Fundamentos de Computação II

2024/2

Profa. Dra. Juliana Félix

jufelix16@gmail.com

Aula de hoje

- Tabelas-verdade
- Equivalências Lógicas
- Quantificadores e Pertinência

Tabelas-verdade

Negação (¬p)

- Seja p uma proposição. A negação de p, denotada por ¬p (e também por $\overline{p}$ ou ~p), é a sentença "não é o caso de p".
- A proposição ¬p é lida como "não p". O valor-verdade da negação de p é o oposto do valor-verdade de p.

p	$\neg p$
F	V
V	F

Conjunção (∧)

- Sejam p e q proposições. A conjunção de p e q, denotada por $p \wedge q$, é a proposição “p e q”.
- A conjunção ($p \wedge q$) é verdadeira quando ambos os valores-verdade são V, e falsa em qualquer outro caso.
- Pode ser expressa por palavras como: mas, todavia, contudo, no entanto, visto que, enquanto, além disso, embora

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Disjunção (∨)

- Sejam p e q proposições. A disjunção de p e q, denotada por p ∨ q, é a proposição “p ou q”.
- A disjunção (p ∨ q) é falsa se os valores-verdade de p e q são ambos F, e verdadeira em qualquer outro caso.

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Disjunção exclusiva (⊕)

- Sejam p e q proposições. A disjunção exclusiva de p e q, denotada por p ⊕ q, é a proposição “p ou exclusivo q”.
- A disjunção exclusiva é verdadeira quando os valores-verdade de p e q são distintos e falsa quando são idênticos.

p	q	$p \oplus q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	F

Exemplo

- Seja a proposição p: “Hoje é sexta-feira.”
- Seja a proposição q: “Hoje está chovendo.”

Então,

- $p \land q$: “Hoje é sexta-feira **e** hoje está chovendo.”
- $p \lor q$: “Hoje é sexta-feira **ou** está chovendo.”
- $p \oplus q$: “**Ou** hoje é sexta-feira, **ou** está chovendo.”

Condicional ($p \to q$)

Sejam p e q proposições.

- A proposição condicional $p \to q$ é a proposição "se p, então q".
- A condicional é falsa quando o valor-verdade de p é V e o de q é F, e é verdadeira em qualquer outro caso.
- Dizemos que **p** é a **hipótese** (ou antecedente ou premissa) e **q** é a **conclusão** (ou consequente ou consequência).

p	q	$p \to q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Exemplo: **Se** Pedro foi aprovado, **então** ele obteve média maior ou igual a 6,0 na disciplina FC II

PUC GOIÁS

Bicondicional ($p \leftrightarrow q$)

Sejam p e q proposições.

- A proposição bicondicional ($p \leftrightarrow q$) é a proposição "p se e somente se q".
- Ela é verdadeira sempre que p e q têm o mesmo valor-verdade e é falsa em qualquer outro caso.
- É uma abreviação de $(p \to q) \land (q \to p)$.

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	V
V	F	F
F	V	F
V	V	V

Exemplo: Pedro será aprovado **se e somente se** obtiver média maior ou igual a 6,0 na disciplina FC II

Prioridade entre operadores

Operador	Prioridade
$\neg$	1
$\land, \lor$	2
$\rightarrow, \leftrightarrow$	3

Seguindo a prioridade dos operadores, a fórmula

$$P \rightarrow \neg Q \land R$$

deve ser interpretada como:

$$(P \rightarrow ((\neg Q) \land R))$$

Tautologia e Contradição

- Uma proposição composta (fórmula) que é sempre verdadeira é chamada de **tautologia** ou é dita que é válida.
- Uma fórmula que é sempre falsa é chamada de **contradição**.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
F	V	V	F
V	F	V	F

Equivalências Lógicas

Equivalência Lógica (⇔ ou ≡)

- Dadas duas fórmulas p e q, p **equivale** a q se e somente se todos os valores-verdade são idênticos.
  - Ou seja, p e q têm a mesma tabela-verdade.
- Também podemos dizer que p e q são logicamente equivalentes se $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia.
- A notação utilizada é $p \Leftrightarrow q$ ou $p \equiv q$.

Leis de De Morgan

Augustus De Morgan (1806–1871) provou as seguintes equivalências lógicas, que ficaram conhecidas como Leis de De Morgan:

$$\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$$
$$\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$$

Exercício: Use as leis de De Morgan para expressar as negações de:

a) João tem um carro e uma moto.

b) Maria vai ao cinema ou ao teatro.

Equivalências conhecidas

Equivalências	Nome
$p \land V \equiv p$ $p \lor F \equiv p$	Propriedades de identidade
$p \lor V \equiv V$ $p \land F \equiv F$	Propriedades de dominação
$p \lor p \equiv p$ $p \land p \equiv p$	Propriedades idempotentes
$p \lor q \equiv q \lor p$ $p \land q \equiv q \land p$	Propriedades comutativas
$(p \lor q) \lor r \equiv p \lor (q \lor r)$ $(p \land q) \land r \equiv p \land (q \land r)$	Propriedades associativas

Equivalências	Nome
$p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$ $p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$	Propriedades distributivas
$\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$ $\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$	Leis de De Morgan
$p \lor (p \land q) \equiv p$ $p \land (p \lor q) \equiv p$	Propriedades de absorção
$\neg(\neg p) \equiv p$ $p \lor \neg p \equiv V$ $p \land \neg p \equiv F$	Propriedades de negação

PUC GOIÁS

Equivalências conhecidas

Reescrita da condicional:

$$p \to q \equiv \neg p \lor q$$
$$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$$
$$\neg p \to q \equiv \neg q \to p$$
$$\neg p \to q \equiv p \lor q$$
$$\neg(p \to \neg q) \equiv p \land q$$
$$\neg(p \to q) \equiv p \land \neg q$$
$$(p \to q) \land (p \to r) \equiv p \to (q \land r)$$
$$(p \to r) \land (q \to r) \equiv (p \lor q) \to r$$
$$(p \to q) \lor (p \to r) \equiv p \to (q \lor r)$$
$$(p \to r) \lor (q \to r) \equiv (p \land q) \to r$$

contrapositiva

Reescrita da bicondicional:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \land (q \to p)$$
$$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$$
$$p \leftrightarrow q \equiv (p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)$$
$$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$$

Quantificadores e Pertinência

Quantificador Universal (∀)

O quantificador universal (∀) é utilizado para indicar que uma proposição é verdadeira **para todos** os elementos de um domínio.

- Notação: $\forall x\ P(x)$, onde $P(x)$ é a proposição envolvendo x.

Exemplo:

- "Todos os humanos são mortais."
- Formalmente: $\forall x\ (Humano(x) \rightarrow Mortal(x))$.
- Interpretação: Para qualquer valor de x, se x é um humano, então x é mortal.

Quantificador Existencial (∃)

O quantificador existencial (∃) é utilizado para indicar que **existe** pelo menos um elemento no domínio para o qual a proposição é verdadeira.

- Notação: $\exists x P(x)$, onde $P(x)$ é a proposição envolvendo x.

Exemplo:

- "Existe pelo menos uma cidade que é a capital do Brasil."
- Formalmente: $\exists x\ (\text{Cidade}(x) \land \text{Capital}(x,\text{Brasil}))$.
- Interpretação: Existe algum x que é uma cidade e é a capital do Brasil.

PUC GOIÁS

Negação de Quantificadores

A negação de um quantificador universal se transforma em um quantificador existencial e vice-versa, invertendo a condição da proposição.

- $\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x \neg P(x)$
- $\neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x \neg P(x)$

Exemplo:

- "Não é verdade que todos os alunos passaram no exame."
- Formalmente: $\neg(\forall x\, Aluno(x) \rightarrow Passou(x)) \equiv \exists x\, (Aluno(x) \land \neg Passou(x))$.
- Interpretação: Existe pelo menos um x no domínio que é um aluno e não passou no exame.

PUC GOIÁS

Pertinência (∈)

Expressa a relação entre um elemento e um conjunto.

Ao dizer que $x \in A$, isso significa que o elemento x pertence ao conjunto A.

Exemplo:

- "O número 3 pertence ao conjunto dos números naturais."
  - Formalmente: $3 \in N$, onde N é o conjunto dos números naturais.
- "O número 7 não pertence ao conjunto dos números pares."
  - Formalmente: $7 \notin$ Conjunto dos números pares.

Recapitulando...

- Tabelas-verdade
    - Negação, conjunção, disjunção, disjunção exclusiva, condicional, bicondicional, prioridade entre operadores lógicos
- Equivalências Lógicas
    - Definição, Leis de De Morgan, outras equivalências conhecidas
- Quantificadores e Pertinência
    - $\forall$, $\exists$, $\nexists$, $\in$, $\notin$