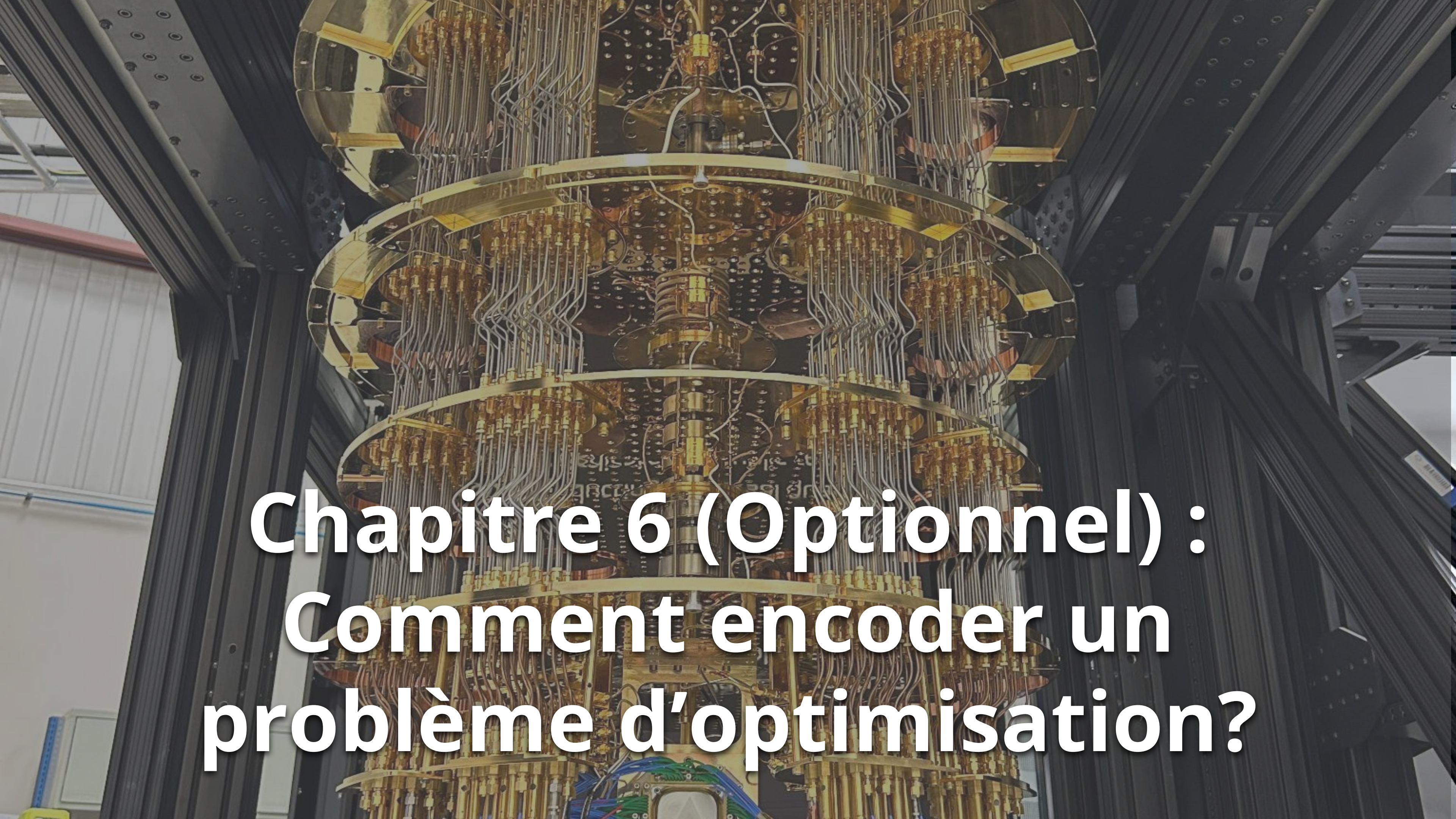
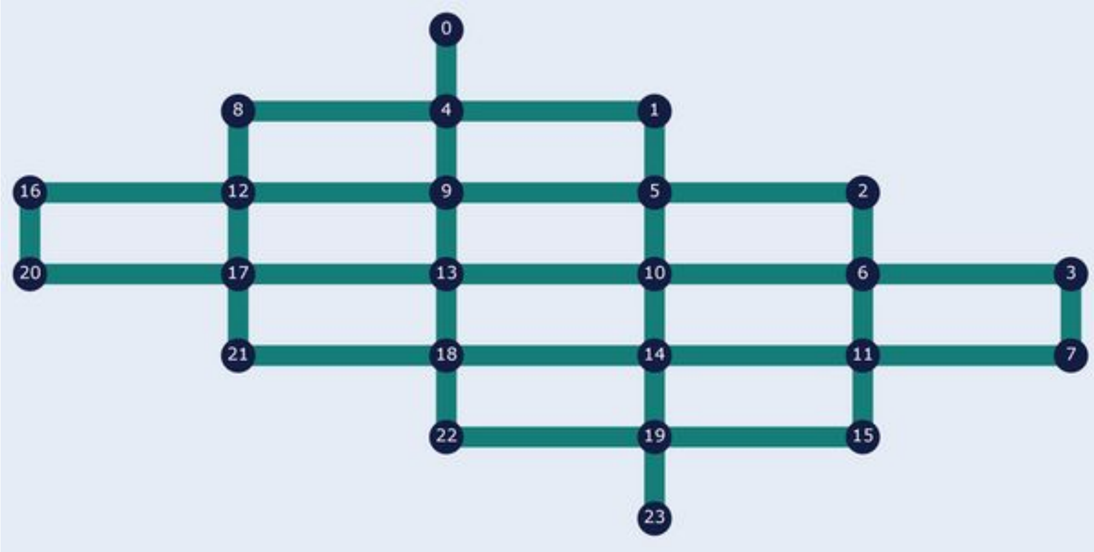


Chapitre 6 (Optionnel) : Comment encoder un problème d’optimisation?

Un problème d’optimisation sur un ordinateur quantique

Façons la plus simple :

- Recréer le graphe sur la puce à l’aide d’un Hamiltonien, basé sur le modèle d’Ising.



QUBO : Quadratic Unconstrained Binary Optimization

Définition du problème :

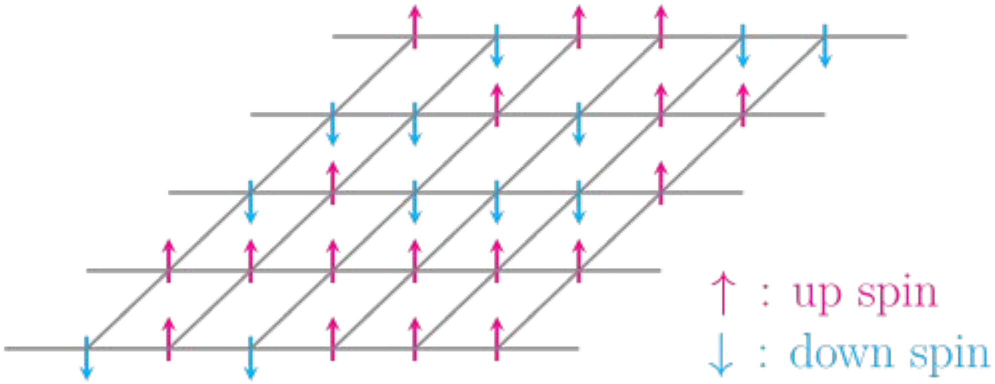
$$\min x^T Q x$$

$$x^T Q x = \sum_{i=1}^{n} Q_{ii} x_i + \sum_{i<j} (Q_{ij} + Q_{ji}) x_i x_j$$

$$x_i \in \{0, 1\}^n$$

Modèle d’ising

Le modèle d’Ising décrit un système de **spins** (valeurs ±1) placés sur un réseau (généralement une grille 1D, 2D ou 3D), interagissant entre eux et avec un champ magnétique externe.



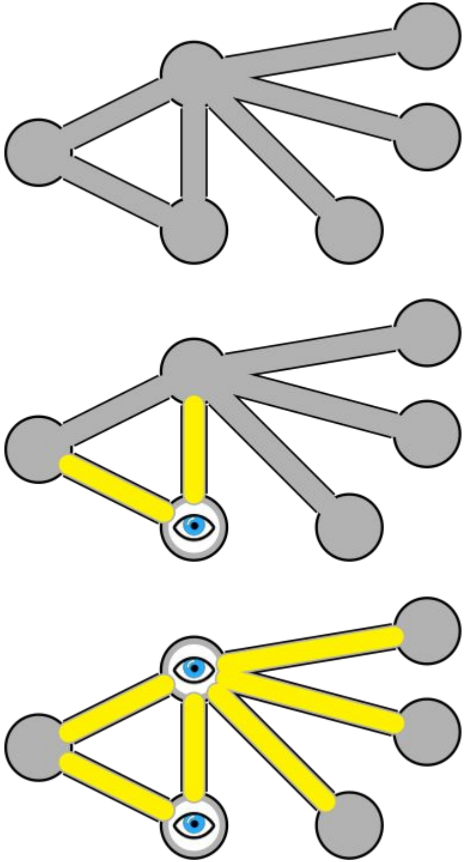
$$H = -\sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} s_i s_j - \sum_i h_i s_i \qquad s_i \in \{-1, 1\}^n$$

Un problème d’optimisation : Vertex Cover

Soit G=(V,E), un graphe non orienté, où V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes.

Un **vertex cover** est un **sous-ensemble de sommets** C⊆V tel que **chaque arête** de E a **au moins un de ses extrémités dans C**.

Autrement dit, pour toute arête (u,v)∈E, **au moins un des deux sommets** u ou v doit appartenir à C.



https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/0/0a/Couverture_de_sommets.svg/500px-Couverture_de_sommets.svg.png

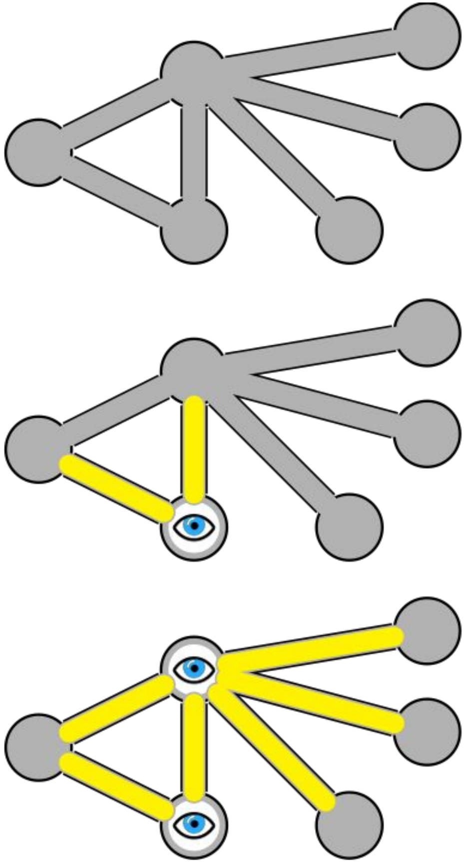
Un problème d’optimisation : Vertex Cover

En programmation linéaire on peut définir le problème comme :

$$\text{minimiser} \sum_{i \in V} x_i$$

Sujet à

$$x_u + x_v \geq 1 \forall (u, v) \in E$$



https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/0/0a/Couverture_de_sommets.svg/500px-Couverture_de_sommets.svg.png

Transformer les contraintes en pénalités

Les contraintes de programmation linéaire doivent être changer en pénalité pour devenir un QUBO

Pour ce faire voici quelques contraintes et leurs équivalences:

Classical Constraint	Equivalent Penalty
$x+y\leq 1$	$P(xy)$
$x+y\geq 1$	$P(1-x-y+xy)$
$x+y=1$	$P(1-x-y+2xy)$
$x\leq y$	$P(x-xy)$
$x_1+x_2+x_3\leq 1$	$P(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$
$x=y$	$P(x+y-2xy)$

Table of a few Known constraint/penalty pairs

Transformer Vertex Cover en QUBO

$$\text{minimiser} \sum_{i \in V} x_i$$

Sujet à

$$x_u + x_v \geq 1 \forall (u, v) \in E$$

Classical Constraint	Equivalent Penalty
$x + y \leq 1$	$P(xy)$
$x + y \geq 1$	$P(1 - x - y + xy)$
$x + y = 1$	$P(1 - x - y + 2xy)$
$x \leq y$	$P(x - xy)$
$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$	$P(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)$
$x = y$	$P(x + y - 2xy)$

Table of a few Known constraint/penalty pairs

Donc :

$$\text{Minimiser } y = \sum_{j \in V} x_j + P(\sum_{i \in E} 1 - x_i - x_j + x_i x_j)$$

Transformer un QUBO en modèle d'Ising

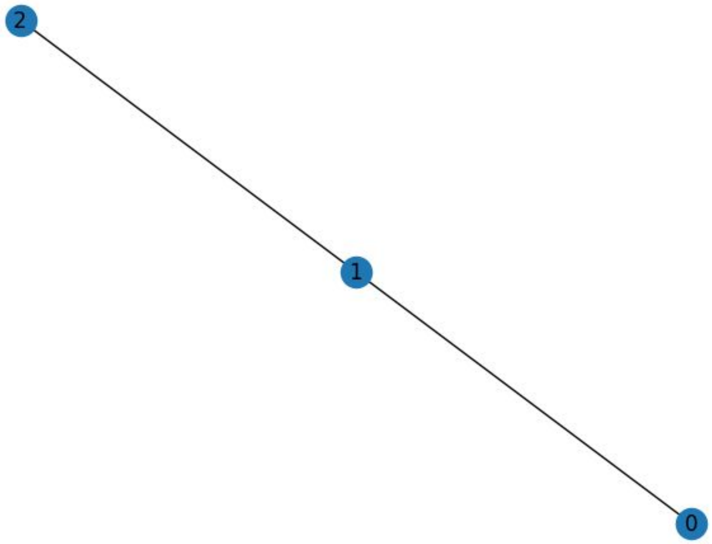
1. Les constantes ne sont pas prisent en compte

2. Nous devons transformer nos variables binaires en {-1,1}

3. Nous avons notre modèle d'Ising et donc un Hamiltonien

$$x_i = \frac{1 + s_i}{2}$$

Transformer un QUBO en modèle d'Ising



$$\text{Minimiser } y = \sum_{j \in V} x_j + P\left(\sum_{i \in E} 1 - x_i - x_j + x_i x_j\right)$$

$$\text{Minimiser } x_0 + x_1 + x_2 + P(1 - x_0 - x_1 + x_0 x_1) + P(1 - x_1 - x_2 + x_1 x_2)$$
$$= (1-P)x_0 + (1-2P)x_1 + (1-P)x_2 + Px_0x_1 + Px_1x_2 + 2P$$

Transformer un QUBO en modèle d'Ising

$$\text{Minimiser } x_0 + x_1 + x_2 + P(1 - x_0 - x_1 + x_0x_1) + P(1 - x_1 - x_2 + x_1x_2)$$
$$= (1-P)x_0 + (1-2P)x_1 + (1-P)x_2 + Px_0x_1 + Px_1x_2 + 2P$$

Maintenant transformons le en modèle d'Ising :

$$x_i = \frac{1 + s_i}{2}$$

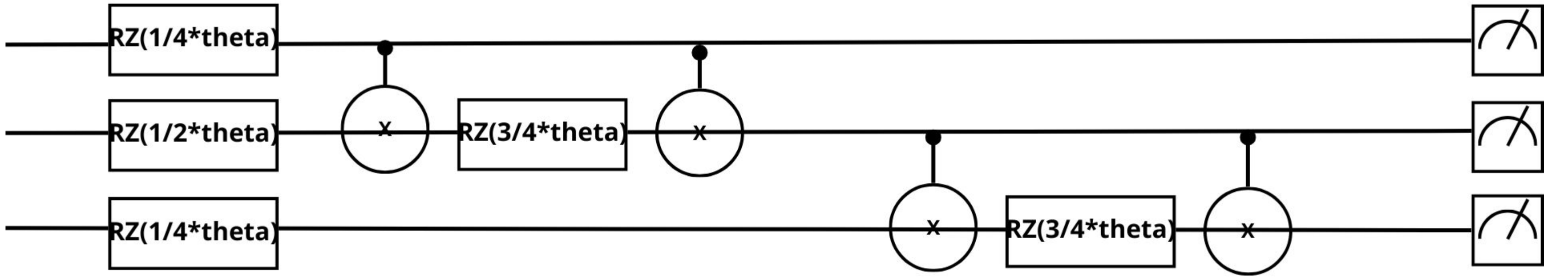
$$H(s) = \frac{4-P}{4}s_0 + \frac{1}{2}s_1 + \frac{4-P}{4}s_2 + \frac{P}{4}s_0s_1 + \frac{P}{4}s_1s_2 + \frac{3+2P}{2}$$

$$H(s) = \frac{4-P}{4}s_0 + \frac{1}{2}s_1 + \frac{4-P}{4}s_2 + \frac{P}{4}s_0s_1 + \frac{P}{4}s_1s_2$$

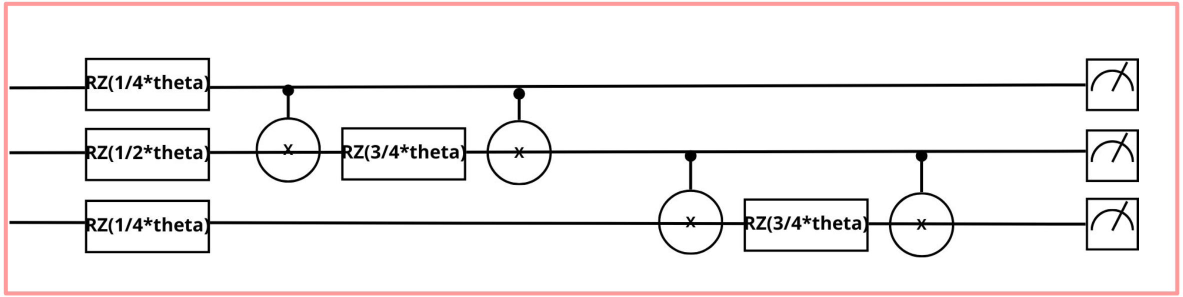
Encodons notre problème sur un ordinateur quantique

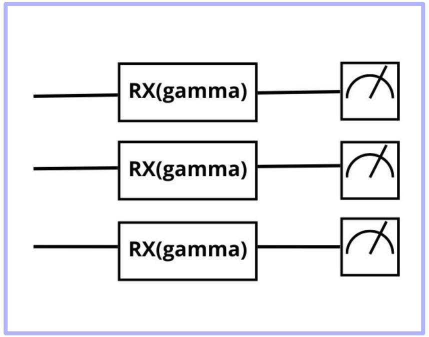
$$H(s) = \frac{4-P}{4}s_0 + \frac{1}{2}s_1 + \frac{4-P}{4}s_2 + \frac{P}{4}s_0s_1 + \frac{P}{4}s_1s_2$$

Pour un p = 3

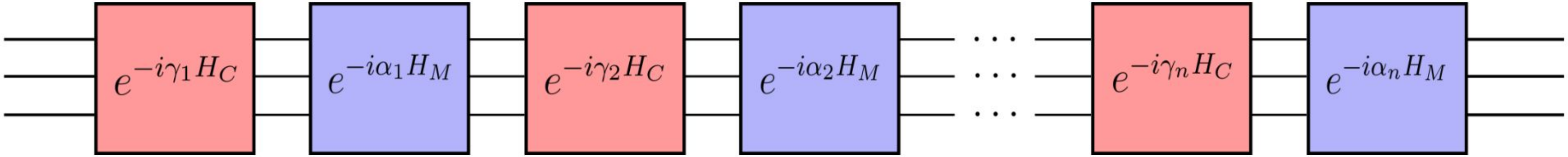


Comment utiliser cet Hamiltonien ?

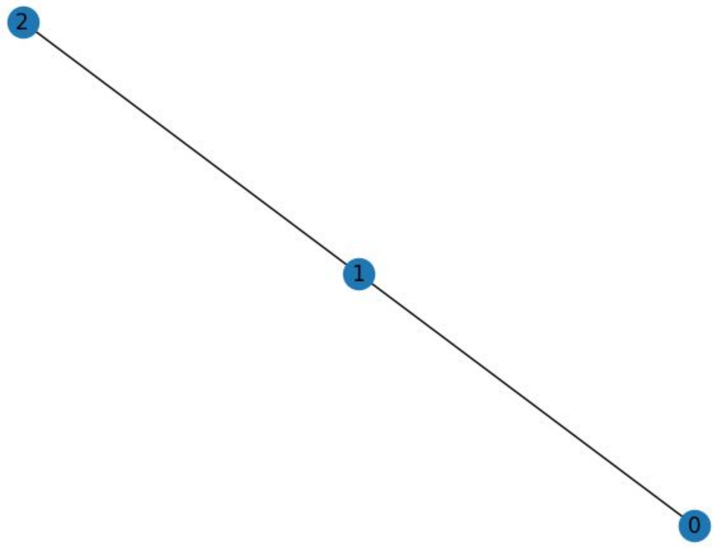


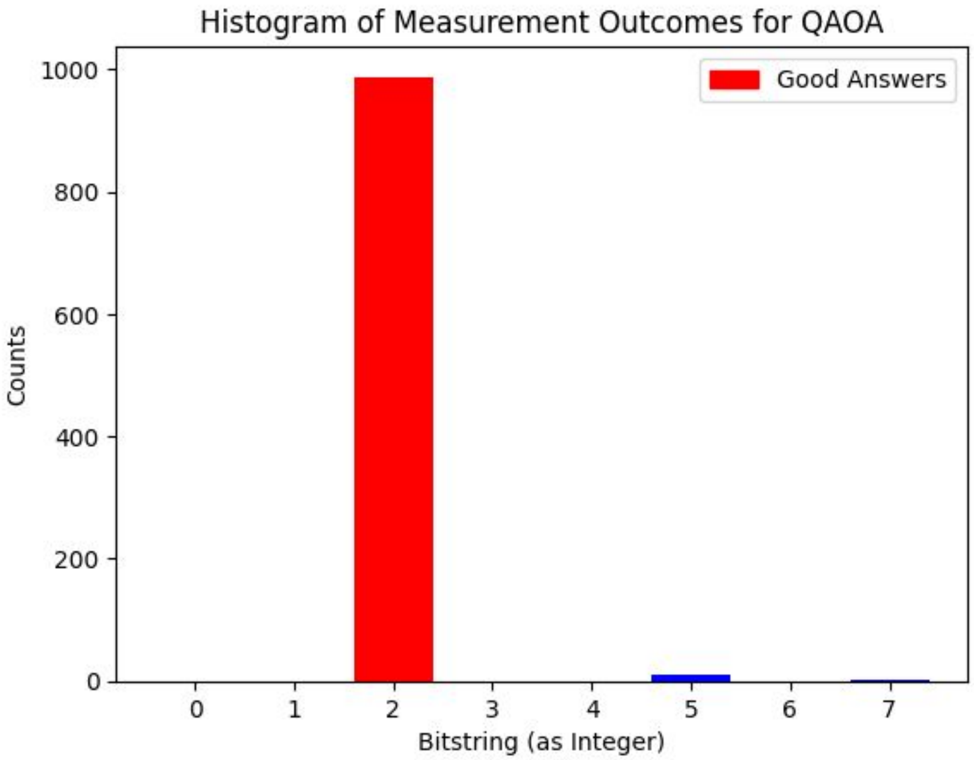


QAOA :



QAOA


2
1
0


Histogram of Measurement Outcomes for QAOA
Good Answers
Counts
Bitstring (as Integer)
0
200
400
600
800
1000
0
1
2
3
4
5
6
7

Questions?

quantique@calculquebec.ca

Calcul Québec