

Член-корреспондент АН СССР А. Н. ТИХОНОВ

О РЕШЕНИИ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ  
И МЕТОДЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

1. Обратные задачи математической физики часто приводят к некорректно поставленным задачам. Типичным примером является уравнение Фредгольма первого рода

$$A[x, z(s)] = \int_a^b K(x, s) z(s) ds = u(x), \quad c \leq x \leq d. \quad (1)$$

Это уравнение имеет решение не для всякой функции  $u(x)$ . Очевидно, что если  $K(x, s)$  имеет определенный порядок гладкости по  $x$ , то не существует функции  $z(s) \in L_2$ , удовлетворяющей уравнению (1), если  $u(x)$  имеет меньший порядок гладкости. Будем предполагать единственность решения уравнения (1), т. е. предположим, что если для некоторой функции  $\bar{u}(x)$  уравнение (1) имеет решение  $\bar{z}(s)$ , то только одно.

Пусть функция  $\bar{u}(x)$  такова, что уравнение (1) имеет решение  $\bar{z}(s)$ . Целью настоящей статьи является изложение алгоритма для построения равномерного приближения функции  $\bar{z}(s)$ . В дальнейшем мы будем предполагать, что  $\bar{z} \in \bar{C}_1$ , где  $\bar{C}_1$  — класс непрерывных кусочно-гладких функций.

Обозначим  $U$  класс функций  $u(x) = A[x, z(s)]$ ,  $z(s) \in \bar{C}_1$ . Норму уклонения в  $\bar{C}_1$  будем брать

$$\|z\| = \max |z(s)| \quad (a \leq s \leq b)$$

и норму уклонения в  $U$

$$\|u(x)\| = \left[ \int_c^d u^2(x) dx \right]^{1/2}.$$

Если ядро  $K(x, s)$  непрерывно, то отображение  $\bar{C}_1 \rightarrow U$  непрерывно. Следует иметь в виду, что обратная задача — задача нахождения  $z(s)$  по заданной функции  $u(x)$  — некорректна. В самом деле, функциям  $z_1(s)$  и  $z_2(s) = z_1(s) + p \cos \omega s$ ,  $z_1(s), z_2(s) \in \bar{C}_1$ , где  $p$  — любое (как угодно большое) фиксированное число, будут соответствовать функции  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$ , норма уклонения которых  $\|u_1(x) - u_2(x)\|$  как угодно мала, если  $\omega$  достаточно велика. Однако, если классом допустимых решений является компактный класс  $\bar{Z}$ , то обратное отображение  $\bar{U} \rightarrow \bar{Z}$  будет устойчиво<sup>(1)</sup>. Иными словами, каково бы то ни было  $\varepsilon > 0$ , существует такое  $\delta(\varepsilon, \bar{Z})$ , что из  $\|u_1 - u_2\| < \delta(\varepsilon, \bar{Z})$  следует  $\|z_1 - z_2\| < \varepsilon$ , если  $u_1, u_2 \in \bar{U} = \{u(x) = A[x, z(s)], z \in \bar{Z}\}$ , где  $\bar{Z}$  — компактный класс функций.

Построение алгоритма для получения приближенного решения, равномерно аппроксимирующего  $\bar{z}(s)$ , базируется на следующем принципе регуляризации: семейство функций  $z^\alpha(s)$ , зависящее от параметра  $\alpha$ , мы будем называть регуляризованным семейством приближенных решений, если: 1)  $u_\alpha(x) = A[x, z^\alpha(s)] \rightarrow \bar{u}(x)$  при  $\alpha \rightarrow 0$ ; 2) функции  $z^\alpha(s)$  при любом  $\alpha$  принадлежат компактному классу функций  $\bar{Z}$ , содержащему  $\bar{z}(s)$ . Регуляризованное семейство приближенных решений равномерно сходится к  $\bar{z}(s)$  при  $\alpha \rightarrow 0$ .

2. Пусть задана функция  $\bar{u}(x)$ . Рассмотрим функционал

$$M^\alpha [z(s), \bar{u}(x)] = N [z(s), \bar{u}(x)] + \alpha \Omega [z(s)], \quad (2)$$

где функционал  $N$  представляет квадратическое отклонение  $\bar{u}(x)$  от  $A[x, z(s)]$

$$N [z(s), \bar{u}(x)] = \int_c^d [A [x, z(s)] - \bar{u}(x)]^2 dx,$$

$$\Omega [z(s)] = \int_a^b [k(s) z'(s)^2 + p(s) z^2(s)] ds \quad (k(s) > 0, p(s) > 0).$$

Мы будем называть  $\Omega [z]$  регуляризующим и  $M^\alpha$  сглаживающим функционалами.

**Теорема 1.** Для любой функции  $\bar{u}(x) \in L_2$  существует единственная непрерывная, дифференцируемая функция  $z^\alpha(s)$ , реализующая минимум сглаживающего функционала  $M^\alpha [z(s), \bar{u}(x)]$ .

Функция  $z^\alpha(s)$  определяется уравнением Эйлера для функционала  $M^\alpha [z, \bar{u}]$ :

$$L^\alpha [z] = \alpha \left\{ \frac{d}{ds} \left[ k \frac{dz}{ds} \right] - pz \right\} - \left\{ \int_a^b \bar{K}(s, \zeta) z(\zeta) d\zeta - \bar{b}(s) \right\} = 0, \quad z'(a) = z'(b) = 0, \quad (3)$$

где

$$\bar{K}(s, \zeta) = \int_c^d K(\xi, s), K(\xi, \zeta) d\xi, \quad \bar{b}(s) = \int_c^d K(\xi, s) \bar{u}(\xi) d\xi.$$

С помощью функции Грина для краевой задачи

$$L^\omega [z] = \frac{d}{ds} \left[ k(s) \frac{dz}{ds} \right] - p(s) z(s) = f(s), \quad z'(a) = z'(b) = 0, \quad (4)$$

определяемой оператором Эйлера для регуляризующего функционала, уравнение (3) может быть преобразовано в уравнение Фредгольма 2-го рода, для которого при  $\alpha > 0$  однородное уравнение имеет лишь тривиальное решение: отсюда и следует существование  $z^\alpha(s)$ .

**Теорема 2.** Если  $\bar{z}(s) \in \bar{C}_1$ ,  $\bar{u}(x) = A[x, \bar{z}(s)]$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\alpha(\varepsilon, \bar{z})$ , что

$$|z^\alpha(s) - \bar{z}(s)| < \varepsilon$$

для всех  $\alpha < \alpha_0(\varepsilon, \bar{z})$ .

В самом деле,

$$M^\alpha [z^\alpha(s); \bar{u}(x)] \leq N[\bar{z}, \bar{u}] + \alpha \Omega[\bar{z}] = \alpha C^2 \quad (C^2 = \Omega[\bar{z}]),$$

откуда следует, что  $z^\alpha(s)$  удовлетворяет неравенству

$$1) \Omega [z(s)] \leq C^2,$$

определяющему компактный класс функции  $\bar{Z}$ , а также

$$2) \|u^\alpha(x) - \bar{u}(x)\| \leq \alpha C \rightarrow 0 \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0.$$

Отсюда и следует теорема 2.

**Теорема 3.** Если  $\bar{z} \in \bar{C}_1$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  и любых вспомогательных чисел  $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2$  существует такое  $\delta_0(\varepsilon, \gamma_1, \gamma_2, \bar{z})$ , что если: 1) норма отклонения функции  $u_\delta(x)$  от функций  $\bar{u}(x)$  меньше  $\delta$

$$\|u_\delta(x) - \bar{u}(x)\| < \delta;$$

2)  $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\delta)$  удовлетворяет условиям

$$\gamma_1 \leq \delta^2/\alpha \leq \gamma_2 \quad (\text{или } \delta^2/\gamma_2 < \alpha < \delta^2/\gamma_1),$$

то  $\tilde{z}_\delta^\alpha(s)$ , реализующая минимум сглаживающего функционала  $M^\alpha[z, \tilde{u}_\delta(x)]$ , принадлежит  $\varepsilon$ -окрестности функции  $\bar{z}(s)$

$$|\tilde{z}_\delta^\alpha(s) - \bar{z}(s)| < \varepsilon$$

при  $\delta \leq \delta_0(\varepsilon, \gamma_1, \gamma_2, \bar{z})$ .

Нетрудно убедиться на примерах, что функция  $\tilde{z}_\delta^\alpha(s)$ , соответствующая фиксированной функции  $\tilde{u}_\delta(s)$  при малом  $\delta$ , при  $\alpha \rightarrow 0$  может выходить из  $\varepsilon$ -окрестности  $\bar{z}(s)$ .

3. Перейдем к приближенным методам решения уравнения (1). Рассмотрим метод конечных разностей. Возьмем сетку на  $(a, b)$ :  $s_j = jh - 0,5h$  ( $j = 1, \dots, n$ ) и на  $(c, d)$ :  $x_i = ih_1 - 0,5h_1$  ( $i = 1, \dots, m$ ), где  $h = \frac{1}{n}(a - b)$  и  $h_1 = \frac{1}{m}(c - d)$ . Обозначим  $z_j = z(s_j)$ , и пусть

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} z_j h = \int_a^b K(x_i, s) z(s) ds + O(h^\gamma)$$

какая-либо интеграционная формула порядка  $\gamma$ .

Рассмотрим разностный сглаживающий функционал

$$M_h^\alpha[\hat{z}, \hat{u}] = \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^n K_{ij} \hat{z}_j h - \hat{u}_i \right\}^2 h_1 + \alpha \sum_{j=1}^n \left\{ k_j (\hat{z}_{j+1} - \hat{z}_j)^2 \frac{1}{h} + p_j \hat{z}_j^2 h \right\},$$

где  $\hat{u} = \{\hat{u}_i\}$  — заданная сетчатая функция на  $\{x_i\}$ ,  $\hat{z} = \{\hat{z}_j\}$  — сетчатая функция на  $\{s_j\}$  и  $k_j > 0$ ,  $p_j > 0$ .

Аналогично предшествующему имеет место

**Теорема 1'.** Для любой сетчатой функции  $\hat{u}$  и  $\alpha > 0$  существует сетчатая функция  $\hat{z}^\alpha$ , реализующая минимум сглаживающего функционала  $M_h^\alpha[\hat{z}, \hat{u}]$ .

Сетчатая функция  $\hat{z}^\alpha$  определяется из системы уравнений

$$\begin{aligned} \hat{L}^\alpha[\hat{z}] = \alpha \left\{ \frac{1}{h^2} [k_j (\hat{z}_{j+1} - \hat{z}_j) - k_{j-1} (\hat{z}_j - \hat{z}_{j-1})] - p_j \hat{z}_j \right\} - \\ - \left\{ \sum_{i=1}^m \bar{K}_{ji} \hat{z}_i h - \hat{b}_j \right\} = 0, \end{aligned} \quad (3')$$

$$\hat{z}_0 = \hat{z}_1, \quad \hat{z}_{n+1} = \hat{z}_n,$$

где

$$\bar{K}_{ji} = \sum_{i=1}^m K_{ij} K_{ih_1}, \quad \hat{b}_j = \sum_{i=1}^m K_{ij} \hat{u}_i h_1$$

и  $k_j$  и  $p_j$  определяются через  $k(x)$ ,  $p(x)$  при помощи какой-либо однородной разностной схемы, сходящейся к задаче (4) (см. (2)). В частности, например,  $k_j = k(s_j + 0,5h)$ ,  $p_j = p(s_j)$ .

**Теорема 2'.** Если  $z(s) \in \bar{C}_1$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  и любых вспомогательных чисел  $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2$  существуют такие  $\delta_0(\varepsilon, \gamma_1, \gamma_2, \bar{z})$  и  $h_0(\varepsilon, \gamma_1, \gamma_2, \bar{z})$ , что если: 1) норма уклонения функции  $\tilde{u}_\delta(x)$  от  $u(x)$  меньше  $\delta$ :

$$\|\tilde{u}_\delta - u\| < \delta;$$

2)  $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\delta)$  удовлетворяет условиям

$$\gamma_1 \leq \delta^2/\alpha \leq \gamma_2 \quad (\text{или } \delta^2/\gamma_2 \leq \alpha \leq \delta^2/\gamma_1),$$

то  $\bar{z}_h^a(s)$ , реализующая минимум разностного сглаживающего функционала  $\hat{M}_h^a[\hat{z}, \hat{u}_h]$ , принадлежит  $\varepsilon$ -окрестности функции  $\bar{z}(s)$  при  $\delta \leq \delta_0(\varepsilon, \gamma_1, \gamma_2, \bar{z})$ ,  $h < h_0(\varepsilon, \gamma_1, \gamma_2, \bar{z})$ .

Уравнение (3') представляет алгоритм для решения уравнения (1), дающий весьма эффективные результаты с помощью электронных цифровых машин.

Построение функций  $z^a(s)$  можно проводить, пользуясь также разложением в ряды по ортогональным системам.

Изложенный выше метод применим к уравнениям типа

$$A[x, z(s)] = u(x), \quad (1')$$

где  $A[x, z(s)]$  — ограниченный оператор. Если обозначить

$$\alpha(x, s) = A[x, \eta_s(\xi)], \quad \eta_s(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \leq s, \\ 0, & \xi > s, \end{cases}$$

то уравнение (3) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \alpha \left\{ k(s) z'(s) + \int_0^s p(\xi) z(\xi) d\xi \right\} - \left\{ \int_c^d A[x, z(\xi)] \alpha(x, s) dx - \right. \\ \left. - \int_c^d \alpha(x, s) \bar{u}(x) dx \right\} = 0, \\ z'(a) = z'(b) = 0. \end{aligned}$$

Регуляризирующий функционал  $\Omega[z]$  может выбираться как квадратичный функционал (не обязательно дифференциальный) так, чтобы условие  $\Omega(z) \leq C$  определяло компактное множество и чтобы оператор Эйлера для  $\Omega(z)$  имел вполне непрерывный обратный оператор. Это относится и к тому случаю, когда областью определения  $z(s)$  является область  $D$   $n$  измерений (см. теорему Соболева — Кондрашева<sup>3)</sup>).

Сглаживающие функционалы представляют удобный аппарат для решения уравнений второго рода на изолированной точке спектра, а также при решении нелинейных задач.

Поступило  
17 IV 1963

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> А. Н. Тихонов, ДАН, 39, № 5, 195 (1943); М. М. Лаврентьев, ДАН, 102, № 2, 205 (1955); 106, № 2, 389 (1956); 112, № 2, 195 (1957). <sup>2</sup> А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 1, в. 1, 5 (1961). <sup>3</sup> С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950.

# ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ВЫХОДЯТ ТРИ РАЗА В МЕСЯЦ

Редакционная коллегия: акад. Л. А. Арцимович, акад. С. А. Векшинский,  
акад. В. А. Казанский, акад. А. Н. Колмогоров (зам. главного редактора),  
акад. Д. С. Коржинский, акад. С. А. Лебедев, акад. А. И. Опарин (главный редактор),  
акад. Е. Н. Павловский, акад. Л. И. Седов, акад. Н. М. Страхов,  
акад. А. Н. Фрумкин (зам. главного редактора)

31-й ГОД ИЗДАНИЯ

1963

Том 151

ИЮЛЬ — АВГУСТ



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР  
МОСКВА



# ДОКЛАДЫ

## АКАДЕМИИ НАУК СССР

ВЫХОДЯТ ТРИ РАЗА В МЕСЯЦ

Редакционная коллегия: акад. Л. А. Арцимович, акад. С. А. Векшинский, акад. Б. А. Казанский, акад. А. Н. Колмогоров (зам. главного редактора), акад. Д. С. Коржинский, акад. С. А. Лебедев, акад. А. И. Опарин (главный редактор), акад. Е. Н. Павловский, акад. Л. И. Седов, акад. Н. М. Страхов, акад. А. Н. Фрумкин (зам. главного редактора)

31-й ГОД ИЗДАНИЯ

1963

ТОМ 151, № 1

### СОДЕРЖАНИЕ

#### МАТЕМАТИКА

	Стр.
Г. Р. Белицкий. О цепях матричных норм . . . . .	9
А. А. Боровков, Б. А. Rogozin. Асимптотические представления в некоторых задачах для двумерных случайных блужданий . . . . .	11
И. У. Бронштейн. Рекуррентность, периодичность и транзитивность в динамических системах без единственности . . . . .	15
В. И. Гаврилов. Граничное поведение мероморфных в единичном круге функций . . . . .	19
В. П. Громыко. Об одном новом критерии специальности $\pi d$ -групп с заданным числом классов недостижимых изоордных $\pi d$ -подгрупп . . . . .	23
С. И. Зуховицкий, Р. А. Поляк, М. Е. Прима. Алгоритм для решения задачи выпуклого чебышевского приближения . . . . .	27
А. И. Кокорин. О доупорядочиваемых группах . . . . .	31
И. В. Островский. К одной задаче из теории распределения значений . . . . .	34
И. Н. Пак. О свойствах сумм некоторых тригонометрических рядов . . . . .	38
А. С. Пекелис, Л. Е. Садовский. Проектирования метабелевой группы без кручения . . . . .	42
И. Петерсен. О сходимости градиентных методов для нахождения локального условного минимума нелинейного функционала при линейных условиях в гильбертовом пространстве . . . . .	45
В. П. Платонов. Разрешимые алгебраические группы . . . . .	48
Ю. А. Рябов. Некоторые асимптотические свойства линейных систем с малым запаздыванием по времени . . . . .	52
Ю. Я. Томчук. О многочленах, ортогональных на заданной системе дуг единичной окружности . . . . .	55
Р. Н. Тоноян. Некоторые эквивалентные преобразования схем алгоритмов . . . . .	59
Л. П. Усольцев. О показательной рациональной тригонометрической сумме специального вида . . . . .	62
А. Ф. Филиппов. Дифференциальные уравнения с многозначной разрывной правой частью . . . . .	65
А. В. Чернавский. О конечнократных открытых отображениях многообразий . . . . .	69
А. Л. Шмелькин. Свободные полиинильпотентные группы . . . . .	73
Л. И. Якут. К вопросу обоснования сходимости разностных схем . . . . .	76

#### МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Х. М. Алиев. Ударная волна разрушения в хрупких средах . . . . .	80
--	----

Б. М. Степанов. К вопросу о построении $S$ -матрицы . . . . .	84
---	----

## ФИЗИКА

Н. В. Кравцов, В. Н. Лазукин, В. А. Шандицев. «Многоквантовые переходы» в электронном парамагнитном резонансе . . . . .	87
О. П. Семенова, М. А. Левченко. К вопросу об излучении легко ионизуемых примесей плазмы при термическом возбуждении . . . . .	90

## ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

И. А. Одинг, В. С. Иванова, Ю. П. Либеров. Основные предпосылки для установления корреляции между критериями статической и циклической прочности металлов . . . . .	92
---	----

## ХИМИЯ

Е. А. Боом. К вопросу о механизме модифицирования силумина . . . . .	96
В. А. Голодов, А. Б. Фасман, Д. В. Сокольский. Каталитическое восстановление $p$ -бензохинона окисью углерода в жидкой фазе . . . . .	98
Р. Г. Гребенщиков, Н. А. Торопов. Энергетика комплексной кристаллической решетки силикатов . . . . .	102
Н. К. Кочетков, Б. А. Дмитриев. Реакция Виттита в ряду углеводородов . . . . .	106
Г. А. Разуваев, К. С. Минскер, Ю. А. Сангалов, А. И. Граевский. Иницирование низкотемпературной полимеризации хлористого винила триэтилалюминием при сокаталитическом действии кислорода . . . . .	110
А. В. Топчиев, В. П. Алания, М. Ф. Вагин. Синтез $o$ -фтор- $\omega$ -нитростирола и исследование его способности к полимеризации . . . . .	114

## ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

Л. Г. Берг, В. П. Ковырзина. О влиянии примесей на диссоциацию карбоната кадмия . . . . .	117
Э. Е. Вайнштейн, И. Б. Старый, М. Н. Бриль. Рентгеновские $L$ -спектры поглощения лантана, празеодима, неодима и самария в оксидах и фторидах . . . . .	120
О. Д. Дмитриевский, А. Н. Теренин. Исследование процессов межмолекулярного переноса электрона под импульсным освещением . . . . .	122
В. И. Касаточкин, О. И. Егорова, Ю. Г. Асеев. Об атомной структуре полиниевой формы углерода . . . . .	125
Г. С. Либинсон. Диффузия органических катионов в сульфокатионитах . . . . .	127
А. М. Поляков, Н. А. Кротова. Исследование интенсивности эмиссии механических электронов при отрыве и деформации пленок полимеров . . . . .	130
В. А. Пчелин, Н. В. Григорьева, В. Н. Измайлова. Эффект фиксирования полипептидных цепей в двух конформациях . . . . .	134
Л. Н. Сидоров, П. А. Акишин. Масс-спектрометрический метод определения парциальных давлений паров и относительных сечений ионизации молекул по изотермам полного испарения . . . . .	136
А. А. Тагер, В. Е. Древаль, Н. Г. Траянова. Влияние молекулярного веса полиизобутилена на вязкость и теплоты активации его концентрированных растворов . . . . .	140
Г. М. Флорианович, Я. М. Колотыркин. О пассивационных характеристиках сплавов на основе железа . . . . .	144
Ю. А. Шляпников, В. Б. Миллер, М. Б. Нейман, Е. С. Торсуева. Об участии ингибитора в акте вырожденного разветвления цепи . . . . .	148
Яо Лу-ань, В. Е. Казаринов, Ю. Б. Васильев, В. С. Багоцкий. Влияние адсорбции на скорость процессов на платиновом электроде в системе хинон — гидрохинон . . . . .	151

## ХИМИЧЕСКАЯ ТЕХНОЛОГИЯ

В. К. Боболев, И. А. Карпунин. Физико-механические свойства эвтектических сплавов в.в. . . . .	155
--	-----

## ГЕОЛОГИЯ

Л. Н. Зведер. К вопросу об алмазности юрских отложений южной части Ангара-Вилуйского прогиба . . . . .	158
В. С. Исакова. Новые данные по геологии юго-западного Прибайкалья . . . . .	161
Г. А. Казенкина, Н. П. Ладохин. О вертикальном распределении современных осадков Посольского залива на Байкале . . . . .	165
Н. Н. Карлов. Новые данные об условиях отложения песков сивашской свиты в районе Днепропетровска . . . . .	168
А. А. Кординов. Опыт расчленения угленосной толщи по тяжелым минералам . . . . .	171

В. В. Лавров. Элементарные ритмы в разрезе верхней юры на западе Канско-Ачинского угольного бассейна . . . . .	175
А. Е. Лукин. Эпигенетическая зональность пород шигнетской серии в районе реки Оны (Западный Саян) . . . . .	178

## МИНЕРАЛОГИЯ

Н. Н. Макаров, В. А. Супрычев. Об эпимагматическом монтмориллоните из туфобрекчии палеолипарита на Карадаге (Крым) . . . . .	181
--	-----

## ПЕТРОГРАФИЯ

В. С. Вышемирский, В. А. Кротова. Гранулометрия башкирских и верейских песчаников Волго-Донской области . . . . .	185
П. В. Зарицкий. К вопросу о времени образования карбонатных конкреций с текстурой конус-в-конус . . . . .	189

## ЛИТОЛОГИЯ

Ю. Н. Сеньковский. К генезису трепелов верхнего мела юго-западной окраины Русской платформы . . . . .	193
---	-----

## ГЕОХИМИЯ

Л. Я. Кизильштейн, Н. Н. Сюнякова. Анализ путей накопления германия в угле при помощи методов математической статистики . . . . .	196
---	-----

## ЦИТОЛОГИЯ

Я. Ю. Комиссарчик, В. Ф. Машанский. Некоторые новые данные о взаимоотношении митохондрий и каналов эндоплазматической сети . . . . .	198
--	-----

## ГИСТОЛОГИЯ

З. С. Кацнельсон, Е. М. Ледяева, В. П. Александрова. Фетальная кора надпочечников у свиньи . . . . .	201
--	-----

## ГЕНЕТИКА

М. Д. Померанцева, Л. К. Рамаяя. Генетические последствия действия быстрых нейтронов на половые клетки самцов мышей . . . . .	203
---	-----

## ЭКОЛОГИЯ

М. М. Камшилов, Э. С. Фишкова. Изменение численности бактерий в экспериментальных микробиоценозах под влиянием ультрафиолетовых лучей . . . . .	206
---	-----

## БИОФИЗИКА

В. С. Барсуков, О. В. Малиновский, Н. М. Митюшова. Динамика пострадиационного восстановления дрожжевых клеток в зависимости от дозы гамма-облучения . . . . .	209
М. М. Калашникова. Репаративная регенерация печени крысы после локального рентгеновского облучения . . . . .	213
И. В. Некрасова. Исследование защитного действия цистамина на клетках асцитной карциномы Эрлиха, облученных in vivo и in vitro . . . . .	217

## БИОХИМИЯ

Т. В. Венкстерн, А. А. Баев, А. Д. Мирзабеков, В. И. Горшкова. Олигонуклеотиды рибонуклеазного гидролизата транспортной РНК, содержащие минорные компоненты . . . . .	220
Е. И. Голуб, Г. А. Дворкин. Двойное лучепреломление растворов дезоксирибонуклеопроренда в электрическом поле . . . . .	224
В. Б. Евстигнеев, В. А. Гаврилова, И. Г. Савкина. О механизме фотосенсибилизирующего действия хлорофилла . . . . .	227
М. Н. Запромётов, В. Я. Бухлаева. Свободная галловая кислота в листьях чайного растения . . . . .	231
А. И. Опарин, К. Б. Серебровская, С. А. Панджава. Окислительно-восстановительные процессы в коацерватных каплях. Дегидрирование ДПН—Н (НАД — Н) . . . . .	234
Т. И. Тихоненно, Г. А. Перевертайло, Е. Н. Добров, Ф. Л. Киселев. О механизме термической денатурации дезоксирибонуклеиновой кислоты . . . . .	237



MATHEMATICS

G. R. Belitskii. Chains of matrix norms . . . . .	9
A. A. Borovkov, B. A. Rogozin. Asymptotic representations in certain problems for two-dimensional random wanderings . . . . .	11
I. U. Bronstein. Recurrence, periodicity and transitivity in dynamic systems having no uniqueness . . . . .	15
V. I. Gavrilov. Boundary behaviour of functions meromorphic within a unit circle . . . . .	19
V. P. Gromyko. A new speciality test for $\pi d$ -groups with a given number of classes of unattainable isoordic $\pi d$ -subgroups . . . . .	23
S. I. Zukhovitskii, R. A. Poliak, M. E. Primak. Algorithm for solving Chebyshev's convex approximation problem . . . . .	27
A. I. Kokorin. Groups whose partial orders can be continued up to linear order . . . . .	31
I. V. Ostrovskii. On a problem from the values distribution theory . . . . .	34
I. N. Pak. The properties of the sums of some trigonometric series . . . . .	38
A. S. Pekelis, L. E. Sadovskii. Projections of a metabelian torsion-free group . . . . .	42
I. Petersen. Convergence of gradient methods for finding a local arbitrary minimum of a non-linear functional under linear conditions in Hilbert space . . . . .	45
V. P. Platonov. Solvable algebraic groups . . . . .	48
Iu. A. Riabov. Certain asymptotic properties of linear systems with a small time delay . . . . .	52
Iu. J. Tomchuk. Polynomials orthogonal on a given system of unit circle arcs . . . . .	55
R. N. Tonoian. Some equivalent transformation of algorithm schemes . . . . .	59
L. P. Usol'tsev. Exponential rational trigonometric sum of special kind . . . . .	62
A. F. Filippov. Differential equations with their right-hand member many-valued and discontinuous . . . . .	65
A. V. Chernavskii. Finite-multiple open maps of manifolds . . . . .	69
A. L. Shmel'kin. Free nilpotent groups . . . . .	73
L. I. Iakut. On the foundation upon which rests the convergence of difference schemes . . . . .	76

THE MECHANICS OF CONTINUOUS MEDIUM

Kh. M. Aliev. Destruction shock wave in brittle media . . . . .	80
---	----

MATHEMATICAL PHYSICS

B. M. Stepanov. On the construction of the S-matrix . . . . .	84
---	----

PHYSICS

N. V. Kravtsov, V. N. Lazukin, V. A. Shanditsev. Multiquantum transitions in electric spin resonance . . . . .	87
O. P. Semenova, M. A. Levchenko. On radiation from readily ionizable plasma impurities in the case of thermal excitation . . . . .	90

TECHNICAL PHYSICS

I. A. Oding, V. S. Ivanova, Iu. P. Liberov. The principal requirements for correlation between static strength and cyclic strength criteria in metals . . . . .	92
---	----

CHEMISTRY

E. A. Boom. On the mechanism of silumin modification . . . . .	96
V. A. Golodov, A. B. Fasman, D. V. Sokol'skii. Catalytic reduction of <i>n</i> -benzoquinone by carbon monoxide in the liquid phase . . . . .	98
R. G. Grebenshchikov, N. A. Toropov. The energy aspect of the complex crystal lattice of silicates . . . . .	102
N. K. Kochetkov, B. A. Dmitriev. Vittig's reaction in the hydrocarbon series . . . . .	106
G. A. Razuvayev, K. S. Minsker, Iu. A. Sangalov, A. I. Graevskii. Initiation of low-temperature polymerization of vinyl chloride by triethylaluminium under co-catalytic action of oxygen . . . . .	110
A. V. Topchiev, V. P. Alanina, M. F. Vagin. The synthesis of <i>o</i> -fluoro- <i>o</i> -nitro-styrene and a study of its polymerization capacity . . . . .	114

PHYSICAL CHEMISTRY

L. G. Berg, E. P. Kovyrzina. Influence of admixtures on the dissociation of cadmium carbonate . . . . .	117
E. E. Vainstein, I. B. Staryi, M. N. Bril. X-Ray absorption <i>L</i> spectra of lanthanum, praseodymium, neodymium and samarium in oxides and fluorides . . . . .	120
O. D. Dmitrievskii, A. N. Terenin. An investigation of the processes involved in the intermolecular electron transfer under pulsed illumination . . . . .	122
V. I. Kasatochkin, O. I. Egorova, Iu. G. Aseev. Atomic structure of the polyene form of carbon . . . . .	125
G. S. Libinson. Diffusion of organic cations in sulphocationites . . . . .	127

A. M. Poliakov, N. A. Krotova. An investigation of mechanoelectron emission intensity when polymer films are torn off and deformed . . . . .	130
V. A. Pchelín, N. V. Grigorieva, V. N. Izmailova. Fixation of polypeptid chains in two conformations . . . . .	134
L. N. Sidorov, P. A. Akishin. A mass-spectrometric method of determining partial vapour pressures and relative ionization cross-sections of molecules from total evaporation isotherms . . . . .	136
A. A. Tager, V. E. Dreval', N. G. Traianova. The influence of the molecular weight of polyisobutylene on the viscosity and the heat of activation of its concentrated solutions . . . . .	140
G. M. Florianovich, J. M. Kolotyrykin. Passivation characteristics of iron-base alloys . . . . .	144
Iu. A. Shliapnikov, V. B. Miller, M. B. Neiman, E. S. Torsueva. The participation of the inhibitor in the act of degenerated chain branching . . . . .	148
Yao Lu-an, V. E. Kazarinov, Iu. B. Vasiliev, V. S. Bagotskii. The influence of adsorption on the rate of the processes taking place on a platinum electrode in the quinone-hydroquinone system . . . . .	151

## CHEMICAL TECHNOLOGY

V. K. Bobolev, I. A. Karpukhin. The physico-mechanical properties of explosive eutectic alloys . . . . .	155
--	-----

## GEOLOGY

L. N. Zveder. The problem of diamond content in the deposits of the southern part of the Angara-Viluysk downwarping . . . . .	158
V. S. Isakov. Recent data on the geology of South-West Cisbaikalia . . . . .	161
G. A. Kazenkina, N. P. Ladokhin. On the vertical distribution of modern sediments of the Posolsk bay on lake Baikal . . . . .	165
N. N. Karlov. Recent data on the deposition conditions of sands of the Sivash series in the region of Dniepropetrovsk . . . . .	168
A. A. Kordikov. An attempt to dismember coalbearing strata according to heavy minerals . . . . .	171
V. V. Lavrov. Elementary rhythms in the section of the Upper Jurassic at the West of the Achin-Kansk coal basin . . . . .	175
A. E. Lukin. Epigenetic zonality of rocks of the Shygnety series within the region of the Ony river (West Sayan) . . . . .	178

## MINERALOGY

N. N. Makarov, V. A. Suprychev. Epimagmatic montmorillonite from the tuff breccia of the Karadag liparite (the Crimea) . . . . .	181
--	-----

## PETROGRAPHY

V. S. Vyshemirskii, V. A. Krotova. Granulometry of Bashkirian and Vereyan sandstones of the Volga-Don region . . . . .	185
P. V. Zaritskii. The date of formation of carbonate concretions with cone-in-cone structure . . . . .	189

## LITHOLOGY

Iu. N. Senkovskii. The genesis of Upper Cretaceous diatomite on the south-western outskirts of the Russian platform . . . . .	193
---	-----

## GEOCHEMISTRY

L. J. Kizilstein, N. N. Siuniakova. Ways of germanium accumulation in coals, analysed with the aid of methods of mathematical statistics . . . . .	196
--	-----

## CYTOLOGY

J. Iu. Komissarchik, V. F. Mashanskii. Certain recent data on the interrelations between mitochondria and channels of the endoplasmatic reticulum . . . . .	198
---	-----

## HISTOLOGY

Z. S. Katsnel'son, E. M. Lediaeva, V. P. Alexandrova. The foetal adrenal cortex in swine . . . . .	201
--	-----

## GENETICS

M. D. Pomerantseva, L. K. Remaia. Genetic consequences of the action of rapid neutrons on sexual cells of male mice . . . . .	203
---	-----

M. M. Kamshilov, E. S. Fishkova. Numerical variations in bacteria in experimental microbiocoenoses, produced by ultra-violet rays . . . . .	206
---	-----

**BIOPHYSICS**

V. S. Barsukov, O. V. Malinovskii, N. M. Mitushova. Dynamics of post irradiational restoration of yeast cells, as dependent on the dose of $\gamma$ -irradiation . . . . .	209
M. M. Kalashnikova. Reparative regeneration of rat liver after local X-ray irradiation . . . . .	213
I. V. Nekrasova. A study of the protective effect of cystamine on cells of ascitic Ehrlich carcinoma, irradiated in vivo and in vitro . . . . .	217

**BIOCHEMISTRY**

T. V. Venkstern, A. A. Baev, A. D. Mirzabekov, V. I. Gorshkova. Oligonucleotides of the ribonuclease hydrolysate of transport ribonucleic acid, containing minor components . . . . .	220
E. I. Golob, G. A. Dvorkin. Birefringence in solutions of a desoxyribonucleoprotein in an electric field . . . . .	224
V. B. Evstigneev, V. A. Gavrilova, I. G. Savkina. The mechanism of the photosensibilizing effect of chlorophyll . . . . .	227
M. N. Zaprometov, V. J. Bukhlaeva. Free gallic acid in leaves of the tea plant . . . . .	231
A. I. Oparin, K. B. Serebrovskaia, S. A. Pankhava. Redox processes in coacervate drops . . . . .	234
T. I. Tikhonenko, G. A. Perevertailo, E. N. Dobrov, F. L. Kiselev. On the mechanism of thermal denaturation of DRN acid . . . . .	237