

TKT20005 Laskennan mallit Viikko2

Tehtävä 1 Perustermejä.

Selitä omin sanoin seuraavat termit: merkki, aakkosto, merkkijono, formaali kieli. Anna esimerkki merkistä, aakkostosta, merkkijonosta ja formaalista kielestä.

Merkki on symboli mikä on aakkoston alkio. Esimerkiksi 0, 1, HiiriVasen, tkt, mat.

Aakkosto on mikä tahansa äärellinen joukko. Esim. ASCII merkistö, R, G, B, A

Merkkijono Aakkoston jono, äärellinen jono symboleita, Esim. 00010 on aakkoston Σ_1 merkkijono.

Formaali kieli Formaali kieli A on sellainen sääntöjen joukko että sillä on tarkastaja V joka hyväksyy tai hylkää alkion.

Tehtävä 2 Joukko-opin merkinnät I.

Kuvaile sanallisesti seuraavat joukot:

(a) $\{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ on parittomien luonnollisten lukujen joukko, esim 1, 3.

(b) $\{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$, missä 0 ja 1 ovat merkkejä. On palindromien joukko missä joukon jäsenet on parillisen pituisia. 0110, 011110

(c) $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, missä a, b ja c ovat merkkejä. On joukko missä on sama määrä a, b ja c merkkejä ϵ , abc, aabbcc

(d) $\{u \in \Sigma^* \mid \text{jollakin } v \in \Sigma^* \text{ pätee } uv = \text{abarakadabra}\}$, missä $\Sigma = \{a, \dots, z\}$. On alusta purkaen sanan abarakadabra loppuosat. abarakadabra, brakadabra, rakadabra

Anna lisäksi kustakin joukosta kaksi esimerkkiä joukkoon kuuluvista alkioista.

Tehtävä 3 Joukko-opin merkinnät II.

Esitä tehtävän 2 tyylistä joukkomerkintää käyttäen seuraavat joukot:

(a) aakkoston $\{a, b, c, d\}$ palindromit (merkkijonot, jotka ovat samoja myös lopusta alkuun luettuina.)

$$\{w \in \{a, b, c, d\}^* \mid w = w^R\}$$

(b) kolmella jaolliset luonnolliset luvut

$$\{w \in \mathbb{N} \mid w \bmod 3 = 0\}$$

(c) aakkoston $\{0, 1\}$ merkkijonot, joissa kaikki nollat ovat ennen ykkösiä

$$\{0^n 1^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

(d) aakkoston $\{a, b\}$ merkkijonot, jotka sisältävät osamerkkijonon bab.

$$\{wbabx \mid w, x \in \{a, b\}^*\}$$

bab, abab, baba, bbab, babb, aabab, ababa, ababb, babaa, babab

Luettele lisäksi (d)-kohdan kielen kymmenen ensimmäistä merkkijonoa lyhytaakkosjärjestyksessä (short-lex).

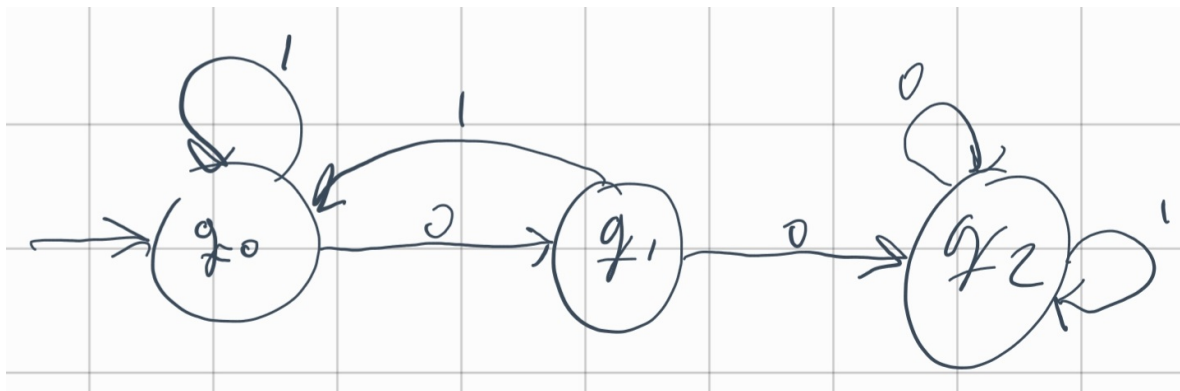
Tehtävä 4 Äärellisen automaatin määritelmä ja sen tunnistama kieli.

Tässä tehtävässä harjoitellaan äärellisen automaatin tilakaavion piirtämistä ja tulkintaa.

Olkoon $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2\})$, missä δ on seuraava:

	0	1
q_0	q_1	q_0
q_1	q_2	q_0
q_2	q_2	q_2

(a) Esitä automaatti M tilakaaviona.



(b) Luettele järjestyksessä tilat, joissa automaatti käy syötteellä 10101010 ja syötteellä 010011. Hyväksyykö vai hylkääkö automaatti syötteen?

$q_0, q_0, q_1, q_0, q_1, q_0, q_1, q_0, q_1$

automaatti hylkää syötteen koska q_1 ei ole sallittu tila.

$q_0, q_1, q_0, q_1, q_2, q_2, q_2$

automaatti hyväksyy syötteen.

(c) Kuvaile sanallisesti automaatin tunnistama kieli.

Eli miten q_2 pääsee? Vaikuttaisi että $q_0 \rightarrow q_1 \rightarrow q_2$ tarvitaan kaksi peräkkäistä nollaa. Eli automaatti tunnistaa syötteen missä on kaksi peräkkäistä nollaa.

Tehtävä 5 Lisäharjoitusta äärellisen automaatin tunnistaman kielen kuvailuun.

Vasen automaatti kuvaa kieltä joka alkaa a:lla ja päättyy a:han. Merkkijono vuorottelee merkkejä a,b,a,b,a. Merkkijonon pituus on pariton ja parittomissa paikoissa on a. Eli alkaa a:lla ja sitä seuraa nollasta ylöspäin kertaa ba.

Oikea automaatti kuvaa kieltä mikä sisältää nollasta ylöspäin kertaa 'ab' ja 'ba' merkkiyhdistelmiä.

Tehtävä 6 Formaalit kielet.

Tässä tehtävässä opetellaan esittämään ja todistamaan argumentteja formaaleista kielistä.

Kieli A on *rajoitettu*, jos sen merkkijonojen pituudet ovat ylhäältä rajoitettuja, ts. jollain luonnollisella luvulla $n \in \mathbb{N}$ pätee, että $|w| \leq n$ kaikilla $w \in A$.

- (a) Pitääkö paikkansa, että kahden rajoitetun kielen A ja B yhdiste $A \cup B$ on aina rajoitettu? Todista väite tai anna vastaesimerkki.

$$\text{Olkoon } A \subseteq \bigcup_{i=0}^M \Sigma^i \text{ ja } B \subseteq \bigcup_{i=0}^N \Sigma^i$$

Silloin (lausetta 1.1 seuraten)

$$A \cup B \subseteq \bigcup_{i=0}^{\max\{M,N\}} \Sigma^i$$

joten kaikilla $w \in A \cup B$ pätee $|w| \leq \max\{M, N\}$. Siis $A \cup B$ on rajoitettu.

- (b) Pitääkö paikkansa, että kahden rajoitetun kielen A ja B leikkaus $A \cap B$ on rajoitettu? Todista väite tai anna vastaesimerkki.

Yllä määritellyillä M, N jos $w \in A \cap B$, niin $|w| \leq M$ ja $|w| \leq N$, joten $|w| \leq \min\{M, N\}$

Siis

$$A \cap B \subseteq \bigcup_{i=0}^{\min\{M,N\}} \Sigma^i$$

ja $A \cap B$ on rajoitettu

- (c) Todista, että kieli on rajoitettu, jos ja vain jos se on äärellinen (ts. sisältää tasan m merkkijonoa jollain luonnollisella luvulla $m \in \mathbb{N}$).

Jos L on rajoitettu, niin on N siten, että $|w| \leq N$ kaikilla $w \in L$

Silloin

$$L \subseteq \Sigma^{\leq N} := \bigcup_{i=0}^N \Sigma^i$$

Koska Σ on äärellinen, jokainen Σ^i on äärellinen ja äärellinen unioni äärellisiä joukkoja on äärellinen, joten $\Sigma^{\leq N}$ ja siten L on äärellinen.