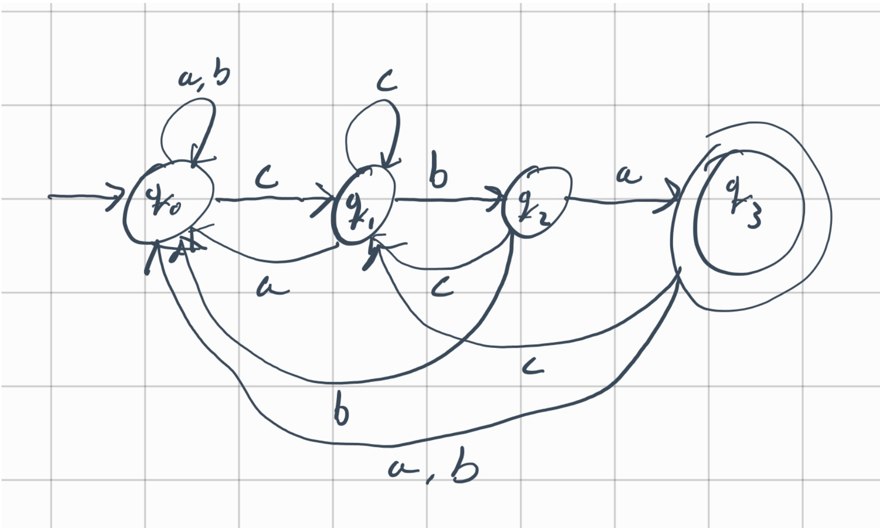
TKT20005 Laskennan mallit Viikko3

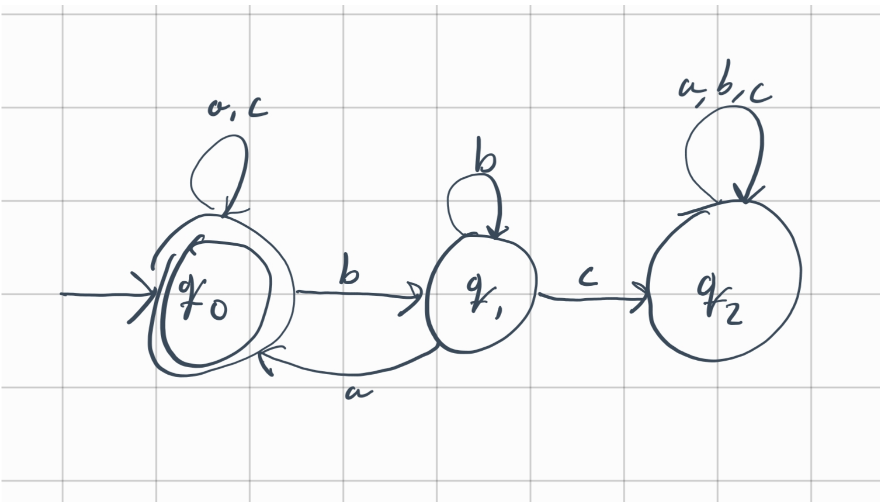
Tehtävä 1 Äärellisen automaatin muodostaminen.

Tässä tehtävässä harjoitellaan muodostamaan äärellinen automaatti annetulle kielelle.

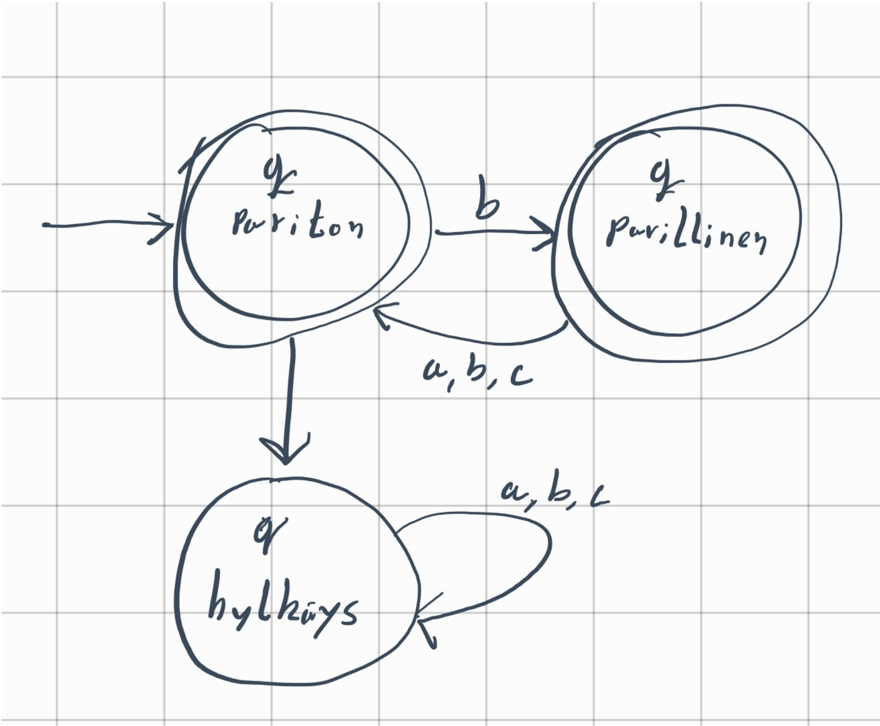
(a) Piirrä deterministinen äärellinen automaatti, joka hyväksyy tasan ne aakkoston $\{a, b, c\}$ merkkijonot, jotka päättyvät cba.



(b) Piirrä deterministinen äärellinen automaatti, joka hyväksyy tasan ne aakkoston $\{a, b, c\}$ merkkijonot, jotka eivät sisällä osamerkkijonoa bc.

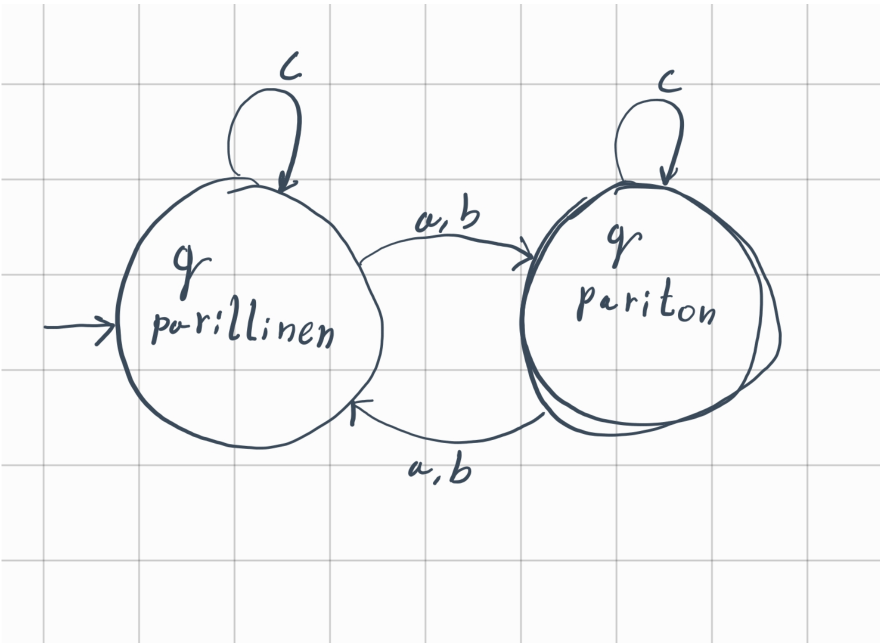


(c) Piirrä deterministinen äärellinen automaatti, joka hyväksyy tasan ne aakkoston $\{ \text{a}, \text{b}, \text{c} \}$ merkkijonot, joissa jokainen paritonnumeroinen merkki on b.



Automaatti seuraa ollaanko lukemassa paritonta vai parillista merkkiä jonossa.

(d) Piirrä deterministinen äärellinen automaatti, joka hyväksyy tasan ne aakkoston $\{ \text{a}, \text{b}, \text{c} \}$ merkkijonot, joissa a- ja b-merkkien lukumäärien erotus on pariton.



'c' lukumäärä ei vaikuta. $|N_a - N_b|$ on pariton jos summa $N_a + N_b$ on pariton. Voidaan siis seurata a- ja b-merkkien yhteismäärän pariteettia.

Tehtävä 2. Muunnos epädeterministisestä automaatista deterministiseksi.

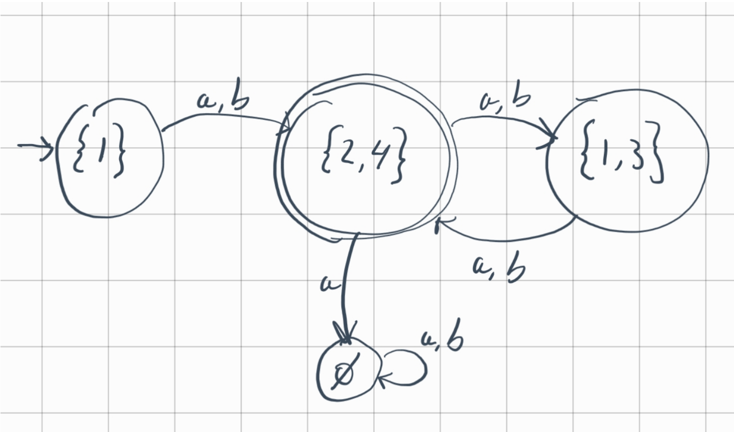
(1) NFA → DFA

DFA alku on $\{1\}$. Hyväksyviä ovat osajoukot missä on 4

Siirtymätaulukko:

σ	a	b
$\{1\}$	$\{2,4\}$	$\{2,4\}$
$\{2,4\}$	$\varnothing$	$\{1,3\}$
$\{1,3\}$	$\{2,4\}$	$\{2,4\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

Hyväksyvä: $\{2,4\}$. Alkutila: $\{1\}$.



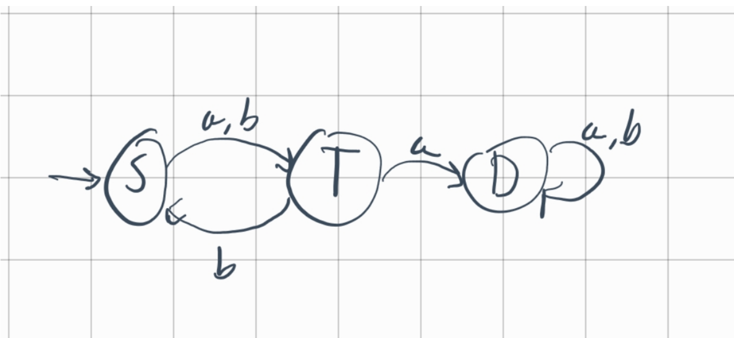
(2) Voiko DFA:ta yksinkertaistaa?

Kyllä. {1} ja {1,3} kummastakin a ja b vievät aina samaan tilaan {2,4}, ja kumpikaan ei ole hyväksyvä jolloin ne voidaan yhdistää.

Minimoitu siirtymätaulukko

σ	a	b
$S\ (\{1\}=\{1,3\})$	T	T
$T\ (\{2,4\})$	D	S
$D\ (\varnothing)$	D	D

Alku S (ei-hyväksyvä), hyväksyvä T, D on ikiluuppi.



Tehtävä 3. Säännöllisten kielten sulkeumat.

Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa? Perustele vastauksesi todistamalla väite tai antamalla vastaesimerkki. Perusteluissa voit pitää tunnettuina kurssilla tähän asti esitetyt tulokset sekä sen, että esim. kieli $C = \{ 0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ ei ole säännöllinen.

(a) Jos A on säännöllinen ja B on säännöllinen, niin $A \cup B$ on säännöllinen.

Pitää painkansa.
Jos A ja B ovat säännöllisiä, on olemassa DFA:t M_A ja M_B. Automaatti M tiloilla $Q_A \times Q_B$ tunnistaa $A \cup B$ (hyväksyvät tilat $\{(p, q) \mid p \in F_A$ tai $q \in F_B\}$). Siis $A \cup B$ on säännöllinen

(b) Jos A on säännöllinen ja B ei ole säännöllinen, niin $A \cup B$ ei ole säännöllinen.

Ei pidä paikkaansa.
Vastaesimerkki: Olkoon $A = \Sigma$ (säännöllinen, niin iso että $B \subseteq A$) ja $B = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (ei säännöllinen). Tällöin $A \cup B = \Sigma$ on säännöllinen.

(c) Jos A on säännöllinen ja $A \cup B$ ei ole säännöllinen, niin B ei ole säännöllinen.

Pitää paikkansa.
Jos A on säännöllinen ja $A \cup B$ ei ole säännöllinen, niin B ei voi olla säännöllinen.

(d) Jos A ei ole säännöllinen ja B ei ole säännöllinen, niin $A \cap B$ ei ole säännöllinen.

Ei pidä paikkaansa.
Kaksi ei-säännöllistä voivat leikata säännölliseksi. Vastaesimerkki:

$$A = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}, \qquad B = \{0^n 1^{n+1} \mid n \geq 0\} \quad \mid \text{kummassakaan ei yhtään samaa sanaa}$$

Molemmat ovat ei-säännöllisiä, mutta $A \cap B = \varnothing$ on säännöllinen.

(e) Jos A on säännöllinen ja $B \subseteq A$, niin B on säännöllinen.

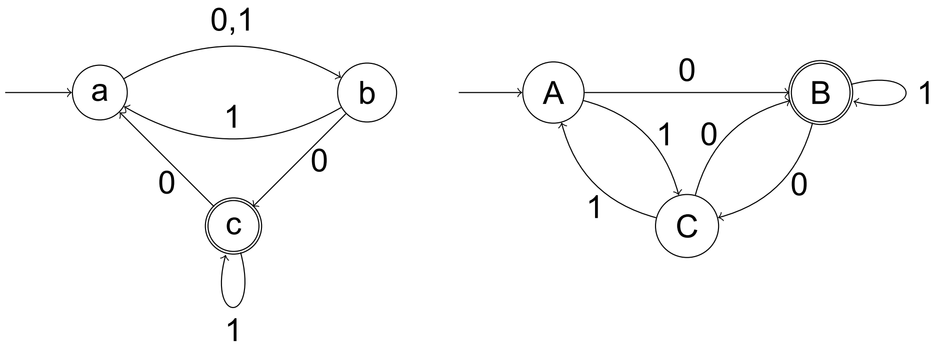
Ei pidä paikkaansa.
Säännöllisen joukon alajoukko voi olla ei-säännöllinen. Vastaesimerkki: $A = \Sigma$ on säännöllinen ja $B = \{0^n 1^n\} \subseteq A$ ei ole säännöllinen

(f) Jos B on säännöllinen ja $B \subseteq A$, niin A on säännöllinen.

Ei pidä paikkaansa
Säännöllinen joukko ei pakota yläjoukkoa säännölliseksi. Vastaesimerkki: $B = \varnothing$ (säännöllinen) ja $A = \{0^n 1^n\}$ (ei säännöllinen), jolloin $B \subseteq A$ mutta A ei ole säännöllinen

Tehtävä 4. Yhdisteautomaatti.

Tämä tehtävä auttaa ymmärtämään luennoilla esitetyn yhdisteautomaatin konstruktion käymällä läpi yhden esimerkin yhdisteautomaatista.
Muodosta alla annettuista kahdesta äärellisestä automaatista deterministinen yhdisteautomaatti luennolla esitetyllä menetelmällä. Esitä yhdisteautomaatin laskenta syötteellä 0110.



Tehdään yhdisteautomaatti. (LaMa luentomateriaali s.54 alkavaan esimerkkiä mukaillen)

Vasemman automaatin tilat $\{a, b, c\}$ (alku a, hyväksyvä c) ja oikean $\{A, B, C\}$ (alku A, hyväksyvä B)

DFA:

$$M = (Q, \Sigma, \delta, (a, A), F) \qquad Q = \{a, b, c\} \times \{A, B, C\} \;\; \Sigma = \{0, 1\}$$
$$\delta\big((p, q), x\big) = (\delta_1(p, x), \delta_2(q, x)) \qquad F = \big(\{c\} \times \{A, B, C\}\big) \cup \big(\{a, b, c\} \times \{B\}\big)$$

Eli (p, q) on hyväksyvä, jos jompikumpi komponenteista olisi hyväksyvä alkuperäisessä automaatissa. (s.60 LaMa ”Tila on hyväksyvä, jos se vastaa ainakin toisen alkuperäisen automaatin hyväksyvää tilaa”)

Saavutettavat tilat ja siirtymät (keltainen = hyväksyvä):

tila	0	1
(a, A)	(b,B)	(b, C)
(b,B)	(c,C)	(a,B)
(b, C)	(c,B)	(a, A)
(a,B)	(b, C)	(b,B)
(c,C)	(a,B)	(c,A)
(c,B)	(a, C)	(c,B)
(c,A)	(a,B)	(c,C)
(a, C)	(b,B)	(b, A)
(b, A)	(c,B)	(a, C)

tarkistetaan syötteellä 0110:

$$(a, A) \xrightarrow{0} \text{(b,B)} \xrightarrow{1} \text{(a,B)} \xrightarrow{1} \text{(b,B)} \xrightarrow{0} \text{(c,C)}$$

Lopputila on hyväksyvä, joten sana **0110** hyväksytään.

Tehtävä 5. Kielen osoittaminen säännölliseksi I.

Tässä tehtävässä syvennetään ymmärrystä kielen osoittamisesta säännölliseksi muodostamalla sopiva automaatti.
Oletetaan, että kielet A ja B ovat säännöllisiä. Osoita, että leikkaus $A \cap B$ on säännöllinen, muuntamalla sopivasti luennolla esitettyä todistusta sille, että yhdiste $A \cup B$ on säännöllinen (lause 1.1, Sipserin Theorem 1.25).

Muodostamme äärellisen automaatin; (OR $\rightarrow$ AND):
$M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ ja $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$

DFA:t, joille $L(M_1) = A$ ja $L(M_2) = B$

DFA:

$$M = (Q, \Sigma, \delta, (q_1, q_2), F), \quad Q = Q_1 \times Q_2, \quad \delta\big((p, q), a\big) = (\delta_1(p, a),\, \delta_2(q, a)), \quad F = F_1 \times F_2$$

Olkoon $w \in \Sigma^*$ mielivaltainen syöte, $w = a_1 a_2 \cdots a_k$

tilajonot:

$$p_0 = q_1, \;\; p_{i+1} = \delta_1(p_i, a_i) \quad \text{ja} \quad r_0 = q_2, \;\; r_{i+1} = \delta_2(r_i, a_i)$$

Siten lopussa M on tilassa (p_k, r_k) ja

$$w \in L(M) \iff (p_k, r_k) \in F_1 \times F_2 \iff p_k \in F_1 \,\wedge\, r_k \in F_2 \iff w \in A \,\wedge\, w \in B$$

Siis $L(M) = A \cap B$, joten $A \cap B$ on säännöllinen.