MÉTODOS ESTOCÁSTICOS EN RECURSOS HIDRÁULICOS

Sthochastic Methods in Water Resources

2024 – 1S

Ejercicio 04 – Funciones aleatorias

1. Proporcione ejemplos de variables hidrológicas que pueden ser modeladas con una serie aleatoria de valores continuos y una serie aleatoria de valores discretos en:

   a. una serie aleatoria,
   b. un proceso de retícula,
   c. un proceso de tiempo continuo,
   d. un proceso de espacio continuo,
   e. un proceso de espacio-tiempo continuo,
   f. un proceso de punto compuesto en el tiempo,
   g. un proceso de punto compuesto en el espacio.

   Tenga en cuenta que se piden 14 combinaciones.

2. La semivarianza de una función aleatoria está descrita por:
$$\gamma\left(h\right) = 10h^{1.5},$$
mientras que la media es constante. ¿Es este proceso: a) intrínseco; b) estacionario en sentido amplio; c) estacionario de segundo orden; d) estrictamente estacionario?

3. La semivarianza de una función aleatoria está descrita por:
$$\gamma\left(h\right) = 10\exp\left(-\frac{h}{30}\right),$$
y una media constante. La función de densidad de probabilidad en una ubicación dada es la distribución Gamma. ¿Es este proceso: a) intrínseco; b) estacionario en sentido amplio; c) estacionario de segundo orden; d) estrictamente estacionario?

4. La semivarianza de una función aleatoria está descrita por:
$$\gamma\left(h\right) = 10\exp\left(-\frac{h}{30}\right),$$
y una media constante. La función de densidad de probabilidad en una ubicación dada es la distribución Gaussiana. ¿Es este proceso: a) intrínseco; b) estacionario en sentido amplio; c) estacionario de segundo orden; d) estrictamente estacionario?

Laboratorio de Hidráulica
Av. NQS (Carrera 30) No. 45-03
Edificio Luis Enrique Orduz Espinosa (Edificio 409) Oficina 313
+57 1 316 5000 Ext. 13480
Código Postal 111321, Bogotá DC, Colombia
http://sites.google.com/view/agua_unal

5. La semivarianza de una función aleatoria está descrita por:

$$\gamma\left(h\right) = 10\exp\left(-\frac{h}{30}\right),$$

y una media constante. La función de densidad de probabilidad multivariada de cualquier conjunto de ubicaciones es la distribución Gaussiana.
¿Es este proceso: a) intrínseco; b) estacionario en sentido amplio; c) estacionario de segundo orden; d) estrictamente estacionario?

6. Demuestre que la escala integral de la función de correlación exponencial es igual al parámetro a y de la función de correlación esférica es igual a (3/8)a.

Exponencial

$$C_Z\left(h\right) = \sigma_Z^2 \exp\left(-\frac{h}{a}\right) \therefore h \geq 0, a > 0$$

Esférica

$$C_Z\left(h\right) = \begin{cases} \sigma_Z^2\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{h}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{a}\right)^3\right] & \text{si } h < a \\ 0 & \text{si } h \geq a \end{cases}$$

$$h \geq 0, a > 0$$

7. Obtener la expresión:

$$C_Z\left(\tau\right) = \int_{-\infty}^{\infty} S_Z\left(\omega\right)\cos\left(\omega\tau\right)\mathrm{d}\omega$$

con función de densidad espectral:

$$S_Z\left(\omega\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C_Z\left(\tau\right)\cos\left(\omega\tau\right)\mathrm{d}\tau.$$

Es decir la función de covarianza es una transformada de Fourier del espectro y viceversa, formando un par de Fourier.

Encuentre la Ecuación:

$$C_Z\left(0\right) = \sigma_Z^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_Z\left(\omega\right)\mathrm{d}\omega$$

Laboratorio de Hidráulica
Av. NQS (Carrera 30) No. 45-03
Edificio Luis Enrique Orduz Espinosa (Edificio 409) Oficina 313
+57 1 316 5000 Ext. 13480
Código Postal 111321, Bogotá DC, Colombia
http://sites.google.com/view/agua_unal

8. La siguiente relación se mantiene para el valor esperado de las amplitudes complejas:

$$E\left[\mathrm{d}X\left(\omega_1\right)\mathrm{d}X^*\left(\omega_2\right)\right]=\begin{cases}S\left(\omega\right)\mathrm{d}\omega, & \text{si } \omega_1=\omega_2=\omega\\ 0 & \text{si } \omega_1\neq\omega_2\end{cases}$$

donde $\mathrm{d}X^*\left(\omega\right)$ es el conjugado complejo de la amplitud compleja aleatoria $\mathrm{d}X\left(\omega\right)$ en la Ecuación:

Dada esta relación,

$$Z\left(t\right)=\mathbb{R}\left\{\mu_Z+\sum_{k=-K}^{K}X_k\exp\left(i\omega_k t\right)\right\}\underset{K\to\infty}{\to}\mathbb{R}\left\{\mu_Z+\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(i\omega t\right)\mathrm{d}X\left(\omega\right)\right\}$$

Con la frecuencia $\omega_k=\frac{1}{2}\left(2k-1\right)\Delta\omega$ y X_k es un número aleatorio complejo que representa la amplitud

Encuentre la Ecuación:

$$C_Z\left(\tau\right)=\int_{-\infty}^{\infty}S_Z\left(\omega\right)\cos\left(\omega\tau\right)\mathrm{d}\omega$$

Un número complejo (z = a + bi) tiene un conjugado complejo (z* = a - bi). El producto de un número complejo y su conjugado complejo es un valor real: (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2.

9. Considera una función aleatoria Z(t) con una escala de fluctuación θ de 50 días, una función de covarianza exponencial y varianza de 20 . Grafique la relación entre la varianza de Z del proceso promediado $Z_T(t)$ con T aumentando de 1 a 100 días.

Laboratorio de Hidráulica
Av. NQS (Carrera 30) No. 45-03
Edificio Luis Enrique Orduz Espinosa (Edificio 409) Oficina 313
+57 1 316 5000 Ext. 13480
Código Postal 111321, Bogotá DC, Colombia
http://sites.google.com/view/agua_unal