

# TKT20005 Laskennan mallit Viikko4

---

## Tehtävä 1 Säännöllisten lausekkeiden muodostaminen.

Esitä säännöllinen lauseke seuraaville aakkoston  $\Sigma = \{a, b, c\}$  kielille:

- (a) merkkijonot, joissa joka toinen merkki on b (joka toinen merkki tarkoittaa tässä merkkejä numero 2, 4, 6 jne., mikäli merkkijonossa on ainakin niin monta merkkiä)

$$((a \mid b \mid c) b)^* (\varepsilon \mid a \mid b \mid c)$$

- (b) merkkijonot, joissa on pariton määrä c-merkkejä

$$(a \mid b)^* c ((a \mid b)^* c (a \mid b)^* c)^* (a \mid b)^*$$

- (c) merkkijonot, joissa on korkeintaan yhtä merkkiä

$$\varepsilon \mid a \mid b \mid c$$

- (d) merkkijonot, joissa on ainakin kahta eri merkkiä

$$(a \mid b \mid c)^* (ab \mid ba \mid ac \mid ca \mid bc \mid cb) (a \mid b \mid c)^*$$

- (e) merkkijonot, jotka sisältävät osamerkkijonon abc

$$(a \mid b \mid c)^* abc (a \mid b \mid c)^*$$

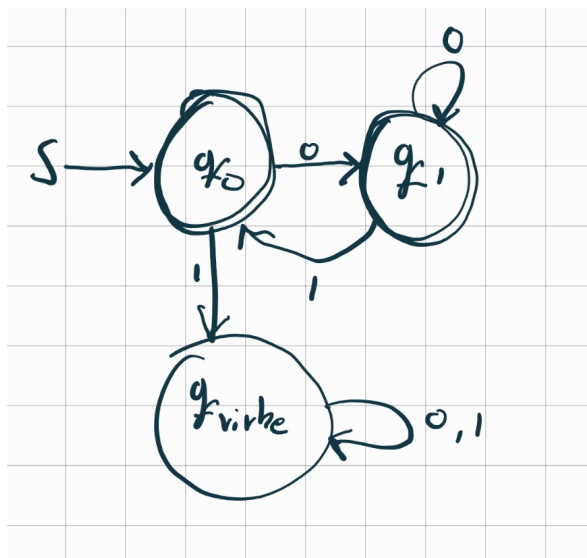
- (f) merkkijonot, jotka eivät sisällä osamerkkijonoa abc.

$$\left( (b \mid c)^* (a(a \mid c) \mid ab(a \mid b)) \right)^* (b \mid c)^* (\varepsilon \mid a)$$

## Tehtävä 2 Muunnos säännöllisestä lausekkeesta äärelliseksi automaatiksi.

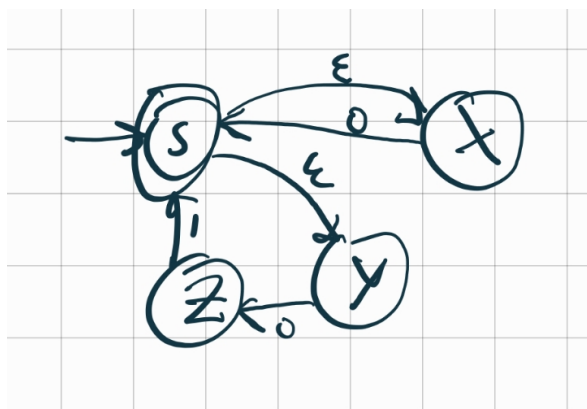
Kieli  $L = (0 \cup 01)^* \subseteq \{0, 1\}^*$  koostuu sanoista, joissa jokainen 1 on heti edeltävän 0:n perässä (ei aloiteta 1:llä, ei kahta peräkkäistä 1:tä).

(a) DFA



Tää DFA hyväksyy  $L$ :n:  $q_0$  ja  $q_1$  ovat hyväksyviä (tyhjä sana ja kaikki tähän asti validit päätökset), 1 alussa tai 1 ilman edeltävää 0:aa vie virheeseen

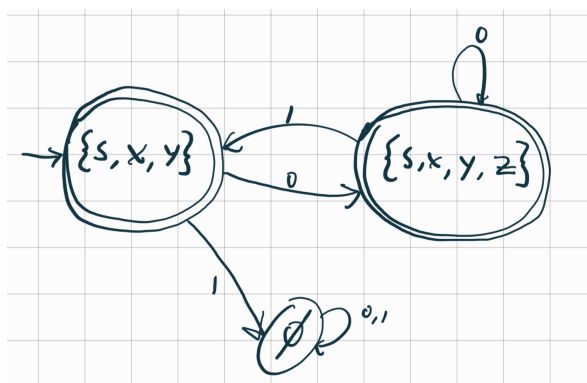
(b) NFA lausekkeesta  $(0 \cup 01)^*$  luentomenetelmällä. (Käytetään  $\varepsilon$ -siirtymiä: tähti palaa alkuun, yhdiste haaroittaa.)



(c) DFA NFA:sta  $\varepsilon$ -sulut:  $(s) = \{s, x, y\}$ , muilla ei  $\varepsilon$ -siirtymiä. Saavutettavat osajoukot ja siirtymät (hyväksyvä jos joukossa on  $s$ ):

DFA-tila	0	1
$\{s, x, y\}^*$	$\{s, x, y, z\}^*$	$\emptyset$
$\{s, x, y, z\}^*$	$\{s, x, y, z\}^*$	$\{s, x, y\}^*$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Tästä saadaan DFA (isomorfinen edellä olevaan pieneen DFA:han):



(d) Vertailu. DFA on sama kuin tehty pieni DFA:

$$\{s, x, y\} \leftrightarrow q_0, \quad \{s, x, y, z\} \leftrightarrow q_1, \quad \emptyset \leftrightarrow q_x.$$

Molemmissa on kaksi hyväksyvää tilaa ja virhe, siirtymät: 0:  $q_0 \rightarrow q_1, q_1 \rightarrow q_1$ ; 1:  $q_0 \rightarrow q_x, q_1 \rightarrow q_0$ .

### Tehtävä 3 Yhteydettömän kieliopin muodostaminen.

Esitä yhteydettömät kieliopit, jotka tuottavat seuraavat aakkoston  $\Sigma = \{0, 1\}$  kielet:

(a) parittoman mittaiset merkkijonot

$$S \rightarrow 0 \mid 1 \mid 0S0 \mid 0S1 \mid 1S0 \mid 1S1$$

(b) merkkijonot, joissa on osamerkkijono 111

$$S \rightarrow X111Y, \quad X \rightarrow 0X \mid 1X \mid \varepsilon, \quad Y \rightarrow 0Y \mid 1Y \mid \varepsilon$$

(c) merkkijonot, joissa on ainakin kaksi merkkiä ja joiden ensimmäinen ja viimeinen merkki ovat samat

$$S \rightarrow 0T0 \mid 1T1, \quad T \rightarrow 0T \mid 1T \mid \varepsilon$$

(d)  $\{0^n 1^m \mid m, n \in \mathbb{N} \text{ ja } m \geq n\}$

$$S \rightarrow 0S1 \mid T, \quad T \rightarrow 1T \mid \varepsilon$$

(e)  $\{0^n 1^k 0^m \mid m, n, k \in \mathbb{N} \text{ ja } k = n + m\}$

$$S \rightarrow 0S1 \mid U, \quad U \rightarrow 1U0 \mid \varepsilon$$

## Tehtävä 4 Yhteydetön kielioppi, jäsennyspuu ja johto.

Tarkastellaan yhteydetöntä kielioppia

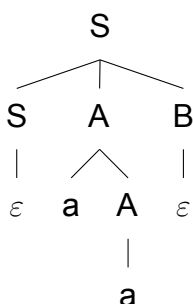
$$S \rightarrow SAB \mid \varepsilon$$

$$A \rightarrow aA \mid a$$

$$B \rightarrow bB \mid \varepsilon$$

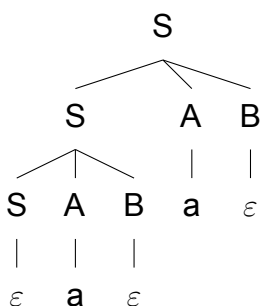
Esitä merkkijonolle aa kaksi erilaista jäsennyspuuta ja kummallekin sitä vastaava johto.

**(1)** versio 1 (yksi  $A$  tuottaa kaksi a:ta):



$$S \Rightarrow SAB \Rightarrow \varepsilon AB \Rightarrow aAB \Rightarrow aaB \Rightarrow aa\varepsilon = aa$$

**(2)** versio 2 (kaksi  $A$ -lohkoa, kumpikin tuottaa yhden a:n)



$$\begin{aligned} S &\Rightarrow SAB \Rightarrow SABAB \Rightarrow \varepsilon ABAB \Rightarrow aBAB \Rightarrow a\varepsilon AB \\ &\Rightarrow aAB \Rightarrow aaB \Rightarrow aa\varepsilon = aa \end{aligned}$$

## Tehtävä 5 Kielen osoittaminen ei-säännölliseksi pumppauslemmalla.

Osoita seuraavat kielet ei-säännöllisiksi käyttäen pumppauslemmaa:

(a) aakkoston  $\{0, 1\}$  palindromit (Vihje: Valitse  $s = 0^p 1 0^p$ )

Oletetaan vastaoletuksena, että palindromien kieli  $P$  on säännöllinen.

$p$  = pumppauspituus

Valitaan  $s = 0^p 1 0^p \in P$

Pumppauslemmasta: on  $x, y, z$  siten, että  $s = xyz$ ,  $|xy| \leq p$ ,  $|y| \geq 1$ , ja  $xy^i z \in P$  kaikilla  $i \geq 0$

Koska  $|xy| \leq p$ , merkkijono  $xy$  koostuu vain alun nolista, joten  $y = 0^k$  jollakin  $k \geq 1$ .

3 ehto:  $xy^0 z = 0^{p-k} 1 0^p$ , joka ei ole palindromi (vasemman ja oikean "0\*" -osan pituudet eroavat).

Ristiriita  $\Rightarrow$  eli  $P$  ei ole säännöllinen

(b)  $\{a^m b^n a^n \mid n, m \geq 1\}$