Inteligência Artificial

2024/2

Profa. Dra. Juliana Félix

jufelix16@gmail.com

Básico de Geometria Analítica

Fundamentos de Geometria Analítica

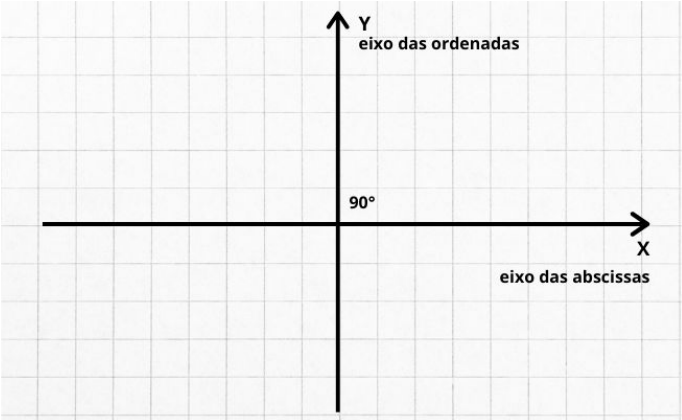
- O primeiro fundamento de toda a geometria analítica é a noção de **espaço**.
- Na geometria temos os **espaço R** (números Reais).
    - Este espaço é unidimensional e é representado como uma linha, ou eixo, geralmente na horizontal, em que os números estão representados sobre ele.
- Sobre esse eixo podemos representar valores, e identificá-los como "ponto".

Fundamentos de Geometria Analítica

- Desta forma, o segundo fundamento da geometria analítica é o conceito de **ponto**.
- O **ponto** é um valor que pode ser representado em um espaço.
- Na figura abaixo, o ponto C = 2, está representado no eixo.

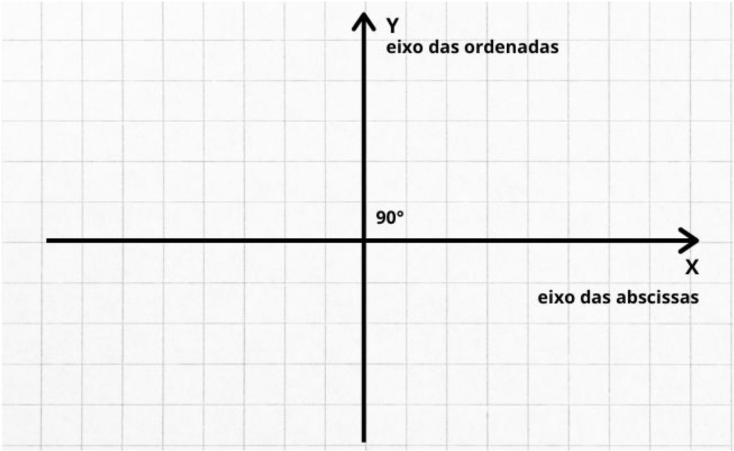
Fundamentos de Geometria Analítica

- O espaço pode ter mais dimensões.
- Daí, temos o conceito de R2
  - O R2 é um espaço representado por dois eixos, geralmente representados na vertical e horizontal.
- O R2 forma o que chamamos de **Plano**, ou **Plano Cartesiano**.



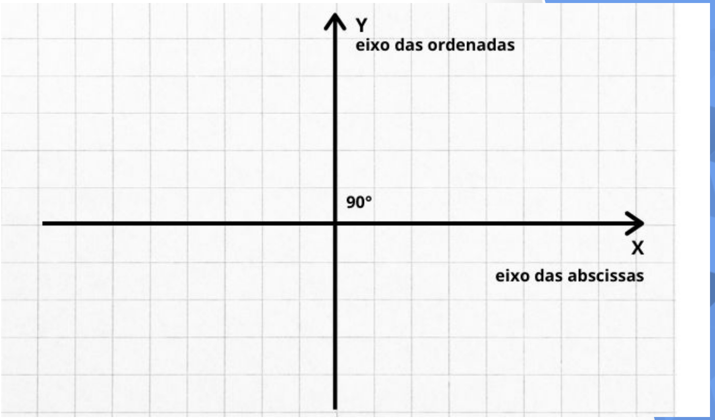
Fundamentos de Geometria Analítica

- O Plano ou **Plano Cartesiano** tem seus eixos geralmente representados pelas letras **X** e **Y**, na horizontal e na vertical, respectivamente.
- Todavia, isso não é uma regra. O importante é que cada eixo tenha seu próprio nome.



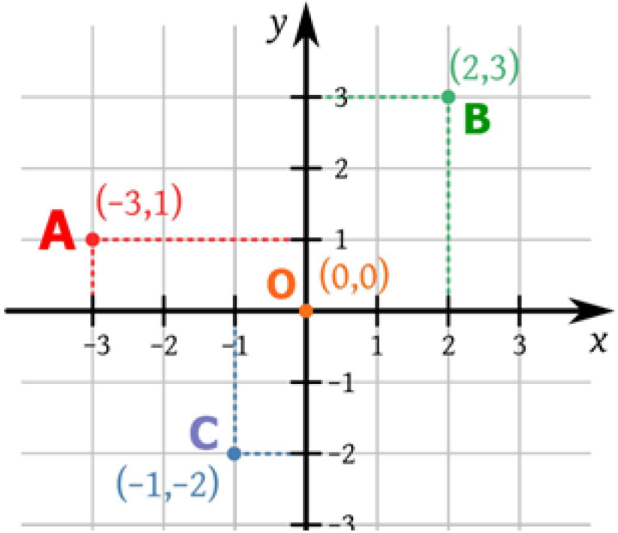
Fundamentos de Geometria Analítica

- Além disso, o eixo horizontal costuma ser chamado de eixo das abcissas, e o eixo vertical como eixo das ordenadas.
- No **eixo das abcissas**, geralmente se encontram os **valores livres**.
- No **eixo das ordenadas**, geralmente se encontram os **valores dependentes**.
    - Ou seja, aqueles que *dependem* dos valores livres.
- Todavia, isso é também uma mera convenção.



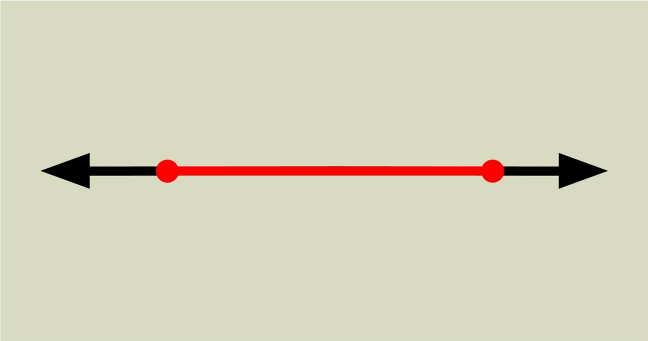
Fundamentos de Geometria Analítica

- Em um plano, podemos representar um ponto pelo **par** de valores **(X, Y)**.
- Por exemplo:
  - O ponto **O** (0,0) está nas coordenadas x=0 e y=0.
    - Este ponto é conhecido como **origem**.
  - O ponto **A** (-3,1) está nas coordenadas x=-3 e y=
  - Onde estão os pontos **B** e **C**?



Fundamentos de Geometria Analítica

- Outro conceito muito importante é a **reta**.
- A **reta** pode ser representada no R ou R1, por dois ou mais pontos alinhados.
- É importante ressaltar que uma reta é composta por infinitos pontos **colineares** (alinhados na mesma direção)



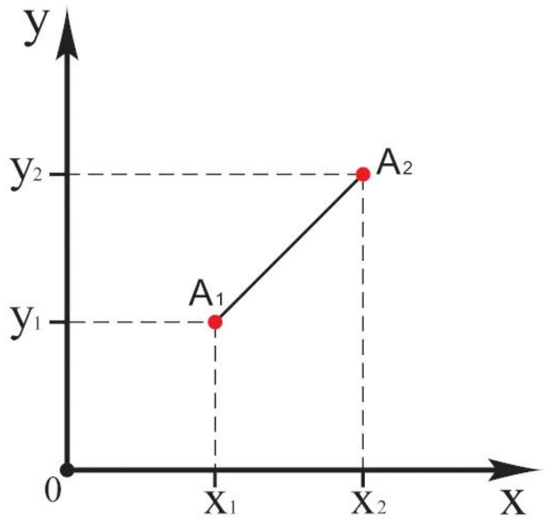
Fundamentos de Geometria Analítica

- Todavia, precisamos de apenas dois pontos para definirmos uma reta.
- Os pontos **A** e **B** definem a reta, e todos os pontos sobre essa reta são colineares (estão sobre a mesma reta).

Fundamentos de Geometria Analítica

- Na figura abaixo, temos a representação de uma reta no espaço R2.

- Essa reta **r** pode ser representada pelos pontos **A1** e **A2**.
- As coordenadas da reta **r** são **(x1, y1)** e **(x2, y2)**.

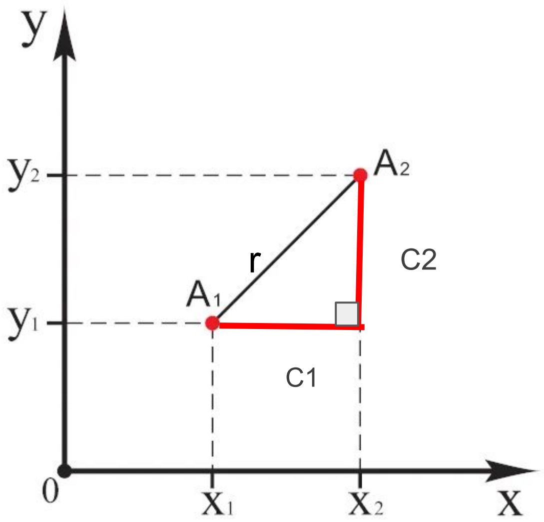


Fundamentos de Geometria Analítica

- Conhecendo-se dois pontos, podemos calcular a **distância** entre eles, que pode também ser interpretada como o **comprimento** da reta r.

- Para calcular a distância desses pontos podemos utilizar a equação da **distância "euclidiana"**:

$$dA_1A_2 = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$



Fundamentos de Geometria Analítica

- Essa distância nada mais é que o comprimento do segmento que liga os dois pontos.

Exemplo: Dados A(2,3) e B(5,1), qual é a distância entre esses dois pontos?

$$dAB = \sqrt{|5 - 2|^2 + |1 - 3|^2}$$

$$dAB = \sqrt{3^2 + 2^2}$$

$$dAB = \sqrt{9 + 4}$$
$$dAB = \sqrt{13}$$

Fundamentos de Geometria Analítica

- Com base na ideia de distância e do segmento que une dois pontos, outra fórmula importante é a de **ponto médio** de um segmento.
- Para calcular o ponto $\mathbf{M(x_m,y_m)}$, que é ponto médio do segmento A1(x_1,y_1) e A2(x_2,y_2), utilizamos as equações:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

- Essa fórmula nada mais é que a média aritmética entre as abcissas dos dois pontos e as ordenadas desses dois pontos.

PUC GOIÁS

Fundamentos de Geometria Analítica

Exemplo: Encontre o ponto médio entre os pontos A(-2,5) e B(6,3).

$$x_m = \frac{-2+6}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y_m = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

PUC GOIÁS

Fundamentos de Geometria Analítica

- A condição de alinhamento de três pontos serve para verificar se três pontos A1 (x1,y1), A2(x2,y2) e A3(x3,y3) estão alinhados ou não.
- Para verificar essa condição, calculamos o determinante da seguinte matriz:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Fundamentos de Geometria Analítica

- Existem **dois casos possíveis**:
    - se o determinante for igual a 0, significa que **os três pontos estão alinhados**,
    - caso contrário, dizemos que **os pontos não estão alinhados**, ou então que são *vértices de um triângulo*.

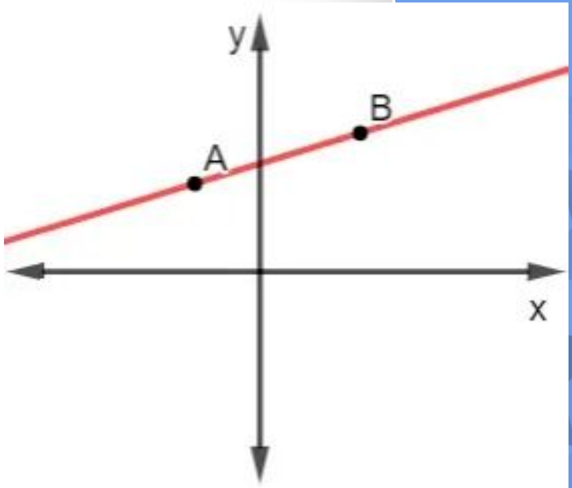
Equação da reta

- Uma reta também pode ser representada pela sua equação.
- Existem diversas equações, mas as mais comuns são:
    - Equação geral da reta:

      $$ax + by + c = 0$$

    - Equação reduzida da reta:

      $$y = mx + n$$



Equação da reta

Observe que os termos **m** e **n** da equação

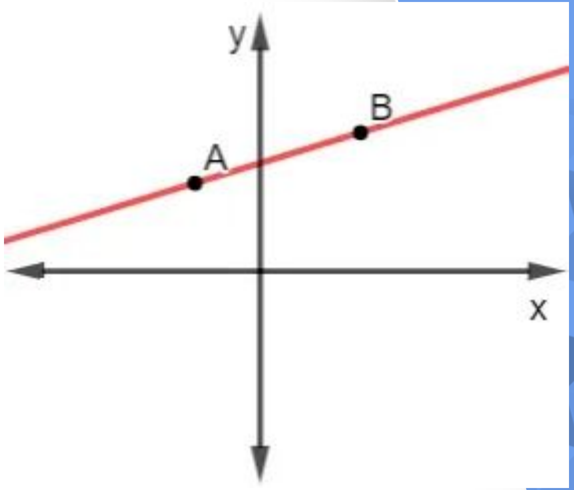
$$\mathbf{y = mx + n}$$

podem ser entendidos como manipulação algébrica dos termos **a, b** e **c** da equação

$$\mathbf{ax + by + c = 0,}$$

formando (ignorando-se os sinais):

$$\mathbf{y = a/b\ x + c/b}$$



Equação da reta

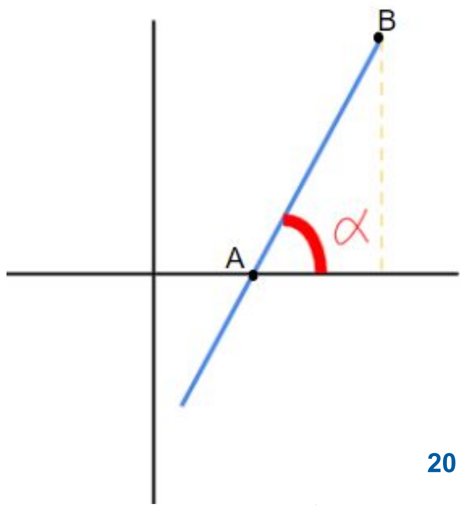
É importante destacar que os termos **m** e **n** da equação

$$y = mx + n$$

também podem ser interpretados como **parâmetros da reta**,

em que **m** é o **coeficiente de inclinação da reta**, ou seja, tg(α)

e **n** é o **coeficiente de deslocamento** (onde a reta toca no eixo y)



Equação da reta

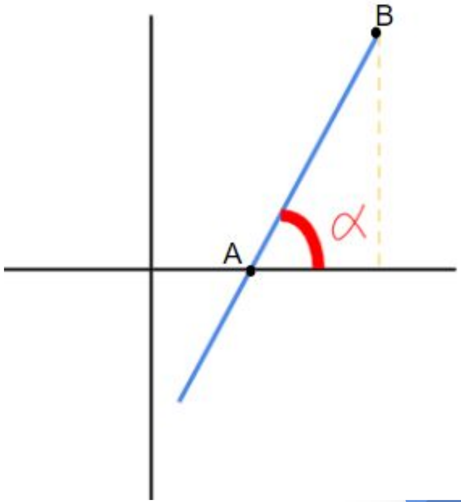
Na geometria, sabe-se que a tangente de um ângulo é dada por:

$$tg \propto = \text{cateto oposto/cateto adjacente}$$

Com as manipulações corretas, chegamos a:

$$tg \propto = (yB - yA) / (xB - xA)$$

$$m = (yB - yA) / (xB - xA)$$



- Por padrão, quando $m > 0$, a reta é **ascendente** no plano cartesiano.
- Se, $m < 0$, admite-se que a reta r é **descendente**.

Equação da reta

Assim, de posse de dois pontos, podemos então calcular o coeficiente m, (e o ângulo alfa, se necessário):

$$m = (y_B - y_A) / (x_B - x_A)$$

- Para obter o termo desconhecido **n** da equação, basta usar a equação

$$y = mx + n$$

com o valor de m, e algum valor de par ordenado (x,y) conhecido.

Equação da reta

Exemplo: dados os pontos A(2,3) e B(5,1), qual é a equação da reta?

- Se: $m = (y_B – y_A) / (x_B – x_A)$

  $m =(1 –3) / (5 – 2)$

  $m = - 2/3$

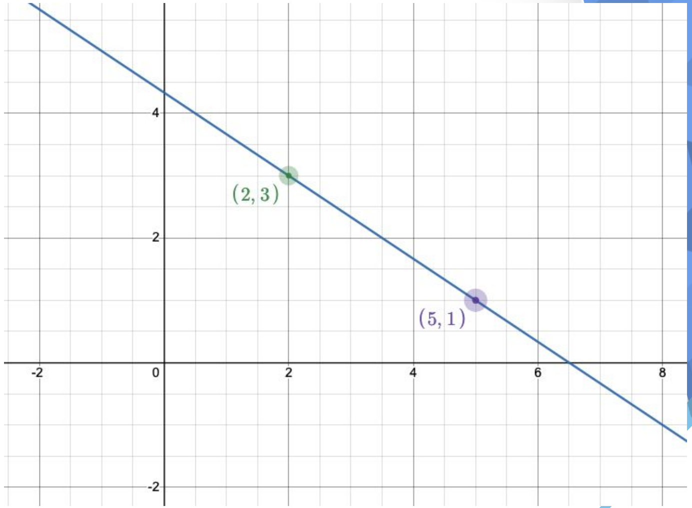
- Então: $y = mx + n$

  $3 = -2/3 * 2 + n$

  $n = 3 + 4/3$

  $n = 13/3$

- Logo: $y = \mathbf{-2/3}\ x + \mathbf{13/3}$



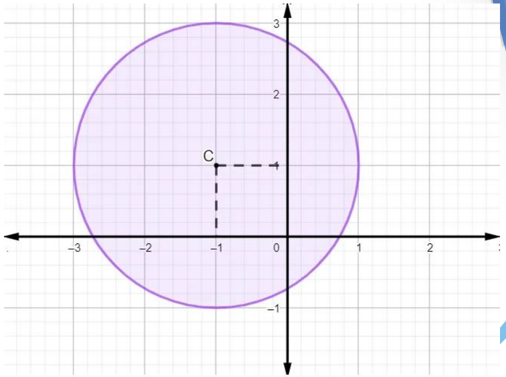
A circunferência

- Outras equações estudadas na geometria analática são as equações geral e reduzida da circunferência, tendo o centro definido pelo ponto **O(xc, yc):**

- Equação reduzida da circunferência:

$$(x - xc)^2 + (y - yc)^2 = r^2$$

- Equação geral da circunferência
  - $x^2 + y^2 - 2xc*x - 2yc*y + xc^2 + yc^2 - r^2 = 0$

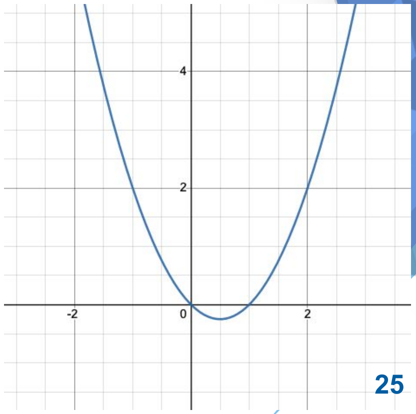


A parábola

- De forma simplificada:
  - A parábola está ligada às funções do segundo grau.
  - Assim, a parábola pode ser representada pela equação:

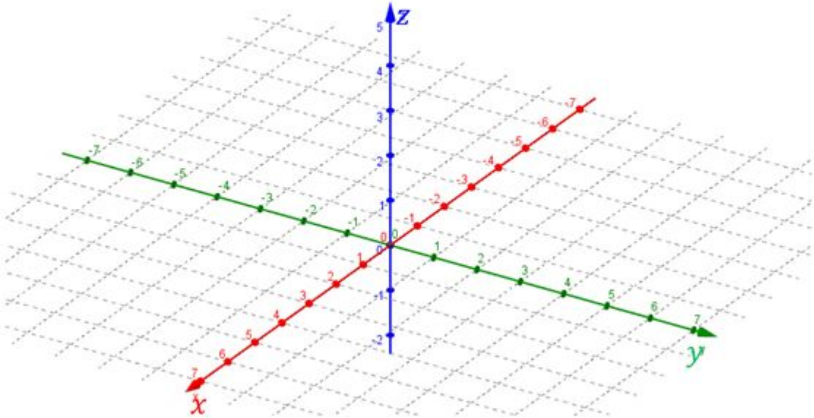
$$y = ax^2 + bx + c$$

- Em que **a** define a abertura da parábola, enquanto **b** e **c** deslocam a parábola da origem do plano.



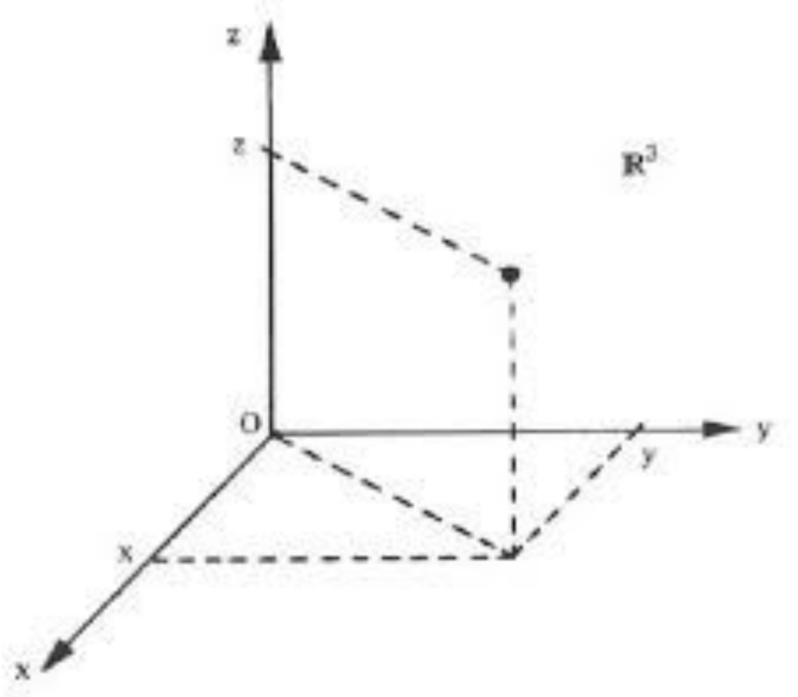
Plano R3

- O Plano **R3** é definido por três eixos, comumente chamados de eixos **X, Y** e **Z**, embora isso não seja uma regra.



Ponto no R3

- O **ponto** no espaço R3 é representado por três coordenadas

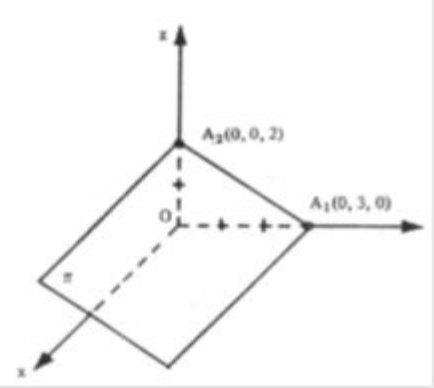


Reta/Plano no R3

- Com três coordenadas no R3, a reta na verdade representa um **plano** e, portanto, possui uma equação mais complexa:

$$aX + bY + cZ + d = 0$$

- Exemplos
  - **A(x1, y1, z)** e **B(x2, y2, z)**, onde **z** em **A** e **B** são iguais
  - A(x1, y, z1) e B(x2, y, z2), onde y em A e B são iguais
  - A(x, y1, z1) e B(x, y2, z2), onde x em A e B são iguais

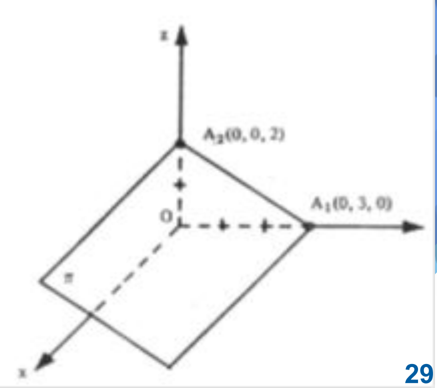


Reta/Plano no R3

- A equação do plano

$$aX + bY + cZ + d = 0$$

permite inferir que **a**, **b**, e **c** são os **coeficientes** que definem a **inclinação do plano** no espaço R3, e **d** permite **deslocar o plano da origem**.



Reta/Plano no R3

- Conhecendo-se dois pontos, podemos calcular a **distância** entre eles, que pode também ser interpretada como o **comprimento** da reta **r** entre os pontos no plano.
- Para calcular a distância desses pontos, podemos utilizar a equação da **distância Euclidiana**:

$$dA_1A_2 = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2}$$

Considerações Finais

É importante destacar que

- Quem ocupa o eixo horizontal, vertical, etc, é uma mera convenção
- A definição da variável **independente** e **dependente** está relacionada ao valor de interesse
- Os nomes **X**, **Y**, e **Z** para eixos é apenas uma convenção, e podem ser chamados de eixos Y, K, T, ou X1, X2, e X3, etc
- A mesma regra vale para a representação de pontos e suas coordenadas. Pontos podem ser representados como:
    - P1(x1, y2, z2), ou
    - P1(x1_1, x2_1, x3_1), etc

Links úteis

Calculadoras gráficas:

[Desmos | Calculadora Gráfica]

[Calculadora 3D - GeoGebra]