1. Ecuación general

Ecuación general de transferencia de calor:

$$\tau \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\upsilon_j \psi) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right) = q$$

donde se usa la convención de Einstein (índices repetidos se suman) y se define lo siguiente:

Símbolo		Unidades
	Parámetros físicos	
τ	"Almacenamiento"	
υ	"Velocidad"	
Γ	"Difusividad"	
q	Ganancia (fuente) o pérdida (sumidero) de calor	

Símbolo		Unidades
	Variables independientes	
x_j	Coordenadas cartesianas de la posición: $(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$.	[m]
t	Tiempo.	[s]
	Variables dependientes	
ψ	...	[]
υ_j	Componentes : $(\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3) \equiv (\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$.	[]

1.1. Casos de estudio

Ecuación	**Descripción**
$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right) = q$	Difusión estacionaria
$\frac{\partial}{\partial x_j}(\upsilon_j \psi) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right) = q$	Advección – difusión estacionaria
$\tau \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right) = q$	Difusión NO estacionaria
$\tau \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\upsilon_j \psi) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right) = q$	Advección – difusión NO estacionaria

©2020, LMCS

2. Difusión estacionaria

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right) = q \tag{1}$$

Símbolo	Descripción	Valor
Γ	Difusividad	Variable
L	Tamaño del dominio	Variable
ψ_A	Condición de frontera izquierda (Dir)	1
ψ_B	Condición de frontera derecha (Dir)	0
q	Ganancia (fuente) o pérdida (sumidero)	Variable

Cuando Γ es constante, en una dimensión podemos escribir

$$-\Gamma \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = q \tag{2}$$

en cuyo caso la solución analítica es

$$\psi(x) = \left(\frac{\psi_B - \psi_A}{L} + \frac{q}{2\Gamma}(L - x)\right) x + \psi_A \tag{3}$$

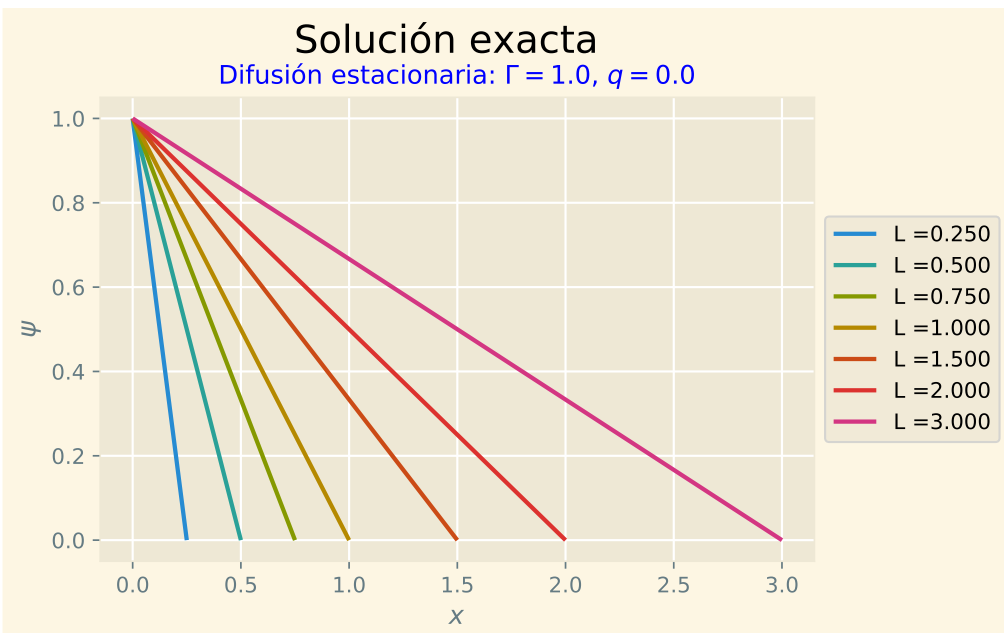

Figura 1: Cuando $q = 0$ y variamos la longitud del dominio, observamos que la solución se mantiene en una línea recta cambiando solo su pendiente.

 ©2020, LMCS

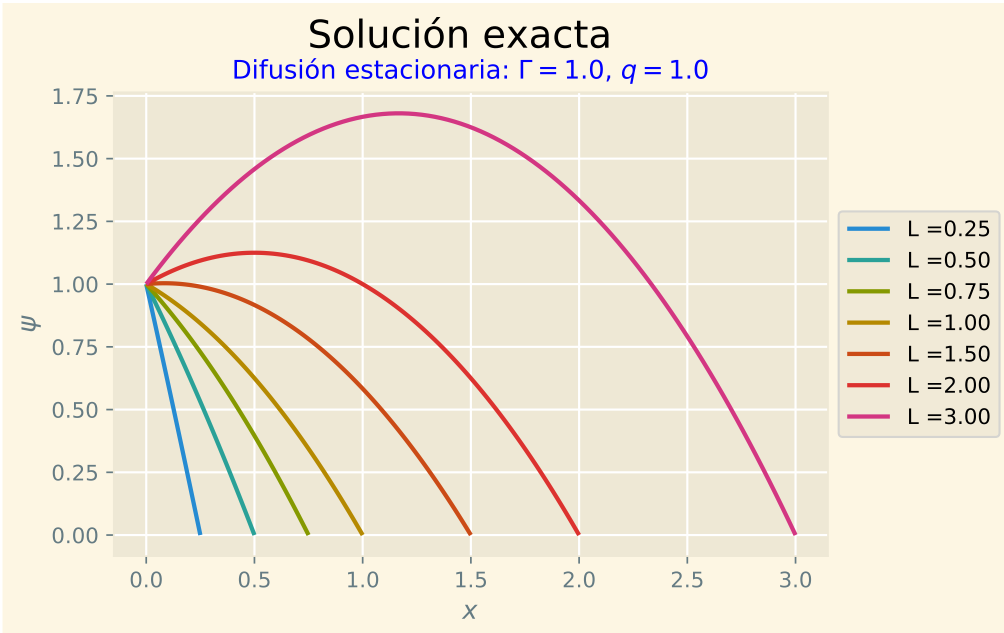

Figura 2: Cuando $q = 1$ observamos una pequeña curvatura en la solución. Conforme L crece esta curvatura se incrementa.

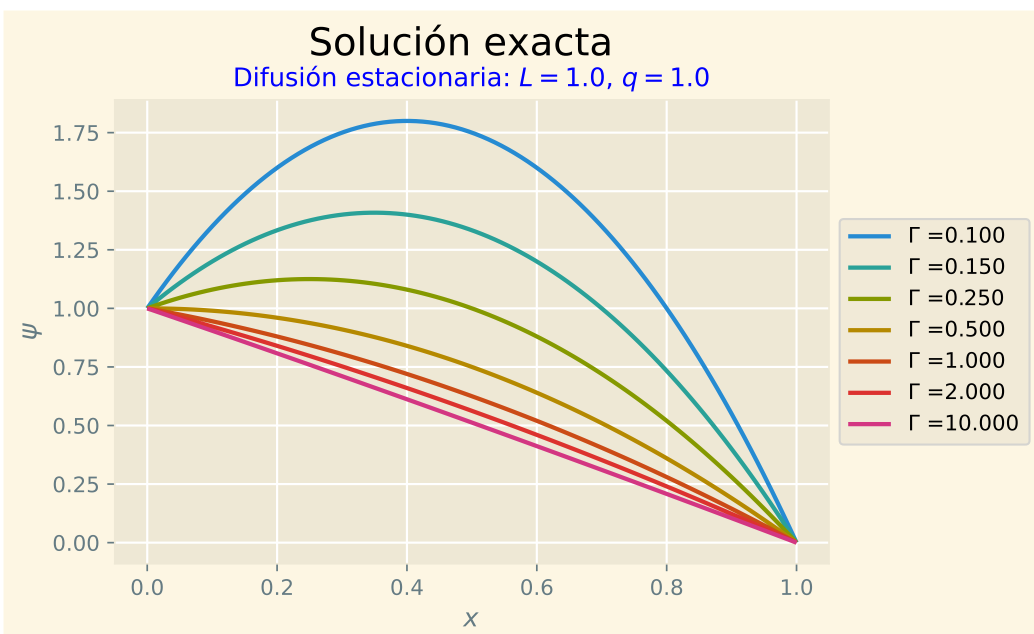

Figura 3: Cuando mantenemos fijos a $L = 1$ y $q = 1$, y variamos Γ, observamos que conforme a valores mayores de Γ la curvatura de en la solución es más pronunciada. Por otro lado, se obtiene casi una línea recta cuando Γ es muy pequeña.

©2020, LMCS

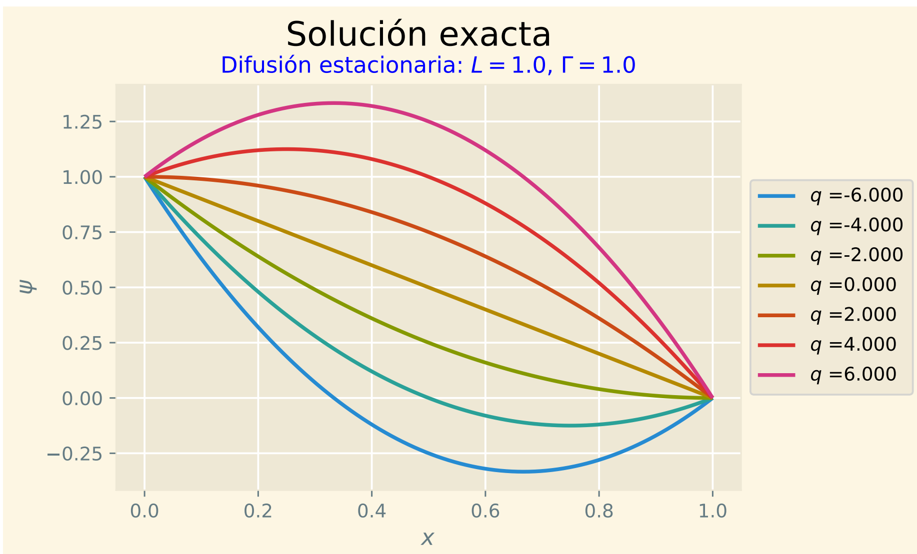

Figura 4: Cuando mantenemos $L = 1$, $\Gamma = 1$ y variamos q. Observamos que conforme $|q|$ aumenta la solución tiene una mayor curvatura.

 ©2020, LMCS

3. Advección-Difusión estacionaria

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\upsilon_j \psi\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right) = q$$

Símbolo	Descripción	Valor
Γ	Difusividad	Variable
υ	Velocidad	Variable
L	Tamaño del dominio	Variable
ψ_A	Condición de frontera izquierda (Dir)	1
ψ_B	Condición de frontera derecha (Dir)	0
q	Ganancia (fuente) o pérdida (sumidero)	Variable

Cuando Γ y υ son constantes y $q = 0$, en una dimensión podemos escribir

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{P_e}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

donde definimos $P_e = \upsilon/\Gamma$ como el número de Peclet. La solución analítica en este caso es

$$\psi(x) = \left(\frac{e^{P_e x} - 1}{e^{P_e L} - 1}\right)(\psi_B - \psi_A) + \psi_A$$

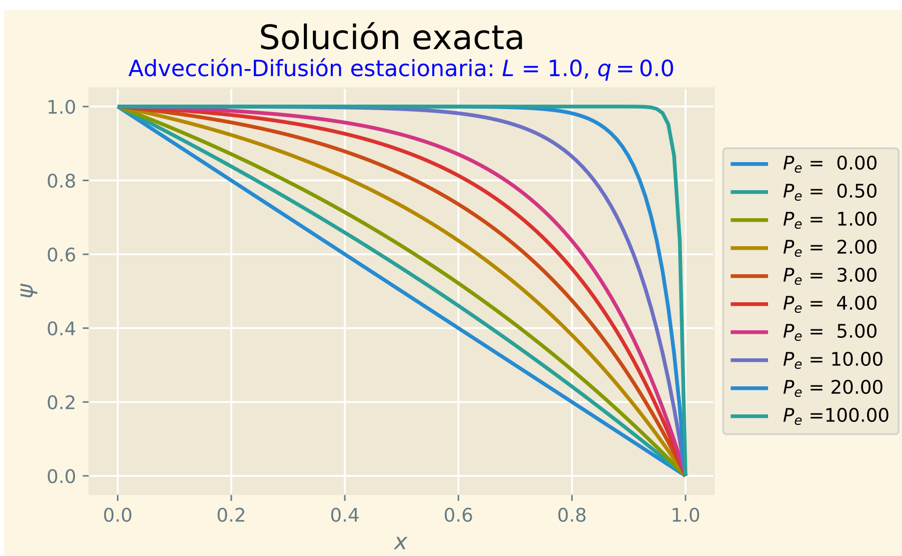

Figura 5: Cuando mantenemos $L = 1$, $\Gamma = 1$ y variamos q. Observamos que conforme $|q|$ aumenta la solución tiene una mayor curvatura.

 ©2020, LMCS

4. Difusión NO estacionaria

$$\tau \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right) = q \tag{4}$$

Símbolo	**Descripción**	**Valor**
Γ	Difusividad	Variable
L	Tamaño del dominio	Variable
ψ_A	Condición de frontera izquierda (Dir)	1
ψ_B	Condición de frontera derecha (Dir)	0
$\psi(x,0)$	Condición inicial	0
τ	"Almacenamiento"	1

Cuando Γ es constante y $q = 0$, en una dimensión podemos escribir

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \Gamma \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \tag{5}$$

cuya solución analítica es

$$\psi(x,t) = \psi_{_A} + (\psi_{_B} - \psi_{_A})\left(\frac{x}{L} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2\Gamma}{L^2}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right) \tag{6}$$

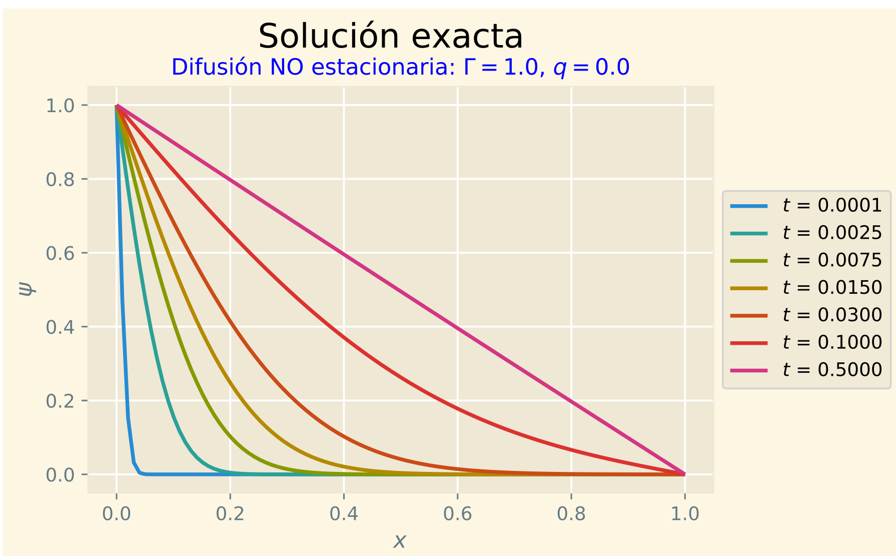

Figura 6: Se muestra la solución para varios pasos de tiempo. Se observa que la solución avanza hacia una línea recta. Variando Γ y/o L se obtiene un comportamiento similar, con una mayor (aumentar Γ o disminuir L) o menor velocidad (disminuir Γ o aumentar L) del avance en la solución.

©2020, LMCS

5. Advección-Difusión NO estacionaria

$$\tau \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\upsilon_j \psi) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right) = q \tag{7}$$

Símbolo	**Descripción**	**Valor**
Γ	Difusividad	Variable
υ	Velocidad	1.0
L	Tamaño del dominio	2.5 ($\rightarrow \infty$)
ψ_A	Condición de frontera izquierda (Dir)	1
ψ_B	Condición de frontera derecha (Dir)	0
$\psi(x,0)$	Condición inicial	0
τ	"Almacenamiento"	1

Cuando Γ y υ son constantes y $q = 0$, en una dimensión podemos escribir

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{P_e}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \tag{8}$$

donde definimos $P_e = \upsilon/\Gamma$ como el número de Peclet. Con estas condiciones y para $0 < \Gamma < 0.1$ la solución exacta es

$$f(x,t) = 0.5\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x - ut}{2\sqrt{\Gamma t}}\right) + \exp\left(\frac{ux}{\Gamma}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x + ut}{2\sqrt{\Gamma t}}\right)\right] \tag{9}$$

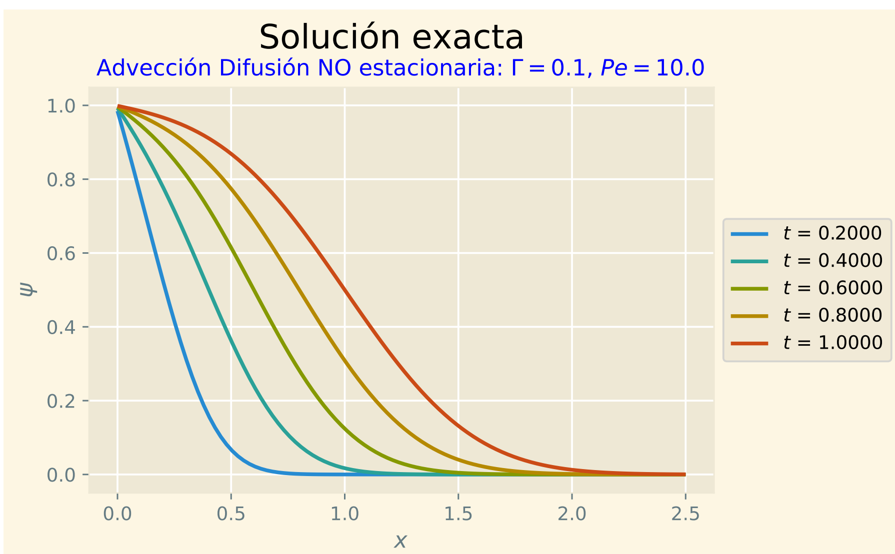

Figura 7: Se muestra la solución para varios pasos de tiempo. Se observa que la condición de frontera $\psi_A = 1.0$ se va transmitiendo de izquierda a derecha conforme avanza el tiempo.

©2020, LMCS

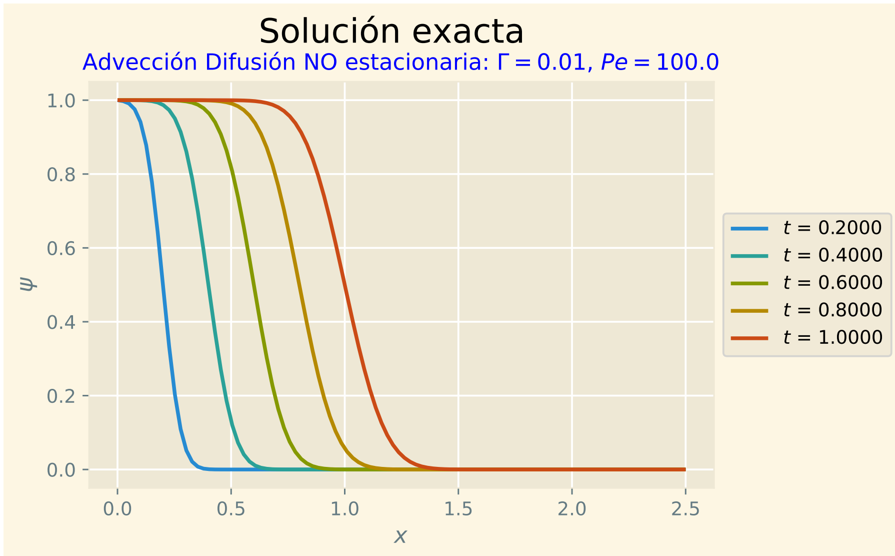

Figura 8: Se muestra la solución para varios pasos de tiempo. Se observa que la condición de frontera $\psi_A = 1.0$ se va transmitiendo de izquierda a derecha conforme avanza el tiempo.

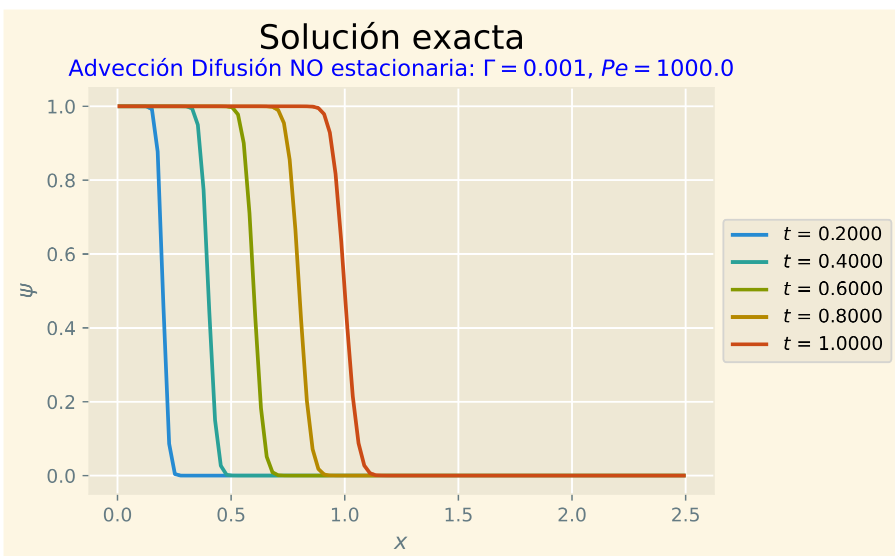

Figura 9: Se muestra la solución para varios pasos de tiempo. Se observa que la condición de frontera $\psi_A = 1.0$ se va transmitiendo de izquierda a derecha conforme avanza el tiempo.

 ©2020, LMCS

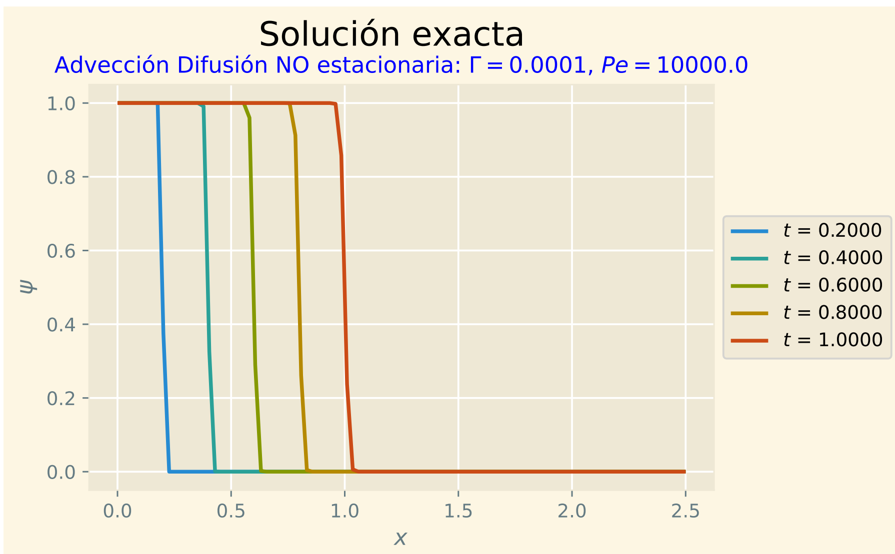

Figura 10: Se muestra la solución para varios pasos de tiempo. Se observa que la condición de frontera $\psi_A = 1.0$ se va transmitiendo de izquierda a derecha conforme avanza el tiempo.

 ©2020, LMCS