SERIES RADIACTIVAS En el análisis del decaimiento radiactivo en las secciones 1.3 y 3.1 se supuso que la razón de decaimiento era proporcional a la cantidad $A(t)$ de núcleos de la sustancia presentes en el tiempo t. Cuando una sustancia se desintegra por radiactividad, usualmente no transmuta en un solo paso a una sustancia estable, sino que la primera sustancia se transforma en otra sustancia radiactiva, que a su vez forma una tercera sustancia, etc. Este proceso, que se conoce como **serie de decaimiento radiactivo** continúa hasta que llega a un elemento estable. Por ejemplo, la serie de decaimiento del uranio es U-238 → Th-234 → · · · → Pb-206, donde Pb-206 es un isótopo estable del plomo. La vida media de los distintos elementos de una serie radiactiva pueden variar de miles de millones de años (4.5×10^9 años para U-238) a una fracción de segundo. Suponga que una serie radiactiva se describe en forma esquemática por $X \xrightarrow{-\lambda_1} Y \xrightarrow{-\lambda_2} Z$, donde $k_1 = -\lambda_1 < 0$ y $k_2 = -\lambda_2 < 0$ son las constantes de desintegración para las sustancias X y Y, respectivamente, y Z es un elemento estable. Suponga, también, que $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ denotan las cantidades de sustancias X, Y y Z, respectivamente, que quedan al tiempo t. La desintegración del elemento X se describe por

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_1 x,$$

mientras que la razón a la que se desintegra el segundo elemento Y es la razón neta

$$\frac{dy}{dt} = \lambda_1 x - \lambda_2 y,$$

porque Y está *ganando* átomos de la desintegración de X y al mismo tiempo *perdiendo* átomos como resultado de su propia desintegración. Como Z es un elemento estable, simplemente está ganando átomos de la desintegración del elemento Y:

$$\frac{dz}{dt} = \lambda_2 y.$$

En otras palabras, un modelo de la serie de decaimiento radiactivo para los tres elementos es el sistema lineal de tres ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\lambda_1 x \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda_1 x - \lambda_2 y \\ \frac{dz}{dt} &= \lambda_2 y. \end{aligned} \tag{2}$$

MEZCLAS Considere los dos tanques que se ilustran en la figura 3.3.1. Suponga que el tanque A contiene 50 galones de agua en los que hay disueltas 25 libras de sal. Suponga que el tanque B contiene 50 galones de agua pura. A los tanques entra y sale líquido como se indica en la figura; se supone que tanto la mezcla intercambiada entre los dos tanques como el líquido bombeado hacia fuera del tanque B están bien mezclados. Se desea construir un modelo matemático que describa la cantidad de libras $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de sal en los tanques A y B, respectivamente, en el tiempo t.

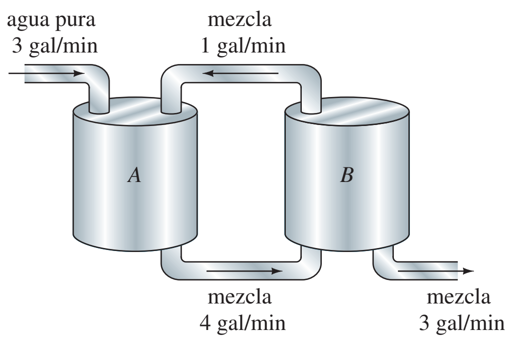

FIGURA 3.3.1 Tanques mezclados conectados.

Con un análisis similar al de la página 23 en la sección 1.3 y del ejemplo 5 de la sección 3.1 vemos que la razón de cambio neta de $x_1(t)$ para el tanque A es

$$\frac{dx_1}{dt} = \overbrace{(3 \text{ gal/min}) \cdot (0 \text{ lb/gal}) + (1 \text{ gal/min}) \cdot \left(\frac{x_2}{50} \text{ lb/gal}\right)}^{\text{razón de entrada de la sal}} - \overbrace{(4 \text{ gal/min}) \cdot \left(\frac{x_1}{50} \text{ lb/gal}\right)}^{\text{razón de salida de la sal}}$$

$$= -\frac{2}{25}x_1 + \frac{1}{50}x_2.$$

De manera similar, para el tanque B la razón de cambio neta de $x_2(t)$ es

$$\frac{dx_2}{dt} = 4 \cdot \frac{x_1}{50} - 3 \cdot \frac{x_2}{50} - 1 \cdot \frac{x_2}{50}$$

$$= \frac{2}{25}x_1 - \frac{2}{25}x_2.$$

Así obtenemos el sistema lineal

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{2}{25}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{2}{25}x_1 - \frac{2}{25}x_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Observe que el sistema anterior va acompañado de las condiciones iniciales $x_1(0) = 25$, $x_2(0) = 0$.

MODELO PRESA-DEPREDADOR Suponga que dos especies de animales interactúan dentro del mismo medio ambiente o ecosistema, y suponga además que la primera especie se alimenta sólo de vegetación y la segunda se alimenta sólo de la primera especie. En otras palabras, una especie es un depredador y la otra es una presa. Por ejemplo, los lobos cazan caribúes que se alimentan de pasto, los tiburones devoran peces pequeños y el búho nival persigue a un roedor del Ártico llamado lemming. Por razones de análisis, imagínese que los depredadores son zorros y las presas, conejos.

Sea $x(t)$ y $y(t)$ las poblaciones de zorros y conejos, respectivamente, en el tiempo t. Si no hubiera conejos, entonces se podría esperar que los zorros, sin un suministro adecuado de alimento, disminuyeran en número de acuerdo con

$$\frac{dx}{dt} = -ax, \qquad a > 0. \tag{4}$$

Sin embargo, cuando hay conejos en el medio, parece razonable que el número de encuentros o interacciones entre estas dos especies por unidad de tiempo sea conjuntamente proporcional a sus poblaciones x y y, es decir, proporcional al producto xy. Así, cuando están presentes los conejos hay un suministro de alimento y, en consecuencia, los zorros se agregan al sistema en una proporción bxy, $b > 0$. Sumando esta última proporción a (4) se obtiene un modelo para la población de zorros:

$$\frac{dx}{dt} = -ax + bxy. \tag{5}$$

Por otro lado, si no hay zorros, entonces la población de conejos, con una suposición adicional de suministro ilimitado de alimento, crecería con una razón proporcional al número de conejos presentes al tiempo t:

$$\frac{dy}{dt} = dy, \qquad d > 0. \tag{6}$$

Pero cuando están presentes los zorros, un modelo para la población de conejos es la ecuación (6) disminuida por cxy, $c > 0$; es decir, la razón a la que los conejos son comidos durante sus encuentros con los zorros:

$$\frac{dy}{dt} = dy - cxy. \tag{7}$$