4. Un sistema de comunicaciones

Un modelo muy simple (discreto en banda base) de un sistema de comunicaciones es el siguiente:

1. El transmisor envía un dato s_k cada T segundos, donde s_0 es enviado en $t = 0$, s_1 en $t = T$, s_2 en $t = 2T$, ...
2. Los datos son modificados por el canal, es decir, por el medio donde son transmitidos. Esa modificación está presentada por la así denominada respuesta al impulso del canal[1] $\{h_k\}_{k=0}^{L}$, donde L es la longitud de la respueta al impulso.
3. Además de ser modificados por el canal, los datos son afectados por ruido blanco Gaussiano aditivo $N_k \sim cN(0, \sigma)$.

Teniendo todo esto en cuenta, cada T segundos el receptor observa:

$$r_n = \sum_{k=0}^{L-1} h_k s_{n-k} + N_n. \tag{1}$$

También podemos expresar la Ec. 1 en forma matricial como

$$\vec{r} = \mathbf{H}\vec{s} + \vec{N}, \tag{2}$$

donde

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_M \end{pmatrix}, \ \vec{s} = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{M-1} \end{pmatrix}, \ \vec{N} = \begin{pmatrix} N_0 \\ N_1 \\ \vdots \\ N_{M-1} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_{L-1} & h_{L-2} & \cdots & h_1 & h_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h_{L-1} & \cdots & h_2 & h_1 & h_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_1 & h_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{M\times M}, \tag{4}$$

y $M \geq L$.

Otra forma equivalente es la siguiente:

$$\vec{r} = \mathbf{S}\vec{h} + \vec{N}, \tag{5}$$

donde $\vec{r}$ y $\vec{N}$ son como antes y

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_L \end{pmatrix}, \tag{6}$$

[1] En la próxima guía vamos a explicar qué es una respuesta al impulso.

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_0 & 0 & \cdots & & 0 \\ s_1 & s_0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & 0 \\ s_{L-2} & s_{L-3} & \cdots & s_0 & 0 \\ s_{L-1} & s_{L-2} & \cdots & s_1 & s_0 \\ s_L & s_{L-1} & \cdots & s_2 & s_1 \\ \vdots & s_{M-1} & s_{M-2} & \cdots & s_{M-L} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{M \times L}. \tag{7}$$

Lo que nos interesa es recuperar correctamente la señal enviada $\vec{s}$ a partir de la señal recibida $\vec{r}$. Esto no sería tan difícil si se conociesen L y los $\{h_k\}$. En efecto, tomando $M = L$ en la Ec. 2, podemos buscar $\vec{s}$ que minimice:

$$\|\mathbf{H}\vec{s} - \vec{r}\|_2^2 . \tag{8}$$

El problema es, sin embargo, que en general ni L ni $\{h_k\}$ son conocidos: estimarlos corresponde al problema de estimación del canal.

Si L es conocido, una forma de estimar el canal es mediante la Ec. 5 y el método de cuadrados mínimos. En efecto, tómese $M > L$ y envíese una señal conocida por el receptor $\vec{s} \in \mathbb{R}^M$ (denominada secuencia de entrenamiento). Luego, se estima el canal planteando el siguiente problema de cuadrados mínimos: encontrar $\vec{h} \in \mathbb{R}^L$ que minimice

$$\left\|\mathbf{S}\vec{h} - \vec{r}\right\|_2^2 . \tag{9}$$

Este trabajo práctico consiste en la estimación de un canal mediante cuadrados mínimos. Más específicamente:

1. Genere una respuesta al impulso del canal aleatoria, con $L = 30$. En Octave, esto se puede hacer de la siguiente manera:

```
L = 30;
ganancia = 1/10;
h = ganancia*(1+randn(L,1));
```

2. Usando ruido con desvío estándar $\sigma = 1$, transmita la imagen de Lena en escala de grises que se le provee y muestre los resultados. La forma de transmitir la imagen de Lena de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo. Para facilitar el proceso, transmitiremos una línea a la vez. En Octave, esto se puede hacer de la siguiente manera:

```
sigma = 1;
a = imread('lena512.bmp');
imshow(a) % muestro la imagen original
M = size(a,2);
```

```
P = size(a,1);
H = toeplitz([h.' zeros(1,M-L)],zeros(1,M));
r = zeros(M,P);
N = sigma*randn(M,1); % ruido
% se transmite una línea a la vez s = double(a(k,:)); % lo
que se envía r = H*s + N; % lo que se recibe
b = uint8(r.');
imshow(b)
```

---

3. Estime $\vec{h}$ usando una secuencia de entrenamiento conocida de longitud $E = 512$.

   a) Al estimar $\vec{h}$ suponga que $L = 1$.

   b) Al estimar $\vec{h}$ suponga que $L = 10$.

   c) Al estimar $\vec{h}$ suponga que $L = 30$.

   d) Al estimar $\vec{h}$ suponga que $L = 50$.

   ¿Cómo es la figura recuperada en cada caso? Comente sus resultados.

4. Repita el ejercicio 3 usando $E = 32$. Comente sus resultados.

5. Repita el ejercicio 3 usando $E = 1024$. Comente sus resultados.

6. Repita los ejercicios 2 y 3 usando $\sigma = 0$. Comente sus resultados.