

**Question 1**

Not yet answered

Marked out of 1.00

Määritä vektori  $\vec{u}$  pisteestä  $A$  pisteeseen  $B$ , kun  $A = [3, 6, 7]$  ja  $B = [-3, 8, 3]$ .

 [Question is missing tests or variants.](#)**Question 2**

Not yet answered

Marked out of 1.00

Määritä painopiste kolmiolle  $ABC$ , kun  $A = [3, 6, 7]$ ,  $B = [-1, 8, 3]$  ja  $C = [2, 11, 2]$ .

 [Question is missing tests or variants.](#)**Question 3**

Not yet answered

Marked out of 1.00

Määritä vektorin  $\vec{u} = [1, 5, 8]$  pituus.

 [Question is missing tests or variants.](#)**Question 4**

Not yet answered

Marked out of 1.00

Määritä pisteiden  $A = [2, 6, 7]$  ja  $B = [-3, 9, 1]$  välinen etäisyys.

 [Question is missing tests or variants.](#)

Tämän saa esimerkiksi laskemalla vektorin  $\vec{u} = B - A$  pituuden.

**Question 5**

Not yet answered

Marked out of 1.00

Tarkastellaan kolmiota  $ABC$ , missä  $A = [1, 6, 9]$ ,  $B = [-3, 7, 2]$  ja  $C = [3, 11, 2]$ .

 [Question is missing tests or variants.](#)

Eräs kolmion kärjistä on lähimpänä kolmion painopistettä. Mikä on kyseisen kärjen ja painopisteen välinen etäisyys?

**Question 6**

Not yet answered

Marked out of 1.00

Kolmion mediaani tarkoittaa yhden sivun keskipisteen ja vastakkaisen kärjen välistä janaa.

 [Question is missing tests or variants.](#)

Määritä kolmion  $ABC$  kärkeen  $C$  päättyvän mediaanin pituus, kun  $A = [1, 5, 8]$ ,  $B = [-1, 9, 3]$  ja  $C = [2, 11, 1]$ .

Sivun  $AB$  keskipiste on  $Q = (A + B)/2$ . Mediaani on siis vektori  $\vec{u} = C - Q = C - (A + B)/2$  ja kysytään tämän vektorin pituutta.

**Question 7**

Not yet answered

Marked out of 1.00

Laske vektorien  $\vec{u} = [3, 6, 8]$  ja  $\vec{v} = [-2, 9, 2]$  pistetulo.

 [Question is missing tests or variants.](#)**Question 8**

Not yet answered

Marked out of 1.00

Skalaariprojektio on vektorin varjon (eli projektion) pituus toisella vektorilla.

 [Question is missing tests or variants.](#)

Laske vektorin  $\vec{u} = [1, 5, 9]$  skalaariprojektio  $u_{\vec{v}}$  vektorille  $\vec{v} = [-3, 7, 1]$ .

Voit käyttää kaavaa  $u_{\vec{v}} = \vec{u} \cdot \hat{v}$

tai kaavaa  $u_{\vec{v}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$ .

**Question 9**

Not yet answered

Marked out of 1.00

Vektoriprojektio on se osuus vektorista, jonka toisen vektorin varjo (eli projektiio) peittää.

 [Question is missing tests or variants.](#)

Laske vektorin  $\vec{u} = [1, 5, 8]$  vektoriprojektio  $\vec{u}_{\vec{v}}$  vektorille  $\vec{v} = [-2, 7, 3]$ .

Voit käyttää kaavaa  $\vec{u}_{\vec{v}} = (\vec{u} \cdot \hat{v})\hat{v}$

tai kaavaa  $\vec{u}_{\vec{v}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v}$ .

**Question 10**

Not yet answered

Marked out of 1.00

Määritä luku  $a$  siten, että vektorit  $\vec{u} = [3, 5, 9]$  ja  $\vec{v} = [-3, 7, a]$  ovat kohtisuorassa.

 [Question is missing tests or variants.](#)

**Question 11**

Not yet answered

Marked out of 1.00

Laske vektorien  $\vec{u} = [-3, 5, -7]$  ja  $\vec{v} = [1, 3, -5]$  ristitulo.

! [Question is missing tests or variants.](#)

**Question 12**

Not yet answered

Marked out of 1.00

Laske pisteiden  $A = [1, 6, 7]$ ,  $B = [-2, 9, 3]$  ja  $C = [3, 13, 3]$  kautta kulkevan tason jokin normaali.

Normaaliksi käy vektorien  $\vec{u} = B - A = [-3, 3, -4]$  ja  $\vec{v} = C - A = [2, 7, -4]$  ristitulo.

! [Question is missing tests or variants.](#)

**Question 13**

Not yet answered

Marked out of 1.00

Laske pinta-ala kolmiolle  $ABC$ , missä  $A = [1, 5, 8]$ ,  $B = [-1, 8, 1]$ ,  $C = [5, 7, 2]$ .

Jos  $\vec{u} = B - A$  ja  $\vec{v} = C - A$ , niin vastauksen saa esimerkiksi seuraavasti.

- Ristitulovektorin pituus  $|\vec{u} \times \vec{v}|/2$ .
- Vektorien välinen kulma  $\alpha = \arccos(\hat{u} \cdot \hat{v})$ , jonka jälkeen ala on  $|\vec{u}||\vec{v}| \sin(\alpha)/2$ .
- Kohtisuora komponentti  $\vec{u}_2 = \vec{u} - (\vec{u} \cdot \hat{v})\hat{v}$ , jonka jälkeen ala on  $|\vec{v}||\vec{u}_2|/2$ . (Tuttu  $0.5 \cdot \text{kanta} \cdot \text{korkeus}$ .)

! [Question is missing tests or variants.](#)

**Question 14**

Not yet answered

Marked out of 1.00

Laske pinta-ala tilavuus tetraedrille  $ABCD$ , missä  $A = [3, 4, 8]$ ,  $B = [-1, 8, 3]$ ,  $C = [2, 11, 1]$  ja  $D = [2, 11, 3]$ .

Jos  $\vec{u} = B - A = [-4, 4, -5]$ ,  $\vec{v} = C - A = [-1, 7, -7]$  ja  $\vec{w} = D - A = [-1, 7, -5]$ , niin vastauksen saa esimerkiksi

- kaavalla  $|\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}|/6$
- matriisin  $\text{matrix}([-4, 4, -5], [-1, 7, -7], [-1, 7, -5])$  determinantin avulla kaavalla  $\det(M)/6$

! [Question is missing tests or variants.](#)

**Question 15**

Not yet answered

Marked out of 1.00

 [Question is missing tests or variants.](#)

**Käsin.** Pisteiden  $(x_1, y_1)$  ja  $(x_2, y_2)$  kulkevan suoran yhtälön voi määrittää käsin seuraavasti.

Suoran jyrkkyys eli kulmakerroin on  $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ . Se vertailee  $x$ -koordinaatin ja  $y$ -koordinaatin kasvunopeuksia, kun suoralla kuljetaan.

Suoran yhtälö on  $y - y_1 = k(x - x_1)$ , mihin tiedetyt arvot  $x_1, y_1, k$  sijoitetaan. Avaamalla sulut ja järjestelemällä yhtälön voi muokata vielä muotoon  $y = ax + b$ .

**Esimerkki käsin.** Olkoot  $(x_1, y_1) = (2, 3)$  ja  $(x_2, y_2) = (5, 4)$ . Suoran kulmakerroin on  $k = \frac{4-3}{5-2} = \frac{1}{3}$ . Suoran yhtälö on  $y - 3 = \frac{1}{3}(x - 2)$  eli  $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ .

Tarkoitus on harjoitella ratkaisemaan yhtälön  $y = ax + b$  parametrit tietokoneella.

**Esimerkki tietokoneella.** Olkoot  $(x_1, y_1) = (2, 3)$  ja  $(x_2, y_2) = (5, 4)$ . Kerätään  $vx$ -arvot vektoriin  $\bar{x} = [2, 5]'$  ja  $y$ -arvot vektoriin  $\bar{y} = [3, 4]'$ . Tehdään saman kokoinen vektori, jossa on ykkösiä  $\bar{u} = [1, 1]'$ .

Halutaan, että  $ax_k + b * 1 = y_k$  toimii arvoilla  $k = 1, 2$ .

Saadaan vektoryhtälö, joka on kaavana  $a\bar{x} + b\bar{u} = \bar{y}$ ,

ja aukikirjoitettuna  $a \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ .

Tehdään matriisiyhtälö, missä  $A = [\bar{x}, \bar{u}]$  ja  $\bar{z} = [a, b]'$ .

Kaavana matriisiyhtälö on  $A\bar{z} = \bar{y}$

ja aukikirjoitettuna  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ .

Ratkaistaan matriisiyhtälö tietokoneella, jolloin saadaan selville  $\bar{z} = [a, b]' = [0.333, 2.333]$ , mistä luetaan  $a = 0.333$  ja  $b = 2.333$ .

**Octave-koodi.**

```
x=[2,5]';
y=[3,4]';
u=0*x+1;
A=[x,u];
%yhtälön Az=y ratkaisu on
z=A\y
z =

    0.3333
    2.3333
```

**Tehtävä.** Määritä luvut a ja b siten, että suora  $y = ax + b$  kulkee pisteiden  $[5, 3]$  ja  $[4, 2]$  kautta. Anna vastaus lukuparina [a,b].

[a,b]=

**Question 16**

Not yet answered

Marked out of 1.00

**Kertausta (suora kahden pisteen kautta).** Pisteiden  $(2, 3)$  ja  $(5, 4)$  kautta kulkevan suoran  $y = ax + b$  parametrit  $a$  ja  $b$  saatiin vektoryhtälöstä

$$a \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

muuntamalla se matriisimuotoon

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ja syöttämällä tämä tietokoneelle.

**Esimerkki, osa 1 (suora useamman pisteen joukkoon).** Lisätään pisteiden joukkoon  $(7, 7)$ . Saadaan vektoryhtälöksi

$$a \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

ja matriisimuodoksi  $Az = y$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Tällä yhtälöllä ei yleensä ole oikeaa ratkaisua. Standardi "ratkaisu" yhtälölle on ns. PNS eli pienimmän neliösumman ratkaisu, joka yleensä halutaan. (PNS-ratkaisulle on kaava  $z = (A^T A)^{-1} A^T y$ , jota ei tarvitse opetella.)

Nimittäin, koska PNS-ratkaisu yleensä halutaan, niin Octave antaa PNS-ratkaisun tutulla komennolla. Yhtälön  $Az = y$  PNS-ratkaisu on Octavessa  $z = A \backslash y$ . Jos  $A$  ei ole neliömatriisi, niin Octave ei silti yski yhtään.

**Esimerkki, osa 2.** Ratkaistaan

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Octavella. Koodi

```
x=[2,5,7]';
y=[3,4,7]';
u=0*x+1;
A=[x,u];
%yhtälön Az=y PNS-ratkaisu on
z=A\y
z =
```

```
0.7632
1.1053
```

Tarkastellaan virhettä

```
A*z-y
ans =

-0.3684
0.9211
-0.5526
```

Nähdään, että suora ylittää keskimmäisen pisteen 0.9211 liian korkealta.

**Tehtävä.** PNS-sovita suora  $y = ax + b$  pistejoukkoon  $[5, 3]$ ,  $[4, 4]$ ,  $[7, 1]$ . Anna vastaus lukuparina  $[a, b]$ .

$[a, b] =$

! [Question is missing tests or variants.](#)

**Question 17**

Not yet answered

Marked out of 1.00

**Kertausta (suora kahden pisteen kautta).** Pisteiden  $(2, 3)$  ja  $(5, 4)$  kautta kulkevan suoran  $y = ax + b$  parametrit  $a$  ja  $b$  saatiin vektoryhtälöstä

$$a \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

muuntamalla se matriisimuotoon

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ja syöttämällä tämä tietokoneelle.

**Kertausta (suoran PNS-sovitus).** Suoran  $y = ax + b$  PNS-sovitus pistejoukkoon  $(2, 3)$ ,  $(5, 4)$ ,  $(7, 7)$  saatiin PNS-ratkaisemalla matriisiyhtälö

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

**Esimerkki (paraabeli kolmen pisteen kautta).** Otetaan käyräksi paraabeli  $y = ax^2 + bx + c$ , jossa on kolme parametria. Tehdään apuvektori, jossa on  $x$ -koordinaattien neliöt

$$\begin{bmatrix} 2^2 \\ 5^2 \\ 7^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 25 \\ 49 \end{bmatrix}. \text{ Saadaan vektoryhtälö}$$

$$a \begin{bmatrix} 4 \\ 25 \\ 49 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

ja matriisiyhtälö

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \\ 49 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Tämä ratkaistiin tietokoneella, ja syötetään tämä tietokoneella koodilla

```
x=[2,5,7]';
y=[3,4,7]';
u=0*x+1;
x2=x.*x
A=[x2,x,u];
%yhtälön Az=y ratkaisu on
z=A\y
```

x2 =

4  
25  
49

z =

0.2333  
-1.3000  
4.6667

**Tehtävä.** Etsi paraabeli  $ax^2 + bx + c = y$ , joka kulkee pisteiden  $[5, 3]$ ,  $[2, 6]$  ja  $[7, 1]$  kautta. Anna vastaus lukulistana  $[a,b,c]$ .

$[a,b,c]=$

! [Question is missing tests or variants.](#)

**Question 18**

Not yet answered

Marked out of 1.00

**Kertausta (suora kahden pisteen kautta).** Pisteiden  $(2, 3)$  ja  $(5, 4)$  kautta kulkevan suoran  $y = ax + b$  parametrit  $a$  ja  $b$  saatiin vektoryhtälöstä

$$a \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

muuntamalla se matriisimuotoon

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ja syöttämällä tämä tietokoneelle.

**Kertausta (suoran PNS-sovitusta).** Suoran  $y = ax + b$  PNS-sovitusta pistejoukkoon  $(2, 3), (5, 4), (7, 7)$  saatiin PNS-ratkaisemalla matriisiyhtälö

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

**Esimerkki (paraabeli kolmen pisteen kautta).** Otetaan käyräksi paraabeli  $y = ax^2 + bx + c$ , jossa on kolme parametria. Tehdään apuvektori, jossa on  $x$ -koordinaattien neliöt

$$\begin{bmatrix} 2^2 \\ 5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 25 \end{bmatrix}. \text{ Saadaan vektoryhtälö}$$

$$a \begin{bmatrix} 4 \\ 25 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ja matriisiyhtälö

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ja syötetään tämä tietokoneelle. Octave-koodi

```
x=[2,5,7]';
y=[3,4,7]';
u=0*x+1;
x2=x.*x;
A=[x2,x,u];
%yhtälön Az=y ratkaisu on
z=A\y
z =

    0.2333
   -1.3000
    4.6667
```

**Tehtävä.** PNS-sovita paraabeli  $y = ax^2 + bx + c$  pistejoukkoon  $[5, 3], [4, 4], [8, 2], [9, 3]$ . Anna vastaus lukulistana  $[a, b, c]$ .

$[a, b, c] =$

! [Question is missing tests or variants.](#)

## Question 19

Not yet answered

Marked out of 1.00

**Esimerkki (paraabeli kolmen pisteen kautta).** Otetaan pistejoukoksi  $(2, 3)$ ,  $(5, 4)$ ,  $(7, 7)$  ja käyräksi

paraabeli  $y = ax^2 + bx + c$ , jossa on kolme parametria. Katsotaan yhtälöä  $a \cdot x^2 + b \cdot x + c \cdot 1 = y$ . Tarvitaan neljä vektoria:  $x$ -koordinaattien neliöt,  $x$ -koordinaatit, lukuja 1,  $y$ -koordinaatit. Saadaan vektoryhtälö

$$a \begin{bmatrix} 4 \\ 25 \\ 49 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

ja matriisiyhtälö

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \\ 49 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Tämä ratkaistiin tietokoneella, ja syötetään tämä tietokoneella koodilla

```
x=[2,5,7]';
y=[3,4,7]';
u=0*x+1;
x2=x.*x
A=[x2,x,u];
%yhtälön Az=y ratkaisu on
z=A\y
```

x2 =

4  
25  
49

z =

0.2333  
-1.3000  
4.6667

**Tehtävä.** PNS-sovita käyrä  $y = b \exp(ax)$  pistejoukkoon  $[3, 5]$ ,  $[4, 6]$ ,  $[8, 2]$ . Anna vastaus lukulistana  $[a, b]$ .

Vihje. Ottamalla logaritmit  $\ln(y) = ax + \ln(b)$ .

matrix([-0.209370982315],[2.41163643232])

[[ -0.209370982315], [11.1521960349]]

$[a, b, c] =$

 [Question is missing tests or variants.](#)



**Question 20**

Not yet answered

Marked out of 1.00

**Esimerkki (paraabeli kolmen pisteen kautta).** Otetaan käyräksi paraabeli  $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \cdot 1$ . [Question is missing tests or variants.](#)

Tehdään  $x$ -koordinaatit sisältävä apuvektori  $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$  ja yhtä pitkät vektorit, joista toisessa on näiden neliöitä ja toisessa ykkösiä

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 25 \\ 49 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sijoitetaan nämä käyrän yhtälöön

$$a \begin{bmatrix} 4 \\ 25 \\ 49 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 2^2 \\ 5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 25 \end{bmatrix}. \text{ Saadaan vektori yhtälö}$$

$$a \begin{bmatrix} 4 \\ 25 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ja matriisiyhtälö

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ja syötetään tämä tietokoneelle. Octave-koodi

```
x=[2,5,7]';  
y=[3,4,7]';  
u=0*x+1;  
x2=x.*x;  
A=[x2,x,u];  
%yhtälön Az=y ratkaisu on  
z=A\y  
z =  
  
    0.2333  
   -1.3000  
    4.6667
```

**Tehtävä.** PNS-sovita paraabeli  $y = ax^2 + bx + c$  pistejoukkoon  $[5, 3]$ ,  $[2, 6]$ ,  $[7, 2]$ ,  $[9, 3]$ . Anna vastaus lukulistana  $[a, b, c]$ . $[a, b, c] =$