電磁気学

第3回　ガウスの法則（微分形）

（復習）微分演算子 ∇（ナブラ）

- 演算子…関数に対する操作を表す記号（左から作用）

ナブラ $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x},\ \dfrac{\partial}{\partial y},\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ （ベクトル演算子）

関数 f に作用させると

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} = \left(\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

（注）∇f は $\mathrm{grad} f$ とも書く（gradient 勾配）

例）$f(x, y, z) = xy + yz + zx$ のとき

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = y + z,\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = z + x,\quad \dfrac{\partial f}{\partial z} = x + y$ より $\nabla f = (y + z,\ z + x,\ x + y)$

[数学] ベクトル場の発散(divergence)

- 任意のベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ について, その発散

$$\boxed{\nabla\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathrm{div}\,\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\partial A_x(\mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\mathbf{r})}{\partial y} + \frac{\partial A_z(\mathbf{r})}{\partial z}}$$

（注）ナブラ $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ と $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \left(A_x(\mathbf{r}), A_y(\mathbf{r}), A_z(\mathbf{r})\right)$ の内積

（注）「発散」はベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ からスカラー場（$\mathbf{r}$ の関数） $\nabla\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r})$ を作る

c.f. 「勾配」はスカラー場 $f(\mathbf{r})$ からベクトル場を作る ⋯ $\nabla f(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

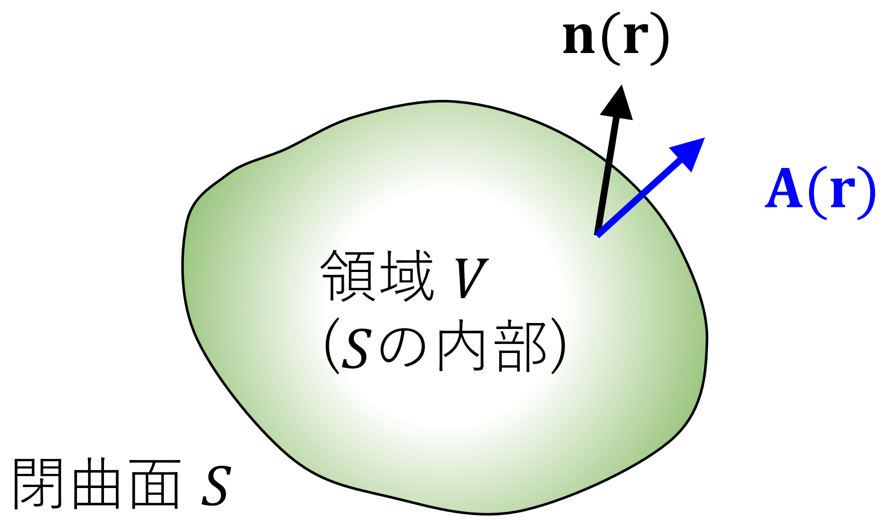
例） $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (x, y^2, z^3)$ のとき $\nabla\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 1 + 2y + 3z^2$

例） $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (yz, zx, xy)$ のとき $\nabla\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 + 0 + 0 = 0$

[数学] ガウスの定理(1)

- 閉曲面 S に対し, その外向き法線単位ベクトルを $\mathbf{n(r)}$, 内部の領域を V とすると, 任意のベクトル場 $\mathbf{A(r)}$ について,

$$\int_S \mathbf{A(r)} \cdot \mathbf{n(r)} dS = \int_V \mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{A(r)} dV$$



[数学] ガウスの定理の証明の概略(1)

領域 V を微小直方体に分割し, その一つ（ Qとする）を考える.

Q の頂点の一つの座標を (x_0, y_0, z_0) とし, x, y, z 軸方向の辺の長さをそれぞれ $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ とする.

Q の６つの面について,

$x = x_0$ の面を S_{x_0}

$x = x_0 + \Delta x$ の面を $S_{x_0+\Delta x}$,

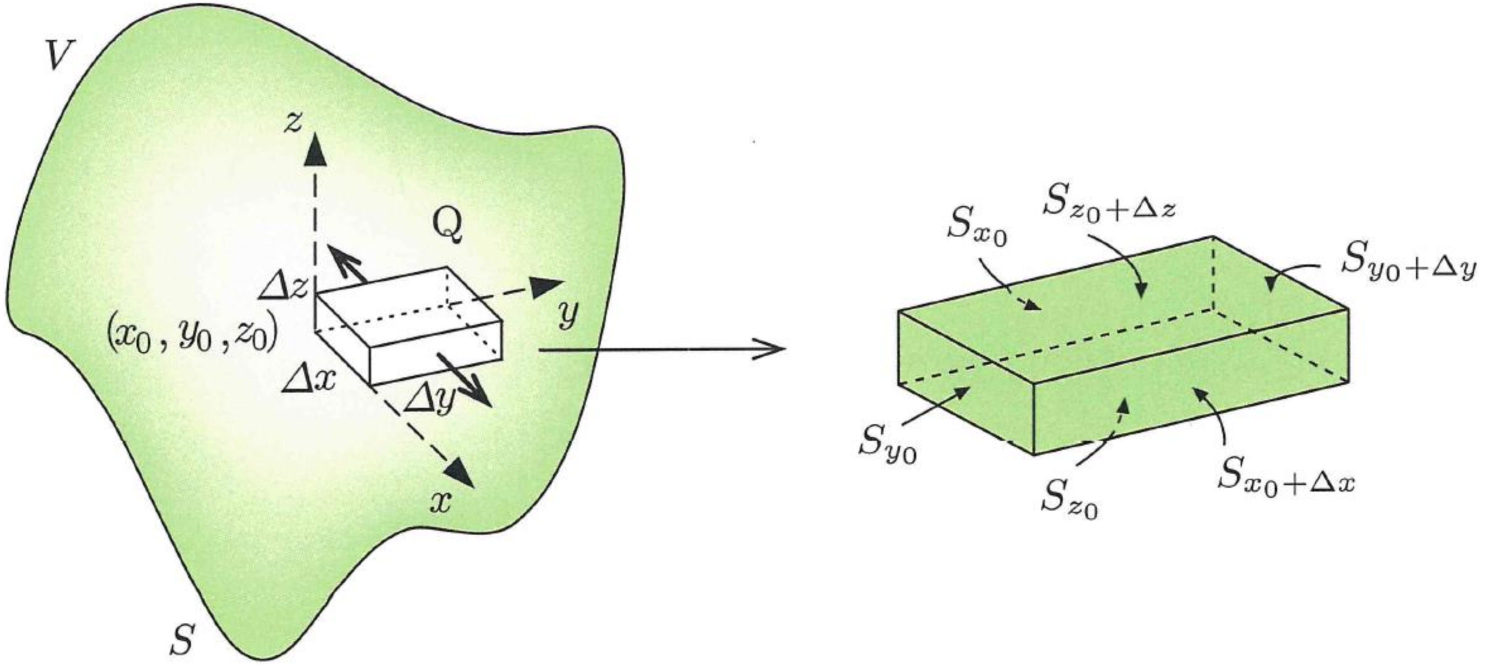
$y = y_0$ の面を S_{y_0} ,

$y = y_0 + \Delta y$ の面を $S_{y_0+\Delta y}$,

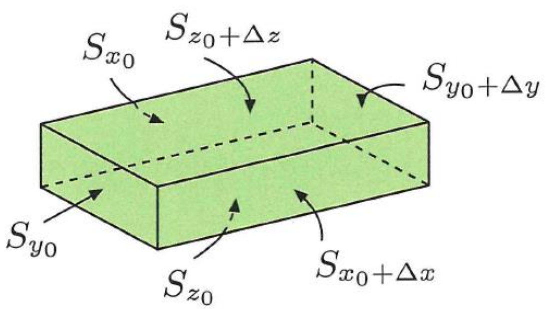
$z = z_0$ の面を S_{z_0} ,

$z = z_0 + \Delta z$ の面を $S_{z_0+\Delta z}$

とする



[数学] ガウスの定理の証明の概略(2)



微小面 S_{x_0} 上で $\mathbf{n}=(-1,0,0)$ より $\mathbf{A}\cdot\mathbf{n} \doteqdot -A_x(x_0,y_0,z_0)$ で

一定値と近似すると $\int_{S_{x_0}} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS \doteqdot -A_x(x_0,y_0,z_0)\Delta y\Delta z$

微小面 $S_{x_0+\Delta x}$ 上で $\mathbf{n}=(1,0,0)$ より $\mathbf{A}\cdot\mathbf{n} \doteqdot A_x(x_0+\Delta x,y_0,z_0)$ で

一定値と近似すると $\int_{S_{x_0+\Delta x}} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS \doteqdot A_x(x_0+\Delta x,y_0,z_0)\Delta y\Delta z$

まとめると $\int_{S_{x_0}} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS + \int_{S_{x_0+\Delta x}} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS \doteqdot -A_x(x_0,y_0,z_0)\Delta y\Delta z + A_x(x_0+\Delta x,y_0,z_0)\Delta y\Delta z$

$$= \frac{A_x(x_0+\Delta x,y_0,z_0)-A_x(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x}\Delta x\Delta y\Delta z \doteqdot \frac{\partial A_x(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z$$

同様に微小面 S_{y_0} と $S_{y_0+\Delta y}$ について　$\int_{S_{y_0}} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS + \int_{S_{y_0+\Delta y}} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS \doteqdot \frac{\partial A_y(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z$

微小面 S_{z_0} と $S_{z_0+\Delta z}$ について　$\int_{S_{z_0}} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS + \int_{S_{z_0+\Delta z}} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS \doteqdot \frac{\partial A_z(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z$

[数学] ガウスの定理の証明の概略(3)

Q の 6 つの面全てについて加えると, 微小直方体 Q の表面 S_Q において

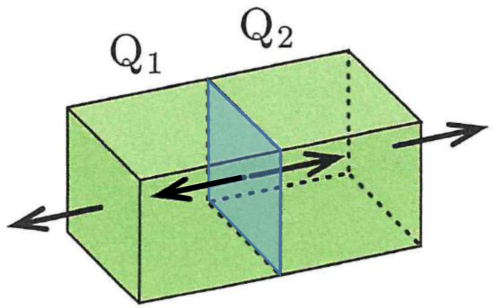
$$\int_{S_Q} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS \fallingdotseq \left(\frac{\partial A_x(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}+\frac{\partial A_y(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}+\frac{\partial A_z(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z \fallingdotseq (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A})\underline{\Delta V_Q}$$

微小直方体の体積 $\Delta x\Delta y\Delta z$

領域 V を分割した全ての微小直方体 $Q_1, Q_2, \ldots$ について加えると

$$\sum_i \int_{S_{Q_i}} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS \fallingdotseq \sum_i (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A})\Delta V_{Q_i}$$

ここで, 左辺の面積分において, 隣り合った面の寄与は, 外向き法線単位ベクトル$\mathbf{n}$の向きが逆になるのでキャンセルしてゼロ（例：右図の Q_1とQ_2 について境界面での積分は考えなくてよい）.



従って左辺の和は $S_{Q_i} \to 0$ の極限で V の表面, つまり S における面積分になる.
一方, 右辺の和は V における体積積分になる.

よって $\int_S \mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{r})dS = \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r})dV$

微分形のガウスの法則

近接作用的な表現（電荷の存在が近傍の空間に与える変化）

積分形のガウスの法則 $\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r})\, dV$

ガウスの定理より左辺を書き換えると $\int_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r})\, dV$

積分領域 V は両辺で共通なので, 移項すると $\int_V \left(\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \right) dV = 0$

閉曲面 S の取り方は任意なので $\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}}$ 微分形のガウスの法則

「微分形」の意味

1 次元（電場や電荷密度が x だけの関数）の場合

$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (E_x(x), E_y(x), E_z(x))$ より, 微分形のガウスの法則は

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial E_x(x)}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial E_y(x)}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial E_z(x)}{\partial z}} = \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \ \frac{dE_x(x)}{dx} = \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}$$

よって $E_x(x + \Delta x) \fallingdotseq E_x(x) + \dfrac{\rho(x)}{\varepsilon_0}\Delta x$ $\left(\because \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{E_x(x + \Delta x) - E_x(x)}{\Delta x} = \dfrac{\rho(x)}{\varepsilon_0} \right)$

位置 x の近傍 $x + \Delta x$ における電場の値 $E_x(x + \Delta x)$ は
位置 x における電場の値 $E_x(x)$ と, その点での電荷密度 $\rho(x)$ で決まる

（近接作用）

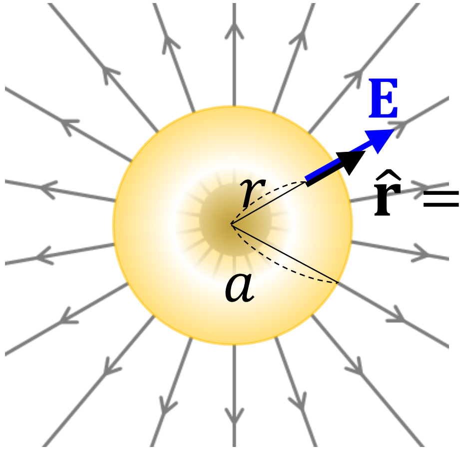
例題 4　球状電荷(1)

例題 3 で求めた, 半径 a 電荷密度 ρ の球状電荷が中心から距離 r に作る電場は, 微分形のガウスの法則 $\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r})=\dfrac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$ を満たすか？

$$E(r)=\begin{cases}\dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0} & (r<a)\\ \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2} & (r>a)\end{cases}\xrightarrow[\text{（方向を表す単位ベクトル }\hat{\mathbf{r}}=\frac{\mathbf{r}}{r}\text{ をかける）}]{\text{ベクトル表示}}\mathbf{E}(\mathbf{r})=\begin{cases}\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\mathbf{r} & (r<a) & \cdots①\\ \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{\mathbf{r}}{r^3} & (r>a) & \cdots②\end{cases}$$

（注）この場合, 電荷密度は

$$\rho(\mathbf{r})=\begin{cases}\rho & (r<a) & \cdots③\\ 0 & (r>a) & \cdots④\end{cases}$$



$\hat{\mathbf{r}}=\dfrac{\mathbf{r}}{r}$

例題 4　球状電荷(2)

[1] $r < a$ のとき　①より $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\mathbf{r} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}(x, y, z)$

よって(左辺) $= \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}x + \dfrac{\partial}{\partial y}y + \dfrac{\partial}{\partial z}z\right) = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}(1+1+1) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

一方, ③より(右辺) $= \dfrac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$　　よって(左辺)=(右辺)で成り立っている

$\mathbf{r} = (x, y, z)$　　$r = |\mathbf{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$　　について

公式 $\boxed{\dfrac{\partial}{\partial x}r^n = nr^{n-2}x \quad \text{または} \quad \nabla r^n = nr^{n-2}\mathbf{r}}$

$$\because \ \frac{\partial}{\partial x}r^n = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}} = \frac{n}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}-1} \cdot 2x = n(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n-2}{2}}x$$

例題 4　球状電荷(3)

[2] $r > a$ のとき　②より $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{\mathbf{r}}{r^3} = \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\left(\dfrac{x}{r^3}, \dfrac{y}{r^3}, \dfrac{z}{r^3}\right)$

よって(左辺) $= \nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\left\{\dfrac{\partial}{\partial x}(xr^{-3}) + \dfrac{\partial}{\partial y}(yr^{-3}) + \dfrac{\partial}{\partial z}(zr^{-3})\right\}$

（ここで　$\dfrac{\partial}{\partial x}(xr^{-3}) = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}x\right)r^{-3} + x\dfrac{\partial}{\partial x}r^{-3} = 1\cdot r^{-3} + x\cdot\underline{(-3)r^{-5}x} = \dfrac{1}{r^3} - 3\dfrac{x^2}{r^5}$　などより）

$$= \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\left\{\left(\frac{1}{r^3} - 3\frac{x^2}{r^5}\right) + \left(\frac{1}{r^3} - 3\frac{y^2}{r^5}\right) + \left(\frac{1}{r^3} - 3\frac{z^2}{r^5}\right)\right\}$$

$$= \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{3}{r^3} - 3\frac{x^2+y^2+z^2}{r^5}\right) = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{3}{r^3} - 3\frac{r^2}{r^5}\right) = 0$$

公式

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}r^n = nr^{n-2}x}$$

で $n = -3$

一方, ④より(右辺) $= \dfrac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} = \dfrac{0}{\varepsilon_0} = 0$　　よって(左辺)=(右辺)で成り立っている

例題５　「発散」の意味(1)

- 流体の位置 $\mathbf{r}$, 時刻 t における速度 $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$, 密度 $\rho(\mathbf{r},t)$ とする

流体中に置いた微小面 ΔS を微小時間 Δt に通過する流体の体積

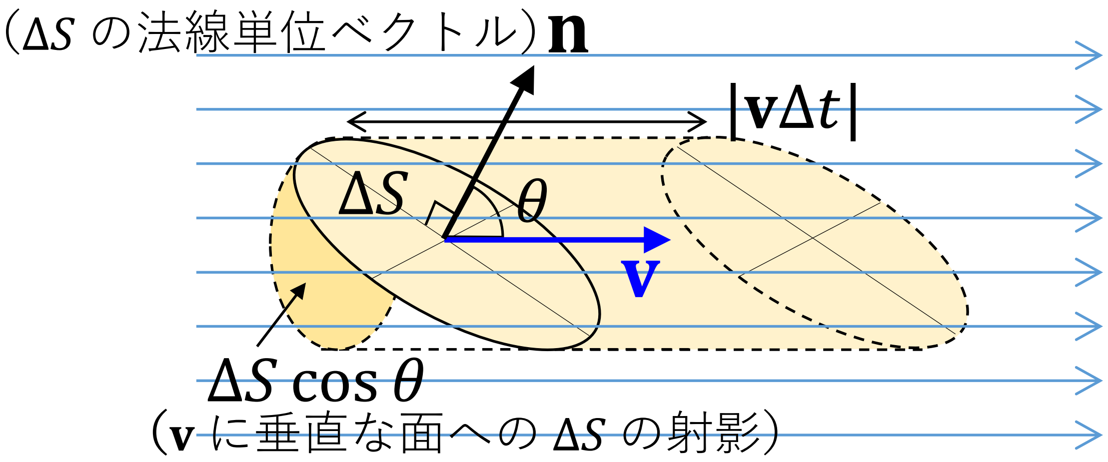
$\Delta V = \Delta S$を底面とし,側面の長さが $|\mathbf{v}\Delta t|$ の斜円柱の体積

$= \Delta S\cos\theta$ を底面とし,側面の長さが $|\mathbf{v}\Delta t|$ の直円柱の体積

$= \Delta S\cos\theta\,|\mathbf{v}\Delta t| = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\Delta S\Delta t$

その質量は $\Delta M = \rho\,\Delta V$

$$\therefore\quad \frac{\Delta M}{\Delta t} = \rho\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\Delta S$$



例題5　「発散」の意味(2)

- 流体中の閉曲面 S から単位時間に出てくる流体の正味の質量

外側→内側は負として数える

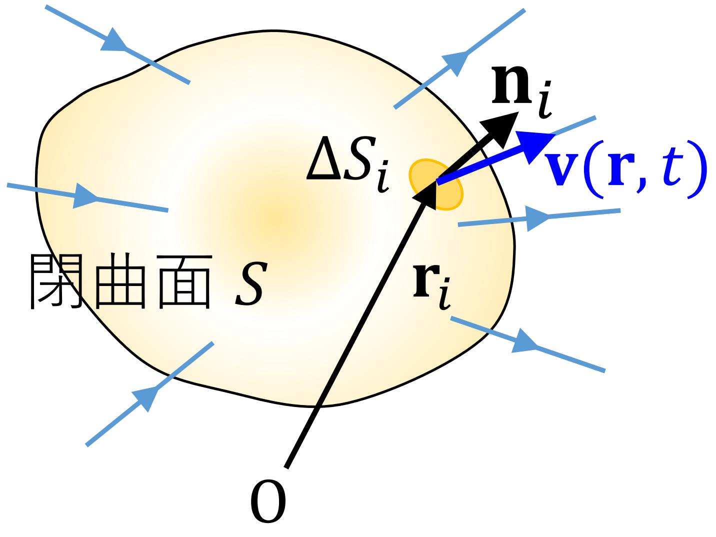
S を微小面に分割

$$\begin{cases} S \text{ 上の点 } \mathbf{r}_i \text{ にある微小面の面積 } \Delta S_i \\ \text{その点における速度 } \mathbf{v}_i = \mathbf{v}(\mathbf{r}_i, t),\ \text{密度 } \rho(\mathbf{r}_i, t) \\ \text{外向き単位法線ベクトル } \mathbf{n}_i = \mathbf{n}(\mathbf{r}_i) \end{cases}$$

$$\frac{\Delta M_i}{\Delta t} = \rho(\mathbf{r}_i)\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i\, \Delta S_i$$

全体で

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = \lim_{\Delta S_i \to 0} \sum_i \rho(\mathbf{r}_i)\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i\, \Delta S_i = \int_S \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})dS$$



例題５ 「発散」の意味(3)

- 流体中の閉曲面 S から単位時間に出てくる流体の正味の質量

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = \int_S \rho(\mathbf{r},t)\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{r})dS = \int_{V\ (S\ の内部)} \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho(\mathbf{r},t)\mathbf{v}(\mathbf{r},t))dV \quad (\because\ ガウスの定理)$$

閉曲面から出てくる＝その内部から湧き出している

$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho(\mathbf{r},t)\mathbf{v}(\mathbf{r},t))$ を体積積分することによって湧き出し質量が得られる

→ $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho(\mathbf{r},t)\mathbf{v}(\mathbf{r},t))$ は “湧き出し密度” を与える

例題５　「発散」の意味(4)

- 流体が生成・消滅することはない（保存する）とすると

閉曲面から湧き出す＝閉曲面内の物質量が減る

$$\frac{\Delta M}{\Delta t}=\int_V \nabla\cdot(\rho(\mathbf{r},t)\mathbf{v}(\mathbf{r},t))dV=-\frac{d}{dt}\boxed{\int_V \rho(\mathbf{r},t)dV}$$

積分領域 V は両辺で共通なので, 移項すると

$$\int_V\left\{\nabla\cdot\left(\rho(\mathbf{r},t)\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\right)+\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},t)\right\}dV=0$$

閉曲面 S の取り方は任意なので $\boxed{\nabla\cdot\left(\rho(\mathbf{r},t)\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\right)+\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},t)=0}$

連続の方程式（流体の保存則）

（復習）ベクトル場の回転

- 任意のベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ について, その回転

$$\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r})=\mathrm{rot}\,\mathbf{A}(\mathbf{r})=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z},\quad \frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x},\quad \frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

（注）ナブラ $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$ と $\mathbf{A}(\mathbf{r})=\left(A_x(\mathbf{r}),A_y(\mathbf{r}),A_z(\mathbf{r})\right)$ の外積

（注）「回転」はベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ から別のベクトル場 $\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r})$ を作る

c.f. 「勾配」はスカラー場 $f(\mathbf{r})$ からベクトル場を作る $\cdots$ $\nabla f(\mathbf{r})=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$

例） $\mathbf{A}(\mathbf{r})=(-y,x,xyz)$ のとき

$$\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r})=\left(\frac{\partial(xyz)}{\partial y}-\frac{\partial(x)}{\partial z},\ \frac{\partial(-y)}{\partial z}-\frac{\partial(xyz)}{\partial x},\ \frac{\partial(x)}{\partial x}-\frac{\partial(-y)}{\partial y}\right)$$

$$=(xz-0,\ \ 0-yz,\ \ 1-(-1))=(xz,-yz,2)$$

（補足）線積分

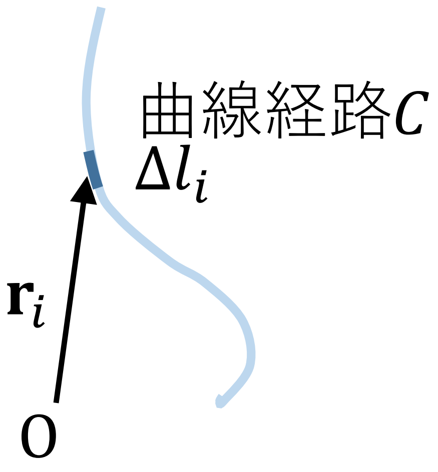
- 座標 $\mathbf{r}$ の関数 $f(\mathbf{r})$ の曲線経路 C 上における線積分

  C を微小部分に分割

  C 上の点 $\mathbf{r}_i$ にある微小部分の長さ Δl_i

  その点における関数値 $f(\mathbf{r}_i)$

$$\lim_{\Delta l_i \to 0} \sum_i f(\mathbf{r}_i)\Delta l_i \equiv \int_C f(\mathbf{r})dl$$



（注）特に, C 上で $f(\mathbf{r}) = $ 一定値 $= A$ なら $\int_C f(\mathbf{r})dl = A\int_C dl = A \times (C$ の長さ$)$

（注）ベクトル場 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ の線積分 $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C \left(\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dl}\right) dl$ は

C 上で $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ の接線成分 $f(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \underline{\frac{d\mathbf{r}}{dl}}$ を積分する

接線方向の単位ベクトル（$dl = |d\mathbf{r}|$）

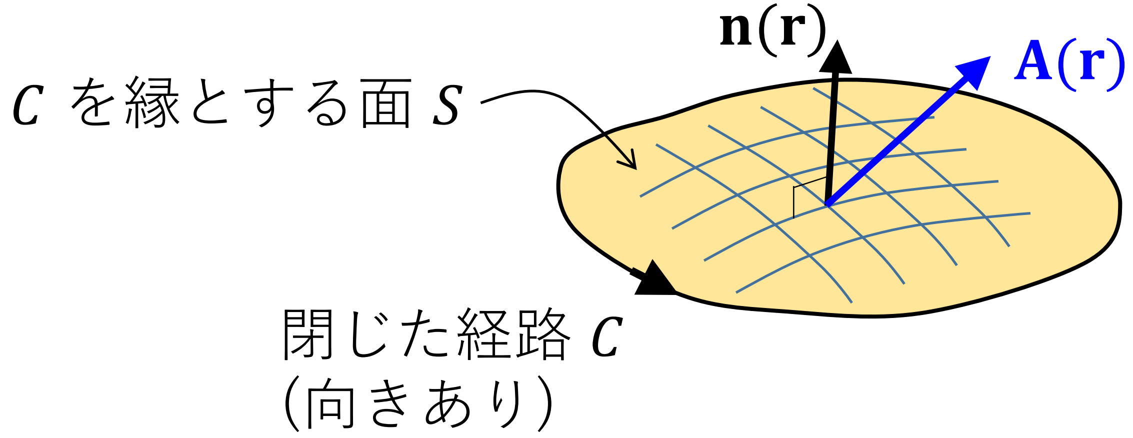
[数学] ストークスの定理

- 閉じた経路 C に対し, それを縁とする面を S とし, S 上の点 $\mathbf{r}$ に立てた単位法線ベクトルを $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ とすると, 任意のベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ について,

$$\int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_S \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS$$

ただし, $\mathbf{n}(\mathbf{r})$は線積分の経路 C が反時計回りに見える側に立てる

（ $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ が右ねじの向きとなる回り方を正方向とする）

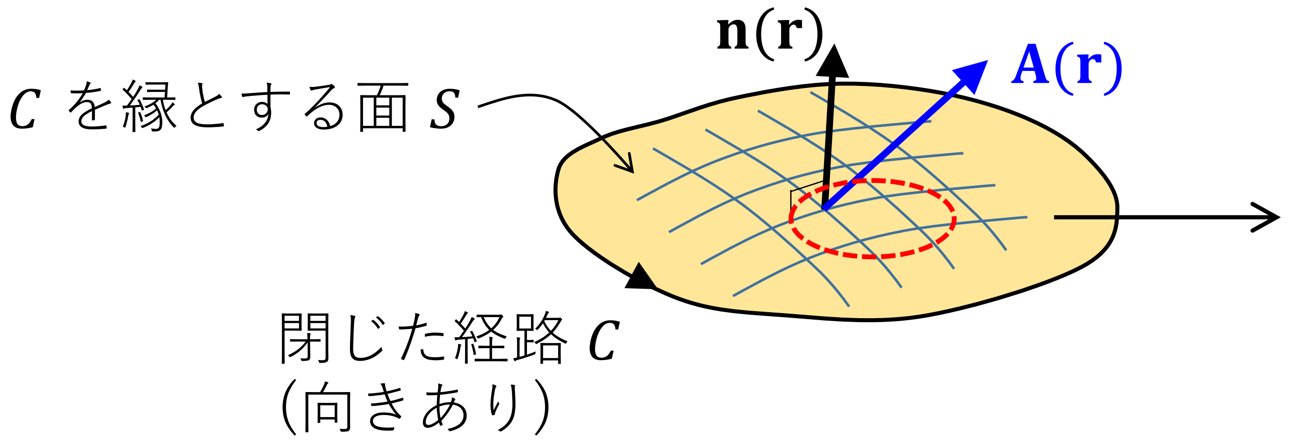


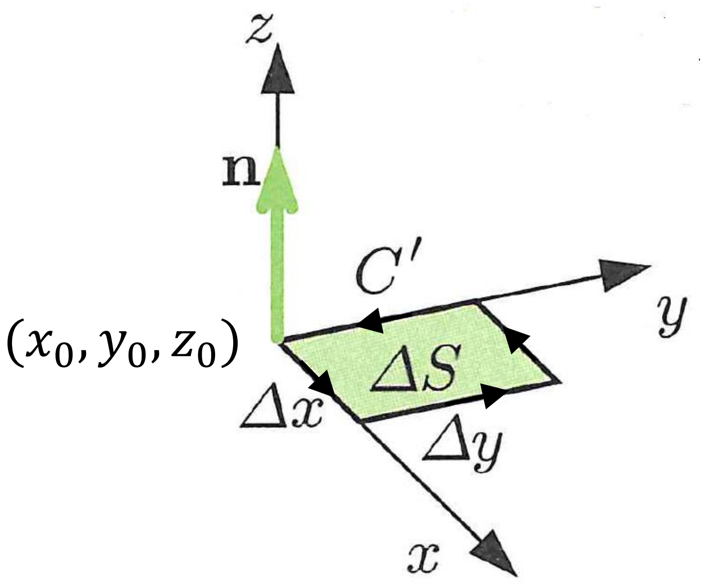
[数学] ストークスの定理の証明の概略(1)

面 S を微小長方形（面積 ΔS ）に分割し, その一つを考える.

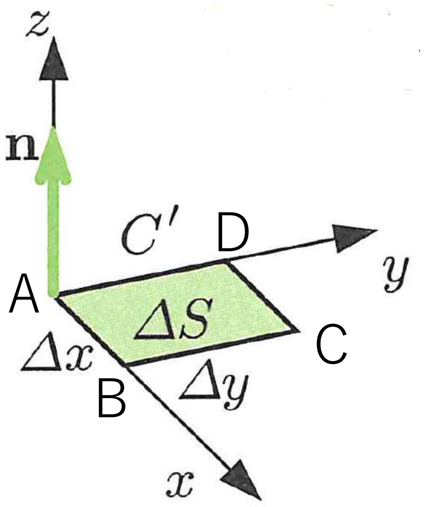
微小長方形の一つの頂点の座標を $\mathbf{r} = (x_0, y_0, z_0)$ とし, その 2 辺に沿った x, y 軸と, この点における単位法線ベクトル $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ の方向の z 軸からなる（局所的な）座標系をとる.

微小長方形の 2 辺の長さを $\Delta x, \Delta y$ とし, 4 辺を右ねじの向きに回る経路を C' とする.





[数学] ストークスの定理の証明の概略(2)



微小長方形経路 C' (A→B→C→D→A)における線積分を考える

$$\int_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} \mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} \fallingdotseq \mathbf{A}(\text{A点の値})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = A_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x$$

$$\because\ \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (\Delta x, 0, 0)$$

$$\int_{\mathrm{C}\to\mathrm{D}} \mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} \fallingdotseq \mathbf{A}(\text{D点の値})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} = A_x(x_0, y_0 + \Delta y, z_0)(-\Delta x)$$

$$\because\ \overrightarrow{\mathrm{CD}} = (-\Delta x, 0, 0)$$

よって $\int_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} \mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathrm{C}\to\mathrm{D}} \mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} \fallingdotseq A_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + A_x(x_0, y_0 + \Delta y, z_0)(-\Delta x)$

$$= -\frac{A_x(x_0, y_0+\Delta y, z_0) - A_x(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y}\Delta x\Delta y \fallingdotseq -\frac{\partial A_x}{\partial y}\Delta S \qquad (\Delta S = \Delta x\Delta y)$$

微小面積

同様に $\int_{\mathrm{B}\to\mathrm{C}} \mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathrm{D}\to\mathrm{A}} \mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} \fallingdotseq \underbrace{A_y(x_0 + \Delta x, y_0, z_0)}_{\text{B点の値で近似}}\Delta y + \underbrace{A_y(x_0, y_0, z_0)}_{\text{A点の値で近似}}(-\Delta y)$

$$= \frac{A_y(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - A_y(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}\Delta x\Delta y \fallingdotseq \frac{\partial A_y}{\partial x}\Delta S$$

[数学] ストークスの定理の証明の概略(3)

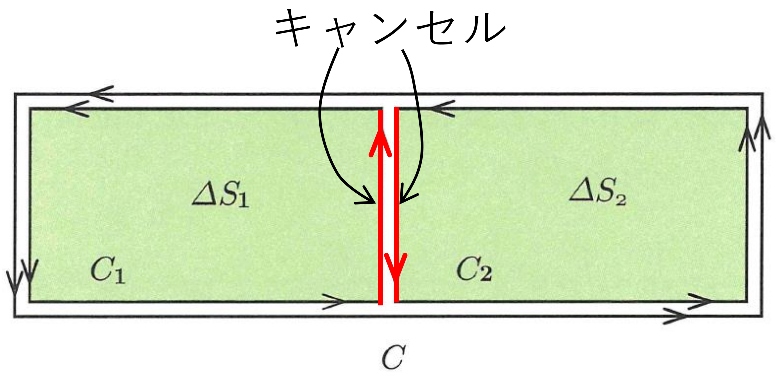
よって, 微小長方形経路 C' (A→B→C→D→A)における線積分は

$$\int_{C'} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathrm{B}\to\mathrm{C}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathrm{C}\to\mathrm{D}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathrm{D}\to\mathrm{A}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

$$\fallingdotseq \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \Delta S = (\nabla \times \mathbf{A})_z \, \Delta S = \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, \Delta S \qquad (\because \ \mathbf{n} = (0, 0, 1) \text{ より})$$

面 S を分割した微小長方形経路 $C_1, C_2, \ldots$ について加えると

$$\sum_i \int_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \fallingdotseq \sum_i (\nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \Delta S_i$$



ここで, 左辺の線積分において, 隣り合った辺の寄与は, 経路の向きが逆になるのでキャンセルしてゼロ（例：右図の C_1 と C_2 について境界線での積分は考えなくてよい）.

従って左辺の和は $\Delta S_i \to 0$ の極限で最も外側の縁, つまり C における線積分になる.
一方, 右辺の和は S における面積分になる.

よって $$\int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_S \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS$$

（復習）保存力の条件（同値）

- 力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ が「保存力」であるための条件は

  [1] 力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ の仕事積分 $W_C(\mathbf{r}_0 \to \mathbf{r}) = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ が経路によらない

  （閉じた経路でゼロ）

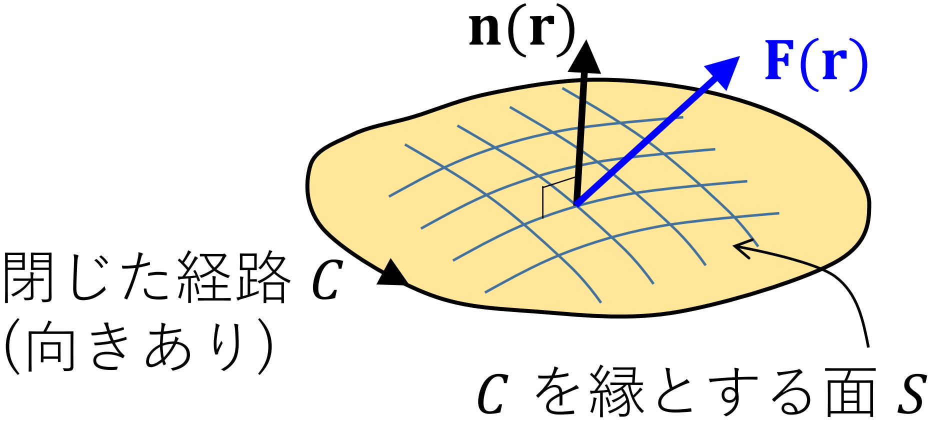
  [2] 力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ はポテンシャル $U(\mathbf{r})$ から $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla} U(\mathbf{r})$ で導かれる

  [3] 力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ の回転 $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ である

- ストークスの定理より閉じた経路 C について

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_S \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS$$

であるから[1] $\Leftrightarrow$ [3]は明らか.



クーロン力は保存力？

- クーロン力 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$ だから $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$

$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{r}')\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dV'$ より $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})$ のx成分は

$$\left(\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})\right)_x = \frac{\partial}{\partial y}E_z - \frac{\partial}{\partial z}E_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{r}')\frac{z-z'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dV'\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{r}')\frac{y-y'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dV'\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{r}')\left\{(z-z')\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} - (y-y')\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right\}dV'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{r}')\left\{(z-z')(-3)\frac{y-y'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5} - (y-y')(-3)\frac{z-z'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5}\right\}dV'$$

$= 0$ 　　同様にして y, z 成分もゼロ.

公式
$\frac{\partial}{\partial x}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^n = n|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{n-2}(x-x')$
において $n = -3$

よって $\boxed{\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}}$ 　微分形のうずなしの法則

$\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は保存場（ $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ は保存力）