# Fundamentos de Computação II

2024/2



Profa. Dra. Juliana Félix jufelix16@gmail.com

### Aula de hoje

PUC GOLÁS

- Revisão aula passada
  - Definições importantes
    - Divisibilidade, Paridade, Primalidade
- Técnicas de prova
  - Prova por vacuidade
  - Prova por trivialização
  - Prova direta
  - Prova por contraposição



# Revisão

### **Definições Importantes**



Sejam a e b inteiros, com a  $\neq$  0. Dizemos que a **divide** b (e escrevemos a|b) se existe um inteiro c tal que b = ac.

Um inteiro a é chamado par se existe um inteiro x tal que a = 2x, ou seja,  $2 \mid a$ .

Um inteiro a é chamado **ímpar** se existe um inteiro x tal que a = 2x + 1.

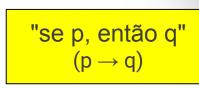
Um número p é **primo** se p > 1 e se os únicos divisores positivos de p são 1 e p.

#### Teorema e Prova



- Um **teorema** é uma afirmação declarativa sobre matemática, para a qual existe uma **prova** ou **demonstração**.
- Uma prova ou demonstração é uma argumentação que mostra, de maneira indiscutível, que uma afirmação é verdadeira.

#### Reestruturação de sentenças





Antes de mais nada, é importante saber reestruturar, logicamente, as afirmações a serem provadas (demonstradas).

**Exemplo**: Prove que a soma de dois números inteiros pares é par.

Reformulação: Se x e y são inteiros pares, então x + y também é par.

## Técnicas de demonstração



Técnicas mais comuns de demonstração:

- Demonstração por vacuidade;
- Demonstração por trivialização;
- , ,
- Demonstração direta;
- Demonstração por contraposição;
- Demonstração por contradição ou absurdo;
- Demonstração por indução.

 $(p \rightarrow q)$ 

 $(\neg q \rightarrow \neg p)$ 

¬(p ∧ ¬q)



# Demonstração por vacuidade

#### Demonstração por Vacuidade

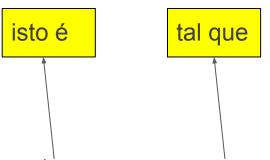


A demonstração por vacuidade é utilizada para estabelecer **casos especiais de teoremas**.

Esse tipo de demonstração parte do princípio de que **quando p é falsa, a afirmação é verdadeira**.

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	V
E	٧	V
٧	F	F
٧	٧	V

#### Exemplo





Seja a um inteiro. Se a é um quadrado (i.e. existe  $b \in Z$  t.q.  $a = b^2$ ) e a é primo, então a é negativo.

A afirmação é verdadeira ou falsa?

 Neste caso, como a hipótese é falsa, a afirmação é verdadeira!

### Exemplo



Seja a um inteiro. Se a é um quadrado (i.e. existe  $b \in Z$  t.q.  $a = b^2$ ) e a é primo, então a é negativo.

A afirmação é verdadeira ou falsa?

Neste caso, como a hipótese é falsa, a afirmação é verdadeira!

Nesta situação, basta justificarmos que **a afirmação é verdadeira por vacuidade**, pois a hipótese é falsa (visto que, por definição, se um número a é primo, então a não pode ser o quadrado de outro número b).



# Demonstração por trivialização

## Demonstração por trivialização



A demonstração por trivialização também é utilizada para estabelecer casos especiais de teoremas.

É utilizada em indução matemática.

a ser visto mais adiante

### Ideia geral



#### Exemplo:

Se a e b são inteiros positivos com a  $\geq$  b, então a<sup>n</sup>  $\geq$  b<sup>n</sup>, para todos os inteiros.

Mostre que P(0) é verdadeira.

caso trivial, simples de ser verificado.

### Ideia geral



#### Exemplo:

Se a e b são inteiros positivos com a  $\geq$  b, então a<sup>n</sup>  $\geq$  b<sup>n</sup>, para todos os inteiros maiores ou iguais a 0. Mostre que P(0) é verdadeira.

**Reescrita**: Sejam a, b e n inteiros ≥ 0. Seja P(n) a seguinte proposição:

P(n): Se  $a \ge b$ , então  $a^n \ge b^n$ . Mostre que P(0) é verdadeira.

como queríamos demonstrar, c.g.d.

**Demonstração**: Queremos mostrar que P(0) é verdadeira. Mas P(0) é: "Se  $a \ge b$ , então  $a^0 \ge b^0$ ". Como  $a^0 = b^0 = 1$ , temos que a conclusão da condicional "Se  $a \ge b$ , então  $a^0 \ge b^0$ " é verdadeira. Logo, P(0) é verdadeira.



# Prova direta

#### Prova direta $(p \rightarrow q)$



Na demonstração direta, queremos mostrar que  $p \rightarrow q$  (que p implica logicamente em q).

- Para isso, precisamos apresentar uma sequência de implicações lógicas que começa em p e termina em q.
- Essa sequência de implicações/passos devem partir da hipótese
   (p) e levar à conclusão desejada (q).
- Algumas vezes requer insights particulares e podem ser bastante astuciosas.
  - Requer prática!!!

#### **Passos importantes**

PUC GOIÁS

- Reescreva a afirmação em notação adequada.
- Identifique a hipótese e a conclusão desejada.
- Escreva a(s) primeiras e as última(s) sentença(s) da prova (hipótese e conclusão, respectivamente).
- Desenvolva a demonstração matemática a partir do início, utilizando as definições apropriadas.
- Avalie o que já se sabe e o que necessita. Estabeleça o elo entre as duas partes.

## Esquema de demonstração direta



**Exemplo**: Prove que a soma de dois inteiros pares é par.

Reformulação: Se x e y são inteiros pares, então x + y é um inteiro par.

- Hipótese (p): x e y são inteiros pares
- Conclusão (q): x+y é um inteiro par.

# Demonstração: Sejam x e y inteiros pares. ... Portanto, x+y é um inteiro par.

como queríamos demonstrar, c.g.d.

#### **Exercícios**



- 1. Prove que 5 | 20.
- 2. Prove que 6 não divide 16.
- 3. Sejam a, b,  $c \in Z$ . Mostre que se a | b e a | c, então a | (b + c).
- 4. Se x e y são inteiros pares, então x + y é um inteiro par.
- 5. Prove que a soma de dois inteiros ímpares é par.



# Prova por contrapositiva

# A contrapositiva de $(p \rightarrow q)$



Se lembram da tabela de equivalências conhecidas para a condicional?

contrapositiva

#### Reescrita da condicional:

$$p \to q \equiv \neg p \lor q$$

$$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$$

$$\neg p \to q \equiv \neg q \to p$$

$$\neg p \to q \equiv p \lor q$$

$$\neg (p \to \neg q) \equiv p \land q$$

$$\neg (p \to q) \equiv p \land \neg q$$

$$(p \to q) \land (p \to r) \equiv p \to (q \land r)$$

$$(p \to r) \land (q \to r) \equiv (p \lor q) \to r$$

$$(p \to q) \lor (p \to r) \equiv p \to (q \lor r)$$

$$(p \to r) \lor (q \to r) \equiv (p \land q) \to r$$

### Prova por contraposição



Na demonstração por contraposição ( $\neg q \rightarrow \neg p$ ), realizamos a **prova direta** da **contrapositiva** da afirmação original.

Assim, o primeiro passo para realizar a demonstração de uma afirmação utilizando a técnica da contraposição, é identificar a contrapositiva da afirmação!

## Prova por contraposição



Na demonstração por contraposição ( $\neg q \rightarrow \neg p$ ), realizamos a **prova direta** da **contrapositiva** da afirmação original.

Assim, o primeiro passo consiste em identificar a contrapositiva da afirmação original.

**Original**: Seja n um inteiro. Se n² é ímpar, então n é ímpar.

Contrapositiva: Se n é par, então n² é par.

hipótese conclusão

#### Prova por contraposição



Depois de obter a afirmação na sua forma contrapositiva, podemos prová-la como fazemos com a demonstração direta.

**Original**: Seja n um inteiro. Se n² é ímpar, então n é ímpar.

Contrapositiva: Se n é par, então n<sup>2</sup> é par.

#### Demonstração:

Suponha que n é par.

• •

Logo,  $n^2$  é par. Portanto, podemos concluir, por contrapositiva, que se  $n^2$  é ímpar, então n é ímpar.

### **Exemplos**



- 1. Se o quadrado de um inteiro é par, então este número também é par.
- 2. Sejam a, b inteiros. Se ab é ímpar, então a e b são ímpares.

## Recapitulando...

PUC GOLÁS

- Definições básicas
  - o Divisibilidade, Paridade, Primalidade
- Técnicas de prova
  - Prova por vacuidade
  - Prova por trivialidade
  - Prova direta
  - Prova por contraposição
- Exercícios

#### **Atividade**



Atividade 1 para entrega até 23:59 de domingo, dia 15/09/2024.

- A atividade pode ser feita em duplas.
- A atividade deve ser entregue em .pdf para o email jufelix16@gmail.com.
  - Se você fizer a atividade manuscrita, escaneie sua solução e garanta a legibilidade do conteúdo!
  - o O assunto do email deve ser exatamente:
    - [FCII] Atividade 1 **nome do aluno 1**; **nome do aluno 2** (se houver)

#### Leitura Recomendada



- Capítulo 2 do livro Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação, de Judith L. Gersting.
- Capítulo 4 do livro Matemática Discreta com Aplicações, de Susanna S. Epp

**Atividade sugerida**: resolução dos exemplos solucionados pelos autores.