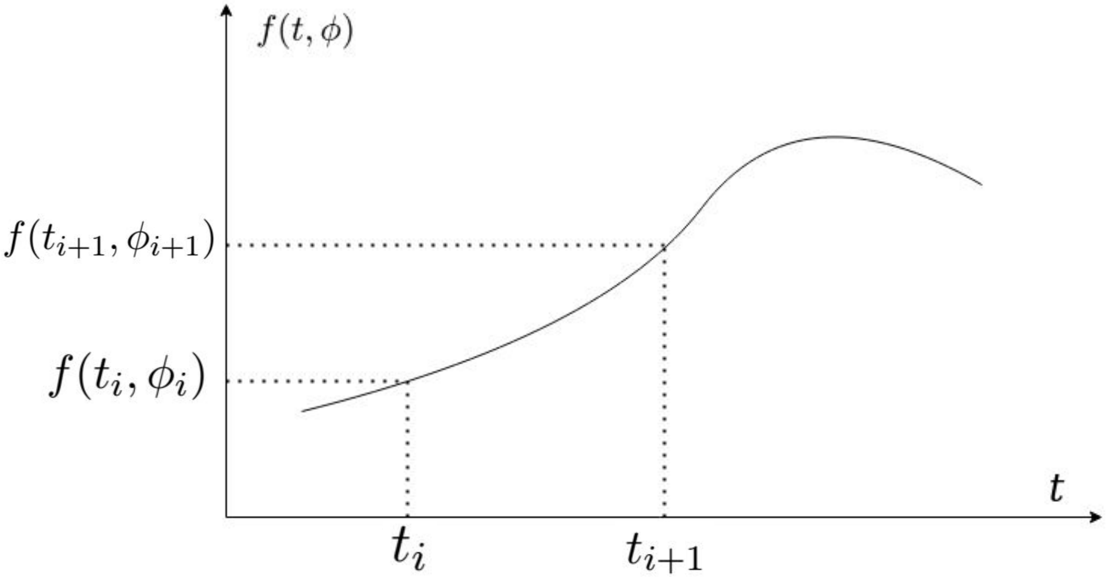
Modelación Matemática: Método de Euler Forward

Profesor: Jair Hernando Tovar Tuirán

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica

Solución numérica EDO



$$\frac{d\phi}{dt} = f(t,\phi)$$

$$\phi(t_0) = \phi_0$$

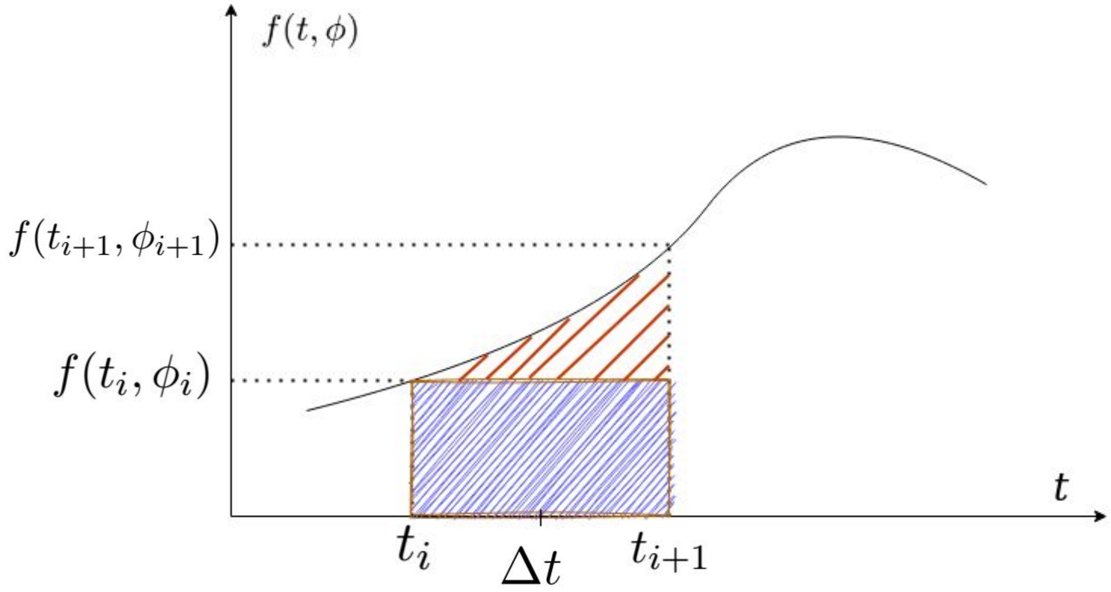
Ejemplo:

$$t\frac{dy}{dt} + yt^2 = \sqrt{t}$$

$$\frac{dy}{dt} = t^{-0.5} - yt$$

$$f(t,y) = t^{-0.5} - yt$$

Solución numérica EDO



$$\frac{d\phi}{dt} = f(t,\phi)$$

$$\phi(t_0) = \phi_0$$

$$\int_{\phi_i}^{\phi_{i+1}} d\phi = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t,\phi)dt$$

$$\phi_{i+1} - \phi_i \approx f(t_i,\phi_i)\Delta t$$

$$\phi_{i+1} \approx \phi_i + f(t_i,\phi_i)\Delta t$$

Solución numérica SEDO

Sistema de EDO

$$\frac{d\phi_1}{dt} = f_1(t, \phi_1, \phi_2, ..., \phi_n)$$

$$\frac{d\phi_2}{dt} = f_2(t, \phi_1, \phi_2, ..., \phi_n)$$

$$\vdots$$

$$\frac{d\phi_n}{dt} = f_n(t, \phi_1, \phi_2, ..., \phi_n)$$

Condiciones iniciales

$$\phi_1(t_0) = \phi_{10}$$

$$\phi_2(t_0) = \phi_{20}$$

$$\vdots$$

$$\phi_n(t_0) = \phi_{n0}$$

Solución numérica Euler Forward

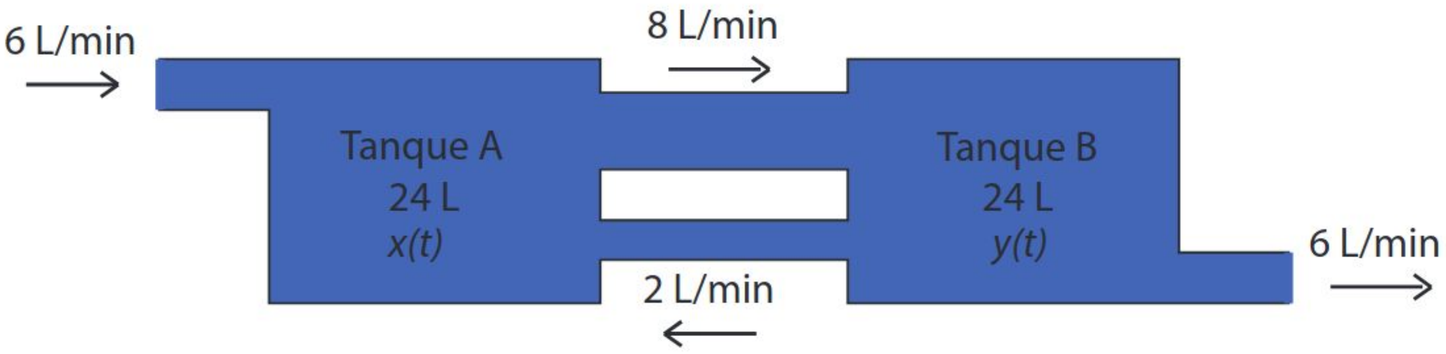
$$\phi_{1,i+1} \approx \phi_{1,i} + f_1(t_i, \phi_{1,i}, \phi_{2,i}, ..., \phi_{n,i})\Delta t$$

$$\phi_{2,i+1} \approx \phi_{2,i} + f_2(t_i, \phi_{1,i}, \phi_{2,i}, ..., \phi_{n,i})\Delta t$$

$$\vdots$$

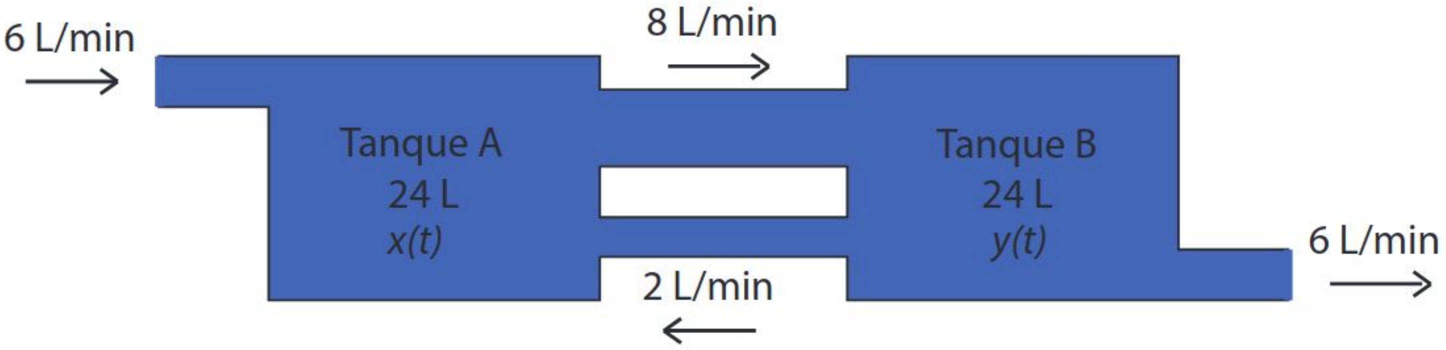
$$\phi_{n,i+1} \approx \phi_{n,i} + f_n(t_i, \phi_{1,i}, \phi_{2,i}, ..., \phi_{n,i})\Delta t$$

Ejemplo 1: Tanques interconectados



Se tiene una sustancia contenida en los tanques A y B, donde $x(t)$ y $y(t)$ representan la cantidad de esta sustancia en gramos, para los tanques A y B respectivamente. Inicialmente se tienen concentraciones de $x0$ en el tanque A y $y0$ en el tanque B. Proponga un modelo matemático que pueda determinar la concentración de esta sustancia en los dos tanques.

Ejemplo 1: Tanques interconectados



$$\frac{dx}{dt} = 6(0) + 2\frac{y}{24} - 8\frac{x}{24} \rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{x}{3} + \frac{y}{12}$$

$$\frac{dy}{dt} = -2\frac{y}{24} + 8\frac{x}{24} - 6\frac{y}{24} \rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{x}{3} - \frac{y}{3}$$

$$x(0) = x_0$$

$$y(0) = y_0$$

Ejemplo 1: Tanques interconectados

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{3} + \frac{y}{12}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{3} - \frac{y}{3}$$

$$x(0) = x_0$$

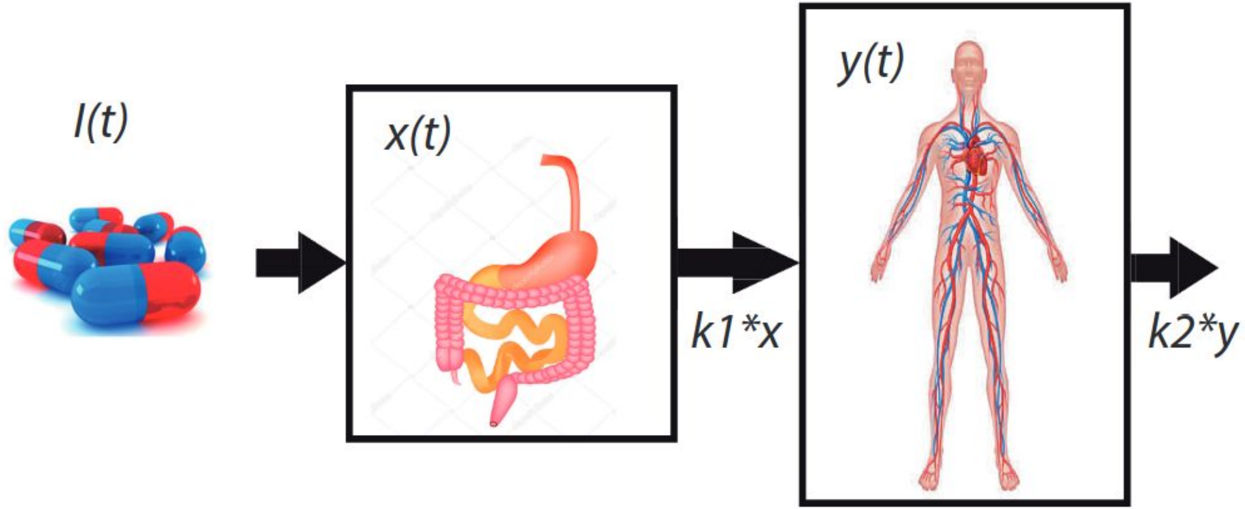
$$y(0) = y_0$$

Solución analítica

$$x(t) = -\left(\frac{y_0 - 2x_0}{4}\right) * e^{-t/2} + \left(\frac{y_0 + 2x_0}{4}\right) * e^{-t/6}$$

$$y(t) = \left(\frac{y_0 - 2x_0}{2}\right) * e^{-t/2} + \left(\frac{y_0 + 2x_0}{2}\right) * e^{-t/6}$$

Ejemplo 2: Químicos en el organismo



$$k_1 = 0{,}6931 \quad k_2 = 0{,}0231$$

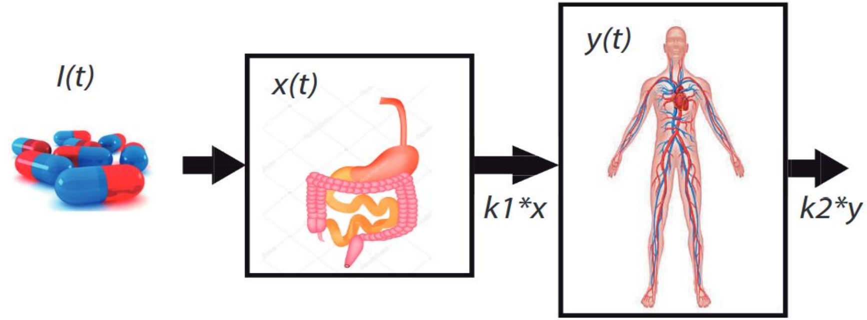
Ejemplo 2: Químicos en el organismo

$$\frac{dx}{dt} = I_0 - k_1 x$$

$$\frac{dy}{dt} = k_1 x - k_2 y$$

$$x(0) = x_0$$

$$y(0) = y_0$$



$$x(t) = C_1 e^{-k_1 t} + \frac{I_0}{k_1}$$

$$y(t) = \frac{k_1 C_1}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} + C_2 e^{-k_2 t} + \frac{I_0}{k_2}$$

Calcule la concentración de medicamento en el sistema digestivo y en el sistema circulatorio en función del tiempo, resolviendo el sistema EDO por el método de Euler Forward. Se le proporcionarán las condiciones iniciales (x_0, y_0), los parámetros k_1 y k_2, la concentración I_0 de entrada, un paso de tiempo (Δt) y un tiempo total de simulación. Se le pedirá calcular el error absoluto en un instante de tiempo específico.

¡Gracias por su atención!

"The truth is a strange thing. You can try to suppress it, but it will always find its way to the surface." – Michael

UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

PROYECTO **CULTURAL, CIENTÍFICO Y COLECTIVO** DE NACIÓN

Solución de EDO: Método de Euler

Profesor: Carlos A. Duque Daza
Asistente docente: Sebastián Gómez P.

Facultad de Ingeniería – Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica – Sede Bogotá

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Existen dos tipos de problemas con EDO:

- Problemas de valor inicial, con condiciones iniciales
- Problemas de valores en la frontera, de contorno

Ecuaciones diferenciales ordinarias

PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

Soluciones de forma analítica y/o gráfica

En una función f(x) se da el "y" para cada "x"

En una EDO, se da la "derivada" para cada "x"

$$f(x) = x^2 - 9 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 2x$$
$$f(x) = x^2 + 5 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 2x$$
$$f(x) = x^2 + 12 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 2x$$

Se hace necesario un valor inicial

Ecuaciones diferenciales ordinarias

PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

Consideremos el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in I = [t_0, t_0 + T], \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

Objetivo: construir una aproximación numérica, para lo cual se considera la discretización del intervalo

$$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = t_0 + T,$$

Ecuaciones diferenciales ordinarias

PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

Se supondrá que la partición es uniforme

$$t_{k+1} - t_k = h, \qquad k = 0, \ldots, N-1$$

La constante ***h*** se denota como el paso de malla.

Algoritmo que proporciona una serie de valores $\{y_0, y_1, \ldots, y_N\}$

$$y_k \approx y(t_k), \quad k = 0, 1, \ldots, N.$$

Ecuaciones diferenciales ordinarias

PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

El error local cometido en cada nodo se define como:

$$e_k = |y(x_k) - y_k|, \quad k = 0, 1, \ldots, N.$$

Considerando el error global de toda la aproximación:

$$e = \max_{k=0,1,\ldots,N} e_k = \max_{k=0,1,\ldots,N} |y(x_k) - y_k|.$$

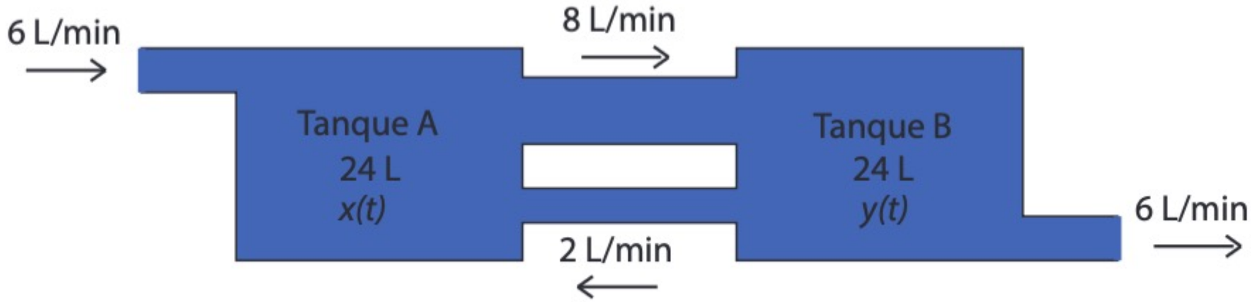
El error e depende del paso de malla. Se desea que converja:

$$\lim_{h \to 0} e(h) = 0.$$

Modelos compartimentales

EJERCICIO DE CLASE

Dos tanques, cada uno de los cuales contiene 24 litros de una solución salina, están conectados entre sí mediante tubos, como se muestra en la figura. El tanque A recibe agua pura a razón de 6 litros/minuto y el líquido sale de B con la misma razón; además, se bombean 8 litros por minuto de líquido del tanque A al tanque B y dos litros por minuto del tanque B al tanque A. En un principio la solución salina en el tanque A contiene x_0 kg de sal y la del tanque B contiene y_0 kg de sal, realize un modelo matemático que permita evaluar la masa de sal de cada tanque en el instante $t > 0$.

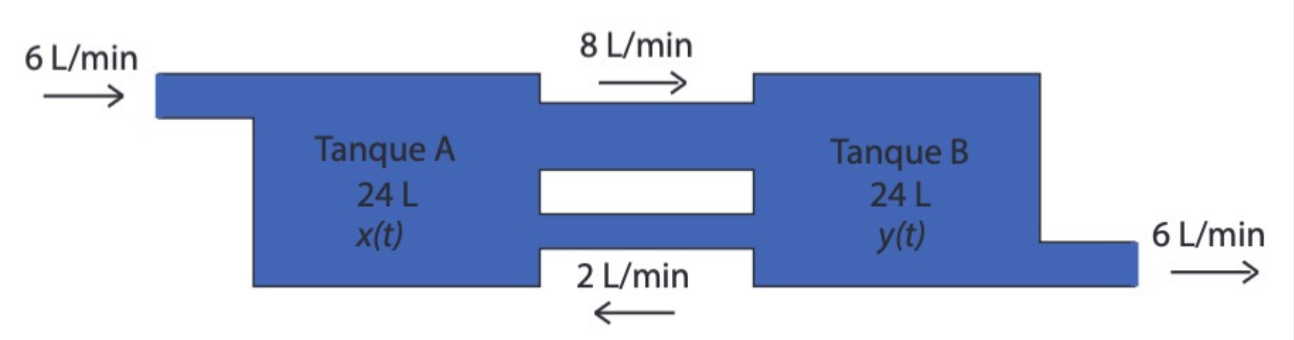


Modelos compartimentales

EJERCICIO DE CLASE

De manera análitica, las masas de sustancia en los tanques A y B en el instante t son:

$$x(t) = -\left(\frac{y_0 - 2x_0}{4}\right) * e^{-t/2} + \left(\frac{y_0 + 2x_0}{4}\right) * e^{-t/6}$$
$$y(t) = \left(\frac{y_0 - 2x_0}{2}\right) * e^{-t/2} + \left(\frac{y_0 + 2x_0}{2}\right) * e^{-t/6}$$



x_0=15, y_0=10 (en gramos)

Modelos compartimentales

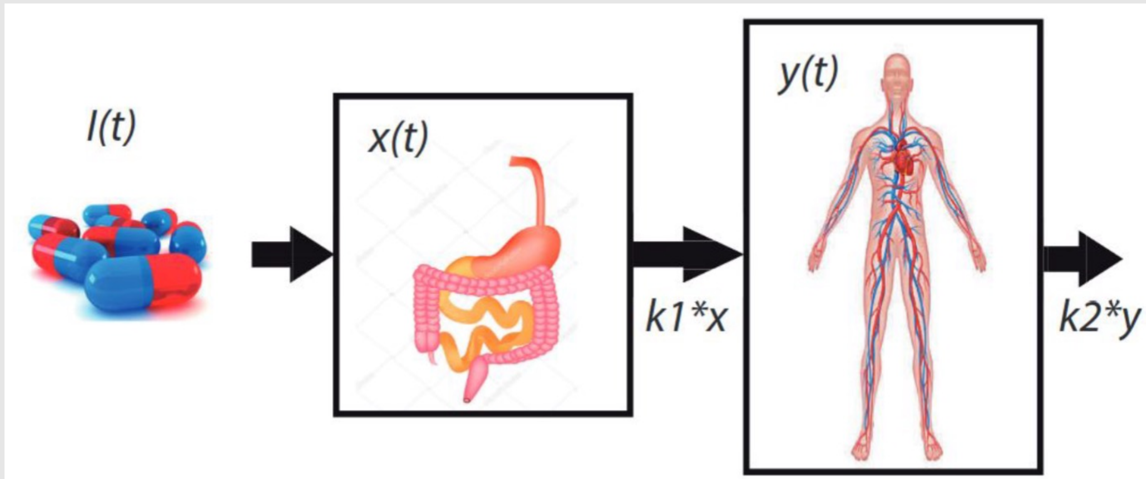
EJERCICIO DE CLASE

Proponga un modelo matemático que pueda determinar la concentración de esta sustancia en los dos tanques.

- Encuentre la solución al modelo matemático por los tres métodos de Euler vistos y compare con la solución analítica. ¿Qué método presenta el mejor resultado?
- Presente gráficas y tablas

Modelos compartimentales

EJERCICIO DE CLASE 2



Calcule la concentración de medicamento en el sistema digestivo y en el sistema circulatorio en función del tiempo, resolviendo el sistema EDO por el método de Euler Forward. Se le proporcionarán las condiciones iniciales (x_0, y_0), los parámetros k_1 y k_2, la concentración I_0 de entrada, un paso de tiempo (Δt) y un tiempo total de simulación. Se le pedirá calcular el error absoluto en un instante de tiempo específico. $k_1 = 0{,}6931$ $k_2 = 0{,}0231$

$x_0 = 150$, $y_0 = 0$

Modelos compartimentales

EJERCICIO DE CLASE 2

$$\frac{dx}{dt} = I_0 - k_1 x$$

$$\frac{dy}{dt} = k_1 x - k_2 y$$

$$x(0) = x_0$$

$$y(0) = y_0$$

$$x(t) = C_1 e^{-k_1 t} + \frac{I_0}{k_1}$$

$$y(t) = \frac{k_1 C_1}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} + C_2 e^{-k_2 t} + \frac{I_0}{k_2}$$

Gracias