Fundamentos de Computação II

2024/2

Profa. Dra. Juliana Félix

jufelix16@gmail.com

PUC GOIÁS

Aula de hoje

- Revisão aula passada
  - Definições importantes
    - Divisibilidade, Paridade, Primalidade
- Técnicas de prova
  - Prova por vacuidade
  - Prova por trivialização
  - Prova direta
  - Prova por contraposição

Revisão

Definições Importantes

Sejam a e b inteiros, com $a \neq 0$. Dizemos que a **divide** b (e escrevemos $a|b$) se existe um inteiro c tal que $b = ac$.

Um inteiro a é chamado **par** se existe um inteiro x tal que $a = 2x$, ou seja, $2 \mid a$.

Um inteiro a é chamado **ímpar** se existe um inteiro x tal que $a = 2x + 1$.

Um número p é **primo** se $p > 1$ e se os únicos divisores positivos de p são 1 e p.

Teorema e Prova

- Um **teorema** é uma afirmação declarativa sobre matemática, para a qual existe uma **prova** ou **demonstração**.
- Uma **prova** ou **demonstração** é uma argumentação que mostra, de maneira indiscutível, que uma afirmação é verdadeira.

Reestruturação de sentenças

"se p, então q"
($p \rightarrow q$)

Antes de mais nada, é importante saber reestruturar, logicamente, as afirmações a serem provadas (demonstradas).

Exemplo: Prove que a soma de dois números inteiros pares é par.

Reformulação: Se x e y são inteiros pares, então x + y também é par.

Técnicas de demonstração

Técnicas mais comuns de demonstração:

- Demonstração por vacuidade;
- Demonstração por trivialização;
- Demonstração direta; $(p \rightarrow q)$
- Demonstração por contraposição; $(\neg q \rightarrow \neg p)$
- Demonstração por contradição ou absurdo; $\neg(p \wedge \neg q)$
- Demonstração por indução.

Demonstração por vacuidade

Demonstração por Vacuidade

A demonstração por vacuidade é utilizada para estabelecer **casos especiais de teoremas**.

Esse tipo de demonstração parte do princípio de que **quando p é falsa, a afirmação é verdadeira**.

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Exemplo

isto é

tal que

Seja a um inteiro. Se a é um quadrado (i.e. existe $b \in Z$ t.q. $a = b^2$) e a é primo, então a é negativo.

A afirmação é verdadeira ou falsa?

- Neste caso, como a hipótese é falsa, a afirmação é verdadeira!

Exemplo

Seja a um inteiro. Se a é um quadrado (i.e. existe b $\in$ Z t.q. a = b^2) e a é primo, então a é negativo.

A afirmação é verdadeira ou falsa?

- Neste caso, como a hipótese é falsa, a afirmação é verdadeira!

Nesta situação, basta justificarmos que **a afirmação é verdadeira por vacuidade**, pois a hipótese é falsa (visto que, por definição, se um número a é primo, então a não pode ser o quadrado de outro número b).

Demonstração por trivialização

Demonstração por trivialização

A demonstração por trivialização também é utilizada para estabelecer **casos especiais de teoremas**.

É utilizada em **indução matemática**.

a ser visto mais adiante

Ideia geral

Exemplo:

Se a e b são inteiros positivos com $a \geq b$, então $a^n \geq b^n$, para todos os inteiros.

Mostre que P(0) é verdadeira.

caso trivial, simples de ser verificado.

Ideia geral

Exemplo:

Se a e b são inteiros positivos com $a \geq b$, então $a^n \geq b^n$, para todos os inteiros maiores ou iguais a 0. Mostre que P(0) é verdadeira.

Reescrita: Sejam a, b e n inteiros ≥ 0. Seja P(n) a seguinte proposição:

P(n): Se $a \geq b$, então $a^n \geq b^n$. Mostre que P(0) é verdadeira.

como queríamos demonstrar, c.q.d.

Demonstração: Queremos mostrar que P(0) é verdadeira. Mas P(0) é: "Se $a \geq b$, então $a^0 \geq b^0$". Como $a^0 = b^0 = 1$, temos que a conclusão da condicional "Se $a \geq b$, então $a^0 \geq b^0$" é verdadeira. Logo, P(0) é verdadeira. $\square$

Prova direta

Prova direta ($p \to q$)

Na demonstração direta, queremos mostrar que $p \to q$ (que p implica logicamente em q).

- Para isso, precisamos apresentar uma **sequência de implicações lógicas** que começa em p e termina em q.
- Essa sequência de implicações/passos devem **partir da hipótese (p) e levar à conclusão desejada (q)**.
- Algumas vezes requer insights particulares e podem ser bastante astuciosas.
  - Requer prática!!!

Passos importantes

- Reescreva a afirmação em notação adequada.
- Identifique a hipótese e a conclusão desejada.
- Escreva a(s) primeiras e as última(s) sentença(s) da prova (hipótese e conclusão, respectivamente).
- Desenvolva a demonstração matemática a partir do início, utilizando as definições apropriadas.
- Avalie o que já se sabe e o que necessita. Estabeleça o elo entre as duas partes.

Esquema de demonstração direta

Exemplo: Prove que a soma de dois inteiros pares é par.

Reformulação: Se x e y são inteiros pares, então x + y é um inteiro par.

- Hipótese (p): x e y são inteiros pares
- Conclusão (q): x+y é um inteiro par.

Demonstração:
Sejam x e y inteiros pares.
...

Portanto, x+y é um inteiro par. □

como queríamos demonstrar, c.q.d.

Exercícios

1. Prove que $5 \mid 20$.
2. Prove que 6 não divide 16.
3. Sejam $a, b, c \in Z$. Mostre que se $a \mid b$ e $a \mid c$, então $a \mid (b + c)$.
4. Se x e y são inteiros pares, então $x + y$ é um inteiro par.
5. Prove que a soma de dois inteiros ímpares é par.

Prova por contrapositiva

A contrapositiva de ($p \to q$)

Se lembram da tabela de equivalências conhecidas para a condicional?

contrapositiva

Reescrita da condicional:

$$p \to q \equiv \neg p \lor q$$
$$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$$
$$\neg p \to q \equiv \neg q \to p$$
$$\neg p \to q \equiv p \lor q$$
$$\neg(p \to \neg q) \equiv p \land q$$
$$\neg(p \to q) \equiv p \land \neg q$$
$$(p \to q) \land (p \to r) \equiv p \to (q \land r)$$
$$(p \to r) \land (q \to r) \equiv (p \lor q) \to r$$
$$(p \to q) \lor (p \to r) \equiv p \to (q \lor r)$$
$$(p \to r) \lor (q \to r) \equiv (p \land q) \to r$$

Prova por contraposição

Na demonstração por contraposição ($\neg q \rightarrow \neg p$), realizamos a **prova direta** da **contrapositiva** da afirmação original.

Assim, o primeiro passo para realizar a demonstração de uma afirmação utilizando a técnica da contraposição, é identificar a contrapositiva da afirmação!

Prova por contraposição

Na demonstração por contraposição (¬q → ¬p), realizamos a **prova direta** da **contrapositiva** da afirmação original.

Assim, o primeiro passo consiste em identificar a contrapositiva da afirmação original.

Original: Seja n um inteiro. Se n^2 é ímpar, então n é ímpar.
Contrapositiva: Se $\underbrace{\text{n é par}}_{\text{hipótese}}$, então $\underbrace{n^2 \text{ é par}}_{\text{conclusão}}$.

Prova por contraposição

Depois de obter a afirmação na sua forma contrapositiva, podemos prová-la como fazemos com a demonstração direta.

Original: Seja n um inteiro. Se n^2 é ímpar, então n é ímpar.
Contrapositiva: Se n é par, então n^2 é par.

Demonstração:
Suponha que n é par.
...

Logo, n^2 é par. Portanto, podemos concluir, por contrapositiva, que se n^2 é ímpar, então n é ímpar. □

Exemplos

1. Se o quadrado de um inteiro é par, então este número também é par.
2. Sejam a, b inteiros. Se ab é ímpar, então a e b são ímpares.

Recapitulando...

- Definições básicas
    - Divisibilidade, Paridade, Primalidade
- Técnicas de prova
    - Prova por vacuidade
    - Prova por trivialidade
    - Prova direta
    - Prova por contraposição
- Exercícios

Atividade

Atividade 1 para entrega **até 23:59 de domingo**, dia **15/09/2024**.

- A atividade pode ser feita em duplas.
- A atividade deve ser entregue em .pdf para o email jufelix16@gmail.com.
  - Se você fizer a atividade manuscrita, escaneie sua solução e garanta a legibilidade do conteúdo!
  - O assunto do email deve ser exatamente:
    - [FCII] Atividade 1 - **nome do aluno 1**; **nome do aluno 2** (se houver)

Leitura Recomendada

- Capítulo 2 do livro Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação, de Judith L. Gersting.
- Capítulo 4 do livro Matemática Discreta com Aplicações, de Susanna S. Epp

Atividade sugerida: resolução dos exemplos solucionados pelos autores.