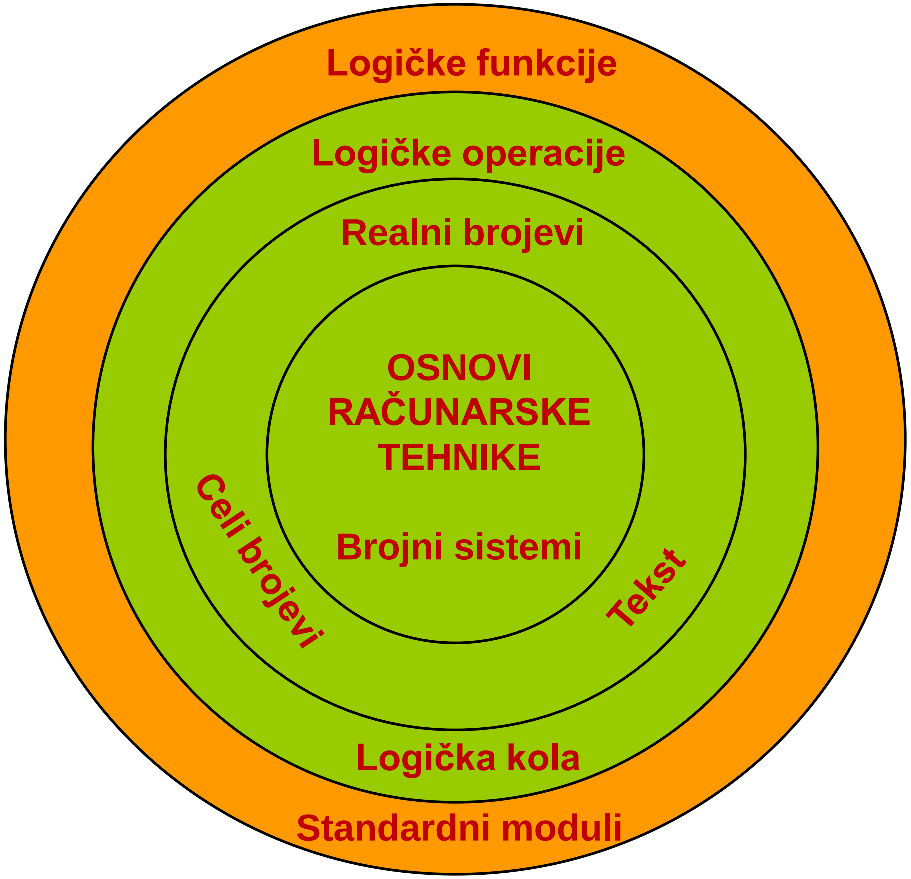
Logičke funkcije



TEME

- Predstavljanje funkcija
  - Kombinacione tablice
  - Algebarski oblik
  - Karnoove karte
- Realizacija funkcija
  - Prekidačke mreže
- Minimizacija funkcija
  - Metod Karnoove karte

Logičke funkcije

- Logičke funkcije se mogu definisati nad proizvoljnim brojem promenljivih, $Y = f(A, B, C, ...)$.
- Vrednosti promenljivih u logičkim funkcijama (A, B, C,...) mogu biti samo iz skupa {0, 1}.
- Nad promenljivama logičke funkcije izvršavaju se logičke operacije (I, ILI, NE, ekskluzivno ILI itd.).
- Vrednost logičke funkcije Y može biti samo iz skupa {0, 1}.

Primer 1

$$Y = (B + C) \cdot \overline{A} + A \oplus B$$

Predstavljanje logičkih funkcija

Tri načina:

- kombinacionom tablicom

A	B	Y
0	0	1
0	0	1
0	1	0
0	1	0

- algebarskim izrazom

$$Y = (B + C) \cdot \overline{A} + A \oplus B$$

- Karnoovom kartom

A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0

Kombinaciona tablica

Kombinaciona tablica predstavlja tablicu u kojoj su date vrednosti logičke funkcije za sve moguće kombinacije vrednosti ulaznih promenljivih od kojih ona zavisi.

$$Y = f(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n)$$

Nazivi promenljivih (n kolona)					Naziv funkcije
A_1	A_2	A_3	...	A_n	Y
...	...	...	...	...	...

2^n kombinacija vrednosti promenljivih iz skupa {0,1}

2^n vrednosti logičke funkcije iz skupa {0,1}

- Kombinacione tablice nisu pogodne za predstavljanje funkcija sa velikim brojem promenljivih *n* zbog dimenzija, tj. velikog broja vrsta (2^n).

Kombinaciona tablica

Primer 2 Na slici je prikazana kombinaciona tablica logičke funkcije $Y = f(A, B, C)$.

A	*B*	*C*	*Y*
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Napomena: Dobro je koristiti sistematičan pristup pri unosu kombinacija vrednosti ulaznih promenljivih u kombinacionu tablicu.

Kombinaciona tablica

Primer 3

Većinska logika

Glasači *A*, *B* i *C* glasaju za neki predlog.

1 za
0 protiv

Predlog je usvojen ako su dva ili tri glasača glasala za.

Predlog

1 usvojen
0 nije usvojen

Predstaviti ovu logičku funkciju kombinacionom tablicom.

A	*B*	*C*	*Y*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Kombinaciona tablica

Primer 4

Lift

Logičku funkciju koja će generisati signal (logičko 1) kada lift može da krene predstaviti kombinacionom tablicom.

Koristiti tri logičke promenljive:

A – spoljašnja vrata
- 1 zatvorena
- 0 otvorena

B – unutrašnja vrata
- 1 zatvorena
- 0 otvorena

C – osoba
- 1 osoba u liftu
- 0 lift je prazan

A	*B*	*C*	*Y*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Algebarski prikaz

- Logička funkcija *Y* se može predstavliti algebarskim izrazom koga čine logičke promenljive (*A*, *B*, *C*, ...) povezane logičkim operacijama (I, ILI, NE, ...). Na primer,

$$Y = C + \overline{A} + A \oplus \overline{B} + \overline{C}$$

- Logičke funkcije se algebarski najčešće predstavljaju pomoću savršenih normalnih formi koje se pojavljuju u dva oblika, kao:
  - SDNF - savršena disjunktivna normalna forma (suma proizvoda)
  - SKNF - savršena konjunktivna normalna forma (proizvod suma)

Algebarski prikaz - SDNF

- Neka je data logička funkcija $Y = f(A_1, A_2, A_3, ..., A_n)$.
- Označimo sa $\tilde{A}$ vrednost promenljive A, bilo originalnu ili negiranu ($\tilde{A}$ može biti A ili $\bar{A}$).

Potpuni proizvod:	$P = \tilde{A}_1 \cdot \tilde{A}_2 \cdot ... \cdot \tilde{A}_n$

- Potpuni proizvod je proizvod u kome se množe sve promenljive od kojih funkcija zavisi, s tim što se neke od njih pojavljuju kao originalne, a neke kao negirane.
- Potpuni proizvod ima vrednost 1 samo za jednu kombinaciju vrednosti promenljivih (za sve ostale kombinacije ima vrednost 0).

Primer 5	$Y = f(A_1, A_2)$	$P = \bar{A}_1 \cdot A_2$	$P = 1$ samo za $A_1 = 0$ i $A_2 = 1$

Algebarski prikaz - SDNF

Teorema: Svaka logička funkcija $Y = f(A_1, A_2,..., A_n)$, izuzev konstante nula, može se na jedinstven način predstaviti u obliku SDNF kao

$$Y = P_1 + P_2 + ... + P_m \qquad (m \leq 2^n)$$

gde su $P_1, P_2,..., P_n$ potpuni proizvodi koji odgovaraju kombinacijama vrednosti promenljivih za koje funkcija Y ima vrednost 1.

Primer 6

Neka logička funkcija $Y = f(A, B, C)$ ima vrednost 1 samo za sledeće kombinacije vrednosti promenljivih A, B, C: 010, 100, 101 i 111 (za ostale kombinacije je 0).
Za navedene kombinacije mogu se formirati potpuni proizvodi:

$$P_1 = \overline{A}B\overline{C} \qquad P_2 = A\overline{B}\,\overline{C} \qquad P_3 = A\overline{B}C \qquad P_4 = ABC$$

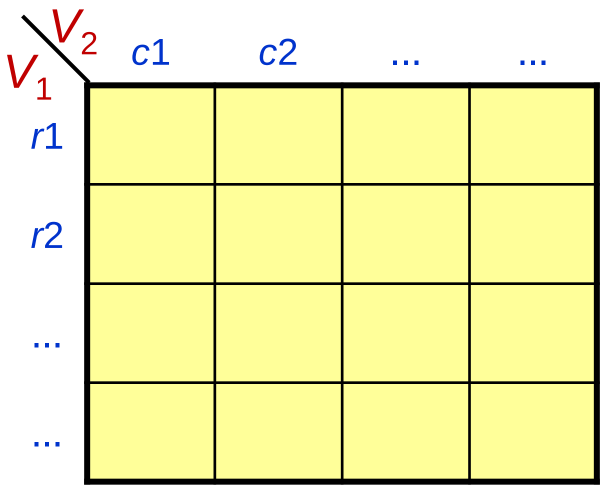
Funkcija Y može se predstaviti u vidu SDNF kao suma proizvoda

$$Y = \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + ABC$$

Karnoova karta

Karnoova karta predstavlja tablicu u kojoj su date vrednosti logičke funkcije za sve moguće kombinacije vrednosti ulaznih promenljivih. Razlika između kombinacione tablice i Karnoove karte je u njihovoj organizaciji.

Opšti izgled Karnoove karte



$V_1 \cup V_2$ – skup ulaznih promenljivih funkcije

$r1, r2, \ldots$ – binarne oznake vrsta koje predstavljaju kombinacije vrednosti promenljivih iz podskupa V_1

$c1, c2, \ldots$ – binarne oznake kolona koje predstavljaju kombinacije vrednosti promenljivih iz podskupa V_2

Karnoova karta

- U polja karte, upisuju se vrednosti funkcije Y koja zavisi od n promenljivih za 2^n mogućih ulaznih kombinacija (karta ima 2^n polja).
- Podskupovi V_1 i V_2 treba da imaju približan broj elemenata da bi karta imala oblik što sličniji kvadratu.
- Oznake vrsta i kolona formiraju se kao sve moguće kombinacije vrednosti promenljivih koje se pojavljuju u podskupovima V_1 i V_2, respektivno.
- Prilikom definisanja oznaka vrsta/kolona mora se poštovati pravilo da fizički susednim vrstama/kolonama odgovaraju binarne kombinacije koje se razlikuju samo u jednoj cifri (Grejov kod).
- Vrednost u nekom polju karte predstavlja vrednost funkcije za kombinaciju vrednosti ulaznih promenljivih definisanu oznakom vrste i oznakom kolone za dato polje.

Karnoova karta

Postupak formiranja Karnoove karte za funkciju sa *n* promenljivih

1. Najpre se promenljive funkcije svrstaju u dva podskupa sa približnim brojem članova. Neka u V_1 ima $n1$ članova, a u V_2 $n2$ članova.
2. Zatim se nacrta karta sa 2^{n1} vrsta i 2^{n2} kolona. Podskupovi promenljivih se upišu na odgovarajuća mesta u gornjem levom uglu karte.
3. Nakon toga se formiraju sve moguće kombinacije vrednosti promenljivih iz skupa V_1 (poštujući Grejov kod) i upišu kao oznake vrsta u kartu. Sličan postupak se primeni i za skup V_2 i oznake kolona.
4. Na kraju, u svako polje karte se upiše vrednost funkcije koja odgovara kombinaciji vrednosti promenljivih definisanoj konkretnom vrstom i kolonom.

$V_1 \backslash V_2$	$c1$	$c2$	...	...
$r1$				
$r2$				
...				
...				

Karnoova karta

Primer 7

Logičku funkciju od 4 promenljive *A*, *B*, *C* i *D* predstaviti Karnoovom kartom. Funkcija ima vrednost 1 samo ako su vrednosti svih promenljivih jednake.

1. <u>Formiranje podskupova</u>

4 promenljive/2 = 2 promenljive

$V_1 = \{A,B\}$ $n1 = 2$

$V_2 = \{C,D\}$ $n2 = 2$

2. <u>Dimenzije karte</u>

$2^{n1} = 2^2 = 4$ (vrste)

$2^{n2} = 2^2 = 4$ (kolone)

3. <u>Oznake</u>

AB: 00, 01, 11, 10

CD: 00, 01, 11, 10

4. <u>Popunjavanje karte</u>

U svako polje se unosi vrednost funkcije za kombinaciju koja odgovara tom polju (oznaka vrste i oznaka kolone u kojima je polje).

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	0	0	0	0
11	0	0	1	0
10	0	0	0	0

Promena načina predstavljanja funkcije

Kombinaciona tablica ⟷ Suma proizvoda

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$Y = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

Promena načina predstavljanja funkcije

Kombinaciona tablica ⟷ Karnoova karta

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	1	0	0
11	0	0	0	0
10	0	0	0	1

Promena načina predstavljanja funkcije

Karnoova karta ⟷ Suma proizvoda

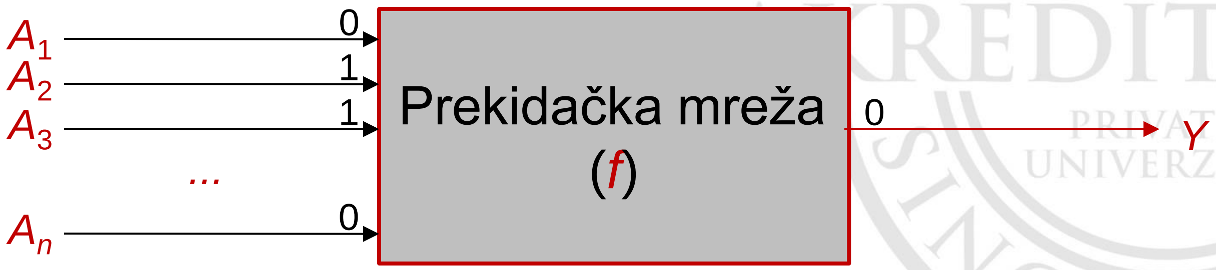
AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	0	1	1
11	1	0	0	0
10	0	0	0	0

$$Y = AB\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}BCD + \overline{A}BC\overline{D}$$

Realizacija logičke funkcije

- Logičke funkcije se realizuju pomoću prekidačkih mreža koje su osnovne komponente savremenih digitalnih sistema.
- Prekidačke mreže predstavljaju skup logičkih kola (I, ILI, NE,...) povezanih tako da realizuju zadatu logičku funkciju.
- Na ulaze mreže se dovede binarni signali koji odgovaraju vrednostima ulaznih promenljivih, a na njenim izlazima se dobijaju binarne vrednosti koje odgovaraju vrednosti funkcije za zadate ulaze.

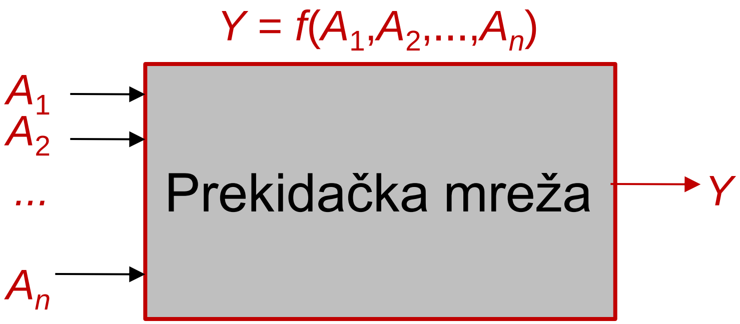
$$Y = f(A_1, A_2, A_3,..., A_n)$$



Tipovi prekidačkih mreža

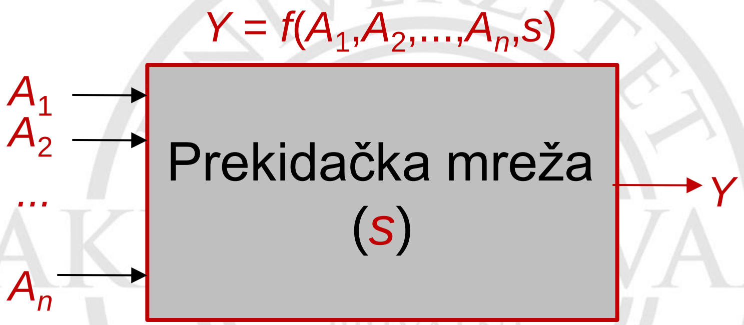
Kombinacione mreže

- vrednost funkcije na izlazu mreže zavisi samo od trenutnog stanja na ulazu



Sekvencijalne mreže

- vrednost funkcije na izlazu mreže zavisi od trenutnog stanja na ulazu, kao i od trenutnog stanja u kome se mreža nalazi



Sinteza prekidačke mreže

$Y = f(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n)$

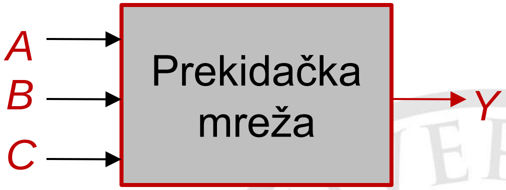
Prekidačka mreža:

- ima *n* ulaza koji odgovaraju logičkim promenljivama i jedan izlaz koji predstavlja vrednost funkcije *Y*
- ima onoliko različitih vrsta logičkih kola koliko ima različitih logičkih operacija u funkciji
- ima onoliko logičkih kola jedne vrste koliko ih je potrebno za obavljanje logičkih operacija te vrste u funkciji

Primer 8

$$Y = (B + C) \cdot \overline{A} + A \cdot B$$

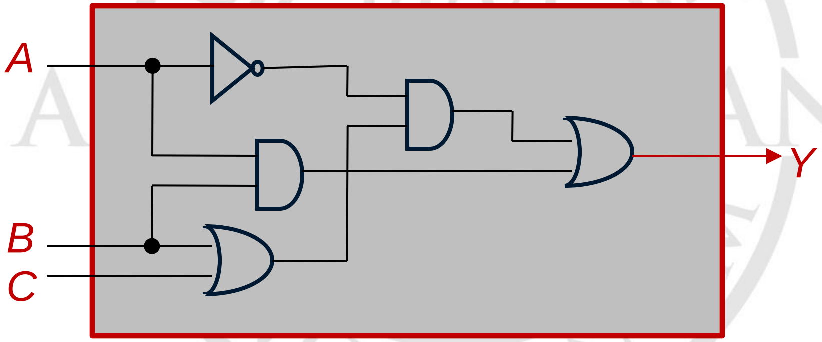
Logička kola:
ILI, I , NE



Broj kola:

ILI	2 kom.
I	2 kom.
NE	1 kom.

Realizacija:

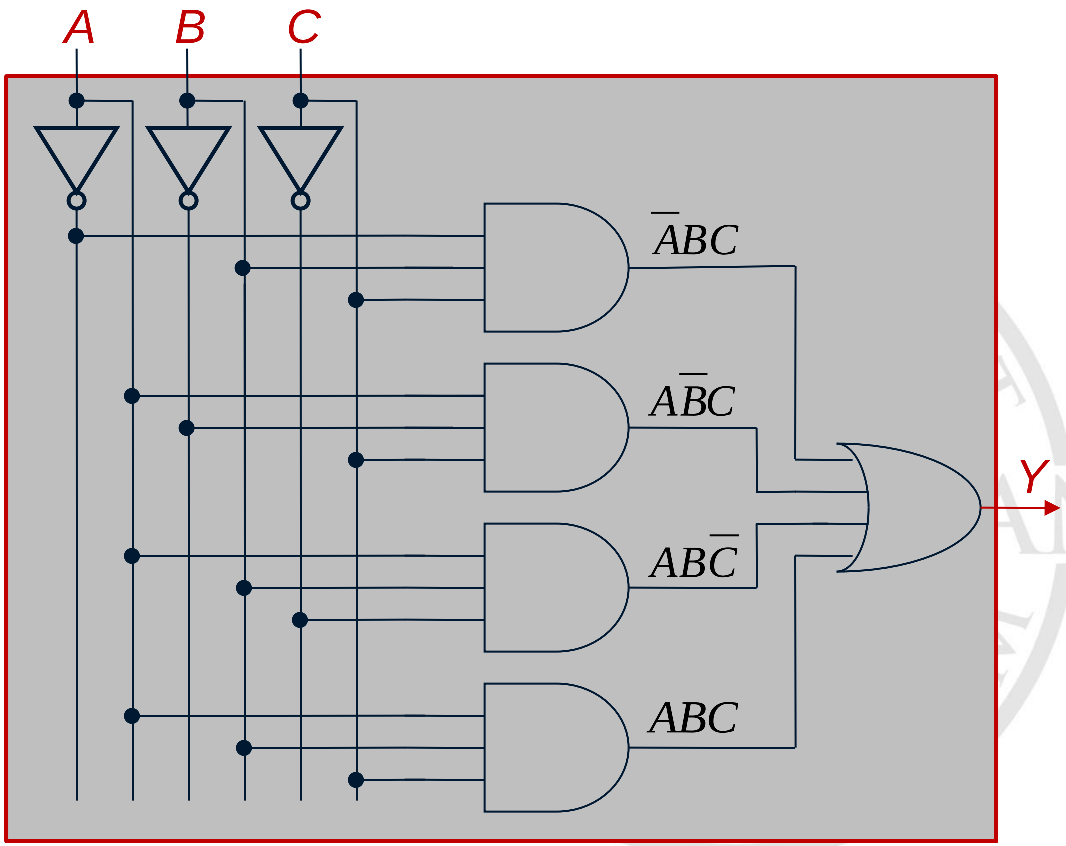


Sinteza prekidačke mreže

Primer 9 Funkciju većinske logike realizovati pomoću prekidačke mreže.

$$Y = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



Minimizacija logičke funkcije

- Logička funkcija se može predstaviti na više <u>različitih načina</u> koji ne moraju biti jednako pogodni za praktičnu realizaciju.

Primer 10

$Y = A + B$

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$Y = A + B \cdot \bar{A}$

A	B	$B \cdot \bar{A}$	Y
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	1

Minimizacija logičke funkcije predstavlja postupak pronalaženja takvog zapisa logičke funkcije na osnovu koga se ta funkcija može realizovati pomoću prekidačke mreže sa <u>najmanjim brojem logičkih kola</u>.

Minimizacija logičke funkcije

- Metode minimizacije
  - grafičke metode – zasnivaju se na vizuelnoj analizi grafički predstavljene logičke funkcije, jednostavne su i pogodne za funkcije sa manje promenljivih
  - algoritamske metode – koriste algoritme za transformisanje funkcije, složene su, ali efikasne za funkcije sa više promenljivih
- Od grafičkih metoda minimizacije najčešće se koristi postupak minimizacije koji se zasniva na primeni Karnoove karte.

Minimizacija primenom Karnoove karte

Postupak minimizacije

1. Najpre se zadata logička funkcija predstavi Karnoovom kartom.

2. Zatim se od polja Karnoove karte u kojima se nalazi vrednost 1 formiraju pravougaone površine poštujući unapred definisana pravila.

3. Na kraju se na osnovu pravougaonih površina formira minimalni zapis logičke funkcije u obliku sume proizvoda.

Pravougaone površine

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	1	1	1
11	0	0	0	1
10	0	0	0	1

- Pravougaone površine sadrže samo polja sa vrednošću 1.
- Sva polja sa vrednošću 1 moraju da budu obuhvaćena bar jednom pravougaonom površinom.
- Broj polja u pravougaonoj površini može biti samo 2^k, k=0,1,2,..., tj. 1, 2, 4, 8,... polja.
- Pravougaonu površinu mogu da čine samo susedna polja sa vrednošću 1. Susednim se smatraju i polja u prvoj i poslednjoj koloni karte, kao i polja u prvoj i poslednjoj vrsti karte.
- Pravougaone površine treba da budu što je moguće veće (da sadrže što više polja), tako da njihov broj bude što manji.
- Prema potrebi, isto polje se može naći u više pravougaonih površina.

Minimalni zapis

- Minimalni zapis je obliku sume proizvoda.
- U zapisu postoji po jedan proizvod za svaku pravougaonu površinu.

<u>Formiranje zapisa</u>:

- Najpre se uoče vrste i kolone u kojima se nalaze polja u površini
- Zatim se analiziraju oznake tih vrsta/kolona za svaku promenljivu pojedinačno
  - ako promenljiva u svim vrstama/kolonama ima vrednost i 0 i 1, ta promenljiva ne ulazi u proizvod
  - ako je vrednost promenljive u svim vrstama/kolonama 1, ta promenljiva ulazi u proizvod kao originalna (na pr. A)
  - ako je vrednost promenljive u svim vrstama/kolonama 0, ta promenljiva ulazi u proizvod kao negirana (na pr. $\bar{A}$)

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	0	0	0	0

Minimizacija primenom Karnoove karte

Primer 11 Pomoću Karnoove karte minimizirati logičku funkciju datu u vidu SDNF.

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}BC\overline{D} + ABC\overline{D} + ABCD + A\overline{B}CD + A\overline{B}C\overline{D}$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	0	0	1	1
10	0	0	1	1

Minimalni zapis

$$Y = \overline{A}\,\overline{D} + AC$$

Minimizacija primenom Karnoove karte

Primer 12 Minimizirati logičku funkciju datu sumom proizvoda.

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BCD + \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + ABC\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D}$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	1	1	1
11	0	0	0	1
10	0	0	0	1

Minimalni zapis

$$Y = \overline{A}\,\overline{C}D + C\overline{D} + \overline{A}BC$$

Minimizacija primenom Karnoove karte

Primer 13 Minimizirati logičku funkciju predstavljenu datom Karnoovom kartom.

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	0
11	1	0	1	0
10	1	0	0	1

Minimalni zapis

$$Y = \overline{C}\,\overline{D} + \overline{B}\,\overline{D} + ABCD$$

Minimizacija primenom Karnoove karte

Primer 14 Minimizirati logičku funkciju predstavljenu datom Karnoovom kartom.

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	1	0	0	1
11	0	0	1	0
10	0	0	1	1

Minimalni zapis

$$Y = \overline{A}B\overline{D} + ACD + \overline{B}CD + A\overline{B}C$$