10.1 SISTEMAS AUTÓNOMOS

REPASO DE MATERIAL

- Es muy recomendable que lea de nuevo la sección 2.1.

INTRODUCCIÓN En la sección 2.1, se presentaron los conceptos de las ED autónomas de primer orden, los puntos críticos de una ED autónoma y la estabilidad de un punto crítico. Esta primera descripción de la estabilidad se mantuvo a propósito en un nivel bastante intuitivo; ahora es tiempo de presentar la definición precisa de este concepto y para hacerlo, necesitamos examinar *sistemas* autónomos de ED de primer orden. En esta sección definiremos los puntos críticos de sistemas autónomos de dos ED de primer orden; los sistemas autónomos pueden ser lineales o no lineales.

SISTEMAS AUTÓNOMOS Un sistema de ecuaciones lineales de primer orden se dice que es **autónomo** cuando se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\\
\frac{dx_2}{dt} &= g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\\
&\vdots\\
\frac{dx_n}{dt} &= g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n).
\end{aligned} \tag{1}$$

Observe que la variable independiente t no se presenta en forma explícita en el miembro de la derecha de cada ecuación diferencial. Compare el sistema (1) con el sistema general de ecuaciones (2) de la sección 8.1.

EJEMPLO 1 Un sistema no autónomo

El sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - 3x_2 + \overset{\text{dependencia de } t}{t^2}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \underset{\text{dependencia de } t}{t}x_1 \operatorname{sen} x_2$$

es un sistema *no* autónomo debido a la presencia de t en los miembros a la derecha de ambas ED. ■

NOTA Cuando $n = 1$ en el sistema (1), una sola ecuación diferencial de primer orden toma la forma $dx/dt = g(x)$. Esta última ecuación es equivalente a (1) de la sección 2.1, donde los símbolos x y t juegan los papeles de y y x, respectivamente. Se pueden formar soluciones explícitas, ya que la ecuación diferencial $dx/dt = g(x)$ es separable, lo que aprovecharemos para presentar ejemplos de los conceptos en este capítulo.

ECUACIÓN DIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN COMO UN SISTEMA Cualquier ecuación diferencial de segundo orden, $x'' = g(x, x')$, se puede escribir en forma de un sistema autónomo. Como se hizo en la sección 4.10, si hacemos $y = x'$, entonces $x'' = g(x, x')$ se transforma en $y' = g(x, y)$. Así, la ecuación diferencial de segundo orden se transforma en el sistema de dos ecuaciones de primer orden

$$\begin{aligned}
x' &= y\\
y' &= g(x, y).
\end{aligned}$$

EJEMPLO 2 La ED del péndulo como un sistema autónomo

En la ecuación (6) de la sección 5.3, demostramos que el ángulo de desplazamiento θ de un péndulo satisface la ecuación diferencial no lineal de segundo orden

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0.$$

Si hacemos $x = \theta$ y $y = \theta'$, esta ecuación diferencial de segundo orden se puede expresar en forma del sistema autónomo

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\frac{g}{l}\operatorname{sen} x. \end{aligned}$$ ■

NOTACIÓN Si $\mathbf{X}(t)$ y $\mathbf{g}(\mathbf{X})$ denotan respectivamente los vectores columna

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{g}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix},$$

entonces el sistema autónomo de las ecuaciones (1) se puede escribir de manera compacta en **forma de vector columna** $\mathbf{X}' = \mathbf{g}(\mathbf{X})$. El sistema lineal homogéneo $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ que estudiamos en la sección 8.2 es un importante caso especial.

En este capítulo también es conveniente escribir el sistema (1) usando vectores renglón. Si hacemos que $\mathbf{X}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ y

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) = (g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)),$$

entonces el sistema autónomo (1) también se podría expresar en la **forma de vector renglón** $\mathbf{X}' = \mathbf{g}(\mathbf{X})$. *Del contexto, debe ser claro si se está usando la forma de vector columna o renglón; por tanto no distinguiremos entre* $\mathbf{X}$ *y* $\mathbf{X}^T$*, la traspuesta de* $\mathbf{X}$. En particular, cuando $n = 2$, es conveniente usar la forma de vector renglón y escribir una condición inicial en la forma $\mathbf{X}(0) = (x_0, y_0)$.

Cuando la variable t se interpreta como tiempo, llamaremos al sistema (1) de ecuaciones diferenciales como **sistema dinámico** y a una solución $\mathbf{X}(t)$ como el **estado del sistema** o la **respuesta del sistema** en el tiempo t. Con esta terminología, un sistema dinámico es autónomo cuando la razón $\mathbf{X}'(t)$ con la que cambia el sistema sólo depende del estado actual $\mathbf{X}(t)$ del sistema. El sistema lineal $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}(t)$ que estudiamos en el capítulo 8 es entonces autónomo cuando $\mathbf{F}(t)$ es constante. En el caso en que $n = 2$ o 3 podemos llamar una solución como **camino** o **trayectoria**, porque se pueden considerar $x = x_1(t)$, $y = x_2(t)$ y $z = x_3(t)$ como las ecuaciones paramétricas de una curva.

INTERPRETACIÓN COMO CAMPO VECTORIAL Cuando $n = 2$, el sistema (1) se llama **sistema autónomo plano**, y se escribe como

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y). \end{aligned} \tag{2}$$

El vector $\mathbf{V}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ define un **campo vectorial** en una región del plano y una solución del sistema puede interpretarse como la trayectoria resultante de una partícula que se mueve a través de la región. Para ser más específicos, sea que $\mathbf{V}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ denote la velocidad de una corriente en la posición (x, y) y supongamos que una pequeña partícula (tal como un corcho) se suelta en la corriente en la posición (x_0, y_0). Si $\mathbf{X}(t) = (x(t), y(t))$ denota la posición de la partícula en el tiempo t, entonces $\mathbf{X}'(t) = (x'(t), y'(t))$ es el vector velocidad $\mathbf{V}$. Cuando no hay fuerzas externas y se desprecian las fuerzas de fricción, la velocidad de la partícula al tiempo t es igual a la velocidad de la corriente en la posición $\mathbf{X}(t)$:

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{V}(x(t), y(t)) \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x(t), y(t)) \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Así la trayectoria de la partícula es una solución del sistema, que satisface la condición inicial $\mathbf{X}(0) = (x_0, y_0)$. Frecuentemente nos referiremos a esta simple interpretación de un sistema autónomo plano, para ilustrar conceptos nuevos.

EJEMPLO 3 Sistema autónomo plano de un campo vectorial

Un campo vectorial para el estado estable del flujo de un fluido en torno a un cilindro de radio 1 está dado por

$$\mathbf{V}(x, y) = V_0\left(1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}\right),$$

donde V_0 es la rapidez del fluido lejos del cilindro. Si se coloca un pequeño corcho en $(-3, 1)$, la trayectoria del corcho $\mathbf{X}(t) = (x(t), y(t))$ satisface al sistema autónomo plano

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= V_0\left(1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right) \\ \frac{dy}{dt} &= V_0\frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

sujeto a la condición inicial $\mathbf{X}(0) = (-3, 1)$. Véanse la figura 10.1.1 y el problema 46 de los ejercicios 2.4. ■

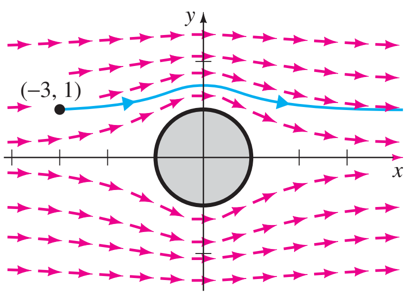


FIGURA 10.1.1 Campo vectorial del flujo de un fluido del ejemplo 3.

TIPOS DE SOLUCIONES Si $P(x, y)$, $Q(x, y)$ y las primeras derivadas parciales $\partial P/\partial x$, $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ y $\partial Q/\partial y$ son continuas en una región R del plano, entonces una solución del sistema autónomo plano (2) que satisface $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ es única y es de uno de los tres tipos básicos:

i) Una **solución constante** $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$ (o $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0$ para todo t). A una solución constante se le llama punto **crítico** o **punto estacionario**. Cuando la partícula se coloca en un punto crítico $\mathbf{X}_0$, (esto es, $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$), permanece ahí indefinidamente. Por esta razón, a una solución constante también se le llama **solución de equilibrio**. Observe que como $\mathbf{X}'(t) = \mathbf{0}$, un punto crítico es una solución del sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} P(x, y) &= 0 \\ Q(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

ii) Una solución $x = x(t)$, $y = y(t)$ que define un **arco**, es decir, una curva plana que *no* se cruza a sí misma. Por tanto la curva de la figura 10.1.2(a) puede ser una solución de un sistema autónomo plano, mientras que la de la figura 10.1.2(b) puede no ser una solución. Habría *dos soluciones* que iniciarían en el punto de intersección **P**.

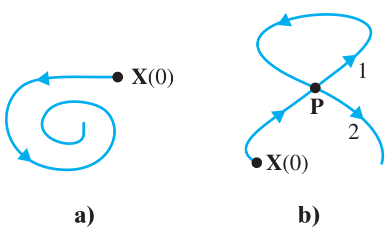


FIGURA 10.1.2 La curva en a) se llama arco.

iii) Una **solución periódica** $x = x(t)$, $y = y(t)$. A una solución se le llama **ciclo**. Si p es el periodo de la solución, entonces $\mathbf{X}(t + p) = \mathbf{X}(t)$ y una partícula colocada sobre la curva en $\mathbf{X}_0$ circulará la curva y regresará a $\mathbf{X}_0$ en p unidades de tiempo. Vea la figura 10.1.3.

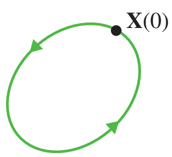


FIGURA 10.1.3 Solución periódica o ciclo.

EJEMPLO 4 Encontrando puntos críticos

Encuentre todos los puntos críticos de cada uno de los siguientes sistemas autónomos planos:

a) $x' = -x + y$, $y' = x - y$ **b)** $x' = x^2 + y^2 - 6$, $y' = x^2 - y$ **c)** $x' = 0.01x(100 - x - y)$, $y' = 0.05y(60 - y - 0.2x)$

SOLUCIÓN Encontramos los puntos críticos igualando a cero los miembros de la derecha de las ecuaciones diferenciales.

a) La solución del sistema

$$-x + y = 0$$
$$x - y = 0$$

consiste en todos los puntos en la recta $y = x$. Por tanto, hay una cantidad infinita de puntos críticos.

b) Para resolver el sistema

$$x^2 + y^2 - 6 = 0$$
$$x^2 - y = 0$$

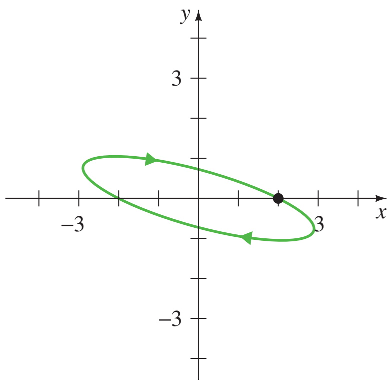
sustituimos la segunda ecuación, $x^2 = y$ en la primera ecuación para obtener $y^2 + y - 6 = (y + 3)(y - 2) = 0$. Si $y = -3$, entonces $x^2 = -3$, por lo que no hay soluciones reales. Si $y = 2$, entonces $x = \pm\sqrt{2}$, así los puntos críticos son $(\sqrt{2}, 2)$ y $(-\sqrt{2}, 2)$.

c) Para la determinación de los puntos críticos en este inciso c) se necesita examinar con cuidado los casos. La ecuación $0.01x(100 - x - y) = 0$ implica que $x = 0$ o que $x + y = 100$.

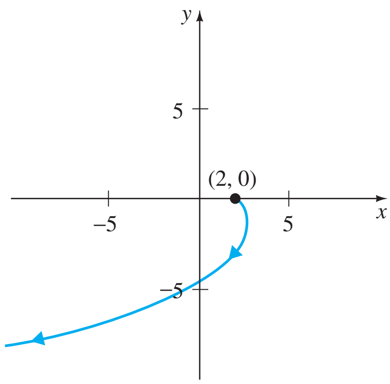
Si $x = 0$, entonces al sustituir en $0.05y(60 - y - 0.2x) = 0$, se tiene que $y(60 - y) = 0$. Por lo que $y = 0$ o 60, así (0, 0) y (0, 60) son puntos críticos.

Si $x + y = 100$, entonces $0 = y(60 - y - 0.2(100 - y)) = y(40 - 0.8y)$. Por lo que $y = 0$ o 50, así (100, 0) y (50, 50) son puntos críticos. ■

Cuando el sistema autónomo plano es lineal empleamos los métodos del capítulo 8 para investigar las soluciones.



a) Solución periódica.



b) Solución no periódica.

FIGURA 10.1.4 Curvas solución para el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Descubriendo soluciones periódicas

Determine si el sistema lineal dado tiene una solución periódica:

a) $x' = 2x + 8y$, $y' = -x - 2y$ **b)** $x' = x + 2y$, $y' = -\frac{1}{2}x + y$

En cada caso dibuje la gráfica de la solución que satisface $\mathbf{X}(0) = (2, 0)$.

SOLUCIÓN **a)** En el ejemplo 6 de la sección 8.2 utilizamos el método del eigenvalor-eigenvector para demostrar que

$$x = c_1(2\cos 2t - 2\,\text{sen}\,2t) + c_2(2\cos 2t + 2\,\text{sen}\,2t)$$
$$y = -c_1\cos 2t - c_2\,\text{sen}\,2t.$$

Así, toda solución es periódica, con periodo $p = \pi$. La solución que satisface $\mathbf{X}(0) = (2, 0)$ es $x = 2\cos 2t + 2\,\text{sen}\,2t$, $y = -\text{sen}\,2t$. Esta solución genera la elipse que se muestra en la figura 10.1.4(a).

b) Utilizando el método del eigenvalor-eigenvector, podemos demostrar que

$$x = 2c_1e^t \cos t + 2c_2e^t \operatorname{sen} t, \quad y = -c_1e^t \operatorname{sen} t + c_2e^t \cos t.$$

Debido a la presencia de e^t en la solución general, no hay soluciones periódicas (es decir, ciclos). La solución que satisface $\mathbf{X}(0) = (2, 0)$ es $x = 2e^t \cos t, y = -e^t \operatorname{sen} t$, y en la figura 10.1.4(b) se muestra la curva resultante. ■

CAMBIANDO A COORDENADAS POLARES Excepto en el caso en que hay soluciones constantes, por lo general no es posible llegar a ecuaciones explícitas de las soluciones de un sistema autónomo *no lineal*. Sin embargo, se pueden resolver algunos sistemas no lineales al cambiarlos a coordenadas polares. De las fórmulas $r^2 = x^2 + y^2$ y $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ se obtienen

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right), \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r^2}\left(-y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}\right). \tag{3}$$

En ocasiones se pueden usar las ecuaciones (3) para convertir un sistema autónomo plano en coordenadas rectangulares en un sistema más sencillo en coordenadas polares.

EJEMPLO 6 Cambiando a coordenadas polares

Determine la solución del sistema autónomo plano no lineal

$$x' = -y - x\sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y' = x - y\sqrt{x^2 + y^2}$$

que satisfaga la condición inicial $\mathbf{X}(0) = (3, 3)$.

SOLUCIÓN Sustituyendo dx/dt y dy/dt en las ecuaciones de dr/dt y $d\theta/dt$ en el sistema (3), se obtienen

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}[x(-y - xr) + y(x - yr)] = -r^2$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r^2}[-y(-y - xr) + x(x - yr)] = 1.$$

Puesto que (3, 3) es $(3\sqrt{2}, \pi/4)$ en coordenadas polares, la condición inicial $\mathbf{X}(0) = (3, 3)$ se convierte en $r(0) = 3\sqrt{2}$ y $\theta(0) = \pi/4$. Separando las variables, vemos que la solución del sistema es

$$r = \frac{1}{t + c_1}, \qquad \theta = t + c_2$$

para $r \neq 0$. (¡Compruébelo!) Entonces aplicando la condición inicial se obtiene

$$r = \frac{1}{t + \sqrt{2}/6}, \qquad \theta = t + \frac{\pi}{4}.$$

En la figura 10.1.5 se presenta la espiral $r = \dfrac{1}{\theta + \sqrt{2}/6 - \pi/4}$. ■

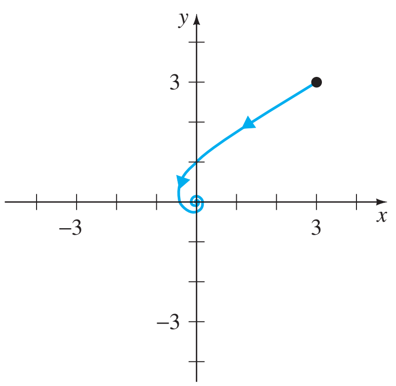


FIGURA 10.1.5 Curva solución del ejemplo 6.

EJEMPLO 7 Soluciones en coordenadas polares

Cuando se expresa en coordenadas polares, cierto sistema autónomo plano toma la forma

$$\frac{dr}{dt} = 0.5(3 - r)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1.$$

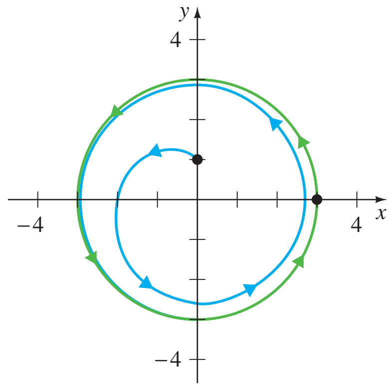


FIGURA 10.1.6 Curvas solución del ejemplo 7.

Determine y trace las gráficas de las soluciones que satisfacen que $\mathbf{X}(0) = (0, 1)$ y $\mathbf{X}(0) = (3, 0)$, en coordenadas rectangulares.

SOLUCIÓN Aplicando separación de variables a $dr/dt = 0.5(3 - r)$ e integrando $d\theta/dt$ se obtiene la solución $r = 3 + c_1 e^{-0.5t}$, $\theta = t + c_2$.

Si $\mathbf{X}(0) = (0, 1)$, entonces $r(0) = 1$ y $\theta(0) = \pi/2$. Por lo que $c_1 = -2$ y $c_2 = \pi/2$. La curva solución es la espiral $r = 3 - 2e^{-0.5(\theta - \pi/2)}$. Observe que conforme $t \to \infty$, θ aumenta sin límite y r tiende a 3.

Si $\mathbf{X}(0) = (3, 0)$, entonces $r(0) = 3$ y $\theta(0) = 0$. Por lo que $c_1 = c_2 = 0$, así $r = 3$ y $\theta = t$. Como $x = r\cos\theta = 3\cos t$ y $y = r \operatorname{sen}\theta = 3 \operatorname{sen} t$, la solución es periódica. Esta solución genera una circunferencia de radio 3 en torno a (0, 0). En la figura 10.1.6 se presentan ambas soluciones. ■

EJERCICIOS 10.1

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-17.

En los problemas 1 a 6 dada la ecuación diferencial no lineal de segundo orden escríbala como un sistema autónomo plano. Encuentre todos los puntos críticos del sistema resultante.

1. $x'' + 9 \operatorname{sen} x = 0$

2. $x'' + (x')^2 + 2x = 0$

3. $x'' + x'(1 - x^3) - x^2 = 0$

4. $x'' + 4\dfrac{x}{1 + x^2} + 2x' = 0$

5. $x'' + x = \epsilon x^3$ para $\epsilon > 0$

6. $x'' + x - \epsilon x|x| = 0$ para $\epsilon > 0$

En los problemas 7 a 16 encuentre todos los puntos críticos del sistema autónomo plano dado.

7. $x' = x + xy$
$y' = -y - xy$

8. $x' = y^2 - x$
$y' = x^2 - y$

9. $x' = 3x^2 - 4y$
$y' = x - y$

10. $x' = x^3 - y$
$y' = x - y^3$

11. $x' = x\left(10 - x - \frac{1}{2}y\right)$
$y' = y(16 - y - x)$

12. $x' = -2x + y + 10$
$y' = 2x - y - 15\dfrac{y}{y + 5}$

13. $x' = x^2 e^y$
$y' = y(e^x - 1)$

14. $x' = \operatorname{sen} y$
$y' = e^{x-y} - 1$

15. $x' = x(1 - x^2 - 3y^2)$
$y' = y(3 - x^2 - 3y^2)$

16. $x' = -x(4 - y^2)$
$y' = 4y(1 - x^2)$

En los problemas 17 a 22 se tomaron los sistemas lineales dados de los ejercicios 8.2.

a) Determine la solución general y si hay soluciones periódicas.

b) Encuentre la solución que satisfaga la condición inicial dada.

c) Con ayuda de una calculadora graficadora o de un SAC, trace la solución del inciso b) e indique la dirección en la que se recorre la curva.

17. $x' = x + 2y$
$y' = 4x + 3y, \quad \mathbf{X}(0) = (-2, 2)$
(Problema 1, Ejercicios 8.2)

18. $x' = -6x + 2y$
$y' = -3x + y, \quad \mathbf{X}(0) = (3, 4)$
(Problema 6, Ejercicios 8.2)

19. $x' = 4x - 5y$
$y' = 5x - 4y, \quad \mathbf{X}(0) = (4, 5)$
(Problema 37, Ejercicios 8.2)

20. $x' = x + y$
$y' = -2x - y, \quad \mathbf{X}(0) = (-2, 2)$
(Problema 34, Ejercicios 8.2)

21. $x' = 5x + y$
$y' = -2x + 3y, \quad \mathbf{X}(0) = (-1, 2)$
(Problema 35, Ejercicios 8.2)

22. $x' = x - 8y$
$y' = x - 3y, \quad \mathbf{X}(0) = (2, 1)$
(Problema 38, Ejercicios 8.2)

En los problemas 23 a 26, resuelva el sistema autónomo plano no lineal dado, cambiado a coordenadas polares. Describa el comportamiento geométrico de la solución que satisfaga las condiciones iniciales dadas.

23. $x' = -y - x(x^2 + y^2)^2$
$y' = x - y(x^2 + y^2)^2, \quad \mathbf{X}(0) = (4, 0)$

24. $x' = y + x(x^2 + y^2)$
$y' = -x + y(x^2 + y^2), \quad \mathbf{X}(0) = (4, 0)$