Diferencias Finitas

Problemas estacionarios II

Modelación computacional en las ciencias y las ingenierías como apoyo en el proceso enseñanza-aprendizaje (PAPIME-PE101019)

Instituto de Geofísica
Universidad Nacional Autónoma de México

Contenido

Modelo Matemático

Considere el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \frac{d^2T(x)}{dx^2} + \omega^2 T(x) &= 0 \quad x \in [0,1] \\ T(0) &= 1 \\ T(1) &= 1 \end{aligned} \tag{1}$$

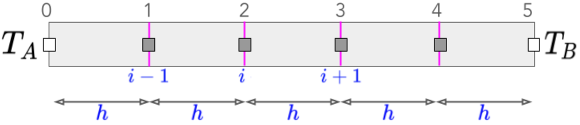
cuya solución analítica es: $T(x) = \dfrac{1-\cos(\omega)}{\sin(\omega)}\sin(\omega x) + \cos(\omega x)$

donde $\omega =$ constante.

Modelo Numérico

Recordemos que la segunda derivada se puede aproximar como sigue (véase la figura como referencia):

$$\boxed{\left.\frac{d^2T}{dx^2}\right|_i = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)} \tag{2}$$



Usando (2) en (1) obtenemos

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} + \omega T_i = 0$$

que podemos escribir como:

$$-T_{i+1} + (2 - \omega / r_i) T_i - T_{i-1} = 0$$

donde $r_i = \dfrac{\kappa_i}{h^2}$ y en este caso $\kappa_i = 1$, $\forall i$.

Modelo Numérico

El sistema lineal para este caso, para cualquier N, es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2-\omega/r & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2-\omega/r & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2-\omega/r & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2-\omega/r & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2-\omega/r \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{N\times N}} \underbrace{\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_{N-1} \\ T_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_N} = \underbrace{\frac{1}{r}\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_{N-1} \\ S_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_A \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_B \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_N}$$

donde $r = \dfrac{\kappa}{h^2}$ y $S_i = 0, \forall i$.

Ejercicio 3.

1. Resuelva el problema numéricamente usando diferencias finitas.

Contenido

Modelo Matemático

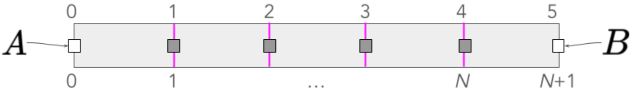
Considere el siguiente problema:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2u(x)}{dx^2} &= e^x \quad x \in [0,1] \\
\frac{du}{dn}(0) &= 0 \\
u(1) &= 3
\end{aligned}
$$

cuya solución analítica es: $u(x) = e^x - x - e + 4$

A continuación mostramos cuatro aproximaciones que se pueden usar para incorporar las condiciones de tipo Neumman en el sistema lineal.

Aproximación de primer orden, sistema de $(N+1)\times(N+1)$



$$\begin{aligned} &u_0 = A \\ &u_0 - 2u_1 + u_2 = r^{-1} f_1 \\ \Rightarrow\ &\boxed{-2u_1 + u_2 = r^{-1} f_1 - A} \end{aligned}$$

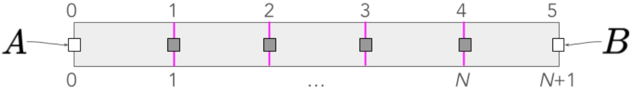
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{N+1} = B \Longrightarrow \frac{u_{N+1} - u_N}{h} = B$$

$$\Longrightarrow \boxed{-u_N + u_{N+1} = hB}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{(N+1)\times(N+1)} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \\ u_{N+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ hB \end{bmatrix}$$

donde $f(x) = e^x$, por lo tanto $f(x_i) = f_i = e^{x_i}$

Aproximación de primer orden, sistema de $N \times N$

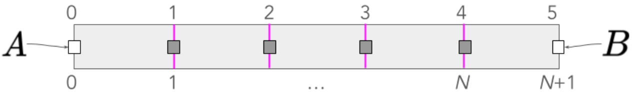


$$u_0 = A$$
$$u_0 - 2u_1 + u_2 = r^{-1} f_1$$
$$\Rightarrow \boxed{-2u_1 + u_2 = r^{-1} f_1 - A}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{N+1} = B \Longrightarrow \boxed{u_{N+1} = hB + u_N}$$
$$u_{N-1} - 2u_N + u_{N+1} = r^{-1} f_N$$
$$\Rightarrow \boxed{u_{N-1} - u_N = r^{-1} f_N - hB}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{N \times N} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -hB \end{bmatrix}$$

Aproximación de segundo orden usando tres puntos

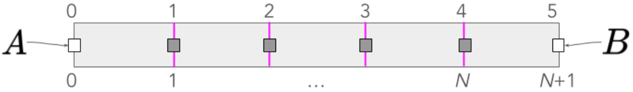


$$u_0 = A.$$
$$u_0 - 2u_1 + u_2 = r^{-1} f_1$$
$$\Rightarrow \boxed{-2u_1 + u_2 = r^{-1} f_1 - A}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{N+1} = \boxed{\frac{1}{h}\left(\frac{1}{2}u_{N-1} - 2u_N + \frac{3}{2}u_{N+1}\right) = B}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}}_{(N+1)\times(N+1)} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \\ u_{N+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ hB \end{bmatrix}$$

Aproximación de segundo orden con diferencias centrales



$$u_N - 2u_{N+1} + u_{N+2} = r^{-1} f_{N+1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{N+1} = \frac{(u_{N+2} - u_N)}{2h} = B \Longrightarrow u_{N+2} = 2hB + u_N$$

$$u_0 = A.$$

$$u_0 - 2u_1 + u_2 = r^{-1} f_1$$

$$\Rightarrow \boxed{-2u_1 + u_2 = r^{-1} f_1 - A}$$

$$\Longrightarrow \boxed{u_N - u_{N+1} = \frac{1}{2r} f_{N+1} - hB}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{(N+1)\times(N+1)} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \\ u_{N+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \\ f_{N+1}/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ -hB \end{bmatrix}$$

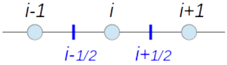
Ejercicio 4.

1. aaa

Contenido

Modelo Matemático y Numérico

Considere la ecuación de Poisson con κ variable y condiciones de frontera de tipo Dirichlet:



$$\frac{d}{dx}\left(\kappa \frac{du}{dx}\right) = f \quad \text{con} \quad \kappa = \kappa(x) \qquad (3)$$

Definimos $g = \kappa \dfrac{du}{dx}$ por lo tanto $\dfrac{d}{dx}\left(\kappa \dfrac{du}{dx}\right) = \dfrac{dg}{dx}$. Esta derivada se puede aproximar como sigue (véase la figura):

$$\left.\frac{dg}{dx}\right|_i = \frac{g_{i+\frac{1}{2}} - g_{i-\frac{1}{2}}}{h} = \frac{\left[\kappa \frac{du}{dx}\right]_{i+\frac{1}{2}} - \left[\kappa \frac{du}{dx}\right]_{i-\frac{1}{2}}}{h} \tag{4}$$

$$\left[\kappa \frac{du}{dx}\right]_{i+\frac{1}{2}} = \kappa_{i+\frac{1}{2}} \left[\frac{u_{i+1} - u_i}{h}\right] = \frac{1}{h}\left[\kappa_{i+\frac{1}{2}} u_{i+1} - \kappa_{i+\frac{1}{2}} u_i\right] \tag{5}$$

$$\left[\kappa \frac{du}{dx}\right]_{i-\frac{1}{2}} = \kappa_{i-\frac{1}{2}} \left[\frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right] = \frac{1}{h}\left[\kappa_{i-\frac{1}{2}} u_i - \kappa_{i-\frac{1}{2}} u_{i-1}\right] \tag{6}$$

Modelo Numérico

Usando (4), (5) y (6) en (3) obtenemos:

$$\boxed{\frac{1}{h^2}\left[\kappa_{i+\frac{1}{2}}u_{i+1} - (\kappa_{i+\frac{1}{2}} + \kappa_{i-\frac{1}{2}})u_i + \kappa_{i-\frac{1}{2}}u_{i-1}\right] = f_i} \tag{7}$$

Condiciones de frontera tipo Dirichlet: $u_0 = A$ y $u_{N+1} = B$

$$\begin{array}{rcrcl} i=1 & \Longrightarrow & \kappa_{1+\frac{1}{2}}u_2 - (\kappa_{1+\frac{1}{2}} + \kappa_{1-\frac{1}{2}})u_1 & = & h^2 f_1 - \kappa_{1-\frac{1}{2}}A \\ i=N & \Longrightarrow & -(\kappa_{N+\frac{1}{2}} + \kappa_{N-\frac{1}{2}})u_N + \kappa_{N-\frac{1}{2}}u_{N-1} & = & h^2 f_N - \kappa_{N+\frac{1}{2}}B \end{array}$$

Donde $\kappa_{i+\frac{1}{2}}$ y $\kappa_{i-\frac{1}{2}}$ se pueden aproximar de varias maneras, por ejemplo:

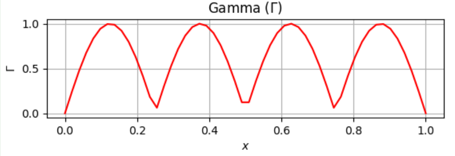
Promedio aritmético: $\kappa_{i+\frac{1}{2}} = \dfrac{\kappa_{i+1}+\kappa_i}{2}$ y $\kappa_{i-\frac{1}{2}} = \dfrac{\kappa_{i-1}+\kappa_i}{2}$

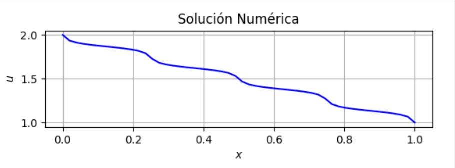
Media armónica: $\kappa_{i+\frac{1}{2}} = \dfrac{2\kappa_{i+1}\kappa_i}{\kappa_{i+1}+\kappa_i}$ y $\kappa_{i-\frac{1}{2}} = \dfrac{2\kappa_{i-1}\kappa_i}{\kappa_{i-1}+\kappa_i}$

Ejercicio 5.

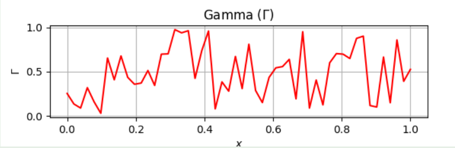
Reproducir los siguientes casos:

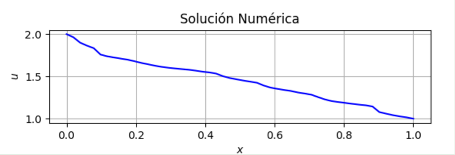
1. $L = 1, \; N = 50, \; A = 2.0, \; B = 1.0, \; \kappa = |sin(4\pi x)|$





2. $L = 1, \; N = 50, \; A = 2.0, \; B = 1.0, \; \kappa =$ `random(x)`





Contenido

[1] Bergman, T.L. and Incropera, F.P. and DeWitt, D.P. and Lavine, A.S.,
Fundamentals of Heat and Mass Transfer,
Wiley, **2011**.

[2] R.J. Leveque,
Finite Difference Method for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady State and Time-Dependent Problems ,
Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, **2007**.

[3] Y. Saad
Iterative Methods for Sparse Linear Systems.
PWS/ITP 1996.
Online: http://www-users.cs.umn.edu/~saad/books.html, **2000**

[4] Richard Burden and J. Douglas Faires
Numerical Analysis
Cengage Learning; 9 edition (August 9, **2010**)

[5] I. Herrera & G. F. Pinder,
Mathematical Modeling in Science and Engineering: An Axiomatic Approach,
John Wiley **2012**.

Contenido

Créditos

Dr. Luis M. de la Cruz Salas

Departamento de Recursos Naturales

Instituto de Geofísica

Universidad Nacional Autónoma de México

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE101019