Fundamentos de Computação II

2024/2

Profa. Dra. Juliana Félix

jufelix16@gmail.com

PUC GOIÁS

Aula de hoje

- Definições básicas
- Técnicas de prova
  - Terminologia
  - Prova direta
- Exercícios

Definições básicas

Divisibilidade

Sejam a e b inteiros, com $a \neq 0$. Dizemos que a **divide** b se existe um inteiro c tal que $b = ac$. Dizemos também que:

- b é divisível por a;
- a é um fator de b;
- a é um divisor de b;
- b é múltiplo de a.

A notação correspondente é $a \mid b$, quando a divide b, e $a \nmid b$, em caso contrário.

Divisibilidade

Observações:

1. Todo inteiro x divide 0 (zero).
2. d | b ↔ (-d) | b.
3. Todo inteiro a é divisível por 1 e por a.

Exemplos:

- $3 \mid 9$
- $4 \mid 12$
- $6 \nmid 16$
- $3 \mid -15$
- $5 \mid 0$

PUC GOIÁS

Paridade

PAR

Um inteiro a é chamado **par** se existe um inteiro x tal que $a = 2x$, ou seja, $2 \mid a$.

ÍMPAR

Um inteiro a é chamado **ímpar** se existe um inteiro x tal que $a = 2x + 1$.

Observação: Um inteiro é sempre par ou ímpar, e nenhum inteiro é par e ímpar ao mesmo tempo.

Primalidade

- Um número p é **primo** se $p > 1$ e se os únicos divisores positivos de p são 1 e p.

- Um número positivo a é chamado de **composto** se existe um inteiro b tal que $1 < b < a$ e $b \mid a$.
  - Em outras palavras, um número é composto se ele não é primo.

- O número 1 não é primo nem composto!

Técnicas de Prova

Terminologia

- Um **teorema** é uma afirmação declarativa sobre matemática, para a qual existe uma **prova** ou **demonstração**.
- Uma **prova** ou **demonstração** é uma argumentação que mostra, de maneira indiscutível, que uma afirmação é verdadeira.

Provas ou demonstrações

Alguns exemplos de afirmações que podem ser provadas matematicamente:

- A soma de dois números inteiros pares é sempre par.
- Todo número primo maior que 2 é ímpar.
- A soma dos dígitos de qualquer múltiplo de 9 é um múltiplo de 9.
- O produto de dois números negativos é sempre positivo.
- Todo número inteiro terminado em 0 ou 5 é divisível por 5.
- Para qualquer número natural $n \geq 1$, a soma dos primeiros n números naturais é dada por $(n(n+1))/2$.

Reestruturação de sentenças

"se p, então q"
($p \rightarrow q$)

Antes de mais nada, é importante saber reestruturar, logicamente, as afirmações a serem provadas (demonstradas).

Exemplo: Prove que a soma de dois números inteiros pares é par.

Reformulação: Se x e y são inteiros pares, então x + y também é par.

Reestruturação de sentenças

Exercício:

Reestruture as seguintes afirmações na forma "se p, então q".

a) O produto de um inteiro ímpar e um inteiro par é par.
b) O quadrado de um inteiro ímpar é ímpar.
c) A soma dos dígitos de qualquer múltiplo de 9 é um múltiplo de 9.
d) Um número inteiro é múltiplo de 5 se termina em 0 ou 5.

Técnicas de demonstração

Técnicas mais comuns de demonstração:

- Demonstração por vacuidade;
- Demonstração por trivialização;
- Demonstração direta; → $(p \rightarrow q)$
- Demonstração por contraposição; → $(\neg q \rightarrow \neg p)$
- Demonstração por contradição ou absurdo; → $\neg(p \land \neg q)$
- Demonstração por indução.

Demonstração por vacuidade

Demonstração por Vacuidade

A demonstração por vacuidade é utilizada para estabelecer **casos especiais de teoremas**.

Esse tipo de demonstração parte do princípio de que **quando p é falsa, a afirmação é verdadeira**.

p	q	$p \to q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Exemplo

isto é

tal que

Seja a um inteiro. Se a é um quadrado (i.e. existe b $\in$ Z t.q. a = b^2) e a é primo, então a é negativo.

A afirmação é verdadeira ou falsa?

- Neste caso, como a hipótese é falsa, a afirmação é verdadeira!

Exemplo

Seja a um inteiro. Se a é um quadrado (i.e. existe b $\in$ Z t.q. $a = b^2$) e a é primo, então a é negativo.

A afirmação é verdadeira ou falsa?

- Neste caso, como a hipótese é falsa, a afirmação é verdadeira!

Nesta situação, basta justificarmos que **a afirmação é verdadeira por vacuidade**, pois a hipótese é falsa (visto que, por definição, se um número a é primo, então a não pode ser o quadrado de outro número b).

Demonstração por trivialização

Demonstração por trivialização

A demonstração por trivialização também é utilizada para estabelecer **casos especiais de teoremas**.

É utilizada em **indução matemática**.

a ser visto mais adiante

Ideia geral

Exemplo:

Se a e b são inteiros positivos com $a \geq b$, então $a^n \geq b^n$, para todos os inteiros.

Mostre que P(0) é verdadeira.

caso trivial, simples de ser verificado.

Ideia geral

Exemplo:

Se a e b são inteiros positivos com $a \geq b$, então $a^n \geq b^n$, para todos os inteiros. Mostre que P(0) é verdadeira.

Reescrita: Sejam a, b e n inteiros ≥ 0. Seja P(n) a seguinte proposição:

P(n): Se $a \geq b$, então $a^n \geq b^n$. Mostre que P(0) é verdadeira.

como queríamos demonstrar, c.q.d.

Demonstração: Queremos mostrar que P(0) é verdadeira. Mas P(0) é: "Se $a \geq b$, então $a^0 \geq b^0$". Como $a^0 = b^0 = 1$, temos que a conclusão da condicional "Se $a \geq b$, então $a^0 \geq b^0$" é verdadeira. Logo, P(0) é verdadeira. $\square$

Prova direta

Prova direta (p → q)

Na demonstração direta, queremos mostrar que p → q (que p implica logicamente em q).

- Para isso, precisamos apresentar uma sequência de implicações lógicas que começa em p e termina em q.
- Essa sequência de implicações/passos devem partir da hipótese (p) e levar à conclusão desejada (q).
- Algumas vezes requer insights particulares e podem ser bastante astuciosas.
    - Requer prática!!!

Passos importantes

- Reescreva a afirmação em notação adequada.
- Identifique a hipótese e a conclusão desejada.
- Escreva a(s) primeiras e as última(s) sentença(s) da prova (hipótese e conclusão, respectivamente).
- Desenvolva a demonstração matemática a partir do início, utilizando as definições apropriadas.
- Avalie o que já se sabe e o que necessita. Estabeleça o elo entre as duas partes.

Esquema de demonstração direta

Exemplo: Prove que a soma de dois inteiros pares é par.

Reformulação: Se x e y são inteiros pares, então x + y é um inteiro par.

- Hipótese (p): x e y são inteiros pares
- Conclusão (q): x+y é um inteiro par.

Demonstração:
Sejam x e y inteiros pares.
...

Portanto, x+y é um inteiro par. $\square$

como queríamos demonstrar, c.q.d.

Exercícios

Divisibilidade

PUC GOIÁS

1. Prove que $3 \mid 9$.
2. Prove que $4 \mid 12$.
3. Prove que $6 \nmid 16$.
4. Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Mostre que se $a \mid b$ e $a \mid c$, então $a \mid (b + c)$.

Paridade

5. Se x e y são inteiros pares, então x + y é um inteiro par.
6. Prove que a soma de dois inteiros pares é par.

•••

Recapitulando...

- Definições básicas
  - Divisibilidade, Paridde, Primalidade
- Técnicas de prova
  - Prova por vacuidade
  - Prova por trivialidade
  - Prova direta
- Exercícios

Atividade

Atividade 1 para entrega dia 11/09/2024.

- Disponível em: https://github.com/jufelix/FC2
- A atividade pode ser feita em duplas.
- A atividade deve ser entregue manuscrita ou impressa até o fim da aula.