Modelación Matemática: Solución trabajo individual 1

Profesor: Jair Hernando Tovar Tuirán

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica

Punto 1 - Dimensiones

Obtener las dimensiones de cada término de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + f_x$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow \left[\frac{L}{T}\right]\left[\frac{1}{T}\right] = \left[\frac{L}{T^2}\right]$$

Punto 1 - Dimensiones

El segundo término queda:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$P \rightarrow \left[\frac{F}{A}\right] \rightarrow \left[\frac{ML}{T^2}\right]\left[\frac{1}{L^2}\right] \rightarrow \left[\frac{M}{LT^2}\right]$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \rightarrow \left[\frac{L^3}{M}\right]\left[\frac{M}{LT^2}\right]\left[\frac{1}{L}\right] = \left[\frac{L}{T^2}\right]$$

Punto 1 - Dimensiones

El tercer término queda:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + f_x$$

$$\left[\frac{L}{T^2}\right] = \left[\frac{L}{T^2}\right] + \left[\frac{L}{T^2}\right]$$

$$f_x \rightarrow \left[\frac{F}{M}\right] = \left[\frac{ML}{T^2}\right]\left[\frac{1}{M}\right] = \left[\frac{L}{T^2}\right]$$

Punto 2 - Adimensionalización Método Informal

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + f_x$$

Consideremos los siguientes parámetros del modelo, denotados por sub-índice cero (valores constantes y conocidos):

$$\begin{aligned} x_0 &\to \text{Distancia característica} \\ t_0 &\to \text{Tiempo característico} \\ u_0 &\to \text{Velocidad característica} \end{aligned}$$

Punto 2 - Adimensionalización Método Informal

Ahora bien, definamos las variables adimensionales a partir de los parámetros del modelo:

$$x^* = \frac{x}{x_0} \qquad x = x_0 x^*$$

$$t^* = \frac{t}{t_0} \qquad t = t_0 t^*$$

$$u^* = \frac{u}{u_0} \qquad u = u_0 u^*$$

$$p^* = \frac{p}{\rho u_0^2} \qquad P = \rho u_0^2 P^*$$

Punto 2 - Adimensionalización Método Informal

Reemplazando las anteriores expresiones en la ecuación diferencial:

$$x = x_0 x^*$$

$$t = t_0 t^*$$

$$u = u_0 u^*$$

$$P = \rho u_0^2 P^*$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + f_x$$

$$\frac{\partial (u_0 u^*)}{\partial (t_0 t^*)} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial (\rho u_0^2 P^*)}{\partial (x_0 x^*)} + f_x$$

$$\left(\frac{u_0}{t_0}\right)\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = \left(\frac{\rho u_0^2}{x_0}\right)\frac{1}{\rho}\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + f_x$$

Punto 2 - Adimensionalización
Método Informal

$$\left(\frac{u_0}{t_0}\right)\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = \left(\frac{\cancel{\rho} u_0^2}{x_0}\right)\frac{1}{\cancel{\rho}}\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + f_x$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = \left(\frac{t_0 u_0}{x_0}\right)\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \left(\frac{t_0}{u_0}\right) f_x$$

Considerando las siguientes expresiones:

$$f_x^* = \left(\frac{t_0}{u_0}\right) f_x$$

$$u_0 = \frac{x_0}{t_0}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = \left(\frac{u_0}{u_0}\right)\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + f_x^*$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = \frac{\partial P^*}{\partial x^*} + f_x^*$$

Punto 2 - Adimensionalización Método Informal

¿Qué pasa si consideramos a fx igual a la gravedad?

$$f_x^* = \left(\frac{t_0}{u_0}\right) f_x = \left(\frac{t_0}{u_0}\right) g$$

$$f_x^* = \frac{u_0}{u_0}\left(\frac{t_0}{u_0}\right) g$$

$$f_x^* = \left(\frac{u_0 t_0}{u_0^2}\right) g$$

$$f_x^* = \left(\frac{x_0}{u_0^2}\right) g$$

$$f_x^* = \left(\frac{\sqrt{x_0 g}}{u_0}\right)$$

$$f_x^* = \frac{1}{F_r}$$

Punto 2 - Adimensionalización Método Formal

Se utilizará el teorema de Π de Vaschy-Buckingham, el cual proporciona un método de construcción de parámetros adimensionales a partir del producto de potencias de las variables del problema.

$$F(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) = 0$$

Donde x_i es la i-ésima variable de la función modelo y su forma adimensional x_i^* puede ser expresada como:

$$x_i^* = x_i x_j^a x_k^b x_l^c$$

En donde los subíndices j, k, l son diferentes de i y los superíndices a, b, c son potencias de las variables del problema.

Punto 2 - Adimensionalización Método Formal

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + f_x$$

Se tienen estas **SEIS variables** a adimensionalizar **(x,t,u,rho,P,fx)**, y se tienen **TRES dimensiones** en total **(L,T,M).**

$$x \rightarrow [L^1] \qquad \rho \rightarrow [M^1 L^{-3}]$$

$$t \rightarrow [T^1] \qquad P \rightarrow [M^1 L^{-1} T^{-2}]$$

$$u \rightarrow [L^1 T^{-1}] \qquad f_x \rightarrow [L^1 T^{-2}]$$

Punto 2 - Adimensionalización Método Formal

Como se tienen tres dimensiones se eligen tres variables arbitrariamente, que contengan entre ellas, todas las dimensiones. Ejemplo:

$$t \rightarrow [T^1]$$

$$u \rightarrow [L^1T^{-1}]$$

$$\rho \rightarrow [M^1L^{-3}]$$

$$x \rightarrow [L^1]$$

$$t \rightarrow [T^1]$$

$$u \rightarrow [L^1T^{-1}]$$

Punto 2 - Adimensionalización Método Formal

Calculando la posición adimensional:

$$x^* = x t_0^a u_0^b \rho^c \rightarrow [[L][T]^a[LT^{-1}]^b[ML^{-3}]^c] = [[L]^0[T]^0[M]^0]$$

Para la masa:

$$c = 0$$

Para la longitud:

$$1 + b - 3c = 0 \rightarrow b = -1$$

Para el tiempo:

$$a - b = 0 \rightarrow a = -1$$

$$x^* = \frac{x}{t_0 u_0}$$

Punto 2 - Adimensionalización Método Formal

Calculando la presión adimensional:

$$P^* = P t_0^a u_0^b \rho^c \rightarrow [[ML^{-1}T^{-2}][T]^a[LT^{-1}]^b[ML^{-3}]^c] = [[L]^0[T]^0[M]^0]$$

Para la masa:

$$1 + c = 0 \rightarrow c = -1$$

Para la longitud:

$$-1 + b - 3c = 0 \rightarrow b = -2$$

Para el tiempo:

$$-2 + a - b = 0 \rightarrow a = 0$$

$$P^* = \frac{P}{\rho u_0^2}$$

Punto 2 - Adimensionalización Método Formal

Calculando fx adimensional:

$$f_x^* = f_x t_0^a u_0^b \rho^c \rightarrow [[LT^{-2}][T]^a[LT^{-1}]^b[ML^{-3}]^c] = [[L]^0[T]^0[M]^0]$$

Para la masa:

$$c = 0$$

Para la longitud:

$$1 + b - 3c = 0 \rightarrow b = -1$$

Para el tiempo:

$$-2 + a - b = 0 \rightarrow a = 1$$

$$f_x^* = \frac{f_x t_0}{u_0}$$

Punto 2 - Adimensionalización Método Formal

Las variables restantes en su forma adimensional quedan:

$$t^* = t t_0^a u_0^b \rho^c \rightarrow a = 1, b = 0, c = 0$$

$$t^* = \frac{t}{t_0}$$

$$u^* = u t_0^a u_0^b \rho^c \rightarrow a = 0, b = 1, c = 0$$

$$u^* = \frac{u}{u_0}$$

Punto 2 - Adimensionalización Método Formal

$$t^* = \frac{t}{t_0} \rightarrow t = t^* t_0$$

$$x^* = \frac{x}{t_0 u_0} \rightarrow x = x^* u_0 t_0$$

$$u^* = \frac{u}{u_0} \rightarrow u = u^* u_0$$

$$P^* = \frac{P}{\rho u_0^2} \rightarrow P = P^* \rho u_0^2$$

$$f_x^* = \frac{f_x t_0}{u_0} \rightarrow f_x = \frac{f_x^* u_0}{t_0}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + f_x$$

$$\frac{\partial (u_0 u^*)}{\partial (t_0 t^*)} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial (\rho u_0^2 P^*)}{\partial (x_0 x^*)} + \frac{f_x^* u_0}{t_0}$$

$$\left(\frac{u_0}{t_0}\right)\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = \left(\frac{\rho u_0^2}{x_0}\right)\frac{1}{\rho}\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{f_x^* u_0}{t_0}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = \left(\frac{t_0 u_0}{x_0}\right)\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + f_x^*$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = \frac{\partial P^*}{\partial x^*} + f_x^*$$

¡Gracias por su atención!

"I am a Man of Fortune, and I must seek my Fortune."
Henry Avery, 1694