ción de Riccati a una ecuación de Bernoulli (4) con $n = 2$. La ecuación de Bernoulli se puede entonces reducir a una ecuación lineal sustituyendo $w = u^{-1}$.

b) Determine una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2$$

donde $y_1 = 2/x$ es una solución conocida de la ecuación.

36. Determine una sustitución adecuada para resolver

$$xy' = y \ln(xy).$$

Modelos matemáticos

37. Cadena cayendo En el problema 45 de los ejercicios 2.4 vimos que un modelo matemático para la velocidad v de una cadena que se desliza por el borde de una plataforma horizontal es

$$xv\frac{dv}{dx} + v^2 = 32x.$$

En ese problema se le pidió que resolviera la ED convirtiéndola en una ecuación exacta usando un factor integrante. Esta vez resuelva la ED usando el hecho de que es una ecuación de Bernoulli.

38. Crecimiento de la población En el estudio de la población dinámica uno de los más famosos modelos para un crecimiento poblacional limitado es la **ecuación logística**

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP),$$

donde a y b son constantes positivas. Aunque retomaremos esta ecuación y la resolveremos utilizando un método alternativo en la sección 3.2, resuelva la ED por esta primera vez usando el hecho de que es una ecuación de Bernoulli.

2.6 UN MÉTODO NUMÉRICO

INTRODUCCIÓN Una ecuación diferencial $dy/dx = f(x, y)$ es una fuente de información. Comenzaremos este capítulo observando que podríamos recolectar información *cualitativa* de una ED de primer orden con respecto a sus soluciones aún antes de intentar resolver la ecuación. Entonces en las secciones 2.2 a 2.5 examinamos a las ED de primer orden *analíticamente*, es decir, desarrollamos algunos procedimientos para obtener soluciones explícitas e implícitas. Pero una ecuación diferencial puede tener una solución aún cuando no podamos obtenerla analíticamente. Así que para redondear los diferentes tipos de análisis de las ecuaciones diferenciales, concluimos este capítulo con un método con el cual podemos "resolver" la ecuación diferencial *numéricamente*, esto significa que la ED se utiliza como el principio básico de un algoritmo para aproximarnos a la solución desconocida.

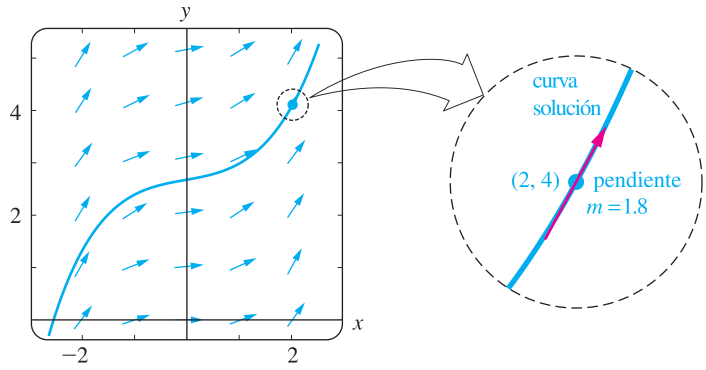
En esta sección vamos a desarrollar únicamente el más sencillo de los métodos numéricos, un método que utiliza la idea de que se puede usar una recta tangente para aproximar los valores de una función en una pequeña vecindad del punto de tangencia. En el capítulo 9 se presenta un tratamiento más extenso de los métodos numéricos.

USANDO LA RECTA TANGENTE Suponemos que el problema con valores iniciales

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

tiene una solución. Una manera de aproximarse a esta solución es emplear rectas tangentes. Por ejemplo, digamos que $y(x)$ denota la solución incógnita para el problema con valores iniciales $y' = 0.1\sqrt{y} + 0.4x^2$, $y(2) = 4$. La ecuación diferencial no lineal en este PVI no se puede resolver directamente por cualquiera de los métodos considerados en las secciones 2.2, 2.4 y 2.5; no obstante, aún podemos encontrar valores numéricos aproximados de la incógnita $y(x)$. En concreto, supongamos que deseamos conocer el valor de $y(2, 5)$. El PVI tiene una solución y, como sugiere el flujo del campo direccional de la ED en la figura 2.6.1(a), una curva solución que debe tener una forma similar a la curva que se muestra en azul.

El campo direccional de la figura 2.6.1(a) se generó con elementos lineales que pasan por puntos de una cuadrícula de coordenadas enteras. Puesto que la curva solución pasa por el punto inicial (2, 4), el elemento lineal en este punto es una recta tangente con una pendiente dada por $f(2, 4) = 0.1\sqrt{4} + 0.4(2)^2 = 1.8$. Como se muestra en la



a) campo direccional para $y \geq 0$. **b)** elemento lineal en (2, 4).

FIGURA 2.6.1 Amplificación de una vecindad del punto (2, 4).

figura 2.6.1(a) y el "zoom in" (acercamiento) de la figura 2.6.1(b), cuando x está cerca de 2, los puntos en la curva solución están cerca de los puntos de la recta tangente (el elemento lineal). Utilizando el punto (2, 4), la pendiente $f(2, 4) = 1.8$ y la forma punto pendiente de una recta, encontramos que una ecuación de la recta tangente es $y = L(x)$, donde $L(x) = 1.8x + 0.4$. Esta última ecuación se llama **linealización** de $y(x)$ en $x = 2$ que se puede utilizar para aproximar los valores dentro de una pequeña vecindad de $x = 2$. Si $y_1 = L(x_1)$ denota la coordenada y en la recta tangente y $y(x_1)$ es la coordenada y de la curva solución correspondiente a una coordenada x, x_1 que está cerca de $x = 2$, entonces $y(x_1) \approx y_1$. Si elegimos $x_1 = 2.1$, entonces $y_1 = L(2.1) = 1.8(2.1) + 0.4 = 4.18$, entonces $y(2.1) \approx 4.18$.

MÉTODO DE EULER

Para generalizar el procedimiento que acabamos de ilustrar, usamos la linealización de una solución incógnita $y(x)$ de (1) en $x = x_0$:

$$L(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0). \tag{2}$$

La gráfica de esta linealización es una recta tangente a la gráfica de $y = y(x)$ en el punto (x_0, y_0). Ahora hacemos que h sea un incremento positivo del eje x, como se muestra en la figura 2.6.2. Entonces sustituyendo x por $x_1 = x_0 + h$ en la ecuación (2), obtenemos

$$L(x_1) = y_0 + f(x_0, y_0)(x_0 + h - x_0) \quad \text{o} \quad y_1 = y_0 + hf(x_1, y_1),$$

donde $y_1 = L(x_1)$. El punto (x_1, y_1) en la recta tangente es una aproximación del punto $(x_1, y(x_1))$ sobre la curva solución. Por supuesto, la precisión de la aproximación $L(x_1) \approx y(x_1)$ o $y_1 \approx y(x_1)$ depende fuertemente del tamaño del incremento h. Normalmente debemos elegir este **tamaño de paso** para que sea "razonablemente pequeño". Ahora repetimos el proceso usando una segunda "recta tangente" en (x_1, y_1).* Identificando el nuevo punto inicial como (x_1, y_1) en lugar de (x_0, y_0) del análisis anterior, obtenemos una aproximación $y_2 \approx y(x_2)$ correspondiendo a dos pasos de longitud h a partir de x_0, es decir, $x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h$, y

$$y(x_2) = y(x_0 + 2h) = y(x_1 + h) \approx y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1).$$

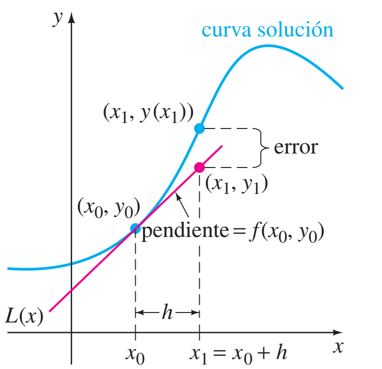


FIGURA 2.6.2 Aproximación de $y(x_1)$ usando una recta tangente.

Si continuamos de esta manera, vemos que $y_1, y_2, y_3, \ldots$, se puede definir recursivamente mediante la fórmula general

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \tag{3}$$

donde $x_n = x_0 + nh$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Este procedimiento de uso sucesivo de las "rectas tangentes" se conoce como **método de Euler**.

*Esta no es una recta tangente real, ya que (x_1, y_1) está sobre la primera tangente y no sobre la curva solución.

EJEMPLO 1 Método de Euler

Considere el problema con valores iniciales $y' = 0.1\sqrt{y} + 0.4x^2$, $y(2) = 4$ Utilice el método de Euler para obtener una aproximación de $y(2.5)$ usando primero $h = 0.1$ y después $h = 0.05$.

SOLUCIÓN Con la identificación $f(x, y) = 0.1\sqrt{y} + 0.4x^2$ la ecuación (3) se convierte en

$$y_{n+1} = y_n + h\left(0.1\sqrt{y_n} + 0.4x_n^2\right).$$

Entonces para $h = 0.1$, $x_0 = 2$, $y_0 = 4$ y $n = 0$ encontramos

$$y_1 = y_0 + h\left(0.1\sqrt{y_0} + 0.4x_0^2\right) = 4 + 0.1\left(0.1\sqrt{4} + 0.4(2)^2\right) = 4.18,$$

que, como ya hemos visto, es una estimación del valor $y(2.1)$. Sin embargo, si usamos el paso de tamaño más pequeño $h = 0.05$, le toma dos pasos alcanzar $x = 2.1$. A partir de

$$y_1 = 4 + 0.05\left(0.1\sqrt{4} + 0.4(2)^2\right) = 4.09$$

$$y_2 = 4.09 + 0.05\left(0.1\sqrt{4.09} + 0.4(2.05)^2\right) = 4.18416187$$

tenemos $y_1 \approx y(2.05)$ y $y_2 \approx y(2.1)$. El resto de los cálculos se realizó usando un paquete computacional. En las tablas 2.1 y 2.2 se resumen los resultados, donde cada entrada se ha redondeado a cuatro lugares decimales. Vemos en las tablas 2.1 y 2.2 que le toma cinco pasos con $h = 0.1$ y 10 pasos con $h = 0.05$, respectivamente, para llegar a $x = 2.5$. Intuitivamente, esperaríamos que $y_{10} = 5.0997$ correspondiente a $h = 0.05$ sea la mejor aproximación de $y(2.5)$ que el valor $y_5 = 5.0768$ correspondiente a $h = 0.1$. ■

TABLA 2.1 $h = 0.1$

x_n	y_n
2.00	4.0000
2.10	4.1800
2.20	4.3768
2.30	4.5914
2.40	4.8244
2.50	5.0768

TABLA 2.2 $h = 0.05$

x_n	y_n
2.00	4.0000
2.05	4.0900
2.10	4.1842
2.15	4.2826
2.20	4.3854
2.25	4.4927
2.30	4.6045
2.35	4.7210
2.40	4.8423
2.45	4.9686
2.50	5.0997

En el ejemplo 2 aplicamos el método de Euler para una ecuación diferencial para la que ya hemos encontrado una solución. Hacemos esto para comparar los valores de las aproximaciones y_n en cada caso con los valores verdaderos o reales de la solución $y(x_n)$ del problema con valores iniciales.

EJEMPLO 2 Comparación de los valores aproximados y reales

Considere el problema con valores iniciales $y' = 0.2xy$, $y(1) = 1$. Utilice el método de Euler para obtener una aproximación de $y(1.5)$ usando primero $h = 0.1$ y después $h = 0.05$.

SOLUCIÓN Con la identificación $f(x, y) = 0.2xy$, la ecuación (3) se convierte en

$$y_{n+1} = y_n + h(0.2x_n y_n)$$

donde $x_0 = 1$ y $y_0 = 1$. 1. De nuevo con la ayuda de un paquete computacional obtenga los valores de las tablas 2.3 y 2.4.

TABLA 2.3 $h = 0.1$

x_n	y_n	Valor real	Error absoluto	% Error relativo
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.10	1.0200	1.0212	0.0012	0.12
1.20	1.0424	1.0450	0.0025	0.24
1.30	1.0675	1.0714	0.0040	0.37
1.40	1.0952	1.1008	0.0055	0.50
1.50	1.1259	1.1331	0.0073	0.64

TABLA 2.4 $h = 0.05$

x_n	y_n	Valor real	Error absoluto	% Error relativo
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.05	1.0100	1.0103	0.0003	0.03
1.10	1.0206	1.0212	0.0006	0.06
1.15	1.0318	1.0328	0.0009	0.09
1.20	1.0437	1.0450	0.0013	0.12
1.25	1.0562	1.0579	0.0016	0.16
1.30	1.0694	1.0714	0.0020	0.19
1.35	1.0833	1.0857	0.0024	0.22
1.40	1.0980	1.1008	0.0028	0.25
1.45	1.1133	1.1166	0.0032	0.29
1.50	1.1295	1.1331	0.0037	0.32

■

En el ejemplo 1 se calcularon los valores verdaderos o reales de la solución conocida $y = e^{0.1(x^2-1)}$. (Compruebe.) El **error absoluto** se define como

$$|\text{valor real} - \text{aproximado}|.$$

El **error relativo** y el **error relativo porcentual** son, respectivamente,

$$\frac{\text{error absoluto}}{|\text{valor real}|} \quad \text{y} \quad \frac{\text{error absoluto}}{|\text{valor real}|} \times 100.$$

Es evidente en las tablas 2.3 y 2.4 que la precisión de las aproximaciones mejora conforme disminuye el tamaño del paso h. También vemos que aún cuando el error relativo porcentual esté creciendo en cada paso, no parece estar mal. Pero no se debe dejar engañar por un ejemplo. Si simplemente cambiamos el coeficiente del lado derecho de la ED del ejemplo 2 de 0.2 a 2, entonces en $x_n = 1.5$ los errores relativos porcentuales crecen dramáticamente. Vea el problema 4 del ejercicio 2.6.

UNA ADVERTENCIA El método de Euler sólo es uno de los diferentes métodos en los que se puede aproximar una solución de una ecuación diferencial. Aunque por su sencillez es atractivo, *el método de Euler rara vez se usa en cálculos serios*. Aquí se ha presentado sólo para dar un primer esbozo de los métodos numéricos. En el capítulo 9 trataremos en detalle el análisis de los métodos numéricos que tienen mucha precisión, en especial el **método de Runge-Kutta** conocido como el **método RK4.**

SOLUCIONADORES NUMÉRICOS Independientemente de si se puede realmente encontrar una solución explícita o implícita, si existe una solución de una ecuación diferencial, ésta se representa por una curva suave en el plano cartesiano. La idea básica detrás de *cualquier* método numérico para las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden es de alguna manera aproximar los valores de y de una solución para valores de x preseleccionados. Comenzamos con un punto inicial dado (x_0, y_0) de una curva solución y procedemos a calcular en un modelo paso por paso una secuencia de puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ cuyas coordenadas y, y_i se aproximan a las coordenadas $y, y(x_i)$ de los puntos $(x_1, y(x_1)), (x_2, y(x_2)), \ldots, (x_n, y(x_n))$ que yacen sobre la gráfica de la solución normalmente desconocida $y(x)$. Tomando las coordenadas x más cercanas (es decir, para valores pequeños de h) y uniendo los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ con segmentos de recta cortos, obtenemos una curva poligonal cuyas características cualitativas esperamos sean cercanas a las de una curva solución real. El dibujo de curvas es algo que bien se puede hacer en una computadora. A un programa de cómputo escrito para implementar un método numérico o para presentar una representación visual de una solución aproximada que ajusta los datos numéricos producidos por este segundo método se le conoce como un **solucionador numérico**. Comercialmente, hay muchos solucionadores numéricos disponibles ya sea integrados en un gran paquete computacional, como en un sistema algebraico computacional, o en un paquete autónomo. Algunos paquetes computacionales simplemente dibujan las aproximaciones numéricas generadas, mientras que otros generan pesados datos numéricos así como la correspondiente aproximación o **curvas solución numéricas**. En la figura 2.6.3 se presenta a manera de ilustración la conexión natural entre los puntos de las gráficas producidas por un solucionador numérico, las gráficas poligonales pintadas con dos colores son las curvas solución numéricas para el problema con valores iniciales $y' = 0.2xy$, $y(0) = 1$ en el intervalo [0, 4] obtenidas de los métodos de Euler y RK4 usando el tamaño de paso $h = 1$. La curva suave en azul es la gráfica de la solución exacta $y = e^{0.1x^2}$ del PVI. Observe en la figura 2.6.3 que, aun con el ridículo tamaño de paso de $h = 1$, el método RK4 produce la "curva solución" más creíble. La curva solución numérica obtenida del método RK4 es indistinguible de la curva solución real en el intervalo [0, 4] cuando se usa el tamaño de paso usual de $h = 0.1$.

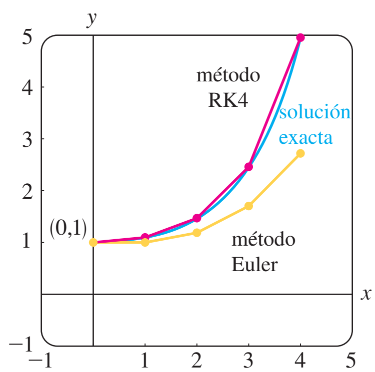


FIGURA 2.6.3 Comparación de los métodos de Runge-Kutta (RK4) y de Euler.

USANDO UN SOLUCIONADOR NUMÉRICO No es necesario conocer los diferentes métodos numéricos para utilizar un solucionador numérico. Un solucionador usualmente requiere que la ecuación diferencial se pueda expresar en la forma normal

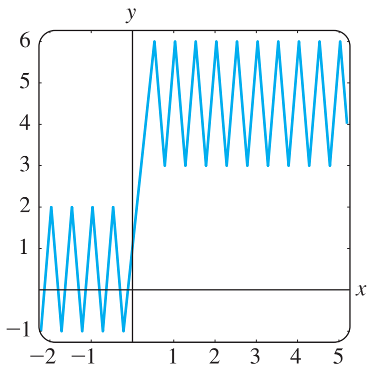


FIGURA 2.6.4 Una curva solución que no ayuda mucho.

$dy/dx = f(x, y)$. Los solucionadores numéricos que sólo generan curvas requieren que se les proporcione $f(x, y)$ y los datos iniciales x_0 y y_0 y que se indique el método numérico deseado. Si la idea es aproximarse al valor numérico de $y(a)$, entonces un solucionador numérico podría requerir de manera adicional que usted establezca un valor de h o, del mismo modo, dar el número de pasos que quiere tomar para llegar de $x = x_0$ a $x = a$. Por ejemplo, si queremos aproximar $y(4)$ para el PVI que se muestra en la figura 2.6.3, entonces, comenzando en $x = 0$ le tomaría cuatro pasos llegar a $x = 4$ con un tamaño de paso de $h = 1$; 40 pasos son equivalentes a un tamaño de paso de $h = 0.1$. Aunque aquí no investigaremos todos los problemas que se pueden encontrar cuando se intenta aproximar cantidades matemáticas, al menos debe estar consciente del hecho de que el solucionador numérico puede dejar de funcionar cerca de ciertos puntos o dar una imagen incompleta o engañosa cuando se aplica a ciertas ecuaciones diferenciales en la forma normal. La figura 2.6.4 muestra la gráfica que se obtuvo al aplicar el método de Euler a un problema con valores iniciales de primer orden $dy/dx = f(x, y)$, $y(0) = 1$. Se obtuvieron resultados equivalentes utilizando tres solucionadores numéricos, sin embargo, la gráfica difícilmente es una posible curva solución. (¿Por qué?) Hay diferentes caminos de solución cuando un solucionador numérico tiene dificultades; las tres más obvias son disminuir el tamaño del paso, usar otro método numérico e intentar con un solucionador diferente.

EJERCICIOS 2.6

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-2.

En los problemas 1 y 2 use el método de Euler para obtener una aproximación a cuatro decimales del valor indicado, ejecute a mano la ecuación de recursión (3), usando primero $h = 0.1$ y después usando $h = 0.05$.

1. $y' = 2x - 3y + 1, y(1) = 5; \quad y(1.2)$

2. $y' = x + y^2, y(0) = 0; \quad y(0.2)$

En los problemas 3 y 4 use el método de Euler para obtener una aproximación a cuatro decimales del valor indicado. Primero, utilice $h = 0.1$ y después utilice $h = 0.05$. Determine una solución explícita para cada problema con valores iniciales y después construya tablas similares a las tablas 2.3 y 2.4.

3. $y' = y, y(0) = 1; \quad y(1.0)$

4. $y' = 2xy, y(1) = 1; \quad y(1.5)$

En los problemas 5 a 10 use un solucionador numérico y el método de Euler para obtener una aproximación a cuatro decimales del valor indicado. Primero, utilice $h = 0.1$ y después utilice $h = 0.05$.

5. $y' = e^{-y}, y(0) = 0; \quad y(0.5)$

6. $y' = x^2 + y^2, y(0) = 1; \quad y(0.5)$

7. $y' = (x - y)^2, y(0) = 0.5; \quad y(0.5)$

8. $y' = xy + \sqrt{y}, y(0) = 1; \quad y(0.5)$

9. $y' = xy^2 - \dfrac{y}{x}, y(1) = 1; \quad y(1.5)$

10. $y' = y - y^2, y(0) = 0.5; \quad y(0.5)$

En los problemas 11 y 12 utilice un solucionador para obtener una curva solución numérica para el problema dado con valores iniciales. Primero, utilice el método de Euler y después, el método RK4. Utilice $h = 0.25$ en cada caso. Superponga ambas curvas solución en los mismos ejes coordenados. Si es posible, utilice un color diferente para cada curva. Repita, usando $h = 0.1$ y $h = 0.05$.

11. $y' = 2(\cos x)y, \quad y(0) = 1$

12. $y' = y(10 - 2y), \quad y(0) = 1$

Problemas para analizar

13. Use un solucionador numérico y el método de Euler para aproximar $y(1.0)$, donde $y(x)$ es la solución de $y' = 2xy^2$, $y(0) = 1$. Primero use $h = 0.1$ y después use $h = 0.05$. Repita, usando el método RK4. Analice qué podría causar que las aproximaciones a $y(1.0)$ difieran mucho.

Tarea para el laboratorio de computación

14. **a)** Utilice un solucionador numérico y el método RK4 para trazar la gráfica de la solución del problema con valores iniciales $y' = -2xy + 1, y(0) = 0$.

b) Resuelva el problema con valores iniciales con uno de los procedimientos analíticos desarrollados en las secciones anteriores de este capítulo.

c) Use la solución analítica $y(x)$ que encontró en el inciso b) y un SAC para determinar las coordenadas de todos los extremos relativos.