nueva evaluación de función para cada paso. Esto puede originar grandes ahorros de tiempo y reducir costos.

Como ejemplo, resolver en forma numérica $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ usando n pasos con el método de Runge-Kutta de cuarto orden requiere $4n$ evaluaciones de la función. El método multipasos de Adams-Bashforth requiere 16 evaluaciones de la función para el iniciador de cuarto orden de Runge-Kutta y $n - 4$ para los n pasos de Adams-Bashforth, lo que da un total de $n + 12$ evaluaciones de la función para este método. En general, el método multipasos de Adams-Bashforth requiere poco más de un cuarto del número de evaluaciones de función necesarias para el método RK4. Si se complica la evaluación de $f(x, y)$, el método multipasos será más eficaz.

Otro asunto relacionado con los métodos multipasos es cuántas veces se debe repetir en cada paso la fórmula de corrección de Adams-Moulton. Cada vez que se usa la corrección, se hace otra evaluación de la función y por tanto se incrementa la precisión a expensas de perder una ventaja del método multipasos. En la práctica, la corrección se calcula una vez y si se cambia el valor de y_{n+1} por una cantidad grande, se reinicia todo el problema con un tamaño de paso más pequeño. Esta es con frecuencia la base de los métodos de tamaño de paso variable, cuyo análisis está fuera del alcance de este libro.

EJERCICIOS 9.3

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-16.

1. Determine la solución analítica del problema con valores iniciales del problema 1. Compare los valores reales de $y(0.2)$, $y(0.4)$, $y(0.6)$ y $y(0.8)$ con las aproximaciones y_1, y_2, y_3 y y_4.

2. Escriba un programa de computadora para ejecutar el método de Adams-Bashforth-Moulton.

En los problemas 3 y 4 use el método Adams-Bashforth-Moulton para aproximar $y(0.8)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valores iniciales dado. Use $h = 0.2$ y el método RK4 para calcular y_1, y_2 y y_3.

3. $y' = 2x - 3y + 1, \quad y(0) = 1$

4. $y' = 4x - 2y, \quad y(0) = 2$

En los problemas 5 a 8, use el método de Adams-Bashforth-Moulton para aproximar $y(1.0)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valores iniciales dado. Primero use $h = 0.2$ y después use $h = 0.1$. Use el método RK4 para calcular y_1, y_2 y y_3.

5. $y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$

6. $y' = y + \cos x, \quad y(0) = 1$

7. $y' = (x - y)^2, \quad y(0) = 0$

8. $y' = xy + \sqrt{y}, \quad y(0) = 1$

9.4 ECUACIONES Y SISTEMAS DE ORDEN SUPERIOR

REPASO DE MATERIAL

- Sección 1.1 (forma normal de una ED de segundo orden)
- Sección 4.10 (ED de segundo orden escrita como un sistema de ED de primer orden)

INTRODUCCIÓN Hasta ahora, nos hemos concentrado en técnicas numéricas que se pueden usar para aproximar la solución de un problema con valores iniciales de primer orden $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Para aproximar la solución de un problema con valores iniciales de segundo orden, se debe expresar una ED de segundo orden como un sistema de dos ED de primer orden. Para hacer esto, se empieza por escribir la ED de segundo orden en forma normal al despejar y'' en términos de x, y y y'.

PVI DE SEGUNDO ORDEN Un problema con valores iniciales de segundo orden

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = u_0 \tag{1}$$

se puede expresar como un problema con valores iniciales para un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Si $y' = u$, la ecuación diferencial en (1) se convierte en el sistema

$$\begin{aligned} y' &= u \\ u' &= f(x, y, u). \end{aligned} \tag{2}$$

Puesto que $y'(x_0) = u(x_0)$, las condiciones iniciales correspondientes para (2) son $y(x_0) = y_0$, $u(x_0) = u_0$. El sistema (2) se puede resolver de forma numérica mediante la simple aplicación de un método numérico a cada ecuación diferencial de primer orden en el sistema. Por ejemplo, el **método de Euler** aplicado al sistema (2) sería

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hu_n \\ u_{n+1} &= u_n + hf(x_n, y_n, u_n), \end{aligned} \tag{3}$$

mientras que el **método de Runge-Kutta de cuarto orden** o **método RK4**, sería

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \\ u_{n+1} &= u_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned} \tag{4}$$

donde
$$\begin{aligned} m_1 &= u_n & k_1 &= f(x_n, y_n, u_n) \\ m_2 &= u_n + \tfrac{1}{2}hk_1 & k_2 &= f\left(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hm_1, u_n + \tfrac{1}{2}hk_1\right) \\ m_3 &= u_n + \tfrac{1}{2}hk_2 & k_3 &= f\left(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hm_2, u_n + \tfrac{1}{2}hk_2\right) \\ m_4 &= u_n + hk_3 & k_4 &= f(x_n + h, y_n + hm_3, u_n + hk_3). \end{aligned}$$

En general, se puede expresar cada ecuación diferencial de n-ésimo orden $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ como un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden usando las sustituciones $y = u_1$, $y' = u_2$, $y'' = u_3, \ldots, y^{(n-1)} = u_n$.

EJEMPLO 1 Método de Euler

Use el método de Euler para obtener el valor aproximado de $y(0.2)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valores iniciales

$$y'' + xy' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \tag{5}$$

SOLUCIÓN En términos de la sustitución $y' = u$, la ecuación es equivalente para el sistema

$$\begin{aligned} y' &= u \\ u' &= -xu - y. \end{aligned}$$

Por lo que de (3) se obtiene

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hu_n \\ u_{n+1} &= u_n + h[-x_n u_n - y_n]. \end{aligned}$$

Usando el tamaño de paso $h = 0.1$ y $y_0 = 1$, $u_0 = 2$, encontramos

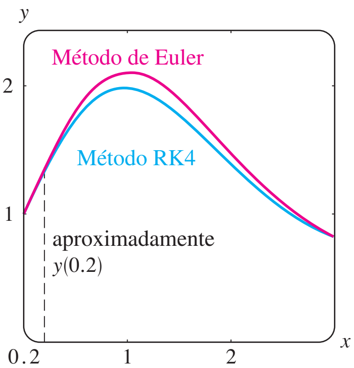
$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + (0.1)u_0 = 1 + (0.1)2 = 1.2 \\ u_1 &= u_0 + (0.1)[-x_0u_0 - y_0] = 2 + (0.1)[-(0)(2) - 1] = 1.9 \\ y_2 &= y_1 + (0.1)u_1 = 1.2 + (0.1)(1.9) = 1.39 \\ u_2 &= u_1 + (0.1)[-x_1u_1 - y_1] = 1.9 + (0.1)[-(0.1)(1.9) - 1.2] = 1.761. \end{aligned}$$

En otras palabras, $y(0.2) \approx 1.39$ y $y'(0.2) \approx 1.761$. ■

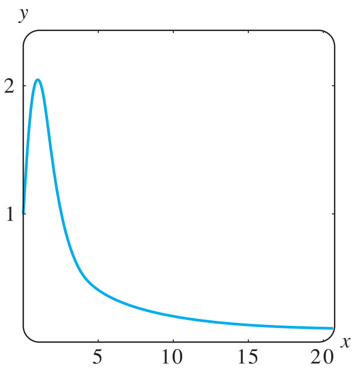
Con ayuda de la aplicación para graficar de un programa de solución numérica, en la figura 9.4.1(a) se compara la curva solución de (5) generada con el método de Euler ($h = 0.1$) en el intervalo [0, 3] con la curva solución generada con el método RK4 ($h = 0.1$). De la figura 9.4.1(b) parece que la solución $y(x)$ de (4) tiene la propiedad que $y(x) \to 0$ conforme $x \to \infty$.

Si se desea, se puede usar el método de la sección 6.2 para obtener dos soluciones en serie de potencias de la ecuación diferencial en (5). Pero a menos que este método revele que la ED tiene una solución elemental, aún se puede aproximar $y(0.2)$ con una suma parcial. Examinando nuevamente las soluciones en serie infinitas de la ecuación diferencial de Airy $y'' + xy = 0$, vistas en el ejemplo 5 de la sección 6.2, no muestran el comportamiento oscilatorio que las soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ presentan en las gráficas de la figura 6.2.2. Esas gráficas se obtuvieron con un programa de solución numérica usando el método RK4 con tamaño de paso de $h = 0.1$.

SISTEMAS REDUCIDOS A SISTEMAS DE PRIMER ORDEN Usando un procedimiento similar al que se acaba de describir para ecuaciones de segundo orden, se reduce un sistema de ecuaciones diferenciales de orden superior a un sistema de ecuaciones de primer orden, determinando primero la derivada de orden superior de cada variable dependiente y después haciendo las sustituciones apropiadas para las derivadas de orden menor.



a) Método de Euler (roja) y método RK4 (azul)



b) Método RK4

FIGURA 9.4.1 Curvas solución numérica generadas con diferentes métodos.

EJEMPLO 2 Un sistema reescrito como un sistema de primer orden

Escriba
$$x'' - x' + 5x + 2y'' = e^t$$
$$-2x + y'' + 2y = 3t^2$$
como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

SOLUCIÓN Escriba el sistema como
$$x'' + 2y'' = e^t - 5x + x'$$
$$y'' = 3t^2 + 2x - 2y$$
y después elimine y'' multiplicando la segunda ecuación por 2 y restando. Esto da
$$x'' = -9x + 4y + x' + e^t - 6t^2.$$
Puesto que la segunda ecuación del sistema ya expresa la derivada de y de orden superior en términos de las demás funciones, ahora se tiene la posibilidad de introducir nuevas variables. Si se hace $x' = u$ y $y' = v$, las expresiones para x'' y y'' respectivamente, se convierten en
$$u' = x'' = -9x + 4y + u + e^t - 6t^2$$
$$v' = y'' = 2x - 2y + 3t^2.$$
El sistema original se puede escribir en la forma
$$\begin{aligned} x' &= u \\ y' &= v \\ u' &= -9x + 4y + u + e^t - 6t^2 \\ v' &= 2x - 2y + 3t^2. \end{aligned}$$
■

No siempre es posible realizar las reducciones que se muestran en el ejemplo 2.

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE UN SISTEMA La solución de un sistema de la forma
$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= g_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

se puede aproximar con una versión del método de Euler, de Runge-Kutta o de Adams-Bashforth-Moulton adaptada al sistema. Por ejemplo, el método RK4 aplicado al sistema

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x, y) \\ y' &= g(t, x, y) \\ x(t_0) = x_0,& \qquad y(t_0) = y_0, \end{aligned} \tag{6}$$

se parece a:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \end{aligned} \tag{7}$$

donde

$$\begin{aligned} m_1 &= f(t_n, x_n, y_n) & k_1 &= g(t_n, x_n, y_n) \\ m_2 &= f\left(t_n + \tfrac{1}{2}h, x_n + \tfrac{1}{2}hm_1, y_n + \tfrac{1}{2}hk_1\right) & k_2 &= g\left(t_n + \tfrac{1}{2}h, x_n + \tfrac{1}{2}hm_1, y_n + \tfrac{1}{2}hk_1\right) \\ m_3 &= f\left(t_n + \tfrac{1}{2}h, x_n + \tfrac{1}{2}hm_2, y_n + \tfrac{1}{2}hk_2\right) & k_3 &= g\left(t_n + \tfrac{1}{2}h, x_n + \tfrac{1}{2}hm_2, y_n + \tfrac{1}{2}hk_2\right) \\ m_4 &= f(t_n + h, x_n + hm_3, y_n + hk_3) & k_4 &= g(t_n + h, x_n + hm_3, y_n + hk_3). \end{aligned} \tag{8}$$

EJEMPLO 3 Método RK4

Considere el problema con valores iniciales

$$\begin{aligned} x' &= 2x + 4y \\ y' &= -x + 6y \\ x(0) = -1,& \qquad y(0) = 6. \end{aligned}$$

Use el método RK4 para aproximar $x(0.6)$ y $y(0.6)$. Compare los resultados para $h = 0.2$ y $h = 0.1$.

TABLA 9.8 $h = 0.2$

t_n	x_n	y_n
0.00	−1.0000	6.0000
0.20	9.2453	19.0683
0.40	46.0327	55.1203
0.60	158.9430	150.8192

TABLA 9.9 $h = 0.1$

t_n	x_n	y_n
0.00	−1.0000	6.0000
0.10	2.3840	10.8883
0.20	9.3379	19.1332
0.30	22.5541	32.8539
0.40	46.5103	55.4420
0.50	88.5729	93.3006
0.60	160.7563	152.0025

SOLUCIÓN Se muestran los cálculos de x_1 y y_1 con tamaño de paso $h = 0.2$. Con las identificaciones $f(t, x, y) = 2x + 4y$, $g(t, x, y) = -x + 6y$, $t_0 = 0$, $x_0 = -1$ y $y_0 = 6$, se ve de (8) que

$$\begin{aligned} m_1 &= f(t_0, x_0, y_0) = f(0, -1, 6) = 2(-1) + 4(6) = 22 \\ k_1 &= g(t_0, x_0, y_0) = g(0, -1, 6) = -1(-1) + 6(6) = 37 \\ m_2 &= f\left(t_0 + \tfrac{1}{2}h, x_0 + \tfrac{1}{2}hm_1, y_0 + \tfrac{1}{2}hk_1\right) = f(0.1, 1.2, 9.7) = 41.2 \\ k_2 &= g\left(t_0 + \tfrac{1}{2}h, x_0 + \tfrac{1}{2}hm_1, y_0 + \tfrac{1}{2}hk_1\right) = g(0.1, 1.2, 9.7) = 57 \\ m_3 &= f\left(t_0 + \tfrac{1}{2}h, x_0 + \tfrac{1}{2}hm_2, y_0 + \tfrac{1}{2}hk_2\right) = f(0.1, 3.12, 11.7) = 53.04 \\ k_3 &= g\left(t_0 + \tfrac{1}{2}h, x_0 + \tfrac{1}{2}hm_2, y_0 + \tfrac{1}{2}hk_2\right) = g(0.1, 3.12, 11.7) = 67.08 \\ m_4 &= f(t_0 + h, x_0 + hm_3, y_0 + hk_3) = f(0.2, 9.608, 19.416) = 96.88 \\ k_4 &= g(t_0 + h, x_0 + hm_3, y_0 + hk_3) = g(0.2, 9.608, 19.416) = 106.888. \end{aligned}$$

Por tanto de (7) se obtiene

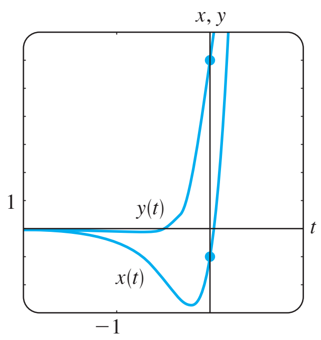


FIGURA 9.4.2 Curvas solución numérica para el PVI del ejemplo 3.

$$x_1 = x_0 + \frac{0.2}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$
$$= -1 + \frac{0.2}{6}(22 + 2(41.2) + 2(53.04) + 96.88) = 9.2453$$
$$y_1 = y_0 + \frac{0.2}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$= 6 + \frac{0.2}{6}(37 + 2(57) + 2(67.08) + 106.888) = 19.0683,$$

donde, como es usual, los valores calculados de x_1 y y_1 están redondeados a cuatro lugares decimales. Estos números nos dan la aproximación $x_1 \approx x(0.2)$ y $y_1 \approx y(0.2)$. Los valores subsecuentes, obtenidos con la ayuda de una computadora, se resumen en las tablas 9.8 y 9.9. ■

Se debe comprobar que la solución del problema con valores iniciales del ejemplo 3 está dada por $x(t) = (26t - 1)e^{4t}$, $y(t) = (13t + 6)e^{4t}$. De estas ecuaciones vemos que los valores reales $x(0.6) = 160.9384$ y $y(0.6) = 152.1198$ se comparan favorablemente con las entradas del último renglón de la tabla 9.9. La gráfica de la solución en una vecindad de $t = 0$ que se muestra en la figura 9.4.2; la gráfica se obtuvo de un programa de solución numérico usando el método RK4 con $h = 0.1$.

En conclusión, establecemos el método de Euler para el sistema general (6):

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n, y_n)$$
$$y_{n+1} = y_n + hg(t_n, x_n, y_n).$$

EJERCICIOS 9.4

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-16.

1. Use el método de Euler para aproximar $y(0.2)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valores iniciales

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 1.$$

Use $h = 0.1$. Encuentre la solución analítica del problema y compare el valor real de $y(0.2)$ con y_2.

2. Use el método de Euler para aproximar $y(1.2)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valores iniciales

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y(1) = 4, \quad y'(1) = 9,$$

donde $x > 0$. Use $h = 0.1$. Encuentre la solución analítica del problema y compare el valor real de $y(1.2)$ con y_2.

En los problemas 3 y 4 repita el problema indicado con el método RK4. Primero utilice $h = 0.2$ y después $h = 0.1$.

3. Problema 1

4. Problema 2

5. Use el método RK4 para aproximar $y(0.2)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valores iniciales.

$$y'' - 2y' + 2y = e^t \cos t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Primero use $h = 0.2$ y después $h = 0.1$.

6. Cuando $E = 100$ V, $R = 10\ \Omega$ y $L = 1$ h, el sistema de ecuaciones diferenciales para las corrientes $i_1(t)$ e $i_3(t)$ en la red eléctrica dada en la figura 9.4.3 es

$$\frac{di_1}{dt} = -20i_1 + 10i_3 + 100$$
$$\frac{di_3}{dt} = 10i_1 - 20i_3,$$

donde $i_1(0) = 0$ e $i_3(0) = 0$. Use el método RK4 para aproximar $i_1(t)$ e $i_3(t)$ en $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ y 0.5. Use $h = 0.1$. Mediante un programa de solución numérica obtenga la gráfica de la solución en el intervalo $0 \le t \le 5$. Use las gráficas para predecir el comportamiento de $i_1(t)$ e $i_3(t)$ conforme $t \to \infty$.

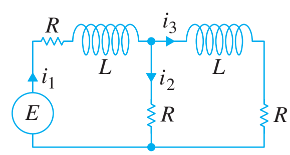


FIGURA 9.4.3 Red del problema 6.