TKT20005 Laskennan mallit Viikko1

Tehtävä 1 Implikaatio ja ekvivalenssi.

1. Alicella ja Bobilla on molemmilla lehmiä, jotka laiduntavat samalla niityllä. Tiedämme, että seuraavat loogiset lauseet niityllä olevista lehmistä ovat totta:

$$\text{“Lehmä on Alicen.”} \implies \text{“Lehmä on ruskea.”}$$
$$\text{“Lehmä on Bobin.”} \iff \text{“Lehmällä on sarvet.”}$$

   Luonnollisella kielellä yllä olevat lauseet voidaan ilmaista esim.:

   - Jos lehmä on Alicen, se on ruskea.
   - Lehmä on Bobin, jos ja vain jos sillä on sarvet.

(a)(1) **Lehmä on ruskea.** Implikaatiosta ”Jos lehmä on Alicen, se on ruskea”($A \Rightarrow R$) ei voi päätellä mitään omistajasta jos lehmä on ruskea. Ruskea lehmä voi olla Alicen, mutta se voi olla myös jonkun muun lehmä. **Omistajasta ei siis voida päätellä mitään.**

(2) **Lehmä ei ole ruskea.** Implikaatiosta $A \Rightarrow R$ seuraa loogisesti $\neg R \implies \neg A$. Tämä tarkoittaa: ”Jos lehmä ei ole ruskea, se ei ole Alicen.”Koska lehmä ei ole ruskea, **voimme varmuudella sanoa, että lehmä ei ole Alicen**

(3) **Lehmällä on sarvet.** Ekvivalenssi ”Lehmä on Bobin, jos ja vain jos sillä on sarvet”($B \iff S$) tarkoittaa, että lauseilla on aina sama arvo. **Koska lehmällä on sarvet, sen on oltava Bobin.**

(4) **Lehmällä ei ole sarvia.** Ekvivalenssin ($B \iff S$) mukaan, jos lehmällä ei ole sarvia, se ei voi olla Bobin. **Lehmä ei ole Bobin.**

(b)(1) Jos D on tosi, implikaatiosta $A \Rightarrow D$ **ei voida päätellä mitään A:n totuusarvosta.**

(2) Jos D ei ole tosi, niin $\neg D \Rightarrow \neg A$ nojalla voidaan todeta, että **A ei ole tosi.**

(3) Jos tiedetään että E on tosi, ekvivalenssin $B \iff E$ nojalla myös **B on tosi.**

(4) Jos tiedetään että E ei ole tosi, ekvivalenssin $B \iff E$ nojalla myös **B ei ole tosi.**

Tehtävä 2 Vastaesimerkki ja epäsuora todistus.

Tunnetusti kahden luonnollisen luvun summa on luonnollinen luku. Toisin sanoen pätee:

$$a \in \mathbb{N} \text{ ja } b \in \mathbb{N} \implies a + b \in \mathbb{N}$$

1. Tiedetään, että a on luonnollinen luku ja b ei ole luonnollinen luku. Voidaanko tästä päätellä, että $a+b$ ei ole luonnollinen luku? Perustele vastauksesi täsmällisesti antamalla vastaesimerkki tai todistus perustuen yllä olevaan implikaatioon ja epäsuoraan todistustekniikkaan.

2. Tiedetään, että a on luonnollinen luku ja $a + b$ ei ole luonnollinen luku. Voidaanko tästä päätellä, että b ei ole luonnollinen luku? Perustele vastauksesi täsmällisesti antamalla vastaesimerkki tai todistus perustuen yllä olevaan implikaatioon ja epäsuoraan todistustekniikkaan.

(1) Väite on: $a \in \mathbb{N}$ ja $b \notin \mathbb{N} \Rightarrow a + b \notin \mathbb{N}$

On löydettävä sellaiset luvut a ja b, joilla alkuoletus pätee ($a \in \mathbb{N}$ ja $b \notin \mathbb{N}$), mutta johtopäätös ei päde ($a + b \in \mathbb{N}$)

Valitaan a=3 ja b=-2

- Tällöin $a = 3$ on luonnollinen luku.
- Luku $b = -2$ ei ole luonnollinen luku.
- a+b = 3 + (-2) = 1. Luku 1 on luonnollinen luku; siis a+b$\in \mathbb{N}$

Koska löysimme tapauksen, missä oletukset on voimassa mutta väite ei pidä paikkaansa, emme voi yleisesti sanoa $a + b$ ei ole luonnollinen luku. **Väite on siis epätosi.**

(2) Väite on: $a \in \mathbb{N}$ ja $a + b \notin \mathbb{N} \Rightarrow b \notin \mathbb{N}$

Väite on tosi. Todistetaan tämä epäsuorasti.

Oletetaan, että $a \in \mathbb{N}$ ja $a + b \notin \mathbb{N}$. Oletetaan vastoin väitettä, että b on luonnollinen luku: $b \in \mathbb{N}$.

Nyt meillä on tiedossa kaksi asiaa:

- Alkuperäisen oletuksen mukaan $a \in \mathbb{N}$.
- Vastaoletuksen mukaan $b \in \mathbb{N}$.

Tehtävänannossa annetun perustiedon mukaan kahden luonnollisen luvun summa on aina luonnollinen luku. Koska a ja b ovat molemmat oletustemme mukaan luonnollisia lukuja, niiden summan a+b on siis pakko olla luonnollinen luku, eli $a + b \in \mathbb{N}$

Tämä on kuitenkin ristiriidassa alkuperäisen oletuksen kanssa, jonka mukaan $a + b \notin \mathbb{N}$ eli alkuperäinen **väite on tosi.**