F_k(-1)^{k+1}$ . Daraus folgt (b).

Für (c) rechnen wir:

$$\sum F_k^2 = \sum (F_{k-1} + F_{k-2})^2 = 2 \sum F_k^2 + 2 \sum F_k F_{k-1},$$

und ebenso

$$\sum F_k^2 = \sum F_{k-2}^2 = \sum (F_k - F_{k-1})^2 = 2 \sum F_k^2 - 2 \sum F_k F_{k-1}.$$

Addition ergibt die Behauptung.

(e) beweist man so ähnlich, nur ein wenig komplizierter, wie (c). Und (f) folgt aus (e) genau wie (b) aus (a).

Für (d), (g) und (l) s. [Aydin1]. (h), (i), (j) und (k) gehen so ähnlich wie (e) und (c) nur sehr viel komplizierter; s. [Aydin2].

## 2.3 Primitive Teiler

Wir haben schon gesehen, daß es zu jeder Zahl  $n$  eine Fibonacci-Zahl gibt, die durch  $n$  teilbar ist, nämlich  $F_{\lambda(n)}$ . Es wird aber im Allgemeinen durchaus schon eine kleinere Fibonacci-Zahl durch  $n$  teilbar sein.

**2.3.17. Def.:**  $n$  heißt „*primitiver Teiler*“ von  $F_k$ , falls gilt:

(a)  $n | F_k$ .

(b) Für  $j < k$  gilt:  $n \nmid F_j$ .

Ist  $p$  eine Primzahl und ein primitiver Teiler von  $F_k$ , so heißt sie „*primitiver Primteiler*“. Die höchste Potenz von  $p$ , die  $F_k$  in diesem Fall teilt, heißt „*primitive Primteilerpotenz*“ („*ppp*“)  $p^e$ .

Außerdem definieren wir gleich das Produkt aller solchen primitiven Primteilerpotenzen:

$$P(F_k) := \prod_{p^e \text{ ppp}} p^e.$$

Hat  $F_k$  keine primitiven Primteiler, so sei  $P(F_k) := 1$ .

Man beachte, daß, wenn  $p^e$  ein primitiver Teiler  $F_k$  ist,  $p^e$  noch lange keine primitive Primteilerpotenz sein muß, denn  $p$  muß kein primitiver Primteiler sein.

Natürlich hat jede Fibonacci-Zahl mindestens einen primitiven Teiler, nämlich sich selbst. Aber hat jede Fibonacci-Zahl einen primitiven Primteiler? Die Antwort ist natürlich „Nein“, denn  $F_6 = 8$ , aber bereits  $F_3 = 2$  ist durch 2 teilbar.

Es stellt sich aber heraus, daß alle Fibonacci-Zahlen bis auf endlich viele primitive Primteiler haben. Und zwar gilt:

**2.3.18. Satz:**

$$\sum_{k \leq x} \ln P(F_k) = \frac{3}{\pi^2} \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot x^2 + O(x \ln x).$$

*Beweis:* Der Beweis ist, wie der Leser sich denken kann, nicht elementar. Er findet sich in [Kiss], und benutzt diverse zahlentheoretische Funktionen wie z.B. die Möbius-Funktion.

Sonderlich überraschend ist dies allerdings nicht, da die Fibonacci-Zahlen ja viel schneller wachsen, als die Primzahlen. Überraschend ist eher, daß man so etwas beweisen kann.

**2.3.19. Korollar:** Es gibt ein  $N \in \mathbb{N}$ , so daß für alle  $k \geq N$  die Fibonacci-Zahl  $F_k$  primitive Primteiler hat.

Die rechte Seite obiger Formel hat folgende Bedeutung: Ist wieder  $\zeta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  und  $\eta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ , so ist nach der Formel von Binet 1.3.9.:

$$\ln \prod_{k=1}^x F_k \sim \ln \prod_{k=1}^x \zeta^k \sim \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Aus diesem Grund ist folgende Formel stark verwandt mit obiger (man kann glaube ich zeigen, daß sie sogar daraus folgt):

**2.3.20. Satz:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(F_1 \cdot \dots \cdot F_x)}{\ln \text{kgV}(F_1, \dots, F_x)} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Beweis: s. [Matiyasevich].

## 2.4 Fibonomial-Koeffizienten

### 2.4.1 Definition

**2.4.21. Definition:** Ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen  $\neq 0$ , so definieren wir

$$[n]!_{(a_n)} := a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{(a_n)} := \frac{[n]!_{a_n}}{[k]!_{a_n} [n-k]!_{a_n}}.$$

Ist klar, welche Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gemeint ist, so lassen wir den Index weg. Insbesondere ergeben sich für  $a_n = n$  die (normalen) Binomial-Koeffizienten. Für  $a_n = F_n$  ergeben sich die „Fibonomial-Koeffizienten“. Im folgenden betrachten wir nur diese.

Auf analoge Weise kann man auch verallgemeinerte Multinomial-Koeffizienten definieren.

Die Fibonomial-Koeffizienten sind bisher lediglich rationale Zahlen. Wir wollen natürlich als erstes wissen, ob sie auch ganz sind. Leider kann man das nicht so einfach zeigen, wie bei den Binomial-Koeffizienten, denn deren Rekursionsformel wird hier zu:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{F_n}{F_k + F_{n-k}} \left( \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \right).$$

Und der Bruch  $F_n/(F_k + F_{n-k})$  ist nicht immer ganzzahlig. Trotzdem gilt:

**2.4.22. Prop.:** Die Fibonomial-Koeffizienten sind positive ganze Zahlen.

Beweis: Und zwar folgt dies alleine z.B. aus der Eigenschaft  $F_{\text{ggT}(m,n)} = \text{ggT}(F_m, F_n)$  (s.[Ward]).

Es sei  $p$  eine Primzahl. Welche Potenz von  $p$  ist noch ein Teiler von  $[n]!$ ? Ist  $\rho_s$  die kleinste Zahl, für die  $p^s | F_{\rho_s}$ , so sind alle Fibonacci-Zahlen, die durch  $p^s$  geteilt werden können von der Form  $F_{k\rho_s}$ . Daraus folgt (nach einigem Nachdenken), daß die höchste Potenz von  $p$ , die noch ein Teiler von  $[n]!$  ist, gegeben ist durch

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{\rho_s} \right\rfloor \quad \text{wobei hier } \lfloor \cdot \rfloor \text{ die Gaußklammer ist.}$$

Die Summe ist dabei in Wirklichkeit endlich. Da für beliebige natürliche Zahlen  $n, m, \rho$  gilt:

$$\left\lfloor \frac{n+m}{\rho} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n}{\rho} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{\rho} \right\rfloor,$$

folgt:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left[ \frac{n}{\rho_s} \right] \geq \sum_{s=1}^{\infty} \left[ \frac{n-k}{\rho_s} \right] + \sum_{s=1}^{\infty} \left[ \frac{k}{\rho_s} \right].$$

Im Zähler ist also eine mindestens so große Potenz von  $p$  enthalten wie im Nenner. Der Koeffizient ist ganz.

### 2.4.2 Stern-Konfigurationen mit ggT-Eigenschaft

Die Fibonomial-Koeffizienten kann man genau wie die Binomial-Koeffizienten in einer Art Pascalschem Dreieck anordnen. Wir betrachten zunächst sechs Fibonomial-K. (oder Binomial-K.)  $A_1, A_2, \dots, A_6$ , die im Dreieck wie folgt angeordnet sind:

$$\begin{array}{ccccc} & & A_6 & & A_5 \\ & A_1 & & A & & A_4 \\ & & A_2 & & A_3 \end{array}$$

Diese Anordnung heißt „*Hoggatt-Hansell-Hexagon*“ (engl. „Hoggatt-Hansell Perfect Square Hexagon“) nach den beiden Mathematikern, die sie zuerst untersucht haben ([Hoggat2]).

Man sieht, indem man alle Produkte hinschreibt und verkürzt, leicht daß:

#### 2.4.23. Fakt:

$$A_1 A_3 A_5 = A_2 A_4 A_6.$$

Aber das ist nicht alles.

#### 2.4.24. Prop.: Es gilt:

$$\text{ggT}(A_1, A_3, A_5) = \text{ggT}(A_2, A_4, A_6).$$

Beweis: s. [Hillman].

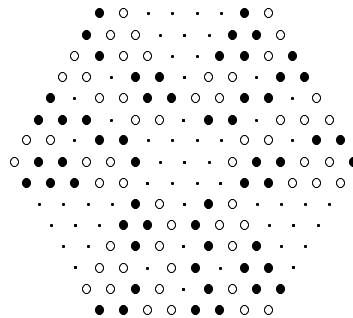
Wegen der Auswahl der je drei Punkte heißt dieser Satz auch manchmal „*Dauids-Stern-Theorem*“.

Die entsprechende Gleichung für den kgV gilt dagegen nicht. Ersetzt man allerdings

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \text{ durch } F_{n+1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \binom{n}{k} \text{ durch } (n+1) \binom{n}{k},$$

so gilt die entsprechende Identität mit dem kgV, allerdings nicht mehr mit dem ggT. Die Produktidentität (2.4.23.) gilt ebenfalls noch. (Für einen Bew. s. [Ando1] oder [Sato].)

Man kann sich nun fragen, ob es noch andere Anordnungen gibt, die solche Eigenschaften haben. Die Antwort ist natürlich „Ja!“, denn wegen solchen Formeln wie  $\text{ggT}(\text{ggT}(a, b), \text{ggT}(c, d)) = \text{ggT}(a, b, c, d)$  kann man aus kleineren Anordnungen größere zusammenbasteln.





Diese Konfiguration nennt sich „*Tokyo-Bogen*“. Sie besteht aus drei annähernd gestutzt kegelförmigen Anordnungen, die durch Drehungen ineinander übergehen. Diese Unterstrukturen heißen „*Fujiyama*“, da sie an den gleichnamigen Berg in der Nähe von Tokyo erinnern sollen.

Es gilt:

**2.4.25. Prop.:**  $\{\bullet\}$ ,  $\{\circ\}$  und  $\{\cdot\}$  bezeichne die dem Tokyo-Bogen entsprechenden Zahlen im Pascalschen Dreieck aus Fibonomial-Koeffizienten (oder normalen Binomial-Koeffizienten). Dann gilt:

$$\begin{array}{llll} \text{ggT}\{\bullet\} & = & \text{ggT}\{\circ\} & = & \text{ggT}\{\cdot\} & \text{und} & \text{ggT}(\{\bullet\} \cup \{\cdot\}) & = & \text{ggT}(\{\circ\} \cup \{\cdot\}), \\ \text{kgV}\{\bullet\} & = & \text{kgV}\{\circ\} & & & \text{und} & \text{kgV}(\{\bullet\} \cup \{\cdot\}) & = & \text{kgV}(\{\circ\} \cup \{\cdot\}), \\ \prod\{\bullet\} & = & \prod\{\circ\} & & & \text{und} & \prod(\{\bullet\} \cup \{\cdot\}) & = & \prod(\{\circ\} \cup \{\cdot\}). \end{array}$$

*Beweis:* s. [Ando2]. Dort gibt es noch eine weitere (größere) Konfiguration namens „Julias Schneeflocke“, und außerdem einen „Nordstern“.

Eine weitere Formation, ein größeres Hexagon, findet sich in [Long1].

## 2.5 Fibonacci-Zahlen als Quadrat- und Kubikzahlen

Gibt es unter den Fibonacci-Zahlen unendlich viele Quadratzahlen? Kubikzahlen? Solchen Fragen lassen sich beliebig abwandeln: Welche Fibonacci-Zahlen haben die Form  $px^2 \pm 1$ , wo  $p$  eine Primzahl ist? Wieviele darunter haben einen geraden Index?

Ich erwähne hier nur die zwei einfachsten Ergebnisse:

**2.5.26. Satz:** Abgesehen von  $F_0 = 0$  und  $F_1 = F_2 = 1$  ist  $F_{12} = 144$  die einzige Quadratzahl unter den Fibonacci-Zahlen. Weitere Kubikzahlen gibt es nicht.

*Beweis:* Für die Quadratzahlen s. [Cohn], für die Kubikzahlen [Lagarias].

Einen Überblick über ähnliche Ergebnisse gibt [Robbins]. In [Luo] wird gezeigt, daß die einzigen Fibonacci-Zahlen, die Dreieckszahlen, d.h. solche von der Form  $n(n+1)/2$  sind,  $F_1 = F_2 = 1$ ,  $F_8 = 21$  und  $F_{10} = 55$  sind.

## 2.6 Die Fibonacci-Zahlen als diophantische Menge

In der Theorie der diophantischen Gleichungen beschäftigt man sich mit der Frage, ob eine Gleichung der Form  $P(x_1, \dots, x_n) = 0$ , wo  $P$  ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ist, Lösungen in den ganzen (oder natürlichen) Zahlen hat. Berühmtestes Beispiel ist sicherlich der Große Satz von Fermat. Die Frage nach der Lösbarkeit ist im allgemeinen sehr schwer zu beantworten.

Umgekehrt kann man sich auch fragen, ob es zu einer vorgegebenen Menge  $A \subset \mathbb{N}$  ein Polynom  $P$  gibt, so daß die Elemente aus  $A$  genau die (ganzen oder natürlichen) Nullstellen von  $P$  sind. Etwas präziser definieren wir:

**2.6.27. Definition:** Eine Menge  $A \subset \mathbb{N}$  heißt „*diophantisch*“, falls ein Polynom  $P$  in  $k+n$  Variablen mit ganzzahligen Koeffizienten existiert, so daß

$$(a_1, \dots, a_k) \in A^k \Leftrightarrow \exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n : P(a_1, \dots, a_k, x_1, \dots, x_n) = 0.$$

**2.6.28. Beispiel:** Die Menge der durch  $n$  teilbaren Zahlen ist diophantisch, sie ist nämlich genau gegeben durch

$$\{a \in \mathbb{N} \mid \exists x \in \mathbb{N} : a - px = 0\}.$$

Wir werden in diesem Abschnitt die Frage behandeln, ob die Menge  $F$  der Fibonacci-Zahlen und ihr Komplement  $\mathbb{N} - F$  diophantisch sind. Und zwar betrachten wir das „*Lucas-Polynom*“

$$L(y, x) := x^2 - xy - y^2.$$

Nun gilt die dazu sehr ähnliche Identität  $F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = (-1)^n$ . In [Jones1] wird gezeigt:

$$\begin{aligned} L(x, y) = 1 &\Leftrightarrow y = F_{2n} \text{ und } x = F_{2n+1} \\ L(x, y) = -1 &\Leftrightarrow y = F_{2n-1} \text{ und } x = F_{2n}. \end{aligned}$$

Also:

$$x \in F \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{N} : L(y, x) \in \{\pm 1\}.$$

Damit haben wir schon einmal das Polynom für die Fibonacci-Zahlen. Jede Nicht-Fibonacci-Zahl liegt zwischen zwei Fibonacci-Zahlen:

$$z \notin F \Leftrightarrow \exists x, y \in \mathbb{N} : L(y, x) \in \{\pm 1\} \text{ und } (x - z)(z - y) > 0.$$

Wir bekommen:

**2.6.29. Prop.:** Die Mengen  $F$  und  $\mathbb{N} - F$  sind diophantisch. Und zwar gilt:

$$\begin{aligned} F &= \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y; L(y, x)^2 - 1 = 0\}, \\ \mathbb{N} - F &= \{z \in \mathbb{N} \mid \exists x, y, v \in \mathbb{N} : (L(y, x)^2 - 1)^2 + ((x - z)(z - y) - v - 1)^2 = 0\}. \end{aligned}$$

nach [Jones2].

### 3 Fibonacci-Polynome und Fibonacci-artige Polynome

Eine Art, die Fibonacci-Zahlen zu verallgemeinern, ist es, überall noch ein  $x$  dazuzuschreiben. Auf diese Weise erhält man Polynome. Es gibt mehrere Möglichkeiten, dieses  $x$  dazuzuschreiben. Durch die beiden wichtigsten erhält man die „Fibonacci-Polynome“ und die „Fibonacci-artigen Polynome“ (im englischen: fibonacci-type polynomials). Alles, was ich bisher geschrieben habe, kann man für diese Polynome verallgemeinern, die Formeln, die Teilungseigenschaften usw..

Ich werde in diesem Kapitel nur ganz wenig schreiben, zumal ich Schwierigkeiten hatte, an die Artikel, die diese Polynome behandeln, zu kommen.

#### 3.1 Fibonacci-Polynome

**3.1.1. Definition:** Die „*Fibonacci-Polynome*“ sind die wie folgt definierten Polynome:

$$F_0(x) = 0, \quad F_1(x) = 1 \quad \text{und} \quad F_{n+1}(x) = xF_n(x) + F_{n-1}(x).$$

$F_n(x)$  ist ein Polynom  $n - 1$ . Grades. Die ersten Fibonacci-Polynome sind

$$\begin{aligned} F_0(x) &= 0 \\ F_1(x) &= 1 \\ F_2(x) &= x \\ F_3(x) &= x^2 + 1 \\ F_4(x) &= x^3 + 2x \\ F_5(x) &= x^4 + 3x^2 + 1 \\ F_6(x) &= x^5 + 4x^3 + 3x \end{aligned}$$

Ähnlich wie die Formel von Binet für die Fibonacci-Zahlen gibt es auch eine explizite Formel für diese Fibonacci-Polynome, in der Multinomial-Koeffizienten vorkommen.

Analog zur Kettenbruchdarstellung von  $\frac{F_n}{F_{n+1}}$  (1.5.21.) ist hier der  $n$ . Näherungsbruch zu

$$x + \frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{x + \dots}}}$$

genau  $\frac{F_n(x)}{F_{n+1}(x)}$ .

Für die Teilungseigenschaften der Fibonacci-Polynome s. [Bicknell].

## 3.2 Fibonacci-artige Polynome

**3.2.2. Definition:** Die „Fibonacci-artigen Polynome“ sind die wie folgt definierten Polynome:

$$f_0(x) = 0, \quad f_1(x) = 1 \quad \text{und} \quad f_{n+1}(x) = x(f_n(x) + f_{n-1}(x)).$$

$f_n(x)$  ist ein Polynom  $n - 1$ . Grades. Die ersten Fibonacci-artigen Polynome sind

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 0 \\ f_1(x) &= 1 \\ f_2(x) &= x \\ f_3(x) &= x^2 + x \\ f_4(x) &= x^3 + 2x^2 \\ f_5(x) &= x^4 + 3x^3 + x^2 \\ f_6(x) &= x^5 + 4x^4 + 3x^3 \end{aligned}$$

Wie man sieht, sind die Koeffizienten der Fibonacci-artigen Polynome genau dieselben wie die der Fibonacci-Polynome. In der Tat zeigt man sehr leicht durch vollständige Induktion, daß für  $n \geq 1$  gilt:

$$F_n(x) = \frac{f_n(x^2)}{x^{n-1}}.$$

Ähnlich wie in 1.5.20. gilt diesmal:

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_k(a)x^k = \frac{x}{1 - ax - ax^2}.$$

Die Fibonacci-artigen Polynome kann man wie folgt verallgemeinern. Durch

$$f_0^{(0)}(x) = 0, \quad f_1^{(1)}(x) = 1 \quad \text{und} \quad f_n^{(k)}(x) = \begin{cases} x(f_{n-1}^{(k)}(x) + \dots + f_1^{(k)}(x)) & \text{für } 2 \leq n \leq k+1 \\ x(f_{n-1}^{(k)}(x) + \dots + f_{n-k}^{(k)}(x)) & \text{für } n \geq k+2 \end{cases}$$

werden die sog. „multi-varianten Fibonacci-artigen Polynome“ definiert. Diese haben folgende Anwendung: In  $n$  Zufallsversuchen, die man sich in einer (kreisförmig) geschlossenen Kette angeordnet denke, und die mit einer Wahrscheinlichkeit von  $p$  erfolgreich ausgehen, suche man die längste Kette von Erfolgsergebnissen. Diese bestehe aus  $s$  Erfolgen. Die Verteilungsfunktion für dieses  $s$  läßt sich mit Hilfe der multi-varianten Fibonacci-artigen Polynome darstellen.

## 4 Der Satz von Zeckendorf

### 4.1 Der Satz

Jede natürliche Zahl läßt sich eindeutig als Summe von Zweierpotenzen schreiben, wobei jede Zweierpotenz höchstens einmal vorkommen darf. Allgemein kann man sich fragen, ob man, wenn man eine (streng)

monoton steigende Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegeben hat, jede natürliche Zahl als Summe der  $a_n$  schreiben kann, und in wiefern eine solche Darstellung eindeutig ist.

Damit für jede Zahl eine solche Darstellung existiert, muß sicherlich  $a_1 + \dots + a_{n-1} \geq a_n - 1$  sein. Diese Bedingung ist für die Fibonacci-Zahlen erfüllt (s. 1.2.5.).

Um eine Eindeutigkeit zu bekommen, muß genau die umgekehrte Ungleichung erfüllt sein:  $a_1 + \dots + a_{n-1} \leq a_n - 1$ . Dies ist also für die Fibonacci-Zahlen nicht erfüllt. Es gilt aber:

**4.1.1. Satz (von Zeckendorf):** Jede natürliche Zahl  $N$  läßt sich eindeutig schreiben als

$$N = F_{n_1} + F_{n_2} + \dots + F_{n_k} \quad \text{mit } 2 \leq n_1 \leq n_2 - 2, n_2 \leq n_3 - 2, \dots, n_{k-1} \leq n_k - 2.$$

In der Summe dürfen also weder  $F_0$ , noch  $F_1$ , noch zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen vorkommen.

*Beweis:* Für  $n \in \{1, 2, 3, 4\}$  rechnet man das einfach nach.

Nun sei die Behauptung bereits bewiesen für  $N < F_n$ , und es sei  $F_n \leq N < F_{n+1}$ . Es ist dann  $N - F_n < F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$ .  $N - F_n$  läßt sich also nach Induktionsvoraussetzung als solche Summe schreiben, und außerdem kommt in dieser Summe  $F_{n-1}$  als Summand nicht vor. Addiert man noch  $F_n$  dazu, so bekommt man die Existenz einer Summendarstellung wie behauptet.

Umgekehrt muß in jeder solchen Darstellung von  $N$  auch der Summand  $F_n$  vorkommen, denn die größte Summe, die sich mit  $F_2, \dots, F_{n-1}$  bilden läßt, ist  $F_{n-1} + F_{n-3} + F_{n-5} + \dots$ . Und diese ist  $\leq F_n - 1$  (s. die zweite und dritte Formel in 1.2.5. und beachte, daß  $F_1 = 1$  nicht auftreten darf). Aus der Eindeutigkeit der Darstellung von  $N - F_n$  folgt dann die Eindeutigkeit derjenigen von  $N$ .

**4.1.2. Beispiel:** Für  $n, k \in \mathbb{N}$  ist  $F_{kn}/F_n$  eine natürliche Zahl (s. 2.1.2.). Für diese können wir die Zeckendorf-Darstellung explizit hinschreiben. Für  $n \geq 2$  ist

$$\frac{F_{kn}}{F_n} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k/2} (F_{n(2i-1)-1} + F_{n(2i+1)+1}) & \text{für gerades } n \\ F_2 + \sum_{i=1}^{(k-1)/2} (F_{2ni-1} + F_{2ni+1}) & \text{für ungerades } n. \end{cases}$$

Für  $n = 2$  ( $F_2 = 1$ ) reduziert sich die erste Formel natürlgemäß auf  $F_{2k}$ .

*Beweis:* [Filippini]

## 4.2 Zeckendorf- oder Fibonacci-Sequenzen

Man kann den Satz von Zeckendorf auch anders sehen:

**4.2.3. Definition:** Eine „Zeckendorf-Sequenz“ ist eine (endliche Sequenz)

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad \text{mit } x_i \in \{0, 1\} \text{ und } x_i \cdot x_{i+1} = 0 \text{ und } x_k = 1.$$

(Also eine endliche Sequenz aus Nullen und Einsen, in der nie zwei Einsen hintereinander vorkommen.)

$k$  heißt „die Länge“ der Zeckendorf-Sequenz.

Der Satz von Zeckendorf läßt sich dann wie folgt formulieren:

**4.2.4. Satz (von Zeckendorf):** Es gibt eine bijektive Abbildung zwischen der Menge der Zeckendorf-Sequenzen und den natürlichen Zahlen, und zwar

$$(x_1, \dots, x_k) \mapsto \sum_{i=1}^k x_i F_{i+1}.$$

**4.2.5. Korollar:** Die Anzahl der Zeckendorf-Sequenzen der Länge  $\leq n$  ist genau  $F_{n+2}$ .

*Beweis:* Das  $x_n$  gehört zum  $F_{n+1}$ . Aus dem Beweis zum Satz von Zeckendorf (4.1.1.) wissen wir, daß man genau alle Zahlen  $< F_{n+2}$  (einschließlich der Null) mit Hilfe von  $F_2, \dots, F_{n+1}$  darstellen kann. Dies entspricht genau der Behauptung.

Man kann die Behauptung übrigens auch ganz leicht direkt durch Induktion zeigen.

**4.2.6. Fibonacci-Zahlen von Graphen:** Eine Teilmenge  $I$  von Knoten eines Graphen  $G$  heißt „*unabhängig*“, falls keine zwei Knoten aus  $I$  durch eine Kante verbunden sind.

Der Graph, der aus  $n$  Knoten  $x_1, \dots, x_n$  besteht, wobei je  $x_i$  und  $x_{i+1}$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) durch eine Kante verbunden sind (s. Bild für  $n = 7$ ), hat also genau  $F_{n+2}$  verschiedene unabhängige Mengen von Knoten, denn jede solche Menge entspricht genau einer Zeckendorf-Sequenz.



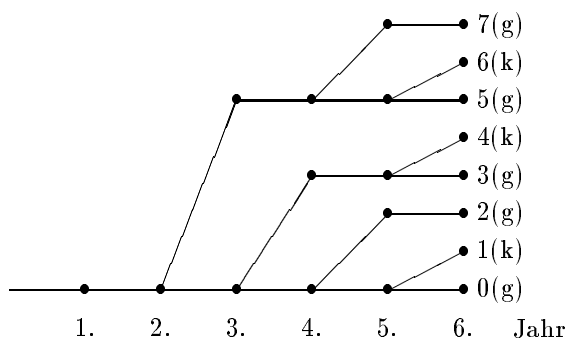
Ist  $G$  nun ein beliebiger Graph, so sei die „*Fibonacci-Zahl von  $G$* “  $F(G)$  die Anzahl der unabhängigen Knotenmengen von  $G$ .

Für nähere Informationen s. [Prodinger] und [Drmot].

## 5 Fibonacci-Bäume

### 5.1 Der Stammbaum der Kaninchen

Wir reden in diesem Abschnitt natürlich von Bäumen in graphentheoretischem Sinn. Unser „*Fibonacci-Baum*“ soll der Stammbaum der Kaninchen aus der Kaninchenaufgabe von Leonardo von Pisa (s. 1.1) sein. Dieser Baum sieht ungefähr wie folgt aus:



Die Zeit läuft in diesem Bild in  $x$ -Richtung (1. Jahr bis 6. Jahr). Jeder Knoten des Graphs steht also für ein bestimmtes Kaninchenpaar in einem bestimmten Jahr. Knoten, die zum  $k$ . Jahr gehören, nenne ich auch „Knoten  $k$ . Ordnung“. Es gibt also genau  $F_k$  Knoten  $k$ . Ordnung.

In obigem Bild entspricht jedes Kaninchenpaar einem horizontalen Zweig des Baums. Die neu produzierten Paare zweigen nach oben ab.

Es gibt zwei Arten von Knoten: Die einen gehören zu den noch nicht geschlechtsreifen Kaninchenpaaren (an diesen enden folglich genau zwei Kanten), die anderen gehören zu den sich bereits fortpflanzenden Paaren (an solchen enden genau drei Kanten). Wir sagen, daß die Knoten vom Typ  $k$  („klein“) bzw.  $g$  („groß“) sind. Für die Knoten 6. Ordnung habe ich den Typ drangeschrieben.

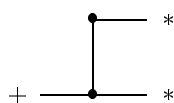
Es gibt genau  $F_{k-1}$  Knoten vom Typ  $g$  der Ordnung  $k$ , und genau  $F_{k-2}$  vom Typ  $k$  der Ordnung  $k$ .

Die Knoten der Ordnung 5 haben (von unten nach oben) die Typen (gkggk), die der Ordnung 6 also die Typen (gkggkkgk). Man sieht, daß diese Sequenzen aus „g“-s und „k“-s übereinstimmen, soweit sie definiert sind (bis zur  $F_5$ . Stelle). Dies gilt lediglich für die Sequenz im 1. Jahr nicht. Dies ist kein Zufall, sondern liegt im wesentlichen daran, daß der Fibonacci-Baum rekursiv definiert ist. Genauer wird dem Leser als Übung überlassen.

Die unendliche Sequenz, die auf diese Weise definiert ist, nenne ich aus Gründen, die später klar werden, „goldene Sequenz“.

Außerdem numerieren wir noch die Knoten in jeder Ordnung von unten nach oben, beginnend mit 0 durch. Für die Knoten 6. Ordnung habe ich die Nummern rechts daneben geschrieben. Wir nennen diese Zahl „*Level-Nummer*“.

Der Fibonacci-Baum entsteht rekursiv einfach dadurch, daß man Stücke folgender Form aneinanderkettet:



Und zwar werden in jedem Schritt an alle freien \*-Enden neue solche Stücke angeklebt, und zwar mit dem +-Ende.

### 5.1.1 Der Stammbaum eine Drohne

Den obigen Fibonacci-Baum kann man auch als Stammbaum einer männlichen Honigbiene, einer Drohne, auffassen. Und zwar entstehen Drohnen aus unbefruchteten Eiern, sie haben also nur eine Mutter, aber keinen Vater.

Nun stelle man sich vor, der Knoten 1. Ordnung steht für eine Drohne. Seine Mutter ist der Knoten 2. Ordnung. Diese Bienenkönigin hat nun ganz normal Vater und Mutter, die beiden Knoten 3. Ordnung, unten (auf Level 0) die Mutter und oben (auf Level 1) den Vater. Und so geht das dann weiter.

Insbesondere sieht man, daß eine Drohne in der  $n$ . Generation  $F_{n-1}$  Vorfahren hat. Außerdem sieht man, daß die Knoten vom Typ (k) zu den Drohnen gehören, diejenigen vom Typ (g) zu den Bienenköniginnen.

## 5.2 Die goldene Sequenz

Zunächst einmal braucht man, um die goldene Sequenz niederzuschreiben, nicht zuerst den Baum aufmalen: Die goldene Sequenz der Länge  $F_n$  entsteht nämlich, wenn man diejenige der Länge  $F_{n-1}$  und diejenige der Länge  $F_{n-2}$  einfach hintereinanderschreibt:

k  
g  
gk  
gkg  
gkggk  
gkggkkgk  
gkggkkggkkgk  
gkggkkggkkggkkgk

Wir wissen schon, daß die Fibonacci-Zahlen etwas mit den Zahlen des goldenen Schnitts  $\eta := (\sqrt{5} - 1)/2$  und  $\zeta := (\sqrt{5} + 1)/2$  zu tun haben. Wir betrachten nun die Folge  $[n\eta]$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Wegen  $|\eta| < 1$  ist

$$a_n := [(n+1)\eta] - [n\eta] \in \{0, 1\}.$$

Die Folge  $(a_n)$  fängt so an:  $(1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, \dots)$ . Und dies ist in der Tat die goldene Sequenz:

**5.2.1. Prop.:**  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist genau die goldene Sequenz, wobei eine „1“ einem „g“ entspricht, und eine „0“ einem „k“.

*Beweis:* s. [Tognetti]. Für den Beweis braucht man Identitäten wie z.B.

$$[(k + F_n)\eta] = F_{n-1} + [k\eta] \quad \text{für } 0 < k < F_{n+1}.$$

Die Zahlen  $[n\eta]$  kann man auch direkt mit Hilfe einer Rekursionsformel ausrechnen:

**5.2.2. Prop.:** Definiert man die Folge  $(G(n))_{n \in \mathbb{N}}$  durch

$$G(1) := 1 \quad \text{und} \quad G(n) := n - G(G(n-1)), \quad \text{so gilt:} \quad G(n) = [(n+1)\eta] = \sum_{k=0}^n a_k.$$

*Beweis:* S. [Tognetti].

### 5.3 Der Fibonacci-Baum und die Zeckendorf-Darstellung

Der Satz von Zeckendorf (4.1.1.) sagte, daß man jede natürliche Zahl eindeutig als Summe nicht konsekutiver Fibonacci-Zahlen schreiben kann. Es war auch nicht schwierig, für ein gegebenes  $n$  diese Darstellung zu konstruieren.

Im Fibonacci-Baum kann man die Darstellung ebenfalls ablesen. Verfolgt man nämlich einen Zweig in diesem Kaninchenstammbaum, so können ja niemals zwei Knoten vom Typ  $k$  aufeinanderfolgen, genau wie in Zeckendorf-Sequenzen niemals zwei 1en aufeinanderfolgen können.

Ist  $n \in \mathbb{N}$  gegeben, so suche man einen (beliebigen) Knoten mit Level-Nummer  $n$ . Man schreibe eine 1, falls der Knoten vom Typ  $k$  ist, und eine 0, falls er vom Typ  $g$  ist. Nun gehe man im Baum zurück, bis man schließlich ins zweite Jahr (Ordnung 2) kommt, und schreibe für jeden Knoten, an dem man vorbeikommt, auf eben beschriebene Weise eine 1 oder eine 0.

So ergibt sich beispielsweise in obigem Bild für  $n = 6$  die Folge

$$\text{kggkg} \quad \text{bzw.} \quad 10010.$$

Dies ist aber genau die zu 6 gehörige Zeckendorf-Sequenz, denn es ist  $6 = F_2 + F_5$ .

Warum dies so ist, ist nicht schwer einzusehen und wird abermals dem Leser überlassen.

## 6 Fibonacci-Zahlen und Kombinatorik

Es gibt eine Vielzahl von Fällen, bei denen die Fibonacci-Zahlen bei kombinatorischen Problemen auftauchen. Die folgende Liste erhebt natürlich keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

### 6.1 Als Anzahl der Zerlegungen in 1en und 2en

Auf wieviele verschiedene Arten kann man die Zahl  $n \in \mathbb{N}$  als Summe von 1en und 2en schreiben, wobei es auf die Reihenfolge der Summation ankommen soll? Also:

$$\begin{array}{llll} 1=1 & 2=1+1 & 3=1+1+1 & 4=1+1+1+1 \\ & =2 & =1+2 & =1+1+2 \\ & & =2+1 & =1+2+1 \\ & & & =2+1+1 \\ & & & =2+2 \end{array}$$

Man ahnt es schon.

**6.1.1. Prop.:** Die Anzahl der Möglichkeiten, die Zahl  $n$  auf diese Weise als Summe von 1en und 2en zu schreiben ist genau  $F_{n+1}$ .

*Beweis:* Durch Induktion. Jede solche Summe hat entweder die Form  $2 + (\text{Summe, die } n - 2 \text{ ergibt})$  oder  $1 + (\text{Summe, die } n - 1 \text{ ergibt})$ .

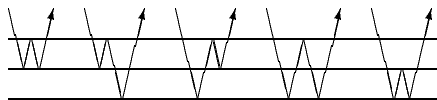
Man kann dies auch aus dem Fibonacci-Baum aus Abschnitt 5 ablesen: Und zwar sollen die  $F_{n+1}$  Möglichkeiten repräsentiert werden durch die  $F_{n+1}$  Knoten  $(n + 1)$ . Ordnung. Zu jedem dieser Knoten führt genau ein Weg, der, angefangen beim Knoten 2. Ordnung, über genau  $n$  Kanten läuft.

Jedesmal, wenn dieser Weg über einen Knoten vom Typ (k) führt, er sich also nicht verzweigen kann, fassen wir die beiden angrenzenden Kanten zu einer einzigen Kante der Länge 2 zusammen. Wir bekommen also eine Sequenz von 1en und 2en, deren Summe genau  $n$  ergibt. Es ist klar, daß sich auf diese Weise genau alle Möglichkeiten ergeben.

## 6.2 Als Anzahl der Spiegelungen an zwei Glasplatten

Ein Lichtstrahl fällt auf zwei übereinandergelegte Glasplatten. An jedem Übergang vom optisch dichteren ins optisch dünnere Medium kann er reflektiert werden. Wieviele verschiedene Wege gibt es für den Lichtstrahl, wenn er sich insgesamt genau  $n$ -mal spiegelt?

Das Bild stellt die Möglichkeiten für  $n = 3$  dar.



Für drei Spiegelungen gibt es also genau  $5 = F_5$  Möglichkeiten.

**6.2.2. Prop.:** Für  $n$  Spiegelungen gibt es genau  $F_{n+2}$  Spiegelungen.

*Beweis:* Es gab auch genau  $F_{n+2}$  Zeckendorf-Sequenzen der Länge  $\leq n$  (Korollar 4.2.5.). Wir sind also fertig, wenn wir die Spiegelungsmöglichkeiten mit den Zeckendorf-Sequenzen identifizieren können. Und das ist in der Tat kein Problem: Eine Spiegelung an der mittleren Grenzschicht entspricht einer „1“, eine Spiegelung an einer der beiden äußeren Grenzschichten einer „0“. Die Zeckendorf-Sequenzen zu obiger Abbildung wären also

$$(1, 0, 1), \quad (1, 0, 0), \quad (0, 0, 1), \quad (0, 0, 0), \quad (0, 1, 0).$$



## A Leonardo von Pisa und das Liber Abaci

Leonardo von Pisa, der auch kurz Fibonacci (für „filius Bonnacci“, Sohn des Bonacci) genannt wird, wurde ca. 1180 in Pisa geboren. Sein Vater war ein Pisaner Kaufmann, der u.a. mit den arabischen Ländern Nordafrikas Handel trieb. Leonardo hatte einen muslimischen Lehrer, und machte Reisen u.a. nach Ägypten, Syrien und Griechenland, und lernte auf diese Weise die hindu-arabischen Ziffern (unsere „arabischen Ziffern“) und die von den arabischen Mathematikern erfundenen Rechenmethoden kennen.

Diese stellt er sehr sorgfältig in seinem 1202 vollendeten Buch „*Liber Abaci*“, dem „Buch vom Abakus“, auch wenn es gerade die algebraischen Methoden behandelte, die den Abakus überflüssig machen sollten, vor. In diesem propagiert er den Gebrauch der Hindu-arabischen Ziffern.

Allerdings benutzt er darin nicht nur Dezimalbrüche und normale Brüche, sondern ebenso Sexagesimalbrüche (Darstellungen von Zahlen zu Basis 60) und Einheitsbrüche (der Form  $\frac{1}{n}$ ), so schreibt er z.B. die Zahl  $\frac{98}{100}$  nicht als 0,98, sondern als  $\frac{1}{100} + \frac{1}{50} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ .

Außerdem benutzt er eine komische Notation, in der z.B.  $\frac{1}{2} \frac{6}{9} \frac{2}{10}$  bedeutet:

$$\frac{1}{2 \cdot 9 \cdot 10} + \frac{6}{9 \cdot 10} + \frac{2}{10}.$$

In dieser Notation liest man z.B., daß wenn  $\frac{1}{4} \frac{2}{3}$  eines rotulus  $\frac{1}{7} \frac{1}{6} \frac{2}{5}$  eines bizantiums wert sind, daß dann  $\frac{1}{8} \frac{4}{9} \frac{7}{10}$  eines bizantiums  $\frac{3}{4} \frac{8}{10} \frac{83}{149} \frac{11}{12}$  eines rotulus wert sind. Die Kaufleute, die mit dieser Notation versuchten, Preise zu errechnen, können einem heute noch leid tun.

Das Liber Abacci enthält aber viele eindrucksvolle Probleme, die von späteren Autoren immer wieder zitiert wurden, so z.B. das Problem mit den Kaninchen (s. Abschnitt 1.1). Ein anderes Beispiel ist folgendes:

Sieben alte Frauen gingen nach Rom; jede von ihnen hatte sieben Maulesel; jeder Maulesel trug sieben Säcke; jeder Sack enthielt sieben Laib Brot, und für jeden Laib Brot sieben Messer; und jedes Messer hatte sieben Scheiden.

Das Liber Abaci, welches in einer zweiten Edition 1228 erschien, wurde Leonardos bekanntestes Buch, auch wenn es in den Schulen nicht weit verbreitet war, und erst im 19. Jh. gedruckt wurde. Weitere Bücher von ihm waren das „*Flos*“ (1225), das „*Liber quadratorum*“ (1225) und die „*Practica geometriac*“ (1220).

Vieles von dem, was in diesen Büchern vorkommt, war zu jener Zeit im mitteleuropäischen Europa völlig unbekannt und konnte von seinen Zeitgenossen nicht verstanden werden. Sie enthalten vieles, was an Diophant, Euklid, die arabischen und chinesischen Mathematiker erinnert.

Gegen 1250 starb Leonardo von Pisa.

Leonardo von Pisa lebte im „dunklen“ Mittelalter; es sollte noch ca. 200 Jahre dauern, bis sich das Dezimalsystem in Europa durchgesetzt haben sollte, und noch 300 Jahre, bis die europäische Mathematik aus dem Schatten der antiken und der arabischen Mathematik treten konnte (die berühmtesten europäischen Mathematiker der nächsten 250 Jahre sind Oresme und Regiomontanus). Die Grundsteine hierfür legte nicht nur Leonardo von Pisa, sondern auch z.B. die Gründung der Universitäten von Bologna, Paris,



Oxford und Cambridge. Außerdem gab es in dieser Zeit wichtige technische Neuerungen, so wurde z.B. das Schießpulver und der Kompaß bekannt (beides ev. aus China), die großen gotischen Kathedralen von Chartres, Notre Dame, Westminster und Reims wurden gebaut (ebenfalls eine bis dahin nicht mögliche technische Leistung). Ein wenig später wurden die ersten mechanischen Uhren gebaut. Die aristotelischen Philosophien und Wissenschaften wurden wieder gelehrt.

(nach [Boyer])

## B Phyllotaxis

### B.1 Zählen von Spiralen

Setzt man ein Paar Kaninchen in einen Garten, der auf allen Seiten von einer Mauer umgeben ist, so wird man in der Realität nur in den seltensten Fällen beobachten, daß die Anzahl der Kaninchenpaare entsprechend der Folge der Fibonacci-Zahlen wächst. Auch die Anzahl der Vorfahren einer Drohne in der  $n$ . Generation kann man im Allgemeinen nicht leicht beobachten.

Es gibt aber einen Fall, wo man in der Natur die Fibonacci-Zahlen wirklich sehen und abzählen kann, nämlich bei Spiralenbildung durch blattähnliche Organe bei Pflanzen. Die Lehre von der Blattstellung heißt „Phyllotaxis“. Mit blattähnlichen Organen sind gemeint: Blätter (natürlich) und vor allem Fruchtblätter, wie z.B. die Schuppen eines Nadelbaumzapfens, die Fruchtspelzen einer Ananas, oder die Samen in einer Sonnenblumenblüte.

Jeder weiß, daß all diese Dinge in Spiralen angeordnet sind. Das Bild zeigt eine typische Sonnenblumenblüte.

Zählt man die Anzahl der linksläufigen und die Anzahl der rechtläufigen Spiralen aus, so stellt man fest, daß es  $(?)$  und  $(?)$  Spiralen sind, zwei konsekutive Fibonacci-Zahlen. Und das ist kein Zufall. In ca. 95% aller Fälle sind die Anzahlen der links- und rechtläufigen Spiralen zwei konsekutive Fibonacci-Zahlen. In den allermeisten anderen Fällen ergeben sich zwei konsekutive Lucas-Zahlen  $(1, 3, 4, 7, 11, 18, \dots)$  (s.1.1.2. (1)).

Bei einer Sonnenblume ändern sich die Anzahlen der Spiralen, wenn man von innen nach außen geht, und zwar wird man weiter außen mehr Spiralen zählen.

Natürlich gibt es auch Blattstellungen, bei denen keinerlei solche Spiralen auftreten: Bei vielen Lilienartigen (Liliales) (z.B. der Clivie) stehen die Blätter in zwei Reihen übereinander. Bei den Lippenblütlern (Taubnessel etc.) und bei der Brennessel in vier Reihen, wobei sich je zwei Blätter gegenüberstehen.

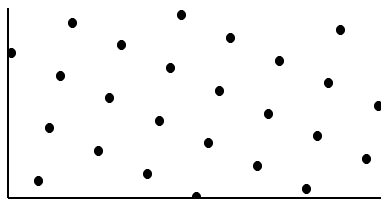
Ein Ziel der Theoretischen Biologie ist es, das Auftreten all dieser verschiedenen Arten von Blattstellungen zu erklären. Leider muß man sagen, daß man noch um einiges von diesem Ziel entfernt ist. Immerhin gibt es einige Modelle, die diverse der obigen Blattstellung, und insbesondere auch das Auftreten der Fibonacci-Zahlen, erklären können.

### B.2 Divergenzwinkel und Kettenbruchentwicklung

Wir stellen uns für den Augenblick vor, daß der vertikale Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Blättern  $r > 0$  ist. Daß sich je zwei Blätter genau gegenüberstehen, soll also im Augenblick ausgeschlossen sein. Weiterhin sollen zwei aufeinanderfolgende Blätter je in einem (orientierten) Winkel  $\theta$  zueinander stehen.  $\theta$  heißt „Divergenzwinkel“. Wir können die Blätter also als Punkte auf einem Zylinder betrachten:

$$P_n := (e^{in\theta}, nr) \in S^1 \times \mathbb{R}.$$

Das folgende Bild zeigt ein Beispiel mit  $\theta \approx 1,822$  und  $r \approx 0,126$ , wobei der Zylinder aufgeschnitten ist. Eingezeichnet sind die Punkte  $P_0, \dots, P_{24}$ .



Im Bild sieht man meiner Meinung nach besonders gut drei Spiralen, die nach links oben laufen, und sieben, die nach rechts oben laufen.

Die Frage ist nun, wie man aus den Zahlen  $r$  und  $\theta$  ausrechnen kann, welche Spiralen am besten zu sehen sind. Dazu entwickelt man  $d/2\pi$  in einen Kettenbruch:

$$\frac{d}{2\pi} = [0, 3, 2, 4, 3].$$

Je nach dem genauen Wert von  $r$  wird dann die Anzahl der links- bzw. rechtsläufigen Spiralen eines der folgenden Zahlenpaare sein (ohne Beweis):

$$\begin{aligned} & \binom{1}{1}, \quad \binom{1}{2}, \quad \binom{1}{3}, \\ & \binom{4}{3}, \quad \binom{7}{3}, \\ & \binom{7}{10}, \quad \binom{7}{17}, \quad \binom{7}{24}, \quad \binom{7}{31}, \\ & \binom{38}{31}, \quad \binom{69}{31}, \quad \binom{100}{31}. \end{aligned}$$

Man bekommt die möglichen Paare also, indem man den euklidischen Algorithmus in der verkehrten Richtung anwendet.

Insbesondere sieht man, daß, wenn der Divergenzwinkel genau  $2\pi \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  ist, die obige Kettenbruchentwicklung

$$\frac{d}{2\pi} = [0, 1, 1, 1, 1, 1, \dots] \text{ ist.}$$

Die Anzahlen der Spiralen sind in diesem Fall immer zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen (vergleiche 1.5.21.). Die Frage, warum bei Pflanzen so häufig die Fibonacci-Zahlen auftreten, reduziert sich also auf die Frage, wieso der Divergenzwinkel den Vollwinkel  $2\pi$  so häufig ungefähr im goldenen Schnitt teilt.

### B.3 Ontogenetische Modelle

Die ersten Erklärungsversuche für das Auftreten der Fibonacci-Zahlen gab es schon im 18. Jhdt.. Man ging damals davon aus, daß das Wachstum von Blättern durch die Beschattung begrenzt wird. Während zum Beispiel bei einem Divergenzwinkel von  $\pi/2$  jedes Blatt genau unter dem viertnächsten Blatt stehen und auf diese Weise nur noch recht wenig Licht abbekommen würde, erweist sich der Winkel des goldenen Schnitts in dieser Hinsicht als optimal.

Heute gilt diese These aber als veraltet. Sie kann auch durch Versuche widerlegt werden. Statt dessen sucht man nach physiologischen und ontogenetischen Modellen, d.h. solchen, die versuchen, das Auftreten der Fibonacci-Zahlen durch Vorgänge bei der Blattenstehung zu erklären.

Wie also entstehen Blätter? Zellteilungen finden bei einer Pflanze normalerweise nur in einem relativ kleinen kegelförmigen Bereich an der Sproßspitze statt, dem „*Ape*x“. Dieser wird meist von den jüngeren Blättern verdeckt und ist deshalb nicht zu sehen. Blätter entstehen als kleine Ausstülpungen (Primordien) etwas unter der Kegelspitze. Welche Vorgänge genau zur Bildung eines solchen Primordiums führen, ist unbekannt.

Es ist aber plausibel anzunehmen, daß die Anwesenheit von älteren Primordien die Entstehung von neuen beeinflusst. So würde verhindert werden, daß die Blätter zu dicht wachsen. Diese Beeinflussung könnte geschehen durch:

- Hemmstoffe
- Konkurrenz um Nährstoffe (Bis die Blätter eigenes Leitgewebe ausgebildet haben, erfolgt die Versorgung mit Nährstoffen durch einfache Diffusion.)

Mit Hilfe solcher und weiterer Annahmen kann man zeigen, daß der Winkel des goldenen Schnitts bevorzugt wird. Allerdings reproduziert kein Modell genau alle in der Wirklichkeit realisierten Blattstellungen.

Die Literatur zu diesem Thema ist umfangreich. Die folgende Auswahl ist relativ willkürlich: [Jean], [Roberts1], [Roberts2], [Douady], [Green], [Yotsumoto].

## Literatur

- [Ando1] ANDO, S.: „A Triangular Array with Hexagon Property Which is dual zu Pascal's Triangle“ in: Applications of Fibonacci numbers II, Proc. of the 2nd Int. Conf. on Fibonacci numbers and their appl., 1986, Kluwer Acad. Publishers.
- [Ando2] ANDO, S.; SATO, D.: „Translatable and rotatable configurations wich give equal product, equal GCD und equal LCM properties sumultaneously“, in: Applications of Fibonacci numbers III, Proc. of the 3rd Int. Conf. on Fibonacci numbers and their appl., 1988, Kluwer Acad. Publishers 1990.
- [Aydin1] AYDIN, H.: „Recurrence relations in finite nilpotent groups“, Ph.D. thesis, Bath (1991).
- [Aydin2] AYDIN, H.; SMITH, G.C.: „Fourier Analysis in finite nilpotent groups“, in: Applications of Fibonacci numbers V, Proc. of the 5th Int. Conf. on Fibonacci numbers and their appl., 1993, Kluwer Acad. Publishers 1990.
- [Bicknell] BICKNELL, M.: „A Primer for the Fibonacci Numbers: Part VII; Introduction to Fibonacci Polynomials and Their Divisibility Properties.“ The Fibonacci Quarterly, 8 (1970), S.407-420
- [Boyer] BOYER, C.B.: „A history of mathematics“, John Wiley and sons Inc., 1968.
- [Brugia] BRUGIA, O.; FILIPPONI, P.; MAZZARELLA, F.: „The Ring of Fibonacci (Fibonacci „Numbers“ with Matrix Subscript“, in: Applications of Fibonacci numbers III, Proc. of the 3rd Int. Conf. on Fibonacci numbers and their appl., 1988, Kluwer Acad. Publishers 1990.
- [Clary] CLARY, S.; HEMENWAY, P.D.: „On sums of cubes of Fibonacci Numbers“, in: Applications of Fibonacci numbers V, Proc. of the 5th Int. Conf. on Fibonacci numbers and their appl., 1992, Kluwer Acad. Publishers 1993.
- [Cohn] COHN, J.H.E.: „Square Fibonacci numbers etc.“, The Fibonacci Quarterly 2 (1964), 109-113
- [Douady] DOUADY, S.; COUDER, Y.: „Phyllotaxis as a physical self-organized growth process“, Phys. Rev. Lett. 68, 2098-2001?
- [Drmota] DRMOTA, M.: „On generalized Fibonacci Numbers of Graphs“, in: Applications of Fibonacci numbers III, Proc. of the 3rd Int. Conf. on Fibonacci numbers and their appl., 1988, Kluwer Acad. Publishers 1990.
- [Filipponi] FILIPPONI, P.; FREITAG, H.T.: „The Zeckendorf representation of  $\{F_{kn}/F_n\}$ “, in: Applications of Fibonacci numbers V, Proc. of the 5th Int. Conf. on Fibonacci numbers and their appl., 1992, Kluwer Acad. Publishers 1993.
- [Götsch] GÖTTSCHE, G.: „Über die mittlere Periodenlänge der Fibonacci-Folge modulo  $p$ “, Dissertation 1982, Fakultät für Math. und Nat.Wiss. Universität Hannover
- [Green] GREEN, P.: „Phyllotactic patterns: characterization by geometrical activity at the formative region“, J. Theor. Biol. 128 (1987) 387-395.
- [Hillman] HILLMAN, A.P., HOGGAT, V.E.JR.: „Exponents of Primes in Generalized Binomial Coefficients“, J. für Reine und Angewandte Mathe., 262-263 (1973), S.375-380.
- [Hoggat1] HOGGAT, V.E.JR., BICKNELL, M.: „Some new Fibonacci Identities“, The Fibonacci Quarterly 2 (1964), 29-32.
- [Hoggat2] HOGGAT, V.E.JR., HANSELL, W.: „The Hidden Hexagon Squares“, The Fibonacci Quarterly 9 (1971), 120-133
- [Imada] IMADA, NAOTAKA: „An inverse theorem on Fibonacci numbers“, in: Applications of Fibonacci numbers III, Proc. of the 3rd Int. Conf. on Fibonacci numbers and their appl., 1988, Kluwer Acad. Publishers 1990.
- [Jean] JEAN, R.V.: „Mathematical Approach to Pattern and Form in Plant Growth“, John Wiley and Sons, 1984.
- [Jones1] JONES, J.P.: „Diophantine representation of the set of Fibonacci numbers“, The Fibonacci Quarterly, Vol.13 (1975), 84-88.
- [Jones2] JONES, J.P.: „Diophantine represetation of non-Fibonacci numbers“, in: Applications of Fibonacci numbers V, Proc. of the 5th Int. Conf. on Fibonacci numbers and their appl., 1992, Kluwer Acad. Publishers 1993.
- [Kiss] KISS, P.: „Primitive divisors of Lucas numbers“, in: Applications of Fibonacci numbers, Proc. of the 2nd Int. Conf. on Fibonacci numbers and their appl., 1986, Kluwer Acad. Publishers 1988
- [Kuipers] KUIPERS, L.; SHIUE, J.S.: „A distribution property of the sequence of Fibonacci numbers“, The Fibonacci Quarterly, 10 (1973), 375-376, 392
- [Lagarias] LAGARIAS, J.C., WEISSNER, D.P.: „Fibonacci and Lucas cubes“, The Fibonacci Quarterly 19 (1981), 39-43
- [Long1] LONG, CALVIN T.: „Some binomial Fibonacci Identities“, in: Applications of Fibonacci numbers III, Proc. of the 3rd Int. Conf. on Fibonacci numbers and their appl., 1988, Kluwer Acad. Publishers 1990.
- [Long1] LONG, C.A.T.; SHIRO ANDO: „Two generalizations of Gould's Star of David Theorem“, in: Applications of Fibonacci numbers III, Proc. of the 3rd Int. Conf. on Fibonacci numbers and their appl., 1988, Kluwer Acad. Publishers 1990.
- [Luo] LUO, M.: „On tringular Fibonacci Numbers“, The Fibonacci Quarterly, 27 (1989), 98-108.
- [Mahon] MAHON, BR.J.M.; HORADAM, A.F.: „A survey of properties of third order Pell diagonal functions“ in: Applications of Fibonacci numbers III, Proc. of the 3rd Int. Conf. on Fibonacci numbers and their appl., 1988, Kluwer Acad. Publishers 1990.

- [Makarov] MAKAROV, GOLUZINA, LODKIN, PODKORYTOV: „Selected Problems in real analysis“, AMS, Providence Rhode Island, 1992.
- [Matiyasevich] MATIYASEVICH, Y.V., GUY, R.K.: „A new formula for  $\pi$ “, Amer. Math. Monthly 93 No.8 (1986) 631-635.
- [Niederreiter] NIEDERREITER, H.: „Distribution of Fibonacci numbers mod  $5^k$ “, The Fibonacci Quarterly, 10 (1972), 373-374
- [Prodinger] PRODINGER, H.; TICHY, R.F.: „Fibonacci Numbers of Graphs“, The Fibonacci Quarterly 20 (1982), 16-21
- [Roberts1] ROBERTS, D.W.: „A chemical contact pressure model for phyllotaxis“, J. Theor. Biol. 108 (1984) 481-490.
- [Roberts2] ROBERTS, D.W.: „The chemical contact pressure model for phyllotaxis – application to phyllotaxis changes in seedlings and to anomalous phyllotaxis systems“, J. Theor. Biol. 125 (1987) 141-161.
- [Robbins] ROBBINS, N.: „Fibonacci numbers of the form  $px^2 \pm 1$ ,  $px^3 \pm 1$ , where  $p$  is prime“, in: Applications of Fibonacci numbers, Proc. of the 2nd Int. Conf. on Fibonacci numbers and their appl., 1986, Kluwer Acad. Publishers 1988
- [Sato] SATO, D.: „Star of David(II) - A simple Proof of Ando's Theorem“ in: Applications of Fibonacci numbers II, Proc. of the 2nd Int. Conf. on Fibonacci numbers and their appl., 1986, Kluwer Acad. Publishers.
- [Spickerman] SPICKERMAN, W.R.: „Binets Formula for the Tribonacci Sequence“, The Fibonacci Quarterly 20 No.2 (1982), 118-120.
- [Tognetti] TOGNETTI, K.; WINLEY, G.; VAN RAVENSTEIN, T.: „The Fibonacci tree, Hofstadter and the golden string“, in: Applications of Fibonacci numbers III, Proc. of the 3rd Int. Conf. on Fibonacci numbers and their appl., 1988, Kluwer Acad. Publishers 1990.
- [Vorobev] VOROB'EV, N.N.: „Fibonacci Numbers“, Pergamon Press, 1961.
- [Wall] WALL, D.D.: „Fibonacci-series modulo  $m$ “, Amer. Math. Monthly 67 (1960), 525-532.
- [Ward] WARD, M.: „Note on divisibility sequences“, Bull. Amer. Math. Soc. 42 (1936), 843-845
- [Weger] WEGER, B.M.M. DE: „A curious property of the eleventh Fibonacci number“, Rocky mountain J. of Math. 25 (1995) 977-994.
- [Yotsumoto] YOTSUMOTO, A.: „A diffusion model for phyllotaxis“, J. Theor. Biol. 162 (1993) 131-151.