電磁気学

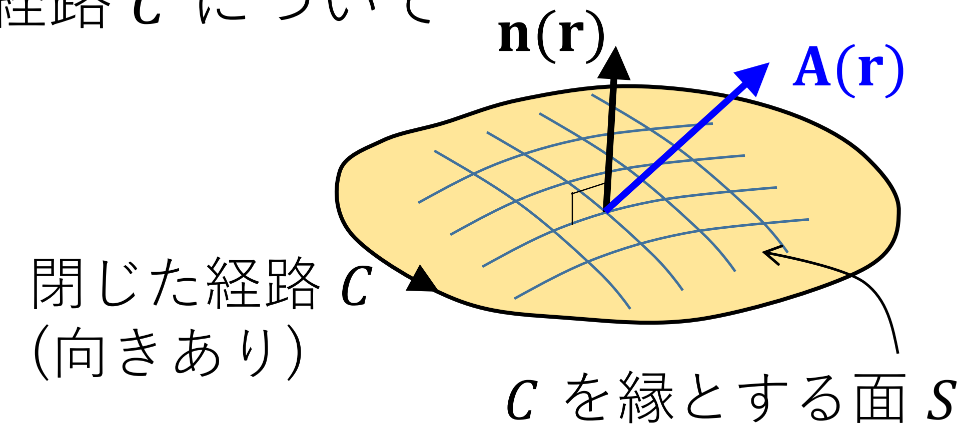
第4回　静電ポテンシャルと静電エネルギー

前回

- ストークスの定理

  任意のベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ と任意の閉じた経路 C について

  $$\int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_S \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS$$



- 静電場　$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dV'$

  より　$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$　うずなしの法則（微分形）

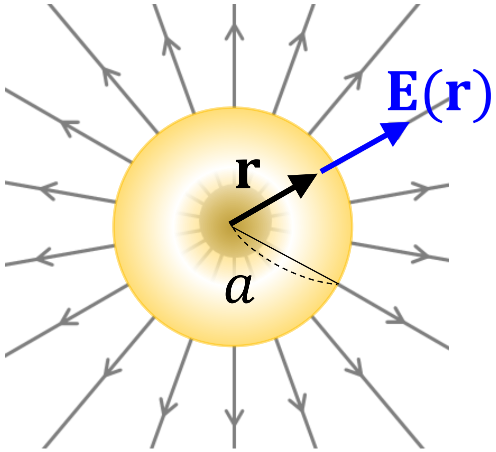
  静電場は保存場

  （クーロン力は $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$ だから $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ より保存力）

例題 1　球状電荷(1)

半径 a 電荷密度 ρ の球状電荷が中心から距離 r に作る電場は, 微分形のうずなしの法則 $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ を満たしているか？

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\mathbf{r} & (r < a) \quad \cdots ① \\ \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{\mathbf{r}}{r^3} & (r > a) \quad \cdots ② \end{cases}$$



[1] $r < a$ のとき　①より $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\mathbf{r} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}(x, y, z)$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{\partial}{\partial y}z - \frac{\partial}{\partial z}y,\quad \frac{\partial}{\partial z}x - \frac{\partial}{\partial x}z,\quad \frac{\partial}{\partial x}y - \frac{\partial}{\partial y}x\right)$$

$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(0-0, 0-0, 0-0) = \mathbf{0}$$

よって満たしている（つまり $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$ ）

例題 1　球状電荷(2)

[2] $r > a$ のとき　②より $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\left(\dfrac{x}{r^3}, \dfrac{y}{r^3}, \dfrac{z}{r^3}\right)$

公式

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} r^n = n r^{n-2} x}$$

で $n = -3$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{z}{r^3} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{y}{r^3},\quad \frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{r^3} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{z}{r^3},\quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{r^3} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{r^3}\right)$$

$$= \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\left(z(-3)\,\frac{y}{r^5} - y(-3)\frac{z}{r^5},\quad x(-3)\,\frac{z}{r^5} - z(-3)\,\frac{x}{r^5},\quad y(-3)\,\frac{x}{r^5} - x(-3)\,\frac{y}{r^5}\right)$$

$$= \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\frac{(-3)}{r^5}\left(zy - yz,\quad xz - zx,\quad yx - xy\right) = \mathbf{0}$$

よって満たしている

例題１ 球状電荷(3)

[2] $r > a$ のとき別解

ベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ とスカラー場 $\varphi(\mathbf{r})$ について　$\boldsymbol{\nabla} \times (\varphi \mathbf{A}) = \boldsymbol{\nabla}\varphi \times \mathbf{A} + \varphi \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$

x 成分について

（左辺）$= \left(\boldsymbol{\nabla} \times (\varphi \mathbf{A})\right)_x = \dfrac{\partial}{\partial y}(\varphi A_z) - \dfrac{\partial}{\partial z}(\varphi A_y) = \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} A_z + \varphi \dfrac{\partial A_z}{\partial y}\right) - \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} A_y + \varphi \dfrac{\partial A_y}{\partial z}\right)$

（右辺）$= (\boldsymbol{\nabla}\varphi \times \mathbf{A} + \varphi \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})_x = \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} A_z - \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} A_y\right) + \varphi\left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z}\right)$

よって成り立つ．y, z 成分についても同様

ここで $\varphi(\mathbf{r}) = r^{-3}$，$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ とする．$\boldsymbol{\nabla} r^{-3} = \dfrac{(-3)}{r^5}\mathbf{r}$，また $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$ だから

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = \boldsymbol{\nabla} r^{-3} \times \mathbf{r} + r^{-3} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{r} = \frac{(-3)}{r^5} \underbrace{\mathbf{r} \times \mathbf{r}}_{= \mathbf{0}} + r^{-3} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

例題２　「うずなし」の意味

- xy 面内で原点のまわりに一定の角速度 ω のうずがある流体の速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ について, その回転は？

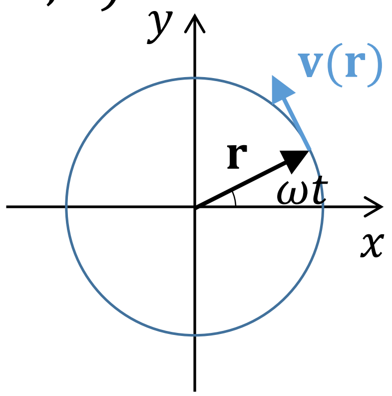
原点から距離 r にある流体粒子の位置 $\mathbf{r} = (x, y, 0) = (r\cos\omega t\,, r\sin\omega t, 0)$

その速度 $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\omega r\sin\omega t, \omega r\cos\omega t\,, 0) = (-\omega y, \omega x, 0)$

よって $\mathbf{v}$ の回転は

$$\nabla\times\mathbf{v} = \left(\frac{\partial}{\partial y}0 - \frac{\partial}{\partial z}(\omega x),\ \frac{\partial}{\partial z}(-\omega y) - \frac{\partial}{\partial x}0,\ \frac{\partial}{\partial x}(\omega x) - \frac{\partial}{\partial y}(-\omega y)\right)$$

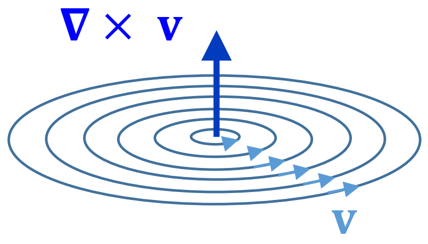
$$= \ (0-0,\ \ 0-0,\ \omega-(-\omega)\,) = (0,\ 0,\ 2\omega)$$



となり, 角速度の２倍の大きさで, 回転軸の方向のベクトル

回転がゼロ↔うずがない

$\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$　だから, 静電場にうずはない

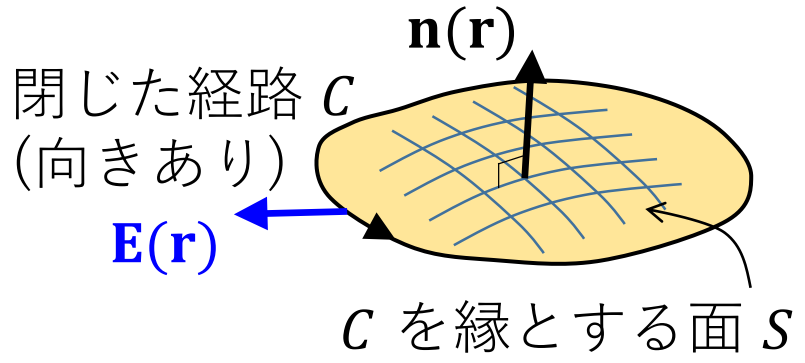


静電ポテンシャル(1)

ストークスの定理より任意の閉じた経路 C について

$$\boxed{\int_C \mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \int_S \underbrace{\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r})}_{=\mathbf{0}}\cdot\mathbf{n}(\mathbf{r})dS = 0}$$

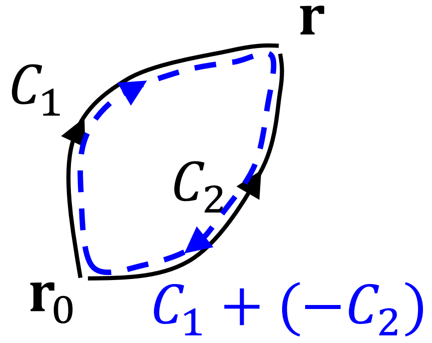
静電場のうずなしの法則（積分形）



$\Leftrightarrow$ 任意の 2 点間の線積分の値が経路によらない

$$\because \int_{C_1}\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2}\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1}\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} + \int_{\underset{\text{逆向き}}{-C_2}}\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \int_{\underset{\text{閉じた経路}}{C_1+(-C_2)}}\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = 0$$

始点 $\mathbf{r}_0$ を固定すれば, 線積分の値は終点 $\mathbf{r}$ の関数になる



$$\boxed{\phi(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0(\text{基準点})}^{\mathbf{r}}\mathbf{E}(\mathbf{r}')\cdot d\mathbf{r}'}$$

静電ポテンシャル（電位）

静電ポテンシャル(2)

微小変位 $d\mathbf{r}$ に対するポテンシャルの変化 $d\phi$

$$
\begin{aligned}
d\phi &= \phi(\mathbf{r}+d\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) \\
&= -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}+d\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} - \left(-\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}\right) \\
&= -\int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}+d\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} \\
&\fallingdotseq -\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} && (\because \text{線積分の定義}) \\
&\fallingdotseq \boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} && (\because \text{勾配の性質})
\end{aligned}
$$

よって $\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r}) = \left(-\frac{\partial\phi}{\partial x}, -\frac{\partial\phi}{\partial y}, -\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)}$

点電荷の静電ポテンシャル(1)

原点Oにある点電荷 q が位置 $\mathbf{r}$ に作る電場は $\mathbf{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathbf{r}}{r^3}$

図の点P(基準点) →点Qまでの線積分

$$-\int_{\mathrm{P\to Q}}\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}=-\int_{\mathrm{P\to R\to Q}}\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}=-\underbrace{\int_{\mathrm{P\to R}}\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}}_{r=r_{\mathrm{P}}\text{の円周}}-\underbrace{\int_{\mathrm{R\to Q}}\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}}_{\text{直線}}$$

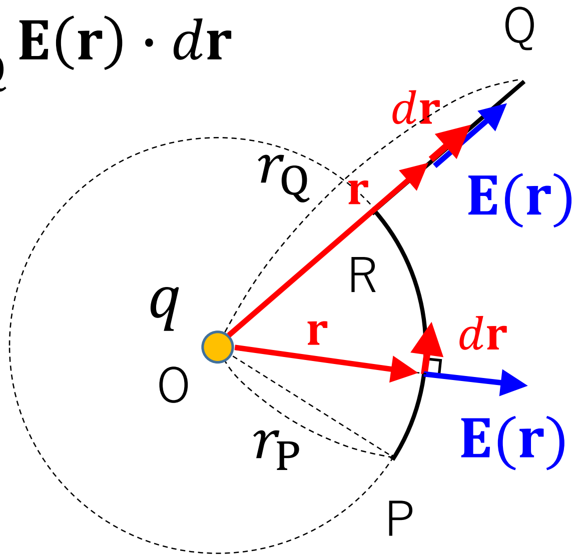
点P→点Rの円周経路上で $\mathbf{E}\perp d\mathbf{r}$ より積分はゼロ

点R→点Qの直線経路上で $d\mathbf{r}=\dfrac{\mathbf{r}}{r}dr$ より

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}dr$$

$$\therefore -\int_{\mathrm{P\to Q}}\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}=0-\int_{r_{\mathrm{P}}}^{r_{\mathrm{Q}}}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}dr=\left[\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\right]_{r_{\mathrm{P}}}^{r_{\mathrm{Q}}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{\mathrm{Q}}}-\frac{1}{r_{\mathrm{P}}}\right)$$

点Qを観測点 $r_{\mathrm{Q}}=r$, 点Pを基準点 $r_{\mathrm{P}}\to\infty$ にとる $\boxed{\phi(\mathbf{r})=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r}}$



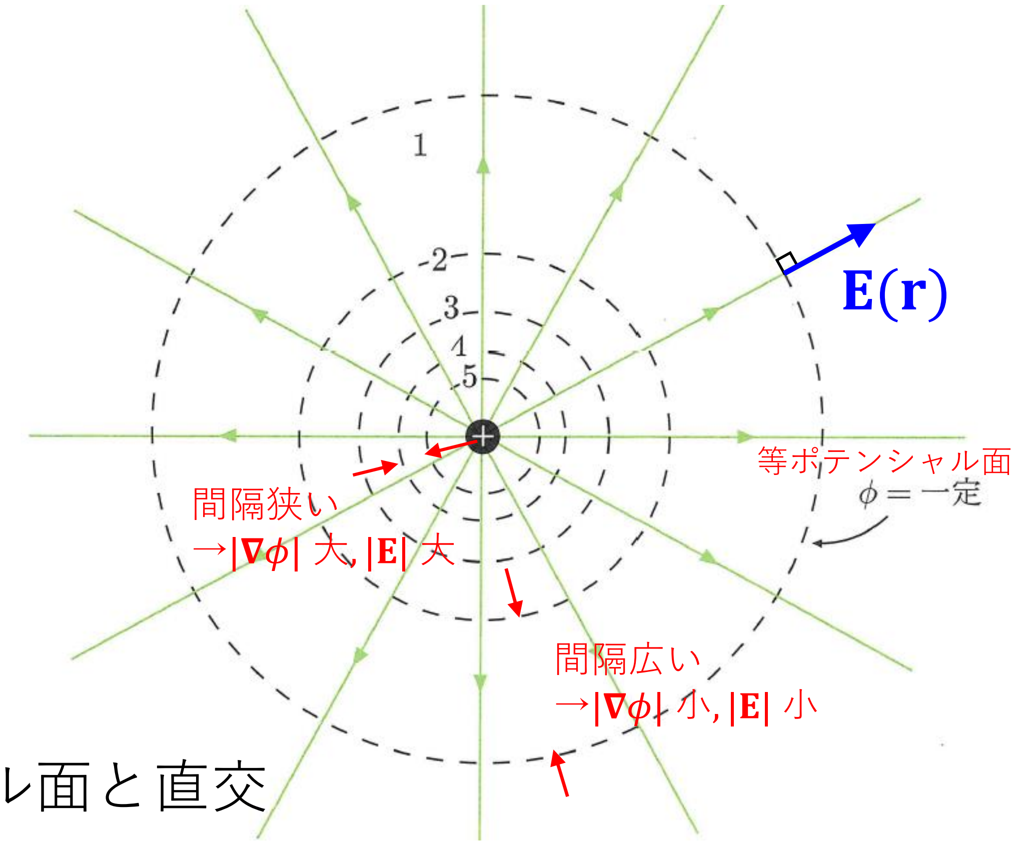
点電荷の静電ポテンシャル(2)

ポテンシャルが等しい値をとる点の集合
　＝ 等ポテンシャル面

原点の点電荷の場合

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} = \text{一定}\ より\ r = \text{一定}\ （球面）$$

$$\left(\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)\ に対し半径\ r = \frac{1}{n}\right)$$



電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ がポテンシャルの勾配で与えられる
（ $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$ ）ことから

- 電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ （または電気力線）は等ポテンシャル面と直交
- 隣り合う等ポテンシャル面の間隔が狭いほど $|\mathbf{E}|$ は大きい

複数の電荷

位置 $\mathbf{r}_i$ にある電荷 q_i が位置 $\mathbf{r}$ に作るポテンシャル　$\phi_i(\mathbf{r}) = \dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}$

位置 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \cdots$ にある電荷 $q_1, q_2, q_3, \cdots$ の全体が位置 $\mathbf{r}$ に作るポテンシャル

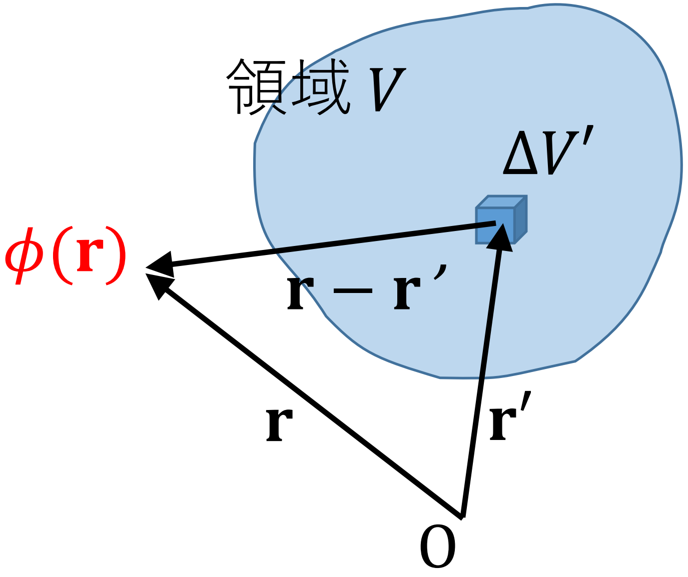
重ね合わせの原理により

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_i \phi_i(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}$$

領域 V 内に電荷密度 $\rho(\mathbf{r})$ で連続的に分布する電荷が
位置 $\mathbf{r}$ に作るポテンシャル

位置 $\mathbf{r}'$ の微小体積 $\Delta V'$ にある電荷 $\rho(\mathbf{r}')\Delta V'$
を点電荷とみなして重ね合わせ

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{r}')\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV'$$



例題３ 静電場の性質の確認

ポテンシャルの勾配で導かれる場が恒等的にうずなしであること

$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r})$ より電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ の各成分は以下で与えられる.

$$E_x(\mathbf{r}) = -\frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial x},\ E_y(\mathbf{r}) = -\frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial y},\ E_z(\mathbf{r}) = -\frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial z}$$

このとき, 回転 $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}(\mathbf{r})$ の x 成分は

$$\big(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}(\mathbf{r})\big)_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial y}\right)$$

$$= -\frac{\partial^2\phi(\mathbf{r})}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2\phi(\mathbf{r})}{\partial z\partial y} = 0 \quad \text{（微分の順序は交換可）}$$

他の成分も同様にゼロなので $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$

例題４ 連続分布で $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r})$ の確認

領域 V 内に電荷密度 $\rho(\mathbf{r})$ で連続的に分布する電荷が位置 $\mathbf{r}$ に作る電場

$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_V \rho(\mathbf{r}')\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dV'$ を導くポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ は？

公式 $\boxed{\dfrac{\partial}{\partial x}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^n = n|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{n-2}(x-x') \quad \text{または} \quad \boldsymbol{\nabla}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^n = n|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{n-2}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$

において $n=-1$ とすると $\quad \boldsymbol{\nabla}\dfrac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = (-1)\dfrac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$

よって

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{r}')\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dV' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{r}')\boldsymbol{\nabla}\frac{-1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV'$$

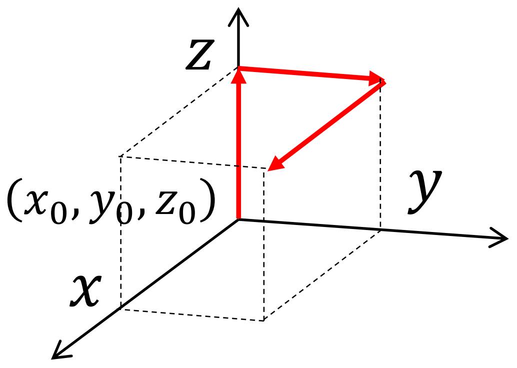
$$= -\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{r}')\,\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV' \qquad \therefore\ \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{r}')\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV'$$

折れ線経路によるポテンシャルの計算(1)

静電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ に対し, そのポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ は折れ線経路での積分により

$$\boxed{\phi(x,y,z) = -\int_{z_0}^{z} E_z(x_0,y_0,z')dz' - \int_{y_0}^{y} E_y(x_0,y',z)dy' - \int_{x_0}^{x} E_x(x',y,z)dx'}$$

と計算される. ただし基準点 $\mathbf{r}_0 = (x_0,y_0,z_0)$ とする.



(チェック)

$$-\frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int_{x_0}^{x} E_x(x',y,z)dx' = E_x(x,y,z) \cdots ①$$

$$-\frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int_{y_0}^{y} E_y(x_0,y',z)dy' + \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} E_x(x',y,z)dx'$$

$$= E_y(x_0,y,z) + \int_{x_0}^{x}\frac{\partial}{\partial y}E_x(x',y,z)dx' = E_y(x_0,y,z) + \int_{x_0}^{x}\frac{\partial}{\partial x'}E_y(x',y,z)dx'$$

$$= E_y(x_0,y,z) + \left[E_y(x',y,z)\right]_{x_0}^{x} \qquad \because\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$ うずなしの法則の z 成分

$$= E_y(x_0,y,z) + \left(E_y(x,y,z) - E_y(x_0,y,z)\right) = E_y(x,y,z) \cdots ②$$

折れ線経路によるポテンシャルの計算(2)

$$\left[\phi(x,y,z) = -\int_{z_0}^{z} E_z(x_0,y_0,z')dz' - \int_{y_0}^{y} E_y(x_0,y',z)dy' - \int_{x_0}^{x} E_x(x',y,z)dx'\right]$$

（チェックつづき）

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\int_{z_0}^{z} E_z(x_0,y_0,z')dz' + \frac{\partial}{\partial z}\int_{y_0}^{y} E_y(x_0,y',z)dy' + \frac{\partial}{\partial z}\int_{x_0}^{x} E_x(x',y,z)dx' \\
&= E_z(x_0,y_0,z) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial}{\partial z} E_y(x_0,y',z)dy' + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial z} E_x(x',y,z)dx' \\
&= E_z(x_0,y_0,z) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial}{\partial y'} E_z(x_0,y',z)dy' + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial x'} E_z(x',y,z)dx' \\
&= E_z(x_0,y_0,z) + [E_z(x_0,y',z)]_{y_0}^{y} + [E_z(x',y,z)]_{x_0}^{x} \\
&= E_z(x_0,y_0,z) + (E_z(x_0,y,z) - E_z(x_0,y_0,z)) + (E_z(x,y,z) - E_z(x_0,y,z)) \\
&= E_z(x,y,z) \cdots ③
\end{aligned}$$

$$\because \begin{cases} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

うずなしの法則の x, y 成分

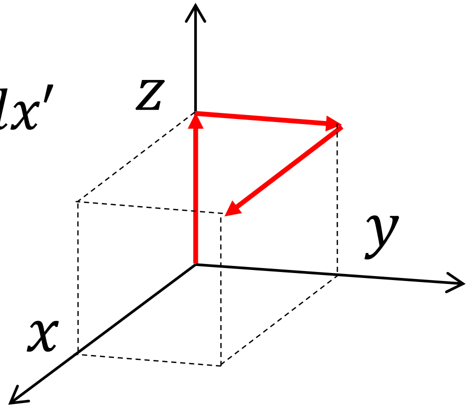
よって①, ②, ③より$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r})$ が成り立っている.

例題５ ポテンシャルの計算

- 静電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (ayz, azx, axy)$ のポテンシャルを求めよ. ただし a は定数で, 基準点は原点とする.

$E_x(x,y,z) = ayz, \quad E_y(x,y,z) = azx, \quad E_z(x,y,z) = axy$ である.

図の折れ線経路について線積分すると



$$\phi(x,y,z) = -\int_0^z E_z(0,0,z')dz' - \int_0^y E_y(0,y',z)dy' - \int_0^x E_x(x',y,z)dx'$$

$$= -\int_0^z (a\cdot 0\cdot 0)dz' - \int_0^y (az\cdot 0)dy' - \int_0^x (ayz)dx'$$

$$= 0 + 0 - [ayzx']_0^x = -axyz$$

チェック：$-\dfrac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial x} = -\dfrac{\partial(-axyz)}{\partial x} = ayz = E_x$ でOK. 他の成分も同様.

例題 6 電気双極子(1)

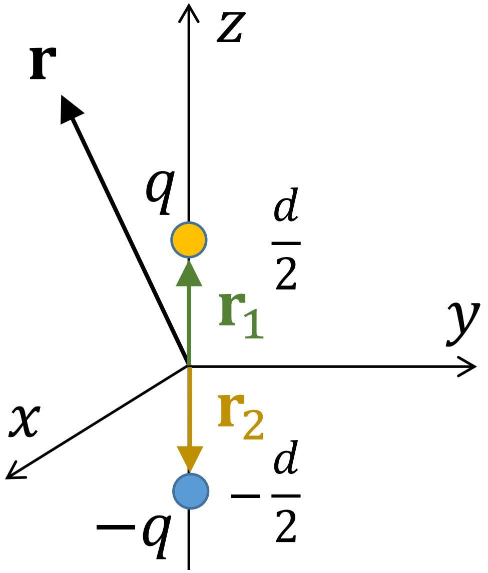
距離 d 離れた $+q$, $-q$ の 2 電荷が作る静電ポテンシャル求めよ. それを用いて遠方での電場を求め, その様子を調べよ.

両電荷の中点を原点にとり, 負電荷から正電荷へ向かうベクトルを $\mathbf{d}=(0,0,d)$ として, $+q$ の位置 $\mathbf{r}_1=\frac{\mathbf{d}}{2}=\left(0,0,\frac{d}{2}\right)$, $-q$ の位置 $\mathbf{r}_2=-\frac{\mathbf{d}}{2}=\left(0,0,-\frac{d}{2}\right)$ と書くと,

観測点 $\mathbf{r}=(x,y,z)$ でのポテンシャルは, 重ね合わせの原理から

$$\phi(\mathbf{r})=\frac{+q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\left|\mathbf{r}-\frac{\mathbf{d}}{2}\right|}-\frac{1}{\left|\mathbf{r}+\frac{\mathbf{d}}{2}\right|}\right)$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d/2)^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d/2)^2}}\right)$$



例題 6 電気双極子(2)

観測点が双極子から十分遠方 $(r \gg d)$ にあるとき

$$\left|\mathbf{r} \pm \frac{\mathbf{d}}{2}\right|^{-1} = \left\{\left(\mathbf{r} \pm \frac{\mathbf{d}}{2}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}} = \left(r^2 \pm \mathbf{r}\cdot\mathbf{d} + \frac{d^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left\{r^2\left(1 \pm \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2}\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\doteqdot \frac{1}{r}\left(1 \pm \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \doteqdot \frac{1}{r}\left(1 \pm \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{r^2}\right) = \frac{1}{r} \mp \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{2r^3}$$

近似式「 $x \ll 1$ のとき $|1+x|^a \doteqdot 1 + ax$ 」

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\left|\mathbf{r} - \frac{\mathbf{d}}{2}\right|} - \frac{1}{\left|\mathbf{r} + \frac{\mathbf{d}}{2}\right|}\right) \doteqdot \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left(\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{2r^3}\right) - \left(\frac{1}{r} - \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{2r^3}\right)\right\} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{r^3}$$

$$= \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

ただし $\mathbf{p} = q\mathbf{d} = (0, 0, qd) = (0, 0, p)$

電気双極子モーメントベクトル

例題 6 電気双極子(3)

静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{r}) = \dfrac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ より, 電場は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{\nabla}\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})\frac{1}{r^3} + (\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})\boldsymbol{\nabla}r^{-3}\right\}$$

($\dfrac{\partial}{\partial x}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(xp_x + yp_y + zp_z\right) = p_x$ 他の成分も同様. よって $\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}) = \mathbf{p}$

公式 $\dfrac{\partial}{\partial x}r^n = nr^{n-2}x$ で $n = -3 \to \dfrac{\partial}{\partial x}r^{-3} = (-3)r^{-5}x$ 等より $\boldsymbol{\nabla}r^{-3} = (-3)r^{-5}\mathbf{r}$)

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\mathbf{p}\frac{1}{r^3} + (\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})(-3)\frac{\mathbf{r}}{r^5}\right\} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{-\frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})\mathbf{r}}{r^5}\right\}$$

成分で表すと $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{p} = (0, 0, p)$ より $\mathbf{r}\cdot\mathbf{p} = zp$ → $\phi(\mathbf{r}) = \dfrac{zp}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{-\frac{(0,0,p)}{r^3} + \frac{3zp(x,y,z)}{r^5}\right\} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3zx}{r^5}, \frac{3zy}{r^5}, \frac{3z^2 - r^2}{r^5}\right)$$

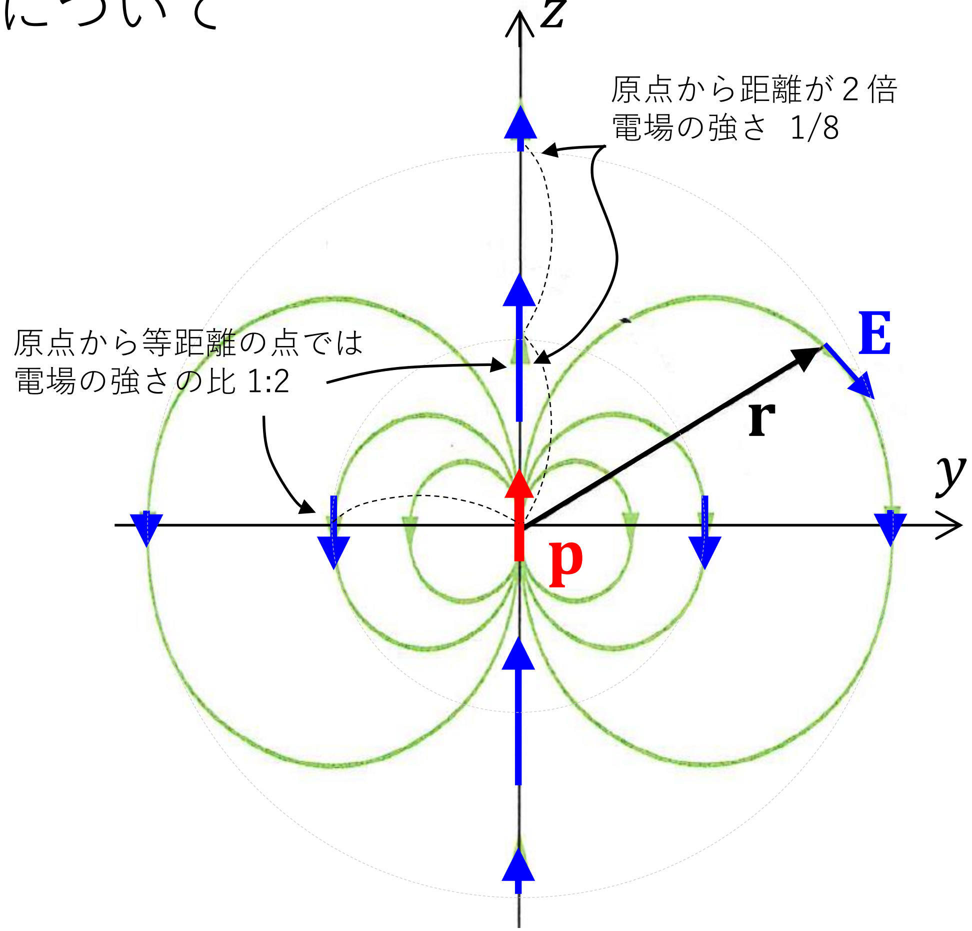
例題 6 電気双極子(4)

遠方での電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{3zx}{r^5}, \dfrac{3zy}{r^5}, \dfrac{3z^2 - r^2}{r^5}\right)$ について

- xy 面上($z = 0$)で $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(0, 0, \dfrac{-1}{r^3}\right)$
- z 軸上($x = y = 0$) で $r = |z|$ より $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(0, 0, \dfrac{2}{r^3}\right)$

(まとめ)遠方で双極子の作る

- ポテンシャル $\phi(\mathbf{r}) = \dfrac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$
- 電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{-\dfrac{\mathbf{p}}{r^3} + \dfrac{3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})\mathbf{r}}{r^5}\right\}$

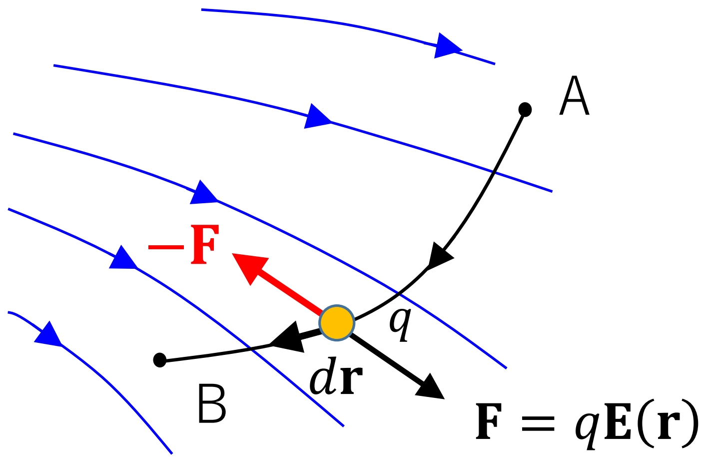


静電エネルギー

静電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ の中で電荷 q をA点→B点へ運ぶ仕事

加える（仕事をする）力 ＝ 電荷が電場から受ける力 $\mathbf{F} = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$ に逆らう力 $-\mathbf{F}$

$$
\begin{aligned}
\therefore W &= \int_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} (-\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{r} \\
&= -\int_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\
&= -q \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \qquad (\because \ q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \text{ は保存力}) \\
&= q\left(-\int^{\mathrm{B}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int^{\mathrm{A}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}\right) \\
&= q\big(\phi(\mathrm{B}) - \phi(\mathrm{A})\big) \quad \text{静電エネルギー}
\end{aligned}
$$



１Ｃ（クーロン）の電荷を運ぶ仕事が１Ｊ（ジュール）となる電位差＝１Ｖ（ボルト）

電位ϕの単位

(1J)=(1V) × (1C)

複数電荷から成る系の静電エネルギー(1)

電位の基準点を無限遠にとる$(\phi(\infty) = 0)$

位置 $\mathbf{r}_i$ にある電荷 q_i が位置 $\mathbf{r}$ に作るポテンシャル $\phi_i(\mathbf{r}) = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}$

電荷 q_1 が位置 $\mathbf{r}_1$ にあるとき, 電荷 q_2 を無限遠から位置 $\mathbf{r}_2$ へ運ぶ仕事 $W_2 = q_2\phi_1(\mathbf{r}_2)$

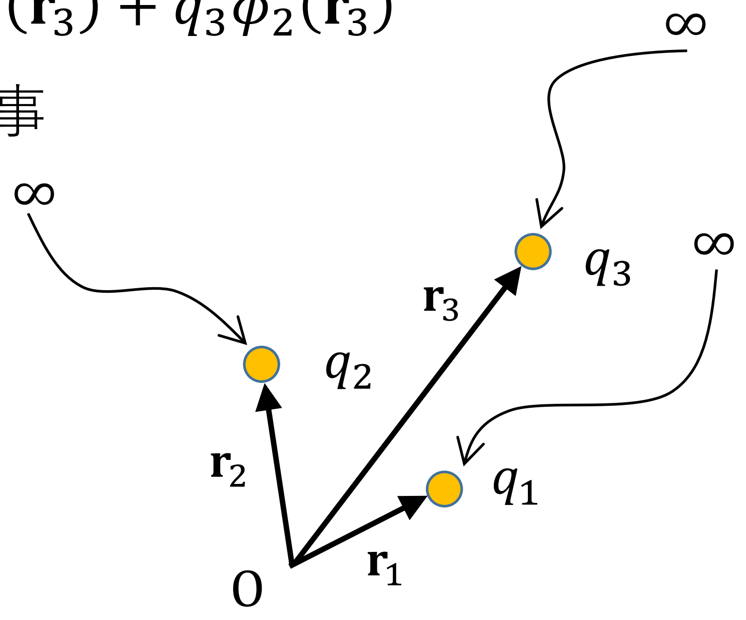
さらに電荷 q_3 を無限遠から位置 $\mathbf{r}_3$ へ運ぶ仕事 $W_3 = q_3\phi_1(\mathbf{r}_3) + q_3\phi_2(\mathbf{r}_3)$

よって, 電荷 q_1, q_2, q_3 を無限遠から位置$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$へ運ぶ全仕事

$$W = W_2 + W_3 = q_2\phi_1(\mathbf{r}_2) + q_3\phi_1(\mathbf{r}_3) + q_3\phi_2(\mathbf{r}_3)$$

$$= q_2\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|} + q_3\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1|} + q_3\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2|} = U$$

電荷 q_1, q_2, q_3 から成る系の静電エネルギー



結局, 全ての電荷対 q_i, q_j について $\frac{q_iq_j}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|}$ を加えたもの

複数電荷から成る系の静電エネルギー(2)

一般に, 位置 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \ldots$ にある電荷 $q_1, q_2, q_3, \ldots$ から成る系の静電エネルギー

$$\boxed{U = \sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j(i\neq j)} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \left(\sum_{j(\neq i)} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i q_i \underline{\left(\sum_{j(\neq i)} \phi_j(\mathbf{r}_i) \right)} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \phi(\mathbf{r}_i)$$

$= \phi(\mathbf{r}_i)$ と書く… q_i 以外の全ての q_j が $\mathbf{r}_i$ につくるポテンシャル

領域 V 内に電荷密度 $\rho(\mathbf{r})$ で連続的に分布する電荷の静電エネルギー

位置 $\mathbf{r}$ の微小体積 ΔV にある電荷 $\rho(\mathbf{r})\Delta V$ を点電荷とみなして重ね合わせ

$$\boxed{U = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r})\, dV}$$

静電エネルギーの近接作用的表現(1)

$$U = \frac{1}{2}\int_V \rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})\,dV$$

$$= \frac{1}{2}\int_V (\varepsilon_0 \underline{\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}))\phi(\mathbf{r})}\,dV \quad \left[\because \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \quad \text{微分形のガウスの法則}\right]$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \{\nabla \cdot (\phi(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})) - \nabla\phi(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})\}\,dV \quad \left[\because \text{公式 } \nabla \cdot (\phi\mathbf{E}) = \nabla\phi \cdot \mathbf{E} + \underline{\phi(\nabla \cdot \mathbf{E})}\right]$$

$$\left(\begin{aligned}
\nabla \cdot (\phi\mathbf{E}) &= \frac{\partial}{\partial x}(\phi E_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi E_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi E_z) \\
&= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}E_x + \phi\frac{\partial E_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}E_y + \phi\frac{\partial E_y}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}E_z + \phi\frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \\
&= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}E_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}E_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}E_z\right) + \phi\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \\
&= \nabla\phi \cdot \mathbf{E} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{E})
\end{aligned}\right)$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \nabla \cdot (\phi(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}))\,dV - \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \nabla\phi(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})dV$$

静電エネルギーの近接作用的表現(2)

$$U=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \nabla\cdot\big(\phi(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})\big)\,dV-\frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \nabla\phi(\mathbf{r})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r})dV$$

$$=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_S \big(\phi(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})\big)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{r})dS+\frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r})\,dV$$

$\because$ 第１項　ガウスの定理

$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}(\mathbf{r})\,dV=\int_S \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{r})dS$

で $\boldsymbol{A}(\mathbf{r})=\phi(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})$ とする

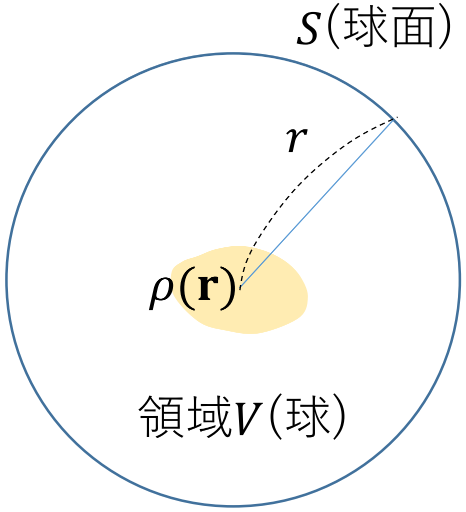
第２項　$\mathbf{E}(\mathbf{r})=-\nabla\phi(\mathbf{r})$

ここで第１項は, 領域 V を十分に大きくとるとゼロ

($\because$ V を, (有限な)電荷分布を中心に半径 r の球にとる

$r\to\infty$のとき表面 S 上で $\phi(\mathbf{r})\sim\frac{1}{r}, \mathbf{E}(\mathbf{r})\sim\frac{1}{r^2}$ だから

$\int_S\big(\phi(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})\big)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{r})dS\sim\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot4\pi r^2\sim\frac{1}{r}\to 0\ (r\to\infty)$)



$$\therefore\ \boxed{U=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \mathbf{E}(\mathbf{r})^2\,dV}=\int_V u_e(\mathbf{r})\,dV \quad と書くと\quad \boxed{u_e(\mathbf{r})=\frac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r})^2}$$

静電場のエネルギー密度：単位 $\mathrm{J/m^3}$
（単位体積あたりのエネルギー ）

エネルギーは空間の“ゆがみ”に蓄えられる（近接作用的表現）

例題 7　球状電荷の静電エネルギー

- 半径 a 電荷密度 ρ の球状電荷の静電エネルギー？

（原点からの距離 r だけの関数 $f(r)$ の体積積分

$$\int_{\substack{V\,(\text{球対称})\\ a\le r\le b}} f(r)\,dV = \int_a^b f(r)\cdot 4\pi r^2 dr$$
）

球の内外の電場

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\mathbf{r} & (r \le a) \\ \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{\mathbf{r}}{r^3} & (r > a) \end{cases}$$

$$\therefore\ U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \mathbf{E}(\mathbf{r})^2\,dV = \frac{\varepsilon_0}{2}\left\{\int_0^a \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\mathbf{r}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr + \int_a^\infty \left(\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr\right\}$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left\{\int_0^a \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\right)^2 \cdot 4\pi r^4 dr + \int_a^\infty \left(\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\right)^2 \cdot 4\pi \frac{1}{r^2}dr\right\}$$

電荷の総和 $q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi a^3$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\right)^2\left\{4\pi\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a + a^6\cdot 4\pi\left[-\frac{1}{r}\right]_a^\infty\right\} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\right)^2 4\pi a^5\left(\frac{1}{5}+1\right) = \frac{4\pi\rho^2 a^5}{15\varepsilon_0} = \frac{3q^2}{20\pi\varepsilon_0 a}$$

(補足) 球対称関数の体積積分

原点からの距離 r の関数 $f(r)$ の球対称な領域 V $(a \le r \le b)$ での体積積分

$$\boxed{\int_{\substack{V(\text{球対称}) \\ a \le r \le b}} f(r)\,dV = \int_a^b f(r) \cdot 4\pi r^2 dr}$$

r による定積分で計算できる

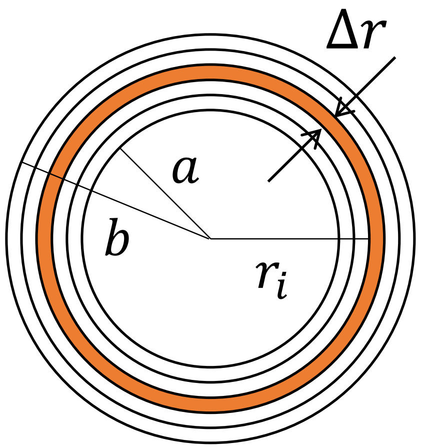
（直感的には）領域 V を, 半径が $r_1, r_2, \ldots$ で厚さ Δr の薄い球殻に分割する

$r_i \le r \le r_i + \Delta r$ の球殻の体積 $\Delta V_i \doteqdot 4\pi {r_i}^2 \Delta r$

この範囲で $f(r) = f(r_i)$ (一定) と近似すると

$$\int_{\substack{V(\text{球対称}) \\ a \le r \le b}} f(r)\,dV \doteqdot \sum_i f(r_i) \Delta V_i = \sum_i f(r_i) 4\pi {r_i}^2 \Delta r$$

$$\underset{(\Delta r \to 0)}{\to} \int_a^b f(r) \cdot 4\pi r^2 dr$$



（補足）球状電荷のポテンシャル

電場

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\mathbf{r} & (r \le a) \\ \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{\mathbf{r}}{r^3} & (r > a) \end{cases}$$

から, 無限遠 $r_0 = \infty$ を基準点としてポテンシャルを求める

動径 $\mathbf{r}$ に沿った直線経路で $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{dr} = E(r)dr$ となるので

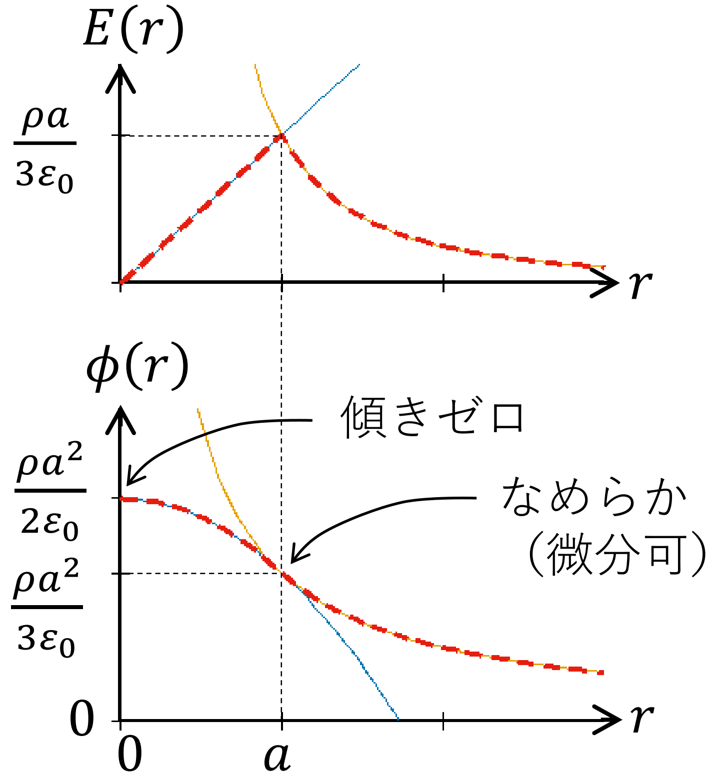
$$\phi(r) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\infty}^{r} E(r)dr$$

$r > a$ のとき

$$\phi(r) = -\int_{\infty}^{r} \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r} = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r}$$

$r \le a$ のとき

$$\phi(r) = -\int_{\infty}^{a} \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr - \int_{a}^{r} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} dr = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 a} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{a}^{r} = \frac{\rho a^2}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{r^2 - a^2}{2} = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}$$



（補足）球状電荷の静電エネルギー[別解]

ポテンシャル

$$\phi(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} - \dfrac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} & (r \le a) \\ \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r} & (r > a) \end{cases}$$

電荷密度

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho & (r \le a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}$$

から, 静電エネルギー

$$U = \frac{1}{2}\int_V \rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})\,dV = \frac{1}{2}\int_0^a \rho\left(\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}\right)4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{2\varepsilon_0}4\pi\int_0^a \left(a^2 - \frac{r^2}{3}\right) r^2 dr$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{2\varepsilon_0}4\pi\left[a^2\frac{r^3}{3} - \frac{1}{3}\frac{r^5}{5}\right]_0^a$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{2\varepsilon_0}4\pi\left(a^2\frac{a^3}{3} - \frac{1}{3}\frac{a^5}{5}\right) = \frac{4\pi\rho^2 a^5}{12\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{4\pi\rho^2 a^5}{15\varepsilon_0}$$

エネルギー密度の積分と
同じ結果