MODELO PARA EL VACIADO DE UN RECIPIENTE

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ingeniería

MODELAMIENTO MATEMÁTICO

Descripción del Problema

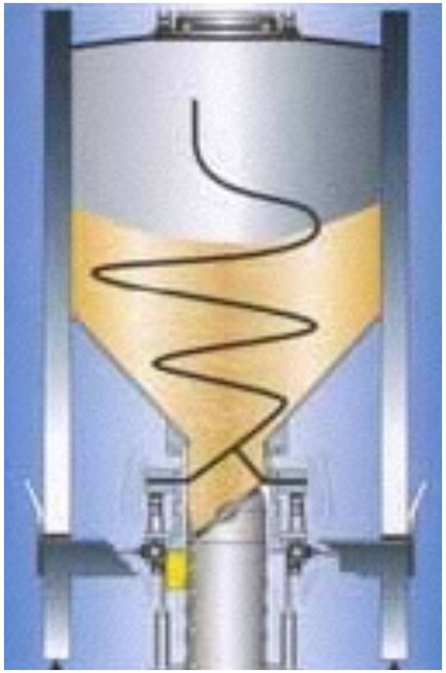
Para la elaboración de un determinado producto se requiere agregar de forma dosificada un reactivo **A**, el cual es almacenado en el tanque mostrado en la figura y adicionado al proceso a medida que el recipiente que lo contiene se vacía libremente por la acción de la gravedad.

Para asegurar que la producción sea continua se requiere mantener el nivel del tanque entre dos limites definidos, uno superior y otro inferior.

Se necesita entonces elaborar un modelo matemático que permita conocer la variación en el tiempo del nivel de reactivo almacenado en el tanque.

Identificación de variables asociadas al problema (i)

El **conocimiento** profundo que se tenga del **problema** permitirá evaluar la pertinencia de diferentes **variables** asociadas al **fenómeno** que se quiere modelar ….



Algunas variables que pueden relacionarse con la naturaleza del fenómeno que se quiere modelar son:

- Variables relacionadas con el fluido almacenado:

  -Densidad (ρ)

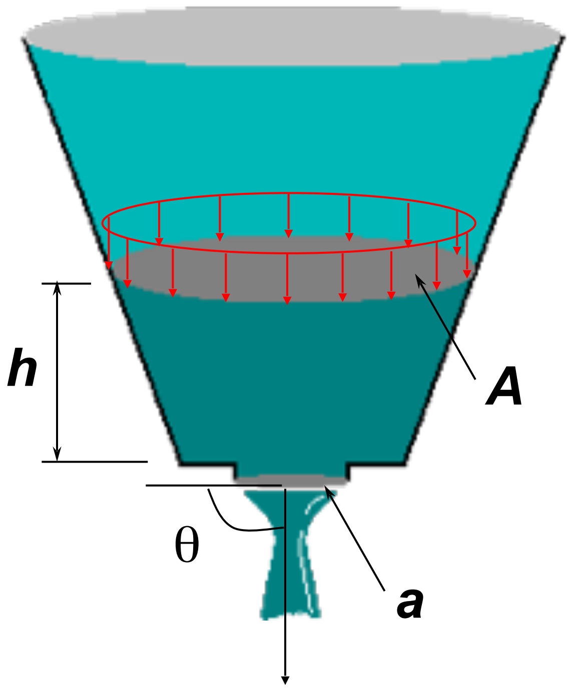
  -Viscosidad (ν)

  -Tensión superficial (τ)

  -Volatilidad (ξ)

  -Temperatura (T)

Identificación de variables asociadas al problema (ii)



- Variables relacionadas con el recipiente de almacenamiento:

  -Área de la sección transversal (A)

  -Área del agujero de descarga (a)

  -Rugosidad de las paredes del recipiente (μ)

  -Orientación del agujero (θ)

  -Geometría del agujero

  -Nivel del reactivo (h)

- Otras Variables:

  -Presión atmosférica (p)

  -Flujo Volumétrico (Q)

  -Tiempo (t)

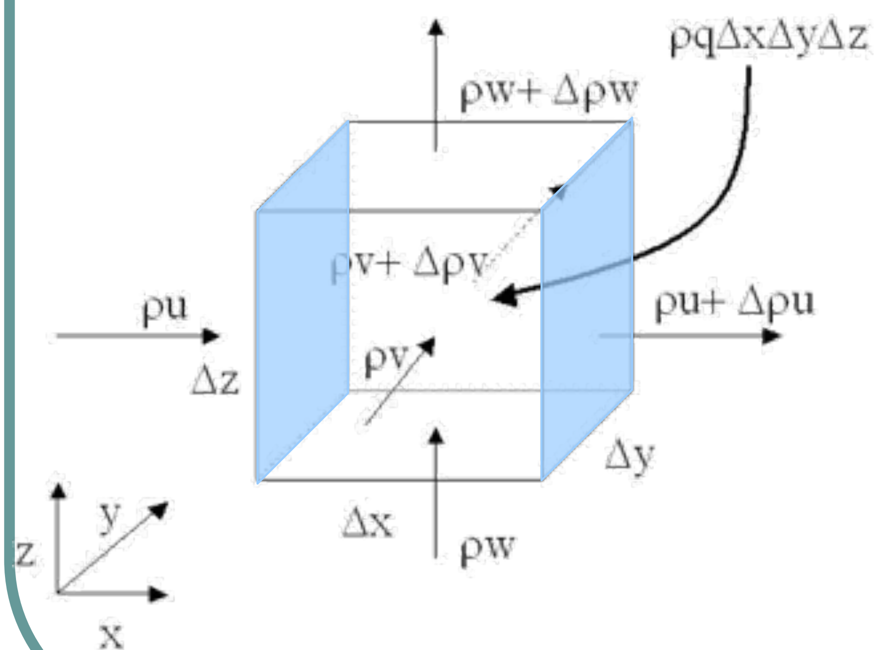
Clasificación de las variables del modelo

De acuerdo con las características propias del problema y con el marco impuesto por algunas simplificaciones aceptadas, las anteriores variables pueden clasificarse en :

Tipo	***Variable***
Dependiente	Nivel (***h***), Caudal (***Q***).
Independiente	Tiempo (***t***).
Parámetro	Área recipiente (***A***), Área agujero (***a***), Viscosidad (ν), Densidad (ρ), Tensión Superficial (τ), Temperatura (***T***), Presión atmosférica (***p***).
Despreciadas	Volatilidad (ζ), Orientación del agujero (θ), Rugosidad de las paredes del recipiente (μ).

Desarrollo del modelo (i) ….

Para desarrollar el modelo matemático para el vaciado del recipiente se iniciará con el planteamiento de una Ley general; para este caso será la ***Ley de Conservación de masa***:



- Flujo Unidireccional (1 entrada–1 salida)

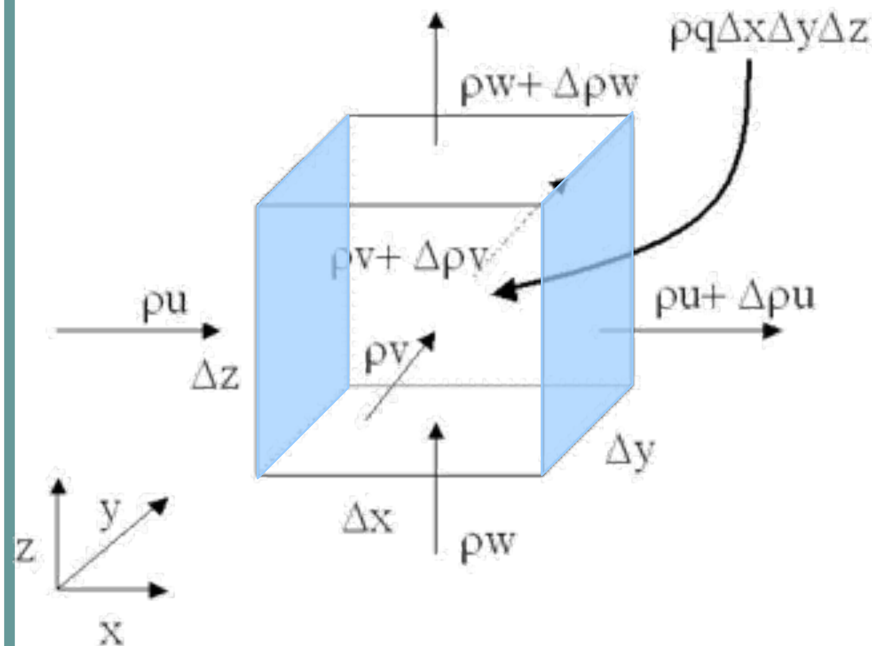
$$\dot{m}_x^{in} - \dot{m}_x^{out} = \frac{d\,m_{sist}}{d\,t}$$

$$\rho Q_x^{in} - \rho Q_x^{out} = \frac{d\,\rho\,\forall_{sist}}{d\,t}$$

- Fluido Incompresible

$$Q_x^{in} - Q_x^{out} = \frac{d\,\forall_{sist}}{d\,t}$$

Desarrollo del modelo (ii) ….



- Sección transversal constante

$$Q_x^{in} - Q_x^{out} = \frac{A\, dh_{sist}}{dt}$$

- Solo descarga del tanque

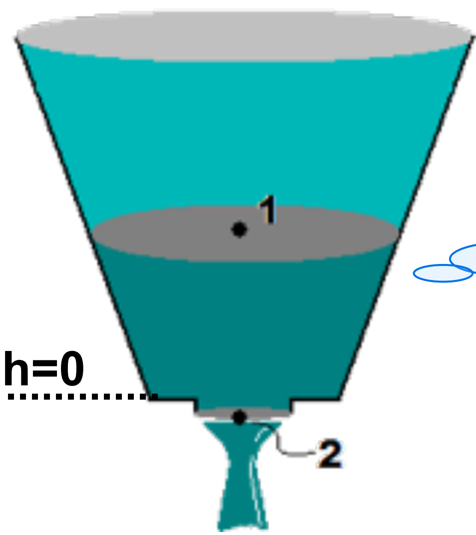
$$\frac{-Q_x^{out}}{A} = \frac{dh_{sist}}{dt}$$

Ecuación General

Es claro que para resolver esta ecuación diferencial, se requiere conocer de que forma varía el caudal de salida en función del tiempo o del nivel del tanque. *¿Cómo se puede obtener esta relación …..*?

Desarrollo del modelo (iii) ….

La expresión requerida es denominada ***relación auxiliar*** o ***ecuación constitutiva***, la cual se obtiene del conocimiento previo asociado al fenómeno particular que se desea modelar. Para este caso se empleará como ecuación auxiliar la ***Ecuación de Bernoulli***, esta expresión es una simplificación de la ***Ley de Conservación de la Energía*** ….

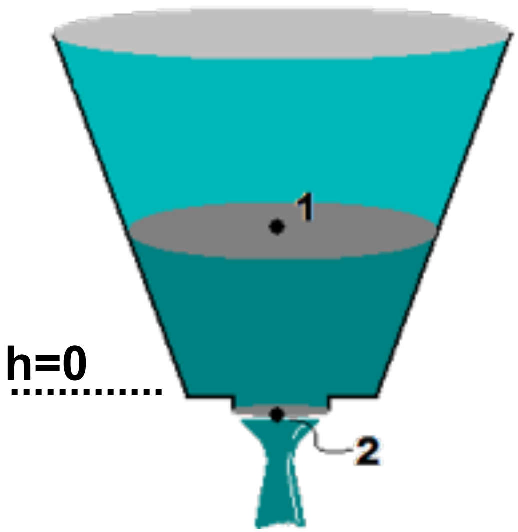


$$h_1 + \frac{v_1^2}{2\,g} + \frac{p_1}{\rho g} = h_2 + \frac{v_2^2}{2\,g} + \frac{p_2}{\rho g}$$

- Tanque está abierto a la atmósfera

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2\,g} + \frac{p_{atm}}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2\,g} + \frac{p_2}{\rho g}$$

Desarrollo del modelo (iv) ….



- Si el tanque se vacía de forma muy lenta

$$h_1 + \frac{p_{atm}}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2\,g} + \frac{p_2}{\rho g}$$

- Además se sabe que para el punto 2 la presión puede escribirse como:

$$p_2 = p_{atm}$$

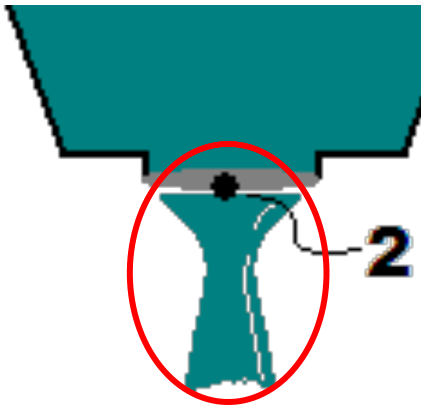
Esta expresión también puede ser considerada una Ecuación Constitutiva …?

- Y finalmente …..

$$v_2 = \sqrt{2\,gh_1}$$

$$\boxed{Q_x^{out} = a\,.\sqrt{2\,gh_{sist}}}$$

Desarrollo del modelo (v) ….

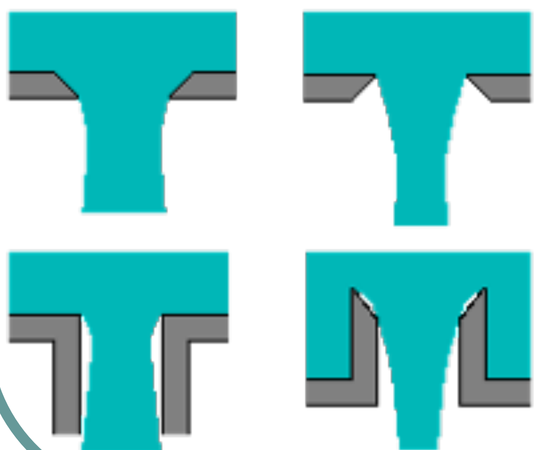


$$Q_x^{out} = a.\sqrt{2\,gh_{sist}}$$

• Esta expresión define el valor del caudal teórico a través de la parte inferior del tanque, sin embargo en la zona de descarga se presentan dos fenómenos particulares:

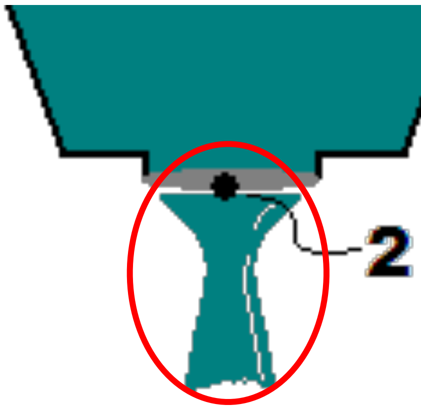
-El primero se refiere a la resistencia hidráulica generada por los bordes del agujero.

-El segundo es la reducción en la sección transversal del fluido denominada ***contracción***.



¿ Como se expresa entonces el valor real del caudal de descarga …?

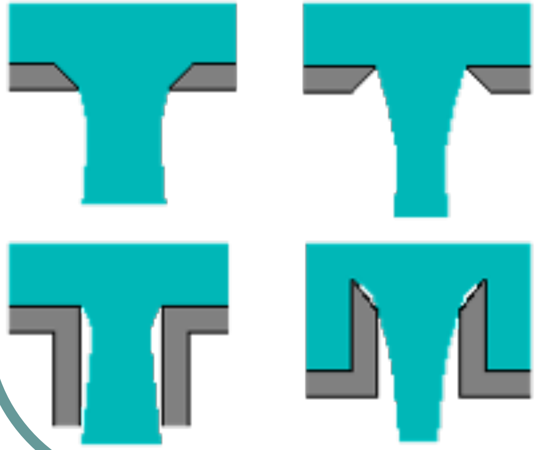
Desarrollo del modelo (vi) ….



• Estos dos aspectos son incluidos en un coeficiente experimental denominado ***coeficiente de descarga***, el cual puede ser escrito como el producto de dos coeficientes:

-Un coeficiente C_c que corrige el área de descarga.

-Un coeficiente C_v que corrige la velocidad de descarga.



$$\boxed{Q_x^{out} = C_c \cdot C_v \cdot a \cdot \sqrt{2\, g h_{sist}}}$$

Desarrollo del modelo (vii) ….

Tipo	***Coeficiente***		
	C	***C_c***	***C_v***
	0.61	0.62	0.98
	0.98	1.00	0.98
	0.80	1.00	0.80
	0.51	0.52	0.98

Desarrollo del modelo (viii) ….

Con la ***Ecuación General*** y la ***Ecuación Constitutiva***, obtenida a partir de la ecuación de Bernoulli ….. solo se necesita determinar unas ***Condiciones Iniciales*** para completar el planteamiento del modelo matemático.

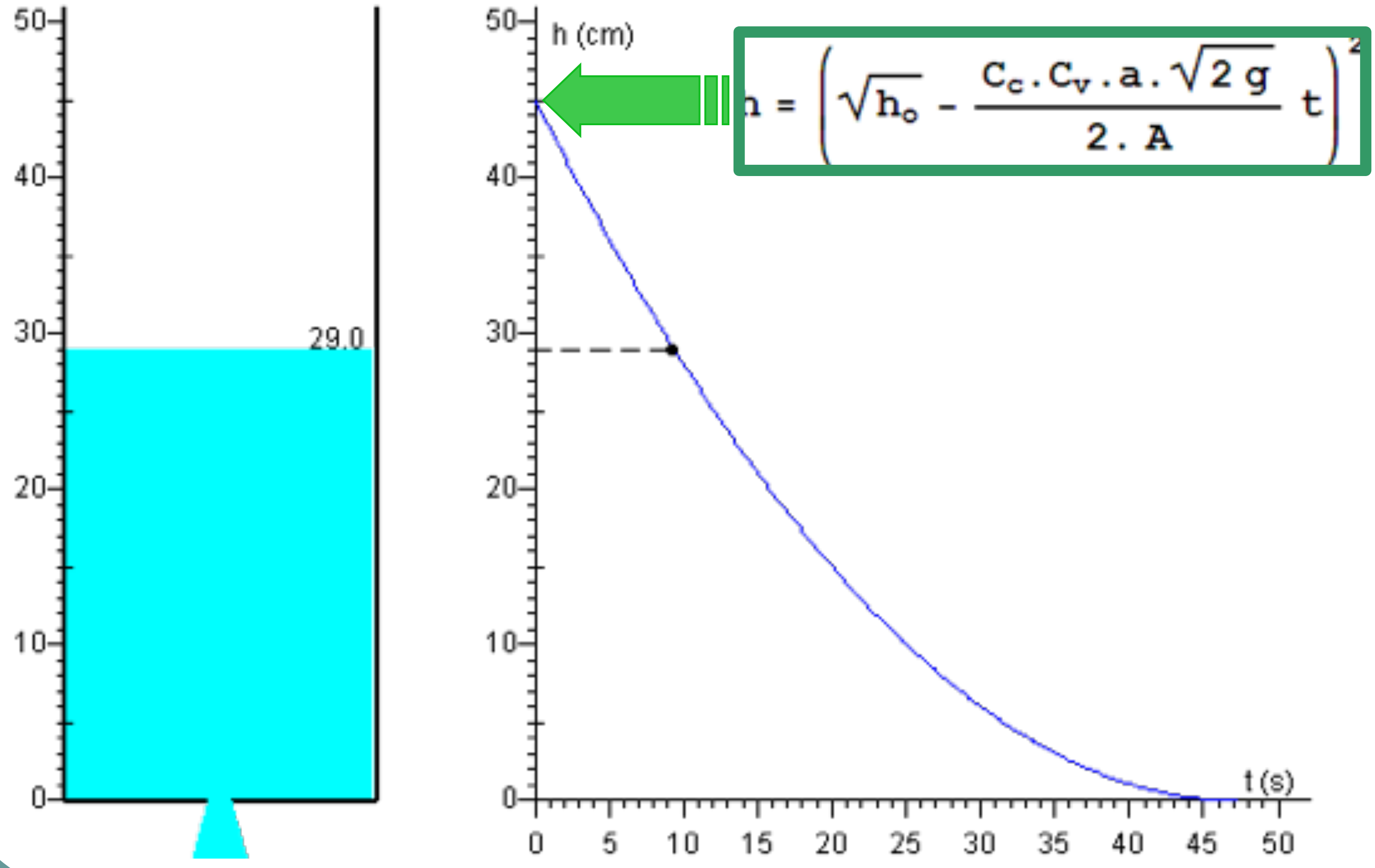
$$Q_x^{out} = C_c \,.\, C_v \,.\, a \,.\, \sqrt{2\, g h_{sist}}$$

$$\frac{-\boxed{Q_x^{out}}}{A} = \frac{d h_{sist}}{dt}$$

$$-\frac{C_c \,.\, C_v \,.\, a}{A} \,.\, \int_0^t dt = \int_{h_o}^{h} \frac{d h_{sist}}{\sqrt{2\, g h_{sist}}}$$

$$\boxed{h = \left(\sqrt{h_o} - \frac{C_c \,.\, C_v \,.\, a \,.\, \sqrt{2\, g}}{2 \,.\, A}\, t \right)^2}$$

Simulación ….



50
40
30
20
10
0
29.0
h (cm)
t (s)
0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50
$$h = \left(\sqrt{h_o} - \frac{C_c . C_v . a . \sqrt{2\,g}}{2 . A}\, t \right)^2$$

Refinamiento del Modelo (i) …

Obsérvese que este modelo es aplicable únicamente para el vaciado de recipientes con sección transversal constante. Si se decidiera hacer el modelo un poco más general, por ejemplo, para el caso de un tanque en el que el área de la sección transversal varíe de forma lineal con la altura del mismo …

$$A = A_o + \alpha . h_{sist}$$

¿Cuál sería la forma de un tanque que cumpla esta relación de áreas?

$$-Q_x^{out} = \frac{d\,A . h_{sist}}{dt}$$

$$Q_x^{out} = C_c . C_v . a . \sqrt{2\,gh_{sist}}$$

$$-\boxed{Q_x^{out}} = \frac{d\,(A_o . h_{sist} + \alpha . h_{sist}^2)}{dt}$$

Refinamiento del Modelo (ii) …

$$-\left(\sqrt{2\,g}\,.\,C_c\,.\,C_v\,.\,a\right)\,dt = \frac{d\left(A_o\,.\,h_{sist} + \alpha\,.\,h^2_{sist}\right)}{\sqrt{h_{sist}}}$$

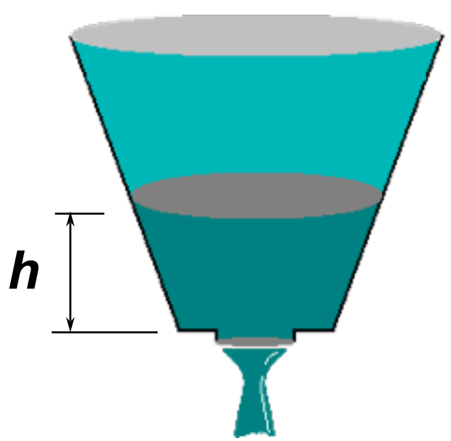
$$-\int_0^t \left(\sqrt{2\,g}\,.\,C_c\,.\,C_v\,.\,a\right)\,dt = \int_{h_o}^{h} \frac{\left(A_o + 2\,\alpha\,.\,h_{sist}\right)}{\sqrt{h_{sist}}}\,dh_{sist}$$

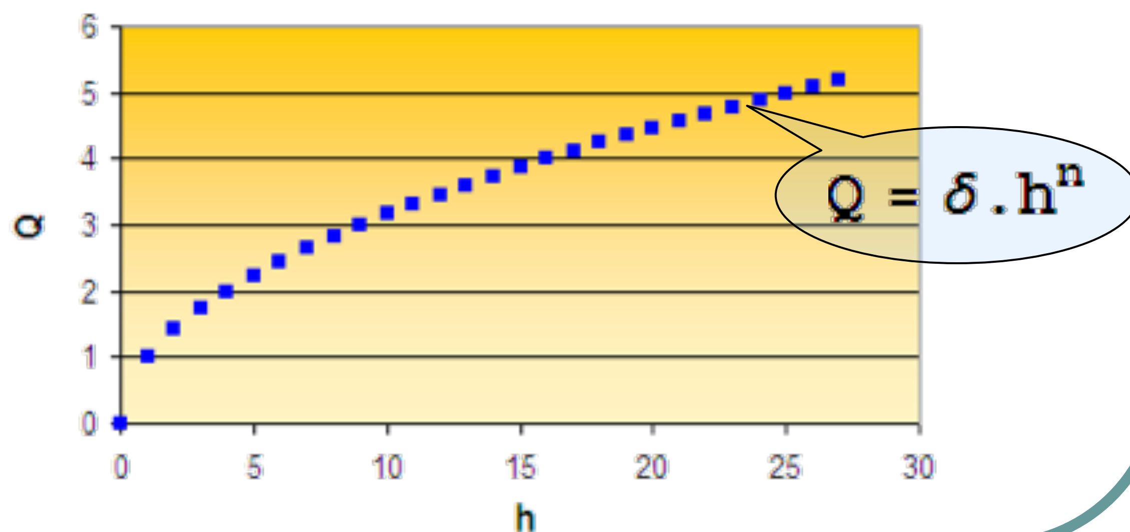
$$\boxed{t = \frac{2\,A_o\left(\sqrt{h_o} - \sqrt{h}\right) + \frac{4\,\alpha}{3}\left(\sqrt{h_o^3} - \sqrt{h^3}\right)}{\sqrt{2\,g}\,.\,C_c\,.\,C_v\,.\,a}}$$

*Si la variable independiente es **t**, ¿qué se hace …?*

Ejercicio (i) (Método alternativo)…

La ***ecuación constitutiva*** fue obtenida a partir de un ***modelo analítico*** conocido, sin embargo esta expresión puede ser obtenida a partir de ***observaciones experimentales***. Por ejemplo, haciendo la medición de descarga en un tanque, construyendo la gráfica que describe el comportamiento del caudal en función del nivel del reactivo y determinando el exponente ***n*** que mejor ajusta los datos medidos a una función en potencia.

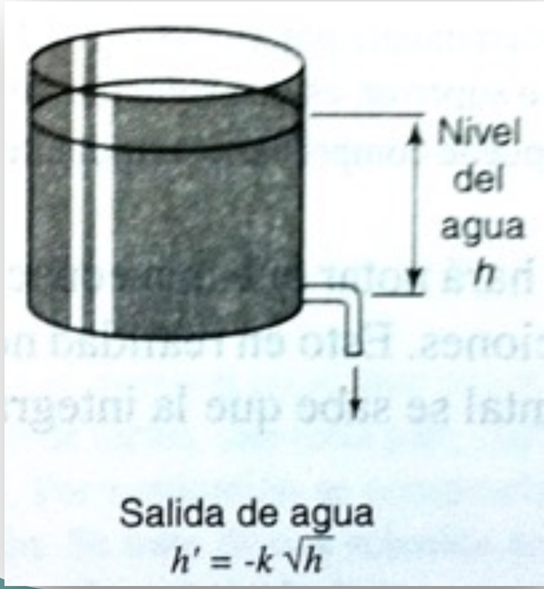




Refinamiento del Modelo (iii) …

Este sería un modelo más refinado (considerando velocidad del nivel superior)…

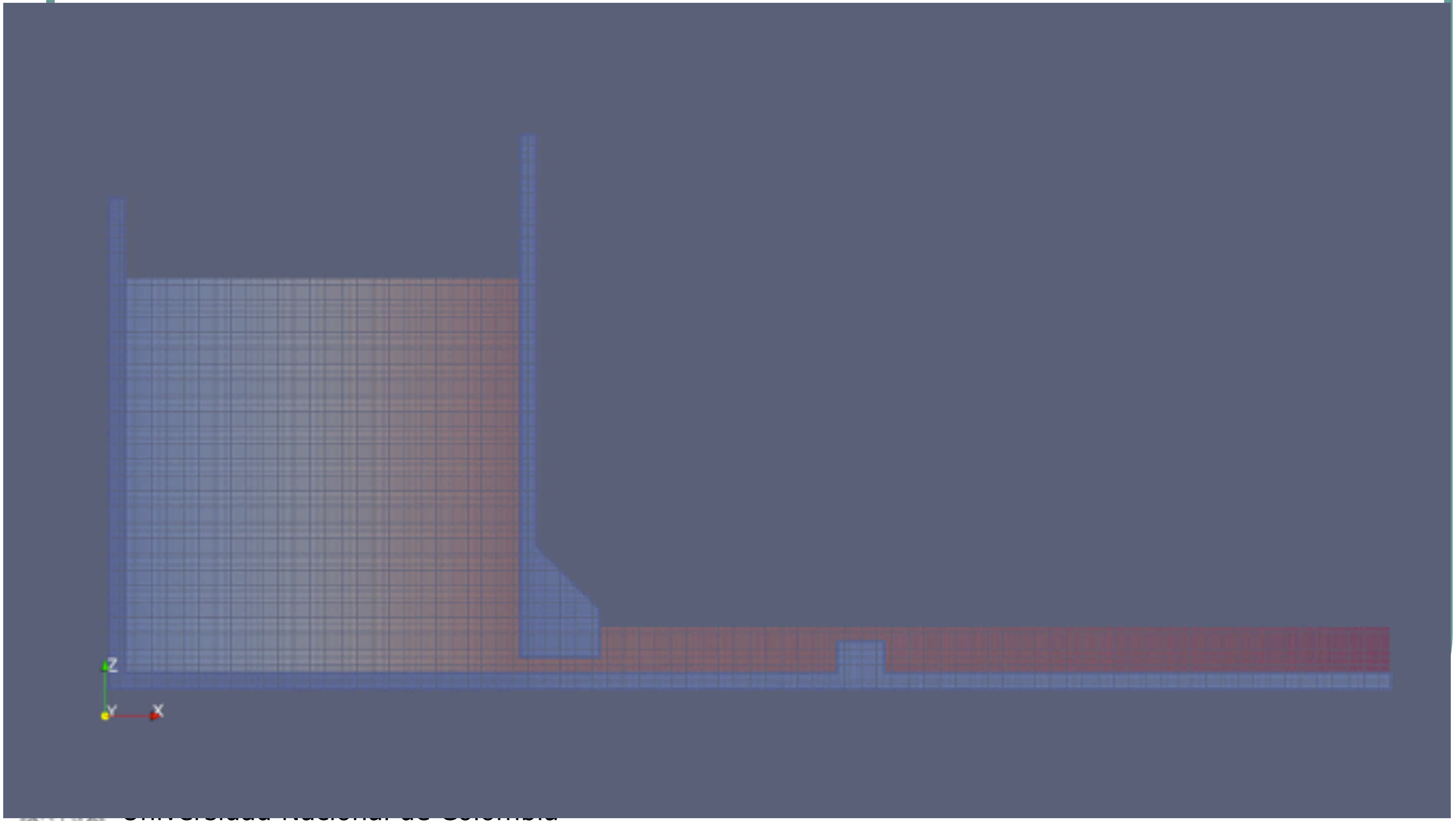
$$h\left(g+\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)^2\left[\left(\frac{A}{a}\right)^2-1\right]$$



$$t_d=\sqrt{\frac{2h_0}{g_m}}$$

$$g_m=\frac{g}{\left[(A/a)^2-1\right]}$$

Refinamiento del Modelo (iii) …



Ejercicio en clase* (ii) …

- Refine los modelos considerando la velocidad de la superficie libre. Use conservación de energía para sistemas transitorios (Bernoulli modificado). (Tip: Consulte bibliografía sobre modelos simples de vaciado de un recipiente)
- Use los modelos anteriores (básico-clase y refinado-suyo) para encontrar el tiempo de descarga de un tanque de sección constante. Use expresiones adimensionales.
- Use los modelos teóricos y compare contra los valores experimentales presentados en la Tabla 1 y Tabla 2 anexas (ver al final)
- Encuentre el exponente que mejor ajusta los datos experimentales de la Tabla 3 a una función en potencias. Considere regresión lineal**
  - (**Tip: convierta el problema de una función en potencia a una función lineal usando logaritmos naturales)

Tabla 1 - Resultados experimentales

	Tank 1	Tank 2	Tank 3	Tank 4	Tank 5
cross section	circular	circular	square	circular	circular
Height (in)	33.00	23.75	33.00	23.00	10.80
Inside Diameter (in)	11.60	8.62	10in. X 10in.	5.75	5.69
Orifice Diameter (in)	0.425	0.435	0.695	0.425	0.435
Orifice Length (in)	0.75	0.75	0.375	0.75	0.75
Area Ratio (At/Ao)	698.47	394.3 1	269.38	172.73	169
Draining Time (Sec.)	284.38	133.11	109.68	59.62	39.97

Tabla 1

Tabla 2 - Resultados experimentales

- En un experimento se utilizó un tanque con un diámetro interno de 29.21 cm y una altura total de 86.40 cm. El tanque se llenó hasta 81.30 cm y luego se drenó. El experimento de vaciado se hizo usando diferentes orificios de salida, con valores de: 0.533, 0.668, 0.945, y 1.087 cm, los cuales correspondieron a relaciones de Area (A_t/A_0) de: 3003, 1912, 955 y 722 respectivamente.

- Los tiempos de descarga para los tanques, de acuerdo al orden mencionado, fueron de: 1223, 767, 403, y 208 s.

Tabla 2

Tabla 3 - Resultados experimentales

t	h-h_f		t	h-h_f
(s)	(cm)		(s)	(cm)
0	15		246	5
21	14		282	4
42	13		301	3,5
64	12		321	3
85	11		343	2,5
108	10		369	2
134	9		395	1,5
159	8		427	1
186	7		469	0,5
215	6		510	0,2

Diametro Tanque 16.7 cm

Diámetro orificio 0.28 cm

Tabla 3