

Análisis estructural mediante el método de los elementos finitos

D. L. Linero, M. Estrada y D. Garzón
Universidad Nacional de Colombia

29 de junio de 2022

Índice general

1. Conceptos básicos del método de los elementos finitos	3
1.1. Definición del método de los Elementos Finitos	4
1.2. Función de aproximación y función de forma de un elemento finito	5
1.3. Función de aproximación en la malla de elementos finitos	8
1.4. Elementos finitos de continuidad C_1	8
1.5. Matrices	10
1.5.1. Notación	11
1.5.2. Propiedades y operaciones básicas	11
1.5.3. Regla de Cramer	14
1.6. Transformación entre sistemas coordenados de las componentes de un vector	15
1.7. Problemas propuestos	18
1.7.1. Funciones de forma en coordenadas naturales de un elemento unidimensional lineal	18
1.7.2. Funciones de forma de un elemento unidimensional cuadrático	18
2. Elementos de la mecánica de sólidos para problemas lineales elásticos	19
2.1. Campos del desplazamiento y la deformación infinitesimal	19
2.2. Campo del esfuerzo	22
2.2.1. Componentes del esfuerzo	22
2.2.2. Vector tracción en términos del estado de esfuerzos	24
2.2.3. Esfuerzos y direcciones principales	25
2.3. Ecuación constitutiva de un material lineal elástico isótropo: ley de Hooke	26
2.4. Criterio de fractura de Rankine modificado	30
2.5. Criterio de fluencia de von Mises	30
2.6. Principio de los Trabajos Virtuales	32

2.7.	Planteamiento del problema en el medio continuo	34
2.8.	Elementos de la mecánica de sólidos para problemas bidimensionales	35
2.8.1.	Condición plana de esfuerzos	35
2.8.2.	Condición plana de deformaciones	38
3.	Formulación del problema elástico lineal en estructuras formadas por barras sometidas a fuerza axial	43
3.1.	Descripción del problema mecánico de fuerza axial	43
3.2.	Malla de elementos finitos del problema	44
3.3.	Coordenadas naturales unidimensionales	44
3.4.	Elemento finito unidimensional lineal	45
3.5.	Matriz de rigidez y vector de fuerzas equivalentes del elemento finito unidimensional lineal de fuerza axial	48
3.6.	Elemento finito unidimensional cuadrático	50
3.7.	Matriz de rigidez y vector de fuerzas equivalentes de la malla de elementos finitos	53
3.8.	Ensamblaje de matrices de rigidez y de vectores de fuerzas equivalente	55
3.9.	Obtención de los desplazamientos nodales desconocidos del sólido . .	57
3.10.	Obtención de las reacciones en los apoyos del sólido	58
3.11.	Obtención de las deformaciones y esfuerzos en el interior de los elementos	59
3.12.	Obtención de deformaciones y esfuerzos normales promedio en los nudos	59
3.13.	Ejemplo de aplicación de una barra sometida a fuerza axial	60
3.13.1.	Resultados de la solución analítica del ejemplo de aplicación .	60
3.13.2.	Procedimiento y resultados de la simulación numérica con una malla de 3 elementos unidimensionales lineales	61
3.13.3.	Resultados de la simulación numérica con una malla de 10 elementos unidimensionales lineales	66
3.13.4.	Resultados promedio en los nudos de la simulación numérica con una malla fina de elementos unidimensionales lineales	67
3.14.	Generalidades del sistema estructural de armadura	70
3.15.	Elemento de armadura en sistema coordenado local y global	70
3.16.	Desplazamientos nodales en una armadura	74
3.17.	Deformación y esfuerzo en un elemento de armadura	76
3.18.	Armadura plana	76
4.	Formulación del problema elástico lineal en estructuras formadas por barras sometidas a flexión	79
4.1.	Descripción del problema mecánico de vigas de Euler–Bernoulli . . .	79

4.2. Elemento finito unidimensional cúbico de continuidad C_1	83
4.3. Matriz de rigidez y vector de fuerzas equivalentes del elemento finito unidimensional de viga	86
4.4. Procedimiento de cálculo del desplazamiento en los nudos de la malla en una viga	88
4.5. Obtención de las acciones internas en los elementos de viga	89
4.6. Ejemplo de aplicación de una viga a flexión	91
4.7. Generalidades del sistema estructural de pórticos	97
4.8. Elemento de pórtico en sistema coordenado local	98
4.9. Ejes locales de un elemento de pórtico y transformación a sistema coordenado global	98
4.10. Cargas distribuidas aplicadas a elementos de pórtico	98
4.11. Desplazamientos y rotaciones en los nudos de un pórtico	99
4.12. Acciones internas en los extremos de cada elemento de pórtico	99
4.13. Problemas propuestos	99
5. Formulación general del problema elástico lineal para sólidos	101
5.1. Principio de los trabajos virtuales	101
5.2. Función de aproximación del desplazamiento en el EF	102
5.3. Deformación y esfuerzo en el EF	104
5.4. Rigidez y fuerzas equivalentes en el EF	105
5.5. Rigidez y fuerzas equivalentes en el sólido	106
5.6. Desplazamientos nodales en el sólido	107
5.7. Fuerzas de reacción en el sólido	108
5.8. Desplazamiento, deformación y esfuerzo en el EF	108
5.9. Algoritmo de cálculo	109
6. Formulación del problema elástico lineal bidimensional mediante el método de los elementos finitos. Temas básicos	113
6.1. Formulación del problema elástico lineal bidimensional	113
6.2. Elemento triangular lineal	122
6.2.1. Función de aproximación y funciones de forma	123
6.2.2. Matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma y componentes de la deformación y el esfuerzo	126
6.2.3. Matriz de rigidez	128
6.2.4. Coordenadas de área de un triángulo	129
6.2.5. Vector de fuerzas nodales equivalentes a la acción de fuerzas de superficie y de cuerpo	132

6.3.	Elemento rectangular bilineal	135
6.3.1.	Funciones de aproximación y funciones de forma	136
6.3.2.	Matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma y componentes de la deformación y del esfuerzo	138
6.3.3.	Presentación alternativa mediante submatrices por nudo	139
6.3.4.	Matriz de rigidez	141
6.3.5.	Vector de fuerzas equivalentes a fuerzas de superficie y de cuerpo	143
6.4.	Problemas propuestos	148
6.4.1.	Vector de fuerzas equivalentes a la acción de una presión de variación lineal sobre una cara de un elemento triangular lineal	148
6.4.2.	Matriz de rigidez de una región rectangular formada por dos elementos triangulares lineales	149
7.	Formulación del problema elástico lineal bidimensional mediante el método de los elementos finitos. Temas avanzados	151
7.1.	Generalidades sobre los elementos finitos de orden superior	151
7.2.	Generalidades sobre los elementos finitos isoparamétricos	153
7.3.	Elemento cuadrilateral bilineal isoparamétrico	154
7.3.1.	Geometría del elemento finito	156
7.3.2.	Funciones de aproximación y funciones de forma	157
7.3.3.	Matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma	157
7.3.4.	Matriz de rigidez	163
7.3.5.	Presentación alternativa mediante submatrices por nudo	167
7.3.6.	Vector de fuerzas equivalentes a fuerzas de superficie y de cuerpo	170
7.4.	Esfuerzos y deformaciones iniciales	173
7.4.1.	Esfuerzos y deformaciones iniciales en un elemento triangular lineal	176
7.4.2.	Esfuerzos y deformaciones iniciales en un elemento rectangular bilineal	177
7.4.3.	Esfuerzos y deformaciones iniciales en un elemento cuadrilateral bilineal isoparamétrico	179
7.4.3.1.	Deformaciones causadas por el cambio de la temperatura	180
7.5.	Técnicas de representación suave de la deformación y el esfuerzo	181
7.5.1.	Resultados elementales de la deformación o del esfuerzo	181

7.5.2. Extrapolación bilineal de la deformación o del esfuerzo en un seudo elemento de cuatro nudos en el interior de un elemento cuadrilateral	182
7.5.3. Resultados nodales promedio de la deformación o del esfuerzo	184
7.6. Aproximación de los elementos bidimensionales lineales a flexión pura	184
7.7. Problemas propuestos	186
8. Ejemplos de aplicación del método de los elementos finitos a problemas bidimensionales de elasticidad	189
8.1. Lámina sometida a tracción	189
8.2. Ménnsula de concreto sometida a una carga distribuida	204
8.3. Principio de Saint Venant	208
8.4. Estructura de drenaje	210
8.5. Estructura de drenaje	214
8.6. Problemas propuestos	216
8.7. Proyectos propuestos	218
9. Formulación del problema elástico lineal tridimensional mediante el método de los elementos finitos	225
9.1. Elemento tetraédrico lineal	225
9.2. Otros elementos finitos tridimensionales	234
9.3. Ejemplos de aplicación	234
9.3.1. Ensayo de resistencia al arrancamiento del concreto	234
9.3.2. Ensayo de compresión de un cilindro de concreto como material formado por agregados y mortero	240
9.3.3. Comportamiento de los conectores de cortante en una sección compuesta	243
9.3.4. Comportamiento de una conexión en acero de una viga I y una columna tubular rellena de concreto	243
9.4. Problemas propuestos	244
9.5. Proyectos propuestos	246
10. Formulación de placas estructurales delgadas mediante el método de los elementos finitos	253
10.1. Hipótesis básicas y clasificación de las placas estructurales	255
10.2. Teoría de placas de Kirchhoff – Love	258
10.2.1. Componentes del desplazamiento	258
10.2.2. Componentes de deformación y deformaciones generalizadas .	260
10.2.3. Esfuerzo normal y cortante	261

10.2.4. Momentos flectores y momento torsor	261
10.2.5. Relación entre esfuerzos y deformaciones generalizadas	264
10.2.6. Fuerzas cortantes	265
10.2.7. Aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales	265
10.3. Función de aproximación de un elemento finito no conforme	267
10.4. Elemento de placa rectangular de cuatro nudos no conforme MZC . .	268
10.5. Elemento de placa rectangular de cuatro nudos conforme BFS	269
10.6. Elemento finito de placa triangular no conforme CKZ	269
10.6.1. Función de aproximación	269
10.6.2. Funciones de forma y matriz de funciones de forma	272
10.6.3. Matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma	273
10.6.4. Aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales	278
10.6.5. Matriz de rigidez del elemento	280
10.6.6. Vector de fuerzas equivalentes a una carga distribuida en el elemento	282
10.7. Ejemplo de validación: Deflexión de una placa cuadrada empotrada en su contorno	284
10.8. Problemas propuestos	284
11. Formulación de cascarones estructurales mediante el método de los elementos finitos	285
12. Formulación del método de los elementos finitos en mecánica no lineal de sólidos	287
12.1. Principio de los Trabajos Virtuales	287
12.2. Vectores de fuerzas internas, externas y residuales	291
12.3. Formulación incremental no lineal del MEF	292
12.4. Planteamiento del problema no lineal mediante el método de Newton-Raphson	293
12.5. Solución numérica del problema no lineal mediante el método de Newton-Raphson	300
12.6. Aplicación de incrementos de carga prescrita	301
12.7. Aplicación de incrementos de desplazamiento prestablecido	303
12.8. Solución numérica del problema no lineal mediante el método de Newton-Raphson Modificado	304
12.9. Acelerador de Aitken en los métodos de Newton - Raphson	305

12.10 Opción de búsqueda lineal en los métodos de Newton-Raphson: <i>line search option</i>	307
12.11 Método de seguimiento de la trayectoria del equilibrio o <i>path – following method</i>	308
12.12 Método de control de un desplazamiento específico	310
12.13 Método de longitud de arco cilíndrico o <i>cylindrical arc-length method</i>	311
12.14 Otras modalidades del método de longitud de arco o <i>arc-length methods</i>	313
12.15 Métodos Cuasi-Newton o métodos secantes	313
12.16 Criterios de convergencia	314
12.17 Selección de la estrategia de solución del problema no lineal	317

Introducción

Este libro presenta una introducción al método de los elementos finitos aplicado a la respuesta mecánica de las estructuras y los sólidos en general, considerando un comportamiento lineal elástico isótropo del material, deformaciones infinitesimales y régimen estático de cargas.

Aquí se describe la formulación del método de los elementos finitos para sólidos, representados en un dominio tridimensional y también mediante sus simplificaciones en los espacios bidimensional y unidimensional. Asimismo, se presenta una aproximación básica para simular el comportamiento mecánico de estructuras laminares reduciendo la geometría a su plano medio. La implementación de cada tipo de formulación se ilustra mediante los ejemplos de aplicación incluidos al final de algunos capítulos.

Por lo tanto, este documento está dirigido a estudiantes de Ingeniería Civil, Ingeniería Mecánica, Maestría en Estructuras, Maestría en Geotecnia y Maestría en Mecánica, interesados en conocer el método de los elementos finitos como herramienta para cálculo del estado de esfuerzos y de deformaciones de sólidos en general.

El capítulo primero indica algunas nociones del método de los elementos finitos, incluyendo el concepto de funciones de forma y función de aproximación, como también la definición de matriz, sus operaciones y propiedades.

En el capítulo segundo se describen los elementos de la mecánica de sólidos necesarios en la formulación del método, como los conceptos de desplazamiento, deformación y esfuerzo, la ley de Hooke y el Principio de los Trabajos Virtuales. Como motivación al método de los elementos finitos, en los capítulos tercero y cuarto se ilustra la formulación del problema elástico lineal en estructuras simplificadas a barras sometidas a carga axial y a flexión, respectivamente.

En el capítulo cinco se extienden los conceptos presentados a una formulación general del problema elástico lineal. En los capítulos sexto, séptimo y octavo se describe la formulación del método en el espacio bidimensional y se presentan diferentes ejemplos de aplicación. En el capítulo noveno se define el elemento tetraédrico de cuatro nudos y se aplica al análisis tridimensional de sólidos.

Finalmente, en los capítulos décimo y undécimo se presentan los conceptos de placas estructurales delgadas y cascarones, incluyendo su formulación en el método de los elementos finitos.

Capítulo 1

Conceptos básicos del método de los elementos finitos

En las décadas del cuarenta y cincuenta se desarrollaron técnicas para analizar placas a flexión, sustituyendo su comportamiento continuo por un sistema de barras elásticas sometidas a carga axial, inicialmente de forma inductiva (Hrennikoff, 1941; McHenry, 1943) y más adelante mediante principios energéticos (Argyris, 1955; Turner, Clough, Martin, & Topp, 1956). Poco después, Clough (1960) publicó la formulación general del método de los elementos finitos aplicable a sistemas discretos, obteniendo esfuerzos y deformaciones en sólidos. La geometría de tales sólidos era representada por elementos finitos triangulares, bajo las consideraciones de material lineal elástico, estado plano de esfuerzos y deformación infinitesimal. Desde entonces, se han desarrollado diferentes tipos de elementos finitos, modelos constitutivos de materiales simples y compuestos, cinemáticas de pequeñas y grandes deformaciones, y metodologías de análisis lineal y no lineal en general (Crisfield, 1991; Bonet & Wood, 1997; Runesson, 1999; Belytschko, 2000; Holzapfel, 2000; Jirásek & Banzat, 2002; Reddy, 2004; Kojic & Bathe, 2005; O. C. Zienkiewicz, Taylor, & Zhu, 2005; Barbero, 2008; de Souza, Peric, & Owen, 2008)

Muchos de los problemas matemáticos de campo y de la mecánica del medio continuo descritos en función de variables continuas, se pueden resolver mediante el método de los elementos finitos, dividiendo el espacio y el tiempo del problema en pequeños subdominios e intervalos, que los representan de forma aproximada y discreta. Por lo tanto, la variable suavizada y continua que se desea obtener en el problema continuo, se remplaza por la colección de funciones continuas exclusivamente en el interior de cada subdominio, las cuales son compatibles en su contorno.

1.1. Definición del método de los Elementos Finitos

El método de los elementos finitos es un procedimiento numérico que permite resolver problemas de la mecánica del continuo, entre otros, con una aproximación aceptable para ingeniería (Cook, Malkus, Plesha, & Witt, 2001). En este procedimiento, el medio continuo se divide en un número finito de subdominios denominados *elementos finitos*, conectados entre sí por *nudos*, cuyo comportamiento responde a las ecuaciones de gobierno y a las condiciones de frontera (O.C. Zienkiewicz & Taylor, 2005). Los elementos finitos más sencillos tienen formas comunes que dependen del dominio en el cual se define el problema. Por ejemplo, en un dominio unidimensional los elementos tienen forma de segmentos rectos, en un dominio bidimensional los elementos finitos son triángulos o cuadriláteros y en el dominio tridimensional son tetraedros o hexaedros.

El conjunto de elementos finitos y de nudos que representan aproximadamente la geometría del sólido se denomina *malla de elementos finitos*. En la Figura 1.1(a) se muestra una barra ahusada sometida a una presión uniforme en uno de sus extremos en dirección z . El comportamiento mecánico de esta barra se puede simular de tres formas diferentes:

- En un dominio tridimensional mediante una malla de elementos finitos hexaédricos irregulares, como se ilustra en la Figura 1.1(b).
- En un dominio bidimensional en el plano zy , mediante una malla de elementos finitos cuadrilaterales que incluyen como parámetro el espesor constante $t^{(e)}$ (Figura 1.1(c)).
- En un dominio unidimensional en una dirección z coincidente con el eje longitudinal de la barra, mediante una malla de elementos unidimensionales lineales que incluyen como parámetro el área variable de su sección transversal $A^{(e)}$ (Figura 1.1(d)).

Las dos últimas representaciones son simplificaciones de la geometría del problema que conllevan un menor costo computacional y en algunos casos una menor aproximación de la solución.

En mecánica de sólidos las ecuaciones de gobierno vinculan la cinemática, el modelo constitutivo del material y las condiciones de equilibrio, mientras que las cantidades de interés corresponden al campo del desplazamiento, de la deformación y del esfuerzo en el sólido.

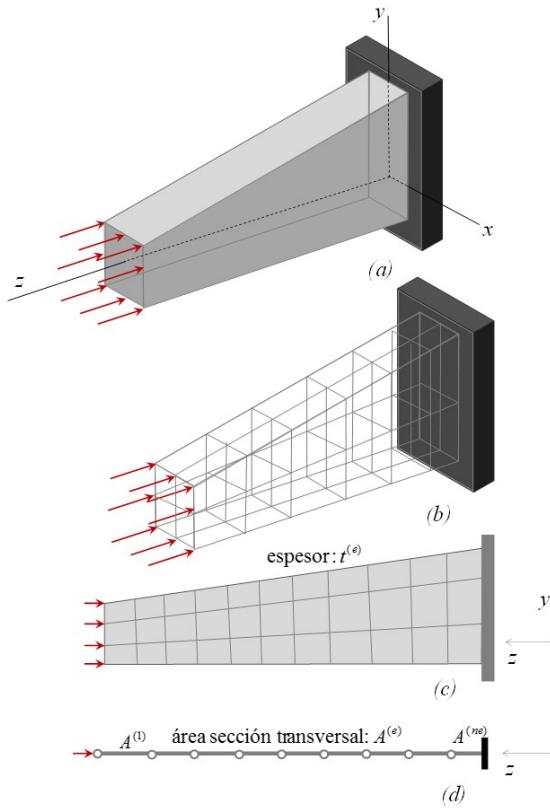


Figura 1.1: Barra ahusada sometida a una presión constante en uno de sus extremos: (a) esquema del problema, (b) representación en un dominio tridimensional, (c) representación en un dominio bidimensional y (d) representación en un dominio unidimensional.

1.2. Función de aproximación y función de forma de un elemento finito

A partir de las ecuaciones de gobierno se establece la variable escalar o vectorial que se desea obtener directamente en términos de la posición en el dominio del problema, denominada *cantidad de interés*. Asimismo, se pueden calcular otras variables a partir de la cantidad de interés, por ejemplo sus primeras derivadas en el espacio.

La cantidad de interés del problema se obtiene a partir del conjunto de funciones suaves y continuas definidas en el interior de cada elemento finito $\Omega^{(e)}$ denominadas *funciones de aproximación* $\phi^{(e)}$. Tales funciones son comúnmente polinomios cuyo orden identifica al tipo de elemento finito. Por ejemplo, el *elemento unidimensional*

lineal cuenta con la función de aproximación polinómica de primer orden presentada en la Ecuación (1.1a); en cambio, el *elemento unidimensional cuadrático* tiene la función de aproximación polinómica de orden 2 dada en la Ecuación (1.1b).

$$\phi^{(e)}(x) = \alpha_1^{(e)} + \alpha_2^{(e)}x \quad \forall x \in \Omega^{(e)} \quad (1.1a)$$

$$\phi^{(e)}(x) = \alpha_1^{(e)} + \alpha_2^{(e)}x + \alpha_3^{(e)}x^2 \quad \forall x \in \Omega^{(e)} \quad (1.1b)$$

En un dominio bidimensional, el *elemento triangular lineal* y el *elemento triangular cuadrático* exhiben funciones de aproximación lineal y cuadrática, respectivamente, de la forma:

$$\phi^{(e)}(x, y) = \alpha_1^{(e)} + \alpha_2^{(e)}x + \alpha_3^{(e)}y \quad (1.2a)$$

$$\phi^{(e)}(x, y) = \alpha_1^{(e)} + \alpha_2^{(e)}x + \alpha_3^{(e)}y + \alpha_4^{(e)}xy + \alpha_5^{(e)}x^2 + \alpha_6^{(e)}y^2 \quad (1.2b)$$

El elemento finito más sencillo en un dominio tridimensional es el *elemento tetraédrico lineal*, el cual cuenta con una función de aproximación lineal definida como:

$$\phi^{(e)}(x, y, z) = \alpha_1^{(e)} + \alpha_2^{(e)}x + \alpha_3^{(e)}y + \alpha_4^{(e)}z \quad (1.3)$$

En las ecuaciones anteriores, los coeficientes $\alpha_i^{(e)}$ son parámetros que dependen de los valores de la función de aproximación en su contorno.

En cada elemento finito se define el valor de la función de aproximación en lugares particulares de su dominio denominados *nudos*, de tal forma que dicha función evaluada en el nudo i , ubicado en la posición \mathbf{x}_i , es igual a $\phi^{(e)}(\mathbf{x}_i) = \phi_i^{(e)}$. Cada $\phi_i^{(e)}$ se identifica como el *valor nodal* de la función de aproximación en el nudo i del elemento e . El vector posición \mathbf{x}_i está conformado por las componentes (x_i, y_i, z_i) en un dominio tridimensional, por (x_i, y_i) en un dominio bidimensional y por x_i en un dominio unidimensional. Este tipo de elementos, cuyos valores nodales son iguales a la función de aproximación evaluada en los nudos exclusivamente, se denominan *elementos finitos de continuidad C_0* .

Se establece que el número de nudos del elemento coincide con el número de coeficientes $\alpha_i^{(e)}$, con el fin de expresar estos últimos en términos de los valores nodales $\phi_i^{(e)}$ para remplazarlos en la función de aproximación. Por ejemplo, el elemento unidimensional lineal que se muestra en la Figura 1.2(a), tiene los nudos 1 y 2 ubicados en sus extremos y sus valores nodales son $\phi^{(e)}(x_1^{(e)}) = \alpha_1^{(e)} + \alpha_2^{(e)}x_1 = \phi_1^{(e)}$ y $\phi^{(e)}(x_2^{(e)}) = \alpha_1^{(e)} + \alpha_2^{(e)}x_2^{(e)} = \phi_2^{(e)}$. De estas dos ecuaciones se obtienen los dos coeficientes $\alpha_1^{(e)} = (\phi_1^{(e)}x_2^{(e)} - \phi_2^{(e)}x_1^{(e)}) / (x_2^{(e)} - x_1^{(e)})$ y $\alpha_2^{(e)} = (\phi_2^{(e)} - \phi_1^{(e)}) / (x_2^{(e)} - x_1^{(e)})$,

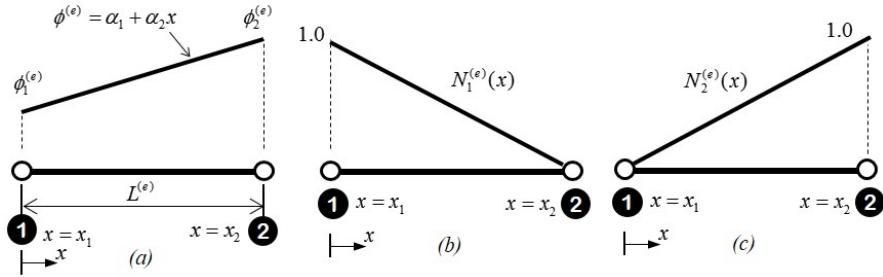


Figura 1.2: Elemento unidimensional lineal: (a) función de aproximación, (b) función de forma en el nudo 1 y (c) función de forma en el nudo 2.

los cuales se reemplazan en la Ecuación (1.4), de tal forma que la función de aproximación se reescribe:

$$\phi^{(e)}(x) = N_1^{(e)}(x)\phi_1^{(e)} + N_2^{(e)}(x)\phi_2^{(e)} \quad \forall x \in \Omega^{(e)} \quad (1.4)$$

Los coeficientes $N_i^{(e)}(x)$ que multiplican a los valores nodales en general se denominan *funciones de forma del elemento finito*. En particular tales funciones en un elemento unidimensional lineal son iguales a:

$$N_1^{(e)}(x) = \frac{x_2^{(e)} - x}{x_2^{(e)} - x_1^{(e)}}, \quad N_2^{(e)}(x) = \frac{x - x_1^{(e)}}{x_2^{(e)} - x_1^{(e)}} \quad \forall x \in \Omega^{(e)} \quad (1.5)$$

y se representan en las figuras Figura 1.2(b) y 1.2(c). Basándose en el mismo procedimiento se pueden escribir las funciones de aproximación de cualquier elemento finito de n nudos y continuidad C_0 en términos de sus funciones de forma y de sus valores nodales, así:

$$\phi^{(e)}(\mathbf{x}) = N_1^{(e)}(\mathbf{x})\phi_1^{(e)} + \dots + N_n^{(e)}(\mathbf{x})\phi_n^{(e)} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^{(e)} \quad (1.6)$$

donde $\mathbf{x} = (x, y, z)$ en dominios tridimensionales, $\mathbf{x} = (x, y)$ en dominios bidimensionales y $\mathbf{x} = x$ en dominios unidimensionales. De acuerdo con la ecuación anterior, el valor de $\phi^{(e)}$ en el interior del elemento es el resultado de la interpolación en la posición \mathbf{x} dada por los valores nodales $\phi_i^{(e)}$.

En el Capítulo 3, Capítulo 6 y Capítulo 9 se describen las funciones de forma de algunos elementos finitos en dominios unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales, respectivamente. En general tales funciones muestran las siguientes características:

- Las funciones de forma dependen de la posición y corresponden a polinomios del mismo orden de la función de aproximación del elemento.
- Las funciones de forma adquieren un valor de uno en su propio nudo y de cero cuando son evaluadas en los demás nudos del elemento.
- La sumatoria de las funciones de forma de un elemento evaluada en cualquier posición de su interior es igual a uno.
- La sumatoria de las primeras derivadas de las funciones de forma con respecto a la posición y evaluada en cualquier posición es igual a cero.

1.3. Función de aproximación en la malla de elementos finitos

En elementos finitos de continuidad C_0 el valor de la función de aproximación en un nudo común a varios elementos es el mismo. En consecuencia dicha variable se representa mediante una función continua a trazos en la malla de elementos finitos. Por ejemplo, la Figura 1.3(a) muestra la función de aproximación $\phi(x)$ de un problema unidimensional, representado mediante una malla de elementos finitos unidimensionales lineales de continuidad C_0 . Se observa la compatibilidad en los valores de la función de aproximación en los nudos comunes a dos elementos finitos. Otro ejemplo se indica en la Figura 1.4, donde se muestra la función de aproximación $\phi(x, y)$ de un problema bidimensional en el plano xy , cuya malla está conformada por elementos finitos triangulares de aproximación lineal.

En el problema mecánico estático la cantidad de interés corresponde al campo vectorial del desplazamiento. Cada componente del desplazamiento se representa con una función de aproximación independiente; sin embargo todas las funciones de aproximación son polinomios del mismo orden.

1.4. Elementos finitos de continuidad C_1

En algunos problemas es importante conservar un valor común de las primeras derivadas de la función de aproximación con respecto a la posición en el contorno compartido por varios elementos finitos, adicionalmente a la continuidad de la función de aproximación en esos mismos lugares. Para lograrlo se puede definir un elemento finito cuyos valores nodales correspondan a la evaluación de $\phi^{(e)}$ y de $\partial_x \phi^{(e)}$ en sus nudos. Este tipo de elementos se denominan *elementos finitos de continuidad C_1* . Un

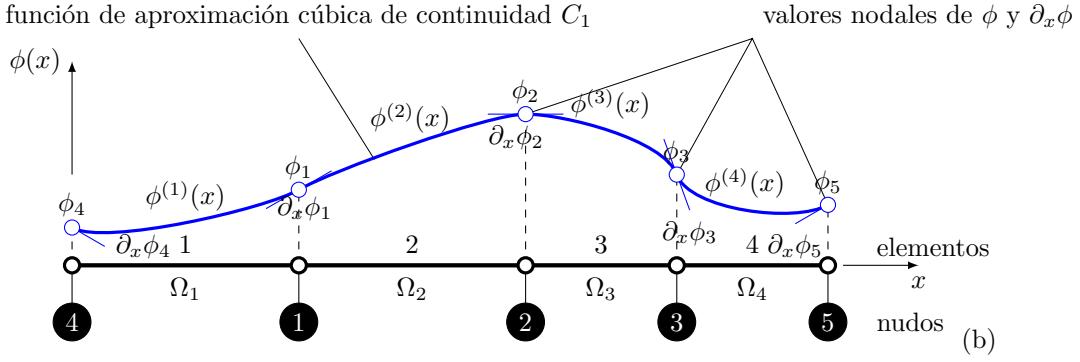
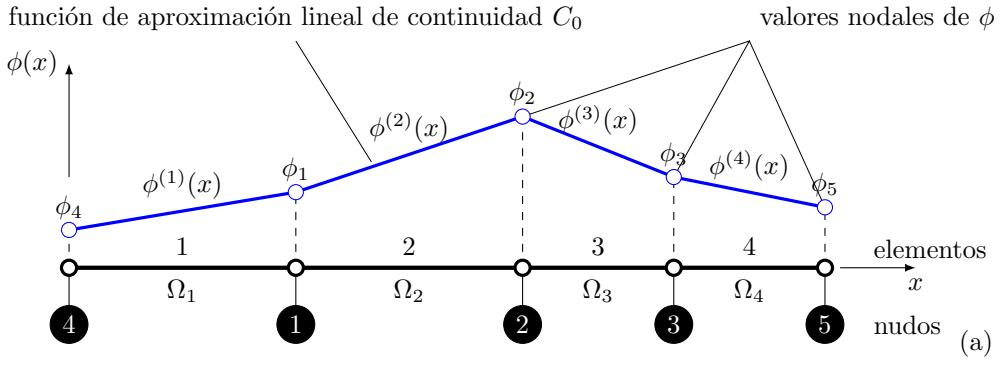


Figura 1.3: Función de aproximación de un problema unidimensional representado con una malla de: (a) elementos unidimensionales lineales de continuidad C_0 y (b) elementos unidimensionales cúbicos de continuidad C_1 .

ejemplo de elemento unidimensional de continuidad C_1 es aquel que tiene nudos en sus extremos y una función de aproximación cúbica de la forma:

$$\phi^{(e)}(x) = \alpha_1^{(e)} + \alpha_2^{(e)}x + \alpha_3^{(e)}x^2 + \alpha_4^{(e)}x^3 \quad \forall x \in \Omega^{(e)} \quad (1.7)$$

Este tipo de elemento cuenta con cuatro valores nodales correspondientes a la cantidad de interés y su primera derivada con respecto a la posición en cada nudo $\phi^{(e)}(x_1) = \phi_1^{(e)}$, $\partial_x \phi^{(e)}(x_1) = \partial_x \phi_1^{(e)}$, $\partial_x \phi^{(e)}(x_2) = \partial_x \phi_2^{(e)}$ y $\partial_x \phi^{(e)}(x_2) = \partial_x \phi_2^{(e)}$. A partir de tales valores y considerando que el origen coordenado está ubicado en el nudo inicial ($x_1 = 0, x_2 = L_{(e)}$), la función de aproximación se puede rescribir como:

$$\phi^{(e)}(x) = N_1^{(e)}(x)\phi_1^{(e)} + \bar{N}_1^{(e)}(x)\partial_x \phi_1^{(e)} + N_2^{(e)}(x)\phi_2^{(e)} + \bar{N}_2^{(e)}(x)\partial_x \phi_2^{(e)} \quad (1.8a)$$

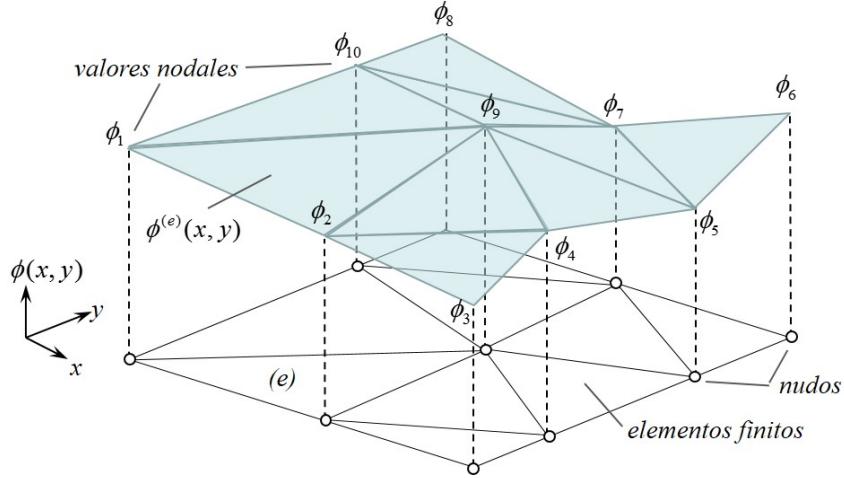


Figura 1.4: Función de aproximación de un problema bidimensional representado con una malla de elementos finitos triangulares lineales.

donde las funciones de forma son:

$$N_1^{(e)}(x) = 1 - \frac{3x^2}{L_{(e)}^2} + \frac{2x^3}{L_{(e)}^3}, \quad \bar{N}_1^{(e)}(x) = x - \frac{2x^2}{L_{(e)}} + \frac{x^3}{L_{(e)}^2}, \quad (1.8b)$$

$$N_2^{(e)}(x) = \frac{3x^2}{L_{(e)}^2} - \frac{2x^3}{L_{(e)}^3}, \quad \bar{N}_2^{(e)}(x) = -\frac{x^2}{L_{(e)}} + \frac{x^3}{L_{(e)}^2} \quad (1.8c)$$

La Figura 1.3(b) ilustra la función de aproximación obtenida en un problema unidimensional con elementos finitos cúbicos de continuidad C_1 . Allí se observan valores comunes de ϕ y de $\partial_x \phi$ en los nudos que conectan a dos elementos. En general, los problemas de vigas, placas y cascarones se resuelven con esta clase de elementos, como se describe en el Capítulo 3, Capítulo 10 y Capítulo 11, respectivamente.

1.5. Matrices

Una matriz es un arreglo rectangular de elementos o coeficientes organizados en filas y columnas, que pueden describir un grupo de ecuaciones de forma simultánea asociadas a operaciones como suma, multiplicación y derivación, entre otras (Grossman, 1996; Lay, 2011).

1.5.1. Notación

En este libro las matrices se denotan mediante una letra negrita y sus coeficientes se representan con la misma letra cursiva acompañada de uno o dos subíndices, los cuales indican su posición en el interior de la matriz, como se muestra en la siguiente ecuación. En una matriz \mathbf{A} el primer subíndice define el número de la fila y el segundo el número de la columna, es decir, el coeficiente A_{ij} está ubicado en la fila i y columna j . En cambio, el coeficiente de la fila i de una matriz columna \mathbf{b} se indica cómo b_i , y el coeficiente de la columna j de una matriz fila c se indica cómo c_j .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n] \quad (1.9)$$

Las dimensiones de una matriz están dadas por la cantidad de filas y de columnas que la componen, por ejemplo la matriz \mathbf{A} indicada en la expresión anterior tiene m filas por n columnas, es decir, sus dimensiones son $m \times n$.

1.5.2. Propiedades y operaciones básicas

A continuación se indican brevemente algunas de las propiedades y operaciones básicas de las matrices, útiles en el contexto del método de los elementos finitos.

- *Suma de matrices.* Sean $\mathbf{A}_{m \times n}$ y $\mathbf{B}_{m \times n}$ dos matrices del mismo tamaño, se define la matriz $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ como la suma de ellas obtenida de la adición término a término de sus coeficientes, es decir, $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$. Esta operación matricial cumple con la propiedad commutativa de tal manera que $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.
- *Multiplicación de una matriz por un escalar.* Sea λ una cantidad escalar y $\mathbf{A}_{m \times n}$ una matriz, el producto entre ambos $\mathbf{C} = \lambda \mathbf{A}$ es igual a la multiplicación de cada coeficiente de la matriz con el escalar, es decir $C_{ij} = \lambda A_{ij}$.
- *Multiplicación de matrices.* Sean las matrices $\mathbf{A}_{m \times p}$ y $\mathbf{B}_{p \times n}$ denominadas pre-multiplicador y pos-multiplicador, respectivamente, cuyo número de columnas p del pre-multiplicador es igual al número de filas del pos-multiplicador. Se define la matriz $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ como el resultado de la multiplicación matricial entre ellas obtenido de la forma $C_{ij} = \sum_{k=1}^p A_{ik}B_{kj}$. Esta operación matricial no cumple con la propiedad commutativa en general, es decir si las matrices fuesen cuadradas $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

- *Matriz cuadrada.* Se define como la matriz que tiene el mismo número de filas y de columnas, es decir a toda matriz \mathbf{A} de dimensiones $m \times m$.
- *Matriz columna.* Se define como la matriz que tiene m número de filas y una sola columna, la cual se indica de la forma $\mathbf{A}_{m \times 1}$.
- *Matriz fila.* Se define como la matriz que tiene una sola fila y n número de columnas, la cual se indica de la forma $\mathbf{A}_{1 \times n}$.
- *Matriz transpuesta.* Sea una matriz $\mathbf{A}_{m \times n}$ de coeficientes A_{ij} y dimensiones $m \times n$ la matriz transpuesta de \mathbf{A} indicada como $\mathbf{A}_{n \times m}^T$ es una matriz de n filas por m columnas cuyos coeficientes son $A_{ij}^T = A_{ji}$.
- *Matriz transpuesta de la multiplicación entre dos matrices.* Sea una matriz \mathbf{C} definida como el producto entre las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} , es decir, $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, la matriz transpuesta de \mathbf{C} es igual a $\mathbf{C}^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$.
- *Matriz simétrica.* Dada una matriz cuadrada $\mathbf{A}_{m \times m}$, la que cumple que $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, es decir, $A_{ij} = A_{ji}$ es una matriz simétrica.
- *Matriz identidad.* Se define como la matriz $\mathbf{I}_{m \times m}$ cuadrada de tamaño m cuyos coeficientes de la diagonal principal son iguales a 1 y los demás son iguales a 0. Dadas las matrices $\mathbf{A}_{m \times n}$ y $\mathbf{B}_{n \times m}$, la matriz identidad tiene como propiedad que $\mathbf{I}_{m \times m} \mathbf{A}_{m \times n} = \mathbf{A}_{m \times n}$ y $\mathbf{B}_{n \times m} \mathbf{I}_{m \times m} = \mathbf{B}_{n \times m}$.
- *Matriz inversa.* Sean \mathbf{A} y \mathbf{B} dos matrices cuadradas del mismo tamaño, si el producto entre ellas es igual a la matriz identidad, es decir $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$, la matriz \mathbf{B} es la matriz inversa de \mathbf{A} y se designa como \mathbf{A}^{-1} . En general se cumple que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$.
- *Matriz ortogonal.* Una matriz cuadrada \mathbf{A} es ortogonal si su inversa es igual a su transpuesta, es decir, si $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$. Por lo tanto $\mathbf{AA}^T = \mathbf{I}$ y $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$.
- *Determinante de una matriz.* Dada una matriz cuadrada $\mathbf{A}_{m \times m}$, su determinante indicado como $\det(\mathbf{A})$ o $|\mathbf{A}|$, es una cantidad escalar igual a $\sum_{i=1}^m A_{ij} \kappa(i, j)$, siendo $\kappa(i, j) = (-1)^{i+j} \omega(i, j)$ el cofactor del coeficiente A_{ij} . El escalar $\omega(i, j)$ corresponde al menor de \mathbf{A} en i, j y es igual al determinante de la matriz formada después de eliminar la fila i y la columna j de la matriz \mathbf{A} . Este procedimiento se denomina *método de expansión por cofactores*.
- *Determinante de una matriz transpuesta.* El determinante de una matriz transpuesta es igual al determinante de la misma matriz \mathbf{A} .

- *Determinante de matrices pequeñas.* En particular, los determinantes de matrices cuadradas de tamaño 2 y de tamaño 3 son iguales a:

$$\det(\mathbf{A}_{2 \times 2}) = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}_{3 \times 3}) &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \\ &= A_{11} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} - A_{12} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{13} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \quad (1.11) \\ &= A_{11} (A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32}) - A_{12} (A_{21}A_{33} - A_{23}A_{31}) \\ &\quad + A_{13} (A_{21}A_{32} - A_{22}A_{31}) \end{aligned}$$

- *Matriz de operadores diferenciales.* La matriz de operadores diferenciales $\tilde{\nabla}$ es un aplicación lineal que representa el conjunto de derivadas con respecto a la posición, que podrían actuar sobre una o varias funciones de (x, y, z) . Por lo tanto, un vector que contiene a las derivadas espaciales de varias funciones se pueden expresar como la matriz de operadores diferenciales actuando sobre dichas funciones, en una operación matricial similar a la multiplicación. Por ejemplo, un vector que contiene las derivadas de las funciones $f(x, y, z)$ y $g(x, y, z)$ se puede expresar de la forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \text{ donde } \tilde{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

- *Integral de una matriz.* La integral de una matriz corresponde a otra matriz del mismo tamaño, cuyos términos son iguales a la integral de los coeficientes de la matriz original. Sea la matriz \mathbf{A} definida en la Ecuación (1.9), la integral

de \mathbf{A} con respecto a Ω es igual a:

$$\int_{\Omega} \mathbf{A} d\Omega = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} A_{11} d\Omega & \int_{\Omega} A_{12} d\Omega & \cdots & \int_{\Omega} A_{1n} d\Omega \\ \int_{\Omega} A_{21} d\Omega & \int_{\Omega} A_{22} d\Omega & & \int_{\Omega} A_{2n} d\Omega \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \int_{\Omega} A_{m1} d\Omega & \int_{\Omega} A_{m2} d\Omega & \cdots & \int_{\Omega} A_{mn} d\Omega \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

1.5.3. Regla de Cramer

La regla de Cramer es un método explícito para obtener la solución de un sistema linealmente independiente de ecuaciones simultáneas. Un conjunto de m ecuaciones simultáneas de la forma:

$$\begin{aligned} A_{11}b_1 + A_{12}b_1 + \dots + A_{1i}b_i + \dots + A_{1m}b_m &= g_1 \\ \vdots \\ A_{i1}b_1 + A_{i2}b_1 + \dots + A_{ii}b_i + \dots + A_{im}b_m &= g_i \\ \vdots \\ A_{m1}b_1 + A_{m2}b_1 + \dots + A_{mi}b_i + \dots + A_{mm}b_m &= g_m \end{aligned}$$

se puede escribir matricialmente así:

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_i \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix} = \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1i} & \cdots & A_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & \cdots & A_{ii} & \cdots & A_{im} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mi} & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{g} = \mathbf{Ab} \quad (1.14)$$

La regla de Cramer establece que cada uno de los coeficientes del vector \mathbf{b} , es decir, $b_1, \dots, b_i, \dots, b_m$ son iguales al cociente entre dos determinantes derivados a la matriz \mathbf{A} , de la forma:

$$b_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}} \quad (1.15)$$

Siendo \mathbf{A}_i la matriz cuadrada formada al remplazar la i -nésima columna de \mathbf{A} por

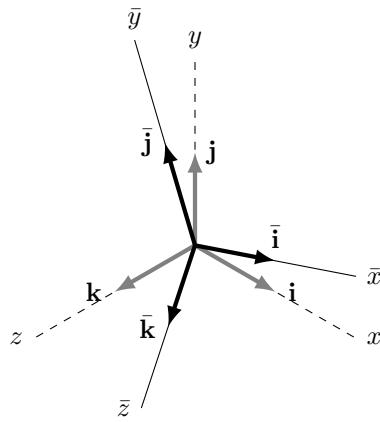


Figura 1.5: Vectores unitarios de dos sistemas coordinados diferentes.

el vector \mathbf{g} , es decir:

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & g_1 & \cdots & A_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & \cdots & g_i & \cdots & A_{im} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & g_m & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

1.6. Transformación entre sistemas coordinados de las componentes de un vector

La Figura 1.6(a) muestra al vector \mathbf{v} , cuyas componentes han sido determinadas con respecto a un sistema coordenado global xyz definido por los vectores base \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} , de la forma:

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} \quad (1.17)$$

Dado un nuevo sistema coordenado local $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, mostrado en la Figura 1.6(b), que también cumple con la regla de la mano derecha y cuyos vectores base son $\bar{\mathbf{i}}$, $\bar{\mathbf{j}}$ y $\bar{\mathbf{k}}$ mostrados en la Figura 1.5, el mismo vector \mathbf{v} se puede expresar como:

$$\mathbf{v} = v_{\bar{x}} \bar{\mathbf{i}} + v_{\bar{y}} \bar{\mathbf{j}} + v_{\bar{z}} \bar{\mathbf{k}} \quad (1.18)$$

donde $v_{\bar{x}}$, $v_{\bar{y}}$ y $v_{\bar{z}}$ corresponden a las componentes del vector \mathbf{v} con respecto al sistema coordenado $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$.

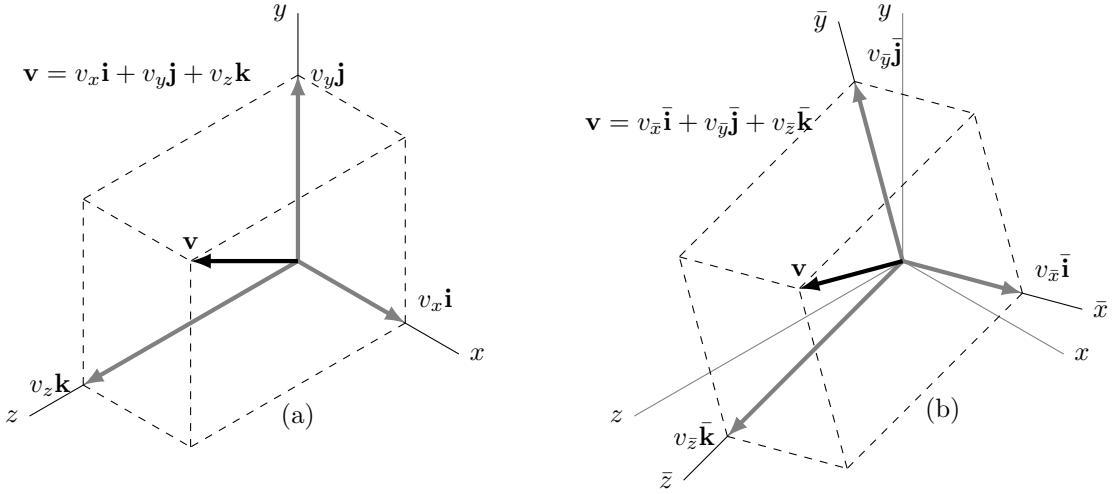


Figura 1.6: Vector definido en dos sistemas coordenados: (a) sistema coordenado global, (b) sistema coordenado local.

La relación entre los dos sistemas coordenados se puede expresar mediante los cosenos de los ángulos conformados entre los vectores unitarios direccionales de los dos sistemas coordinados, denominados *cosenos directores* y definidos de la forma (Linero & Garzón, 2010):

$$\begin{aligned}\lambda_{\bar{x}x} &= \cos \theta_{\bar{x}x} = \bar{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{i}, & \lambda_{\bar{y}y} &= \cos \theta_{\bar{y}y} = \bar{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{j}, & \lambda_{\bar{z}z} &= \cos \theta_{\bar{z}z} = \bar{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} \\ \lambda_{\bar{y}x} &= \cos \theta_{\bar{y}x} = \bar{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{i}, & \lambda_{\bar{y}y} &= \cos \theta_{\bar{y}y} = \bar{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{j}, & \lambda_{\bar{y}z} &= \cos \theta_{\bar{y}z} = \bar{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{k} \\ \lambda_{\bar{z}x} &= \cos \theta_{\bar{z}x} = \bar{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{i}, & \lambda_{\bar{z}y} &= \cos \theta_{\bar{z}y} = \bar{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{j}, & \lambda_{\bar{z}z} &= \cos \theta_{\bar{z}z} = \bar{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k}\end{aligned}\quad (1.19)$$

Por ejemplo, $\lambda_{\bar{x}y}$ corresponde al coseno del ángulo $\theta_{\bar{x}y}$ formado entre el vector unitario $\bar{\mathbf{i}}$ paralelo al eje \bar{x} del sistema coordenado local y el vector unitario \mathbf{j} paralelo al eje y del sistema coordenado global. Dado que la proyección del vector \mathbf{i} sobre los ejes coordenados \bar{x} , \bar{y} y \bar{z} es igual a los productos escalares $\bar{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{i}$, $\bar{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{i}$ y $\bar{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{i}$, respectivamente, dicho vector se puede definir con respecto al sistema coordenado $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ de la forma:

$$\mathbf{i} = \lambda_{\bar{x}x} \bar{\mathbf{i}} + \lambda_{\bar{y}x} \bar{\mathbf{j}} + \lambda_{\bar{z}x} \bar{\mathbf{k}} \quad (1.20)$$

De manera similar se pueden obtener las siguientes expresiones de los vectores unitarios en las direcciones del sistema coordenado global en términos de los vectores unitarios del sistema coordenado local:

$$\begin{aligned}\mathbf{j} &= \lambda_{\bar{x}y} \bar{\mathbf{i}} + \lambda_{\bar{y}y} \bar{\mathbf{j}} + \lambda_{\bar{z}y} \bar{\mathbf{k}} \\ \mathbf{k} &= \lambda_{\bar{x}z} \bar{\mathbf{i}} + \lambda_{\bar{y}z} \bar{\mathbf{j}} + \lambda_{\bar{z}z} \bar{\mathbf{k}}\end{aligned}\quad (1.21)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.20) y (1.21) en la Expresión (1.17), se obtiene el vector \mathbf{v} con respecto al sistema coordenado xyz de la forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= v_x(\lambda_{\bar{x}x}\bar{\mathbf{i}} + \lambda_{\bar{y}x}\bar{\mathbf{j}} + \lambda_{\bar{z}x}\bar{\mathbf{k}}) + v_y(\lambda_{\bar{x}y}\bar{\mathbf{i}} + \lambda_{\bar{y}y}\bar{\mathbf{j}} + \lambda_{\bar{z}y}\bar{\mathbf{k}}) + v_z(\lambda_{\bar{x}z}\bar{\mathbf{i}} + \lambda_{\bar{y}z}\bar{\mathbf{j}} + \lambda_{\bar{z}z}\bar{\mathbf{k}}) \\ &= (v_x\lambda_{\bar{x}x} + v_y\lambda_{\bar{x}y} + v_z\lambda_{\bar{x}z})\bar{\mathbf{i}} + (v_x\lambda_{\bar{y}x} + v_y\lambda_{\bar{y}y} + v_z\lambda_{\bar{y}z})\bar{\mathbf{j}} \\ &\quad + (v_x\lambda_{\bar{z}x} + v_y\lambda_{\bar{z}y} + v_z\lambda_{\bar{z}z})\bar{\mathbf{k}}\end{aligned}\quad (1.22)$$

Después de igualar la expresión anterior con la Ecuación (1.18), se observa que las componentes del vector \mathbf{v} en el sistema coordenado local se relacionan con las componentes en el sistema global de la forma:

$$\begin{aligned}v_{\bar{x}} &= v_x\lambda_{\bar{x}x} + v_y\lambda_{\bar{x}y} + v_z\lambda_{\bar{x}z} \\ v_{\bar{y}} &= v_x\lambda_{\bar{y}x} + v_y\lambda_{\bar{y}y} + v_z\lambda_{\bar{y}z} \\ v_{\bar{z}} &= v_x\lambda_{\bar{z}x} + v_y\lambda_{\bar{z}y} + v_z\lambda_{\bar{z}z}\end{aligned}\quad (1.23)$$

Rescribiendo las expresiones anteriores en notación matricial se obtiene la ecuación general de transformación de sistema coordenado de un vector de la forma:

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{T}_v \mathbf{v} \quad (1.24)$$

es decir:

$$\begin{bmatrix} v_{\bar{x}} \\ v_{\bar{y}} \\ v_{\bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{\bar{x}x} & \lambda_{\bar{x}y} & \lambda_{\bar{x}z} \\ \lambda_{\bar{y}x} & \lambda_{\bar{y}y} & \lambda_{\bar{y}z} \\ \lambda_{\bar{z}x} & \lambda_{\bar{z}y} & \lambda_{\bar{z}z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

Se define en la siguiente ecuación la matriz de transformación de un vector en el espacio, cuyos coeficientes corresponden a los cosenos directores indicados en la Ecuación (1.19).

$$\mathbf{T}_v = \begin{bmatrix} \lambda_{\bar{x}x} & \lambda_{\bar{x}y} & \lambda_{\bar{x}z} \\ \lambda_{\bar{y}x} & \lambda_{\bar{y}y} & \lambda_{\bar{y}z} \\ \lambda_{\bar{z}x} & \lambda_{\bar{z}y} & \lambda_{\bar{z}z} \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

Si ahora se despeja la matriz columna de las componentes del vector en sistema coordenado global de la Ecuación (1.24), se tiene que $\mathbf{v} = \mathbf{T}_v^{-1}\bar{\mathbf{v}}$. Dado que la matriz de transformación \mathbf{T}_v es ortogonal y por lo tanto $\mathbf{T}^{(e)T} = \mathbf{T}^{(e)-1}$, el vector \mathbf{v} es igual a:

$$\mathbf{v} = \mathbf{T}_v^T \bar{\mathbf{v}} \quad (1.27)$$

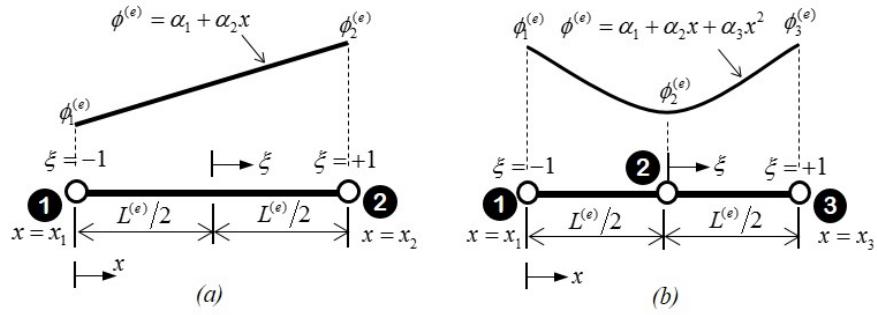


Figura 1.7: Elementos finitos unidimensionales y sus funciones de aproximación: (a) unidimensional lineal, (b) unidimensional cuadrático.

1.7. Problemas propuestos

1.7.1. Funciones de forma en coordenadas naturales de un elemento unidimensional lineal

El sistema coordenado natural ξ describe la posición en el interior de un elemento finito mediante cantidades relativas adimensionales. En elementos unidimensionales el origen de ξ se ubica en la mitad del elemento y adquiere un valor de 1 en el extremo derecho y de -1 en el extremo izquierdo, como se indica en la Figura 1.7. Un elemento unidimensional lineal de longitud $L^{(e)}$ está conformado por dos nudos ubicados en sus extremos (Figura 1.7(a)) y cuenta con una función de aproximación dada por la Ecuación 1.1a. Obtener las funciones de forma del elemento finito asociadas a cada nudo en términos de su coordenada natural ξ . Verificar si cumplen las propiedades de las funciones de forma.

1.7.2. Funciones de forma de un elemento unidimensional cuadrático

Un elemento unidimensional cuadrático de longitud $L^{(e)}$ está conformado por tres nudos ubicados en la mitad del elemento y en sus extremos (Figura 1.7(b)) y cuenta con una función de aproximación dada en la Ecuación 1.1b. Obtener las funciones de forma del elemento finito asociadas a cada nudo en sistema coordenado global x y en sistema coordenado natural ξ . Verificar si cumplen las propiedades de las funciones de forma.

Capítulo 2

Elementos de la mecánica de sólidos para problemas lineales elásticos

A continuación se describen los elementos de la mecánica clásica de sólidos en el marco de la mecánica del medio continuo que intervienen en la descripción del problema (Lai & Saibel, 1965; Malvern, 1969; Timoshenko & Goodier, 1970; Spencer, 1990; Ortiz, 1998; Mase & Mase, 1999; Lemaître & Chaboche, 2002; Oliver & Agelet, 2002; Reddy, 2008; Linero & Garzón, 2010).

2.1. Campos del desplazamiento y la deformación infinitesimal

Se define el campo vectorial del desplazamiento $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = [u \ v \ w]^T$ como el cambio de posición de un punto material o partícula entre las configuraciones actual y de referencia, ubicado en la posición $\mathbf{x} = [x \ y \ z]^T$ de la configuración de referencia del sólido, como lo ilustra la Figura 2.1(a). En problemas bajo cargas estáticas monótonicas con material lineal elástico, la configuración de referencia o configuración no deformada establece la posición de cada partícula del sólido en el instante inicial $\tilde{t} = 0$, es decir en el momento en que aún no se han aplicado las cargas externas. En cambio, la configuración actual o configuración deformada describe la ubicación de cada partícula en el instante presente \tilde{t} después de aplicadas las cargas externas. Sea L la longitud de un segmento recto PQ trazado entre dos puntos materiales denominado línea material en la configuración de referencia y l la longitud de la misma línea en la configuración actual (Figura 2.1(a)). La deformación longitudinal infinitesimal en esa dirección se define como el alargamiento de una línea material dividida entre su longitud en la configuración de referencia, es decir $\varepsilon_{long} = (l - L)/L$.

En un entorno diferencial, la línea material de longitud dx paralela al eje x en la

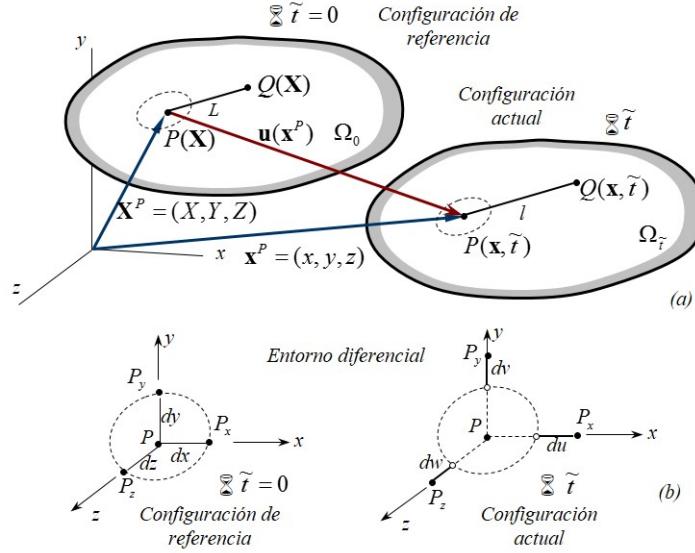


Figura 2.1: Configuración de referencia y configuración actual de un cuerpo.

configuración de referencia se alarga una cantidad du como lo indica la Figura 2.1(b), de tal forma que la deformación longitud en dirección x es igual a $\varepsilon_{xx} = du/dx$. Siendo $u(x, y, z)$ la componente del desplazamiento en la dirección x función de la posición $u(x, y, z)$, la componente de deformación ε_{xx} es igual a:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.1)$$

De forma análoga, se obtienen las componentes de deformación longitudinal ε_{yy} y ε_{zz} en las direcciones y y z , de la forma:

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.2)$$

Sean PQ y PR dos líneas materiales perpendiculares entre sí en un entorno diferencial sobre el plano xy cuya longitud es dx y dy , respectivamente, en la configuración de referencia. En la configuración actual para un tiempo t , tales líneas cambian a los segmentos $P'Q'$ y $P'R'$, como lo indica la Figura 2.2.

El ángulo formado entre las líneas materiales es igual a $\pi/2$ en la configuración de referencia y se reduce a $\pi/2 - \gamma_{xy}$ en la configuración actual. El ángulo γ_{xy} es igual a la suma de los ángulos $\theta^{(Q)}$ y $\theta^{(R)}$ mostrados en la Figura 2.2, los cuales son aproximadamente iguales a $\tan \theta^{(Q)} = dv/dx$ y $\tan \theta^{(R)} = du/dy$, respectivamente, bajo la

hipótesis de deformación infinitesimal. Siendo $u(x, y, z)$ y $v(x, y, z)$ las componentes del desplazamiento en función de la posición, se define a γ_{xy} como la componente de deformación angular en notación ingenieril sobre el plano xy de la forma:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.3)$$

De manera similar, se obtienen las deformaciones angulares ingenieriles γ_{xz} y γ_{yz} en los planos xz y yz , respectivamente, de la forma:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.4a)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.4b)$$

Las tres componentes de deformación longitudinal en las direcciones x , y y z y las tres componentes de deformación angular ingenieril en los planos xy , xz y yz definen el estado de la deformación infinitesimal de un punto material $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$, el cual se puede expresar como una matriz columna de la forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}]^T \quad (2.5)$$

Por lo tanto, el campo de la deformación en notación ingenieril se puede expresar de forma matricial como el operador diferencial $\tilde{\nabla}$ actuando sobre el campo del desplazamiento $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ es decir:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \tilde{\nabla} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_y & \partial_x & 0 \\ \partial_z & 0 & \partial_x \\ 0 & \partial_z & \partial_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x u \\ \partial_y v \\ \partial_z w \\ \partial_y u + \partial_x v \\ \partial_z u + \partial_x w \\ \partial_z v + \partial_y w \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

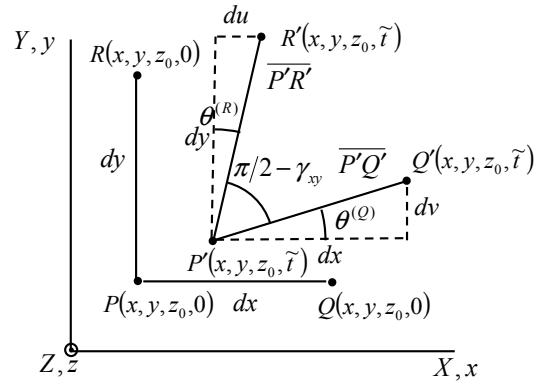


Figura 2.2: Configuración de referencia y configuración actual de dos líneas materiales perpendiculares en un entorno diferencial.

Siendo

$$\tilde{\nabla} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_y & \partial_x & 0 \\ \partial_z & 0 & \partial_x \\ 0 & \partial_z & \partial_y \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

2.2. Campo del esfuerzo

Se define el *vector tracción* $\mathbf{t}^{(n)} = t_x^{(n)}\mathbf{i} + t_y^{(n)}\mathbf{j} + t_z^{(n)}\mathbf{k}$ como aquel que representa la acción interna de una fuerza por unidad de área actuando sobre un plano de normal $\mathbf{n} = n_x\mathbf{i} + n_y\mathbf{j} + n_z\mathbf{k}$ como se ilustra en la Figura 2.3(a). En general se observa que la dirección de $\mathbf{t}^{(n)}$ es diferente a la dirección de \mathbf{n} .

Se establece la existencia de un vector tracción $\mathbf{t}^{(x)}$ actuando sobre una superficie cuyo vector normal unitario \mathbf{i} tiene la dirección positiva del eje x , como lo muestra la Figura 2.4(a).

2.2.1. Componentes del esfuerzo

Las componentes de los vectores tracción que actúan sobre las caras normales a los ejes x , y y z , se definen con las componentes del estado de esfuerzos, de la siguiente forma:

- La componente rectangular del vector $\mathbf{t}^{(x)}$ en la dirección x se denomina esfuerzo normal en dirección x y se designa como σ_{xx} .
- Las componentes de $\mathbf{t}^{(x)}$ en las direcciones y y z corresponden a los esfuerzos cortantes en los planos xy y xz , y se designan como σ_{xy} y σ_{xz} , respectivamente.
- La componente rectangular del vector $\mathbf{t}^{(y)}$ en la dirección y se denomina esfuerzo normal en dirección y y se designa como σ_{yy} .
- Las componentes de $\mathbf{t}^{(y)}$ en las direcciones x y z corresponden a los esfuerzos cortantes en los planos yx y yz , y se designan como σ_{yx} y σ_{yz} , respectivamente.

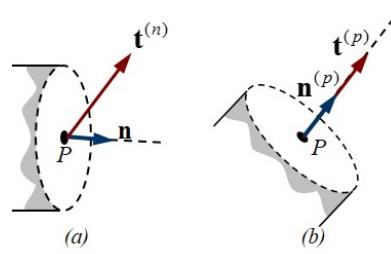


Figura 2.3: Campo del esfuerzo: (a) vector tracción actuando sobre una superficie de normal \mathbf{n} , (b) caso particular donde el vector tracción y el vector normal a la superficie sobre la cual actúa tienen la misma dirección.

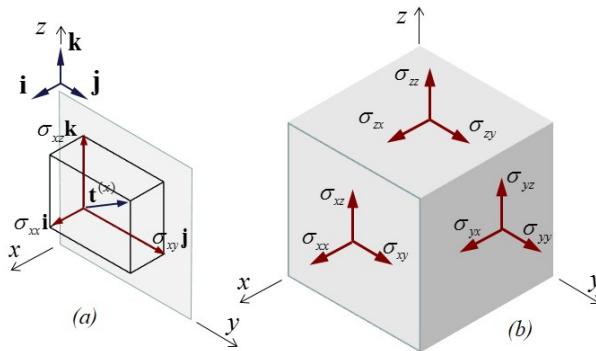


Figura 2.4: Campo del esfuerzo: (a) componentes rectangulares de un vector tracción actuando sobre una superficie de normal unitario \mathbf{i} , (b) componentes de esfuerzo en un cubo infinitesimal.

- La componente rectangular del vector $\mathbf{t}^{(z)}$ en la dirección z se denomina esfuerzo normal en dirección z y se designa como σ_{zz} .
- Las componentes de $\mathbf{t}^{(z)}$ en las direcciones x y y corresponden a los esfuerzos cortantes en los planos zx y zy , y se designan como σ_{zx} y σ_{zy} , respectivamente.

En la Figura 2.4(b) se ilustra un cubo infinitesimal cuyas caras positivas son normales a los semiejes positivos de un sistema coordenado cartesiano xyz . Se definen las *componentes de esfuerzos* como las componentes rectangulares de los vectores tracción $\mathbf{t}^{(x)}, \mathbf{t}^{(y)}, \mathbf{t}^{(z)}$ actuando en cada una de las caras positivas del cubo infinitesimal, es decir:

$$\begin{aligned}\mathbf{t}^{(x)} &= t_x^{(x)}\mathbf{i} + t_y^{(x)}\mathbf{j} + t_z^{(x)}\mathbf{k} = \sigma_{xx}\mathbf{i} + \sigma_{xy}\mathbf{j} + \sigma_{xz}\mathbf{k} \\ \mathbf{t}^{(y)} &= t_x^{(y)}\mathbf{i} + t_y^{(y)}\mathbf{j} + t_z^{(y)}\mathbf{k} = \sigma_{yx}\mathbf{i} + \sigma_{yy}\mathbf{j} + \sigma_{yz}\mathbf{k} \\ \mathbf{t}^{(z)} &= t_x^{(z)}\mathbf{i} + t_y^{(z)}\mathbf{j} + t_z^{(z)}\mathbf{k} = \sigma_{zx}\mathbf{i} + \sigma_{zy}\mathbf{j} + \sigma_{zz}\mathbf{k}\end{aligned}\quad (2.8)$$

Las condiciones de equilibrio establecen que las componentes de esfuerzo cortante $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$ y $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$. Por lo tanto, el estado de esfuerzos en un punto material está definido por las tres componentes de esfuerzo normal $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ en las direcciones x, y y z , respectivamente, y por las tres componentes de esfuerzo cortante $\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ en los planos xy , xz y yz , correspondientemente.

Las componentes del estado de esfuerzos de un punto material se pueden expresar de diferentes formas. Una de ellas es mediante una matriz cuadrada $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ así:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

La notación de Voigt establece otra manera de representación de las variables en un problema mecánico. En tal notación las componentes de esfuerzo se expresan como una matriz columna $\boldsymbol{\sigma}$, de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{yz}]^T \quad (2.10)$$

Este último formato se utiliza en la implementación del método de los elementos finitos porque requiere arreglos de menor tamaño que los indicados anteriormente.

2.2.2. Vector tracción en términos del estado de esfuerzos

El valor promedio del vector tracción sobre una superficie arbitraria que contiene al punto P se establece a partir del equilibrio de las fuerzas actuando sobre las caras de un tetraedro elemental, como se ilustra en la Figura 2.5, considerando conocidas las componentes de esfuerzo.

Las caras PRT , PQT y PQR del tetraedro son superficies normales a los ejes coordenados y a los vectores $-\mathbf{i}$, $-\mathbf{j}$ y $-\mathbf{k}$, respectivamente; en cambio la cara QTR es normal al vector unitario. Sea δS el área de la cara QTR , el área de las caras PRT , PQT y PQR del tetraedro corresponden a $\delta S_x = n_x \delta S$, $\delta S_y = n_y \delta S$ y $\delta S_z = n_z \delta S$, respectivamente.

Las fuerzas actuantes en las cuatro caras del tetraedro son las siguientes: sobre la cara PRT actúa $-\mathbf{t}^{(x)} \delta S_x = -\mathbf{t}^{(x)} n_x \delta S$, sobre PQT actúa $-\mathbf{t}^{(y)} \delta S_y = -\mathbf{t}^{(y)} n_y \delta S$, sobre PQR actúa $-\mathbf{t}^{(z)} \delta S_z = -\mathbf{t}^{(z)} n_z \delta S$ y sobre la cara inclinada QTR actúa $\mathbf{t}^{(n)} \delta S$. Se establece el equilibrio estático de fuerzas del tetraedro elemental como la sumatoria de los valores promedio de las fuerzas actuantes, despreciando las fuerzas distribuidas por unidad de volumen, así:

$$\mathbf{t}^{(n)} = n_x \mathbf{t}^{(x)} + n_y \mathbf{t}^{(y)} + n_z \mathbf{t}^{(z)} \quad (2.11)$$

En consecuencia, las componentes del vector tracción actuando sobre la superficie

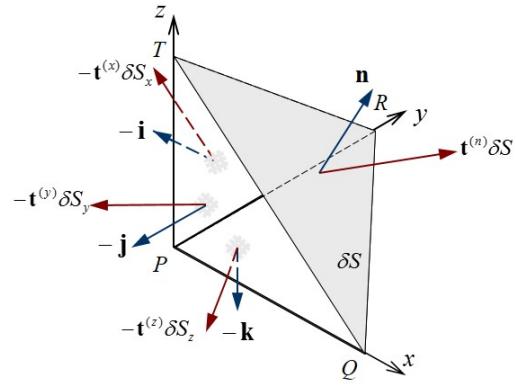


Figura 2.5: Fuerzas actuantes sobre un tetraedro infinitesimal en la vecindad del punto material P .

inclinada del tetraedro serán iguales a:

$$\begin{aligned} t_x^{(n)} &= n_x t_x^{(x)} + n_y t_x^{(y)} + n_z t_x^{(z)} = n_x \sigma_{xx} + n_y \sigma_{yx} + n_z \sigma_{zx} \\ t_y^{(n)} &= n_x t_y^{(x)} + n_y t_y^{(y)} + n_z t_y^{(z)} = n_x \sigma_{xy} + n_y \sigma_{yy} + n_z \sigma_{zy} \\ t_z^{(n)} &= n_x t_z^{(x)} + n_y t_z^{(y)} + n_z t_z^{(z)} = n_x \sigma_{xz} + n_y \sigma_{yz} + n_z \sigma_{zz} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Representando las componentes de esfuerzo como se indica en la Ecuación 2.9 y las componentes del vector tracción y el vector normal al plano como matrices columna, las ecuaciones anteriores se pueden expresar de forma matricial así:

$$\begin{bmatrix} t_x^{(n)} \\ t_y^{(n)} \\ t_z^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}^{(n)} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{n} \quad (2.13)$$

2.2.3. Esfuerzos y direcciones principales

En general el vector tracción y el vector normal a la superficie sobre la cual actúa tienen direcciones diferentes. Sin embargo, existe una condición particular en la cual ambos vectores conservan la misma dirección, es decir, $\mathbf{t}^{(p)} = \sigma_{(p)} \mathbf{n}^{(p)}$, como lo ilustra la Figura 2.3(b). Igualando esta expresión con la Ecuación 2.13 y recordando que $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^T = \hat{\boldsymbol{\sigma}}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n}^{(p)} - \sigma_{(p)} \mathbf{n}^{(p)} &= (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \sigma_{(p)} \mathbf{I}) \mathbf{n}^{(p)} = \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} (\sigma_{xx} - \sigma_{(p)}) & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & (\sigma_{yy} - \sigma_{(p)}) & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & (\sigma_{zz} - \sigma_{(p)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x^{(p)} \\ n_y^{(p)} \\ n_z^{(p)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.14)$$

La solución no trivial de un problema de valores propios como este, en el cual el estado de esfuerzos es conocido, se obtiene cuando el determinante de la matriz cuadrada del lado izquierdo es igual a cero, es decir, $\det(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \sigma_{(p)} \mathbf{I}) = 0$. Lo anterior corresponde a una ecuación cúbica en función de $\sigma_{(p)}$, de la forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{(p)}^3 - I_1 \sigma_{(p)}^2 + I_2 \sigma_{(p)} - I_3 &= 0 \\ I_1 &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \\ I_2 &= \frac{1}{2}((\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2 - (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 + 2\sigma_{xy}^2 + 2\sigma_{xz}^2 + 2\sigma_{yz}^2)) \\ I_3 &= \det(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Los coeficientes I_1, I_2, I_3 se reconocen como invariantes de esfuerzo, porque su valor es el mismo sin importar el sistema coordenado al cual estén referidas las componentes de esfuerzo.

Las tres raíces de esta ecuación se denominan *esfuerzos principales* y se identifican como el esfuerzo principal mayor σ_1 , el intermedio σ_2 y el menor σ_3 , siendo $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Los esfuerzos principales mayor y menor corresponden a los valores máximo y mínimo de los esfuerzos normales con respecto a cualquier sistema coordenado (Mase & Mase, 1999).

Cada esfuerzo principal $\sigma_{(p)}$ actúa sobre una superficie cuyo vector normal unitario es $\mathbf{n}^{(p)}$, como se ilustra en la Figura 2.6. Estos últimos corresponden a los vectores propios de la Ecuación 2.14 y se denominan *direcciones principales de esfuerzo* $\mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)}, \mathbf{n}^{(3)}$.

En un sistema coordenado cartesiano cuyos ejes son paralelos a las direcciones principales de esfuerzo $\hat{x}\hat{y}\hat{z}$, las componentes de esfuerzo cortante son nulas (Figura 2.6).

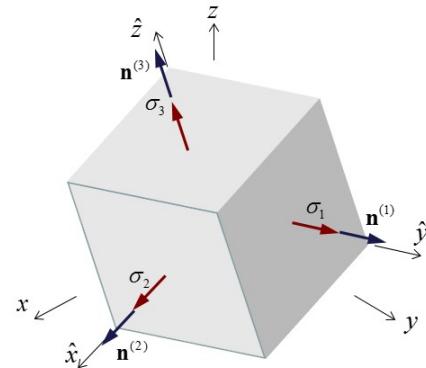


Figura 2.6: Campo del esfuerzo. Esfuerzos y direcciones principales en un cubo infinitesimal.

2.3. Ecuación constitutiva de un material lineal elástico isótropo: ley de Hooke

La ley de Hooke establece una relación lineal entre el esfuerzo normal y la deformación longitudinal en la misma dirección, como lo indica la Figura 2.7(a), siendo la constante de proporcionalidad entre el esfuerzo y la deformación un parámetro del material isótropo denominado módulo de elasticidad o módulo de Young E . De igual forma, la ley de Hooke para cortante establece una relación lineal entre el esfuerzo cortante y la deformación angular ingenieril en un plano específico, como lo indica la Figura 2.7(b), cuya constante de proporcionalidad G es otro parámetro del material denominado módulo de elasticidad a cortante. Este último se relaciona con el módulo de Young de la forma:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.16)$$

El esfuerzo de tracción actuante sobre la probeta produce un alargamiento en la dirección axial acompañado de una contracción transversal o perpendicular a la dirección del esfuerzo. En materiales elásticos lineales isótropos, la deformación lateral

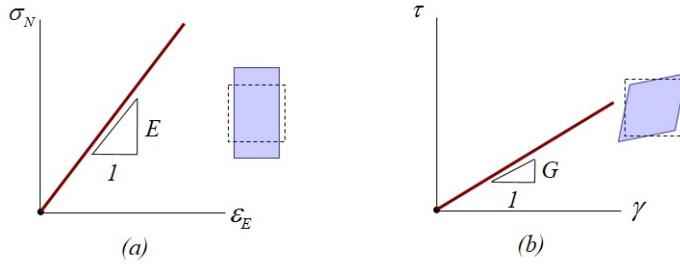


Figura 2.7: Ley de Hooke en el campo unidimensional: (a) relación esfuerzo normal vs. Deformación longitudinal, (b) relación esfuerzo cortante vs. deformación angular.

asociada a la contracción transversal es proporcional a la deformación axial asociada al alargamiento longitudinal. El cociente entre la deformación en la dirección lateral y la deformación en la dirección axial se conoce como relación de Poisson ν y se define como:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{\text{lateral}}}{\varepsilon_{\text{axial}}} \quad (2.17)$$

Sea un paralelepípedo diferencial unitario de lados paralelos a los ejes coordenados xyz sometido exclusivamente a un esfuerzo normal σ_{xx} en la dirección x mostrado en la Figura 2.8(a). La deformación longitudinal en la dirección x es igual a $\varepsilon_{xx} = \sigma_{xx}/E$, mientras que la deformación lateral dada en las direcciones y y z corresponde a $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\nu\sigma_{xx}/E$. De la misma manera, si el elemento diferencial está sometido a un esfuerzo normal σ_{yy} solamente como lo indica la Figura 2.8(b), la deformación longitudinal en la misma dirección del esfuerzo será $\varepsilon_{yy} = \sigma_{yy}/E$ y la deformación lateral en las direcciones x y z es igual a $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{zz} = -\nu\sigma_{yy}/E$. Si ahora actúa un esfuerzo normal σ_{zz} sobre el elemento diferencial como se ilustra en la Figura 2.8(c), la deformación longitudinal en la misma dirección es igual a $\varepsilon_{zz} = \sigma_{zz}/E$ y la deformación lateral en las direcciones x y y corresponde a $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\nu\sigma_{zz}/E$.

Considerando que los esfuerzos cortantes solo producen deformaciones angulares, las deformaciones longitudinales obtenidas de la acción de los esfuerzos normales son iguales a:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz}) \quad (2.18a)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (-\nu\sigma_{xx} + \sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz}) \quad (2.18b)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} (-\nu\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (2.18c)$$

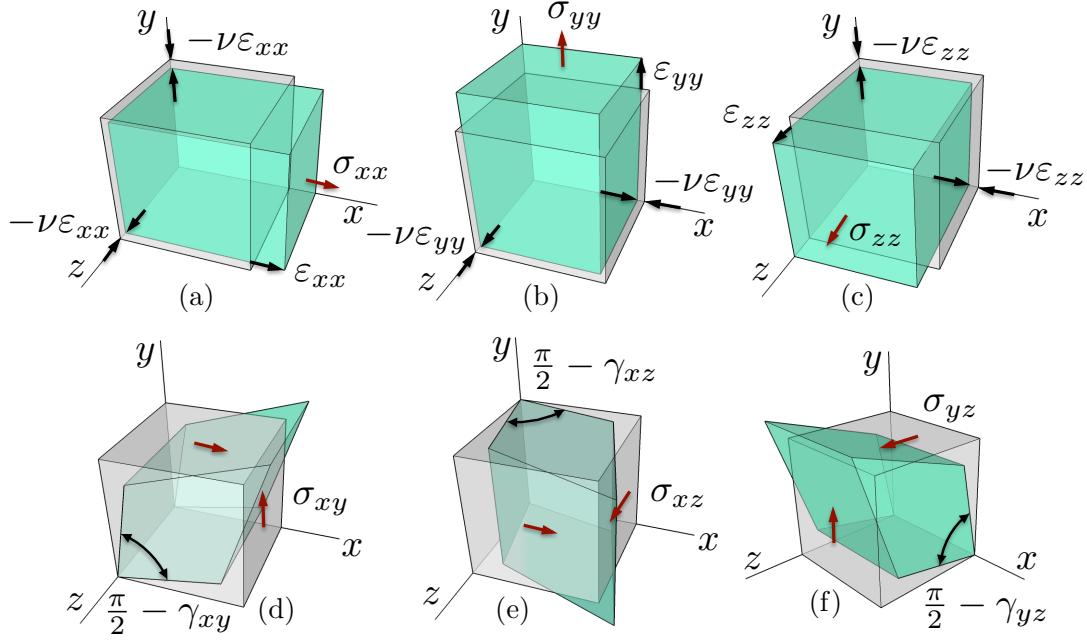


Figura 2.8: Componentes de deformación en un elemento diferencial cuando actúa: (a) un esfuerzo normal en dirección x , (b) un esfuerzo normal en dirección y , (c) un esfuerzo normal en dirección z , (d) un esfuerzo cortante en el plano xy , (e) un esfuerzo cortante en el plano xz , (f) un esfuerzo cortante en el plano yz .

Despejando las componentes de esfuerzo normal de la expresión anterior, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{zz}] \quad (2.19a)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_{xx} + (1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{zz}] \quad (2.19b)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy} + (1-\nu)\varepsilon_{zz}] \quad (2.19c)$$

Por otro lado, la deformación angular ingenieril en el plano xy es proporcional al esfuerzo cortante en dicho plano de la forma $\gamma_{xy} = \sigma_{xy}/G$, como lo ilustra la Figura 2.8(d). De igual manera, se obtienen las siguientes relaciones en los planos xz (Figura 2.8(e)) y yz (Figura 2.8(f)):

$$\gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G} \quad , \quad \gamma_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{G} \quad , \quad \gamma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G} \quad (2.20)$$

Despejando las componentes de esfuerzo cortante y sustituyendo la Ecuación

(2.16) se tiene:

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \quad , \quad \sigma_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xz} \quad , \quad \sigma_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{yz} \quad (2.21)$$

Las seis expresiones dadas en las ecuaciones (2.19) y (2.21) se pueden escribir de forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} = \bar{E} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ sim & & & & & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

donde $\bar{E} = E/(1+\nu)(1-2\nu)$. De acuerdo a lo anterior, se define la matriz constitutiva de un material elástico lineal isótropo \mathbf{D} como:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ sim & & & & & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Por lo tanto, la ecuación constitutiva será de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.24)$$

Asimismo, se puede despejar la matriz columna de las deformaciones así:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \quad (2.25)$$

La matriz constitutiva inversa \mathbf{D}^{-1} se obtiene de las ecuaciones (2.16) y (2.18), de la forma:

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ & & & & 2(1+\nu) & 0 \\ sim & & & & & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

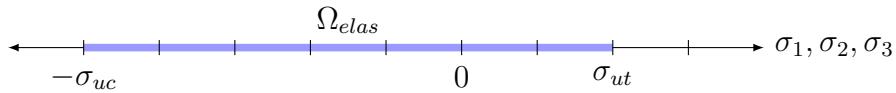


Figura 2.9: Dominio elástico simplificado Ω_{elas} del criterio de Rankine modificado.

2.4. Criterio de fractura de Rankine modificado

El *criterio del esfuerzo normal máximo diferenciado* o *criterio de Rankine modificado* permite definir el final del comportamiento elástico y el comienzo de la fractura en materiales frágiles, cuyos umbrales de resistencia a la compresión y a la tensión son diferentes.

Dados los esfuerzos principales σ_1 , σ_2 y σ_3 de una partícula en un sólido, cuyo material tiene una resistencia a la tensión σ_{ut} y a la compresión σ_{uc} , se establece que el límite del comportamiento elástico ocurre bajo las siguientes condiciones:

- cuando el esfuerzo normal máximo o esfuerzo principal mayor $\sigma_{\max} = \max[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$, alcanza el valor de la resistencia a tensión del material σ_{ut} , ó
- cuando el esfuerzo normal mínimo o esfuerzo principal menor $\sigma_{\min} = \min[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$ alcanza la resistencia a compresión del material $-\sigma_{uc}$.

Por lo tanto, todo punto material tiene comportamiento elástico si su estado principal de esfuerzos $[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$ cumple que:

$$-\sigma_{uc} < \sigma_1 < \sigma_{ut} , \quad -\sigma_{uc} < \sigma_2 < \sigma_{ut} , \quad -\sigma_{uc} < \sigma_3 < \sigma_{ut} , \quad (2.27)$$

2.5. Criterio de fluencia de von Mises

El *criterio de la energía de distorsión* o *criterio fluencia de von Mises* es un indicador del inicio del proceso de fluencia en materiales dúctiles, cuyo umbral de resistencia a tracción y a compresión es el mismo. Este criterio establece que la fluencia de un punto material, comienza cuando la *densidad de energía de distorsión* es igual a la densidad de energía de distorsión obtenida en un ensayo uniaxial, el cual alcanza el esfuerzo normal de fluencia σ_Y . La energía de deformación por unidad de volumen o densidad de energía de deformación \hat{u} en régimen lineal elástico es igual a:

$$\hat{u} = \int \boldsymbol{\sigma}^T d\boldsymbol{\varepsilon} = \int \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}^T d\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-T} \boldsymbol{\sigma} \quad (2.28)$$

Reemplazando la Ecuación (2.26) en la expresión anterior y considerando las componentes de esfuerzo definidas con respecto a un sistema coordenado principal, la densidad de energía de deformación en función de los esfuerzos principales se expresa como:

$$\begin{aligned}\hat{u} &= \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) \\ \hat{u} &= -\frac{\nu}{2E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + \frac{1+\nu}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)\end{aligned}\quad (2.29)$$

Todo estado de esfuerzos se puede descomponer como la suma de su parte esférica $\boldsymbol{\sigma}^{esf}$ y su parte desviadora $\boldsymbol{\sigma}^{dev}$, es decir $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{esf} + \boldsymbol{\sigma}^{dev}$, donde $\sigma_M = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ y:

$$\boldsymbol{\sigma}^{esf} = [\sigma_M \ \sigma_M \ \sigma_M \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (2.30a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{dev} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{esf} = [(\sigma_1 - \sigma_M) \ (\sigma_2 - \sigma_M) \ (\sigma_3 - \sigma_M) \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (2.30b)$$

De acuerdo a lo anterior, la densidad de energía de deformación producida por la parte esférica del esfuerzo, denominada *densidad de energía de deformación por extensión* \hat{u}_{ext} es igual a:

$$\hat{u}_{ext} = \hat{u}(\boldsymbol{\sigma}^{esf}) = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (2.31)$$

Asimismo, la densidad de energía producida por la parte desviadora del esfuerzo, denominada *densidad de energía de deformación por distorsión* \hat{u}_{dis} es igual a:

$$\hat{u}_{dis} = \hat{u}(\boldsymbol{\sigma}^{dev}) = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2] \quad (2.32)$$

Cuando comienza la fluencia en un ensayo uniaxial a tracción, las componentes principales de esfuerzo son iguales a $\sigma_1 = \sigma_Y$ y $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, de tal forma que la densidad de energía de deformación por distorsión corresponde a:

$$\hat{u}_{dis}^Y = \frac{1+\nu}{6E} 2\sigma_Y^2 \quad (2.33)$$

En un ensayo uniaxial a compresión, donde $\sigma_3 = -\sigma_Y$ y $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, el valor de \hat{u}_{dis}^Y es igual al presentado en la Ecuación (2.33). El criterio de fluencia de von Mises establece que un estado de esfuerzos de una partícula es elástico, si cumple con la condición expresada a continuación. La densidad de energía de deformación por distorsión del estado tridimensional actuante, es menor que la respectiva densidad

de energía obtenida en un ensayo uniaxial a tracción al inicio de la fluencia en el material, es decir,

$$\hat{u}_{dis} < \hat{u}_{dis}^Y \quad (2.34)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.32) y (2.33) en la expresión anterior se concluye que:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 < 2\sigma_Y^2 \quad (2.35)$$

Con el fin de facilitar la identificación del inicio de la fluencia en un punto material se define como *esfuerzo de von Mises* al campo escalar expresado de la forma:

$$\sigma_{vm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \quad (2.36)$$

Por lo tanto, el dominio elástico de este criterio está limitado por estados de esfuerzos cuyo esfuerzo de von Mises sea menor que el esfuerzo normal de fluencia del material, es decir:

$$\sigma_{vm} < \sigma_Y \quad (2.37)$$

2.6. Principio de los Trabajos Virtuales

La posición de todas las partículas de un cuerpo material en un instante se denomina configuración. Se definen como configuraciones admisibles al conjunto de configuraciones que satisfacen las condiciones de frontera cinemáticas de un cuerpo. Por ejemplo, la Figura 2.10 ilustra algunas configuraciones admisibles y no admisibles de una viga en voladizo.

De todas las configuraciones admisibles, solo una de ellas, denominada configuración verdadera, responde a la condición de equilibrio de un cuerpo sometido a fuerzas reales (Oñate, 1995; Oliver & Agelet, 2002).

Las configuraciones admisibles están restringidas a la vecindad de la configuración verdadera, por lo tanto se obtienen de *variaciones infinitesimales* o simplemente *variaciones* de dicha configuración. Las variaciones dadas por las configuraciones admisibles que además cumplen con las condiciones de equilibrio en un cuerpo material se denominan *desplazamientos virtuales*. Tales desplazamientos corresponden a valores arbitrarios mientras actúan valores fijos de las fuerzas reales en el cuerpo.

En cuerpos deformables, el trabajo virtual producido por las fuerzas reales se puede dividir en dos partes: el trabajo virtual realizado por las fuerzas internas denominado *trabajo virtual interno* y el trabajo virtual realizado por las fuerzas externas llamado *trabajo virtual externo* (Oñate, 1995).

Sea un sólido de volumen V y de superficie de contorno Γ , sujeto a fuerzas de cuerpo por unidad de volumen \mathbf{b} , a fuerzas de superficie por unidad de área \mathbf{p} y a

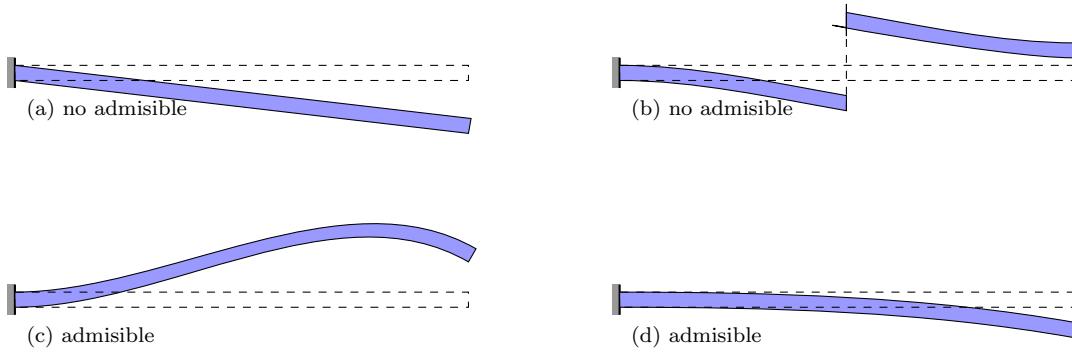


Figura 2.10: Ejemplos de configuraciones admisibles y no admisibles de una viga en voladizo.

fuerzas puntuales $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ aplicadas sobre el contorno $(\Gamma_p \cup \Gamma_f) \subset \Gamma$, como lo indica la Figura 2.11. Las condiciones de frontera sobre el cuerpo corresponden a valores conocidos del desplazamiento real $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$ en los puntos materiales que hacen parte de un contorno definido $\Gamma_u \subset \Gamma$.

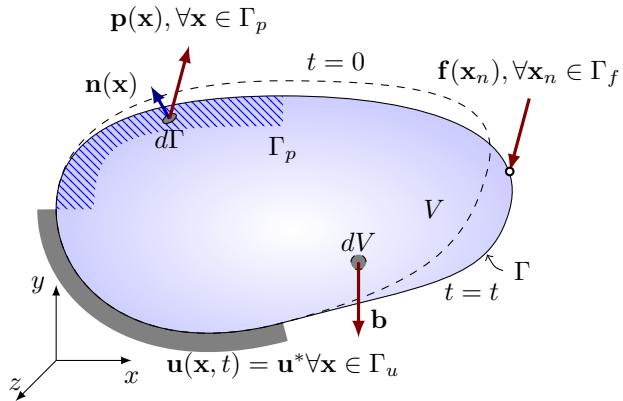


Figura 2.11: Sólido sometido a acciones externas.

El campo del desplazamiento virtual $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) = [\delta u \ \delta v \ \delta w]^T$, definido como una variación del desplazamiento, corresponde a una función cualquiera que cumple con la condición de borde de la forma:

$$\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (2.38)$$

El *trabajo virtual externo* es realizado por las fuerzas reales externas \mathbf{b} , \mathbf{p} y $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ mientras se presenta un desplazamiento virtual $\delta\mathbf{u}$. En cambio, el *trabajo virtual interno* es producido por el esfuerzo $\boldsymbol{\sigma}$ mientras ocurren deformaciones generadas por desplazamientos virtuales $\tilde{\nabla}\delta\mathbf{u}$, es decir, es igual a la densidad de energía de deformación $(\tilde{\nabla}\delta\mathbf{u})^T\boldsymbol{\sigma}$ integrada en el volumen del sólido. El *Principio de los Trabajos Virtuales* establece que un cuerpo está en *equilibrio* si y solo si el trabajo virtual realizado por todas las acciones internas y externas es nulo, es decir:

$$\int_V (\tilde{\nabla}\delta\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{\Gamma_p} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{p} dS + \int_V \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} dV + \sum_{n=1}^r \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_n)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \quad (2.39)$$

donde $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_n)$ y $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ son los vectores de desplazamiento virtual y de fuerza puntual de una partícula ubicada en la posición \mathbf{x}_n . El parámetro r indica el total de puntos materiales donde se aplican fuerzas puntuales.

La ecuación anterior es válida para todo campo de desplazamientos virtuales que cumpla con las condiciones de frontera cinemáticas dadas en la Ecuación (2.38). Los vectores de fuerzas puntuales $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$, de fuerzas de superficie \mathbf{p} y de fuerzas de cuerpo \mathbf{b} son de la forma:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = [f_x \ f_y \ f_z]^T, \quad \mathbf{p} = [p_x \ p_y \ p_z]^T, \quad \mathbf{b} = [b_x \ b_y \ b_z]^T \quad (2.40)$$

2.7. Planteamiento del problema en el medio continuo

El problema del comportamiento mecánico de un sólido sometido a acciones externas se plantea de la siguiente manera:

Obtener el campo de los desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ para todo punto material en la posición \mathbf{x} que pertenece al dominio del sólido V , el cual cumple con las condiciones de frontera $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^*$ en todo \mathbf{x} contenido en un contorno definido $\Gamma_u \subset \Gamma$, y que además satisface la relación deformación – desplazamiento expresadas en la Ecuación (2.6), la relación constitutiva del material indicada en la Ecuación (2.22) y las condiciones de equilibrio planteada mediante el Principio de los Trabajos Virtuales en la Ecuación (2.39)).

Después de obtenido el campo de desplazamiento, se pueden calcular los campos de la deformación y del esfuerzo para todo punto material del sólido utilizando las expresiones (2.6) y (2.22).

La solución analítica está limitada a problemas sencillos con geometrías regulares; por tal razón, el planteamiento anterior requiere de una implementación mediante métodos numéricos, por ejemplo el método de los elementos finitos.

2.8. Elementos de la mecánica de sólidos para problemas bidimensionales

En algunos problemas donde el comportamiento mecánico es el mismo en los puntos materiales contenidos en diferentes planos perpendiculares, el dominio se puede simplificar a un espacio bidimensional. Por lo tanto, los campos del desplazamiento, la deformación y el esfuerzo no dependen de la componente de la posición normal al plano donde están contenidos, por ejemplo, si el problema se simplifica a un plano xy , tales los campos son funciones de la posición (x, y) e independientes de z .

2.8.1. Condición plana de esfuerzos

Un sólido está en *condición plana de esfuerzos*, si las componentes de esfuerzo que no están contenidas en dicho plano son nulas. Dos ejemplos de tal condición son las pilas llenas de puentes en forma de T en concreto bajo cargas gravitacionales o las platinas de conexión articuladas en acero sometidas a fuerzas transmitidas por el pasador, como se muestra en la Figura 2.12(a) y(b), respectivamente. Estos ejemplos se pueden simplificar a una condición plana de esfuerzos en el plano xy , como lo indica la Figura 2.13, siendo nulas las componentes de esfuerzo fuera de dicho plano, es decir:

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0 \quad (2.41)$$

y en consecuencia el campo de los esfuerzos se puede expresar mediante una matriz columna de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y) = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy}]^T \quad (2.42)$$

Las componentes de deformación dadas en las ecuaciones (2.18) y (2.20) se reducen a las siguientes:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) , \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (-\nu \sigma_{xx} + \sigma_{yy}) , \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{xy} , \quad \gamma_{xz} = 0 , \quad \gamma_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Despejando las componentes de esfuerzo de las expresiones anteriores, se puede obtener la siguiente relación matricial $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}$ entre las componentes de esfuerzo y de deformación contenidas en el plano xy , para una condición plana de esfuerzos.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$



Figura 2.12: Ejemplo de sólido en condición plana de esfuerzos: (a) pila llena en forma de T de un puente en concreto (tomado de happypontist.blogspot.com), (b) platina de conexión articulada en acero (tomada de carpenteroak.com)

donde la matriz constitutiva elástica para un estado plano de esfuerzos \mathbf{D} y la matriz columna de las componentes de la deformación contenidas en el plano xy son iguales a:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

La componente de deformación longitudinal en dirección z se expresa mediante una ecuación escalar adicional en función de las demás componentes de deformación longitudinal, de la forma:

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \quad (2.46)$$

En condición plana de esfuerzos, las direcciones y los esfuerzos principales se obtienen aplicando la simplificación expresada en (2.19) sobre las ecuaciones (2.14)

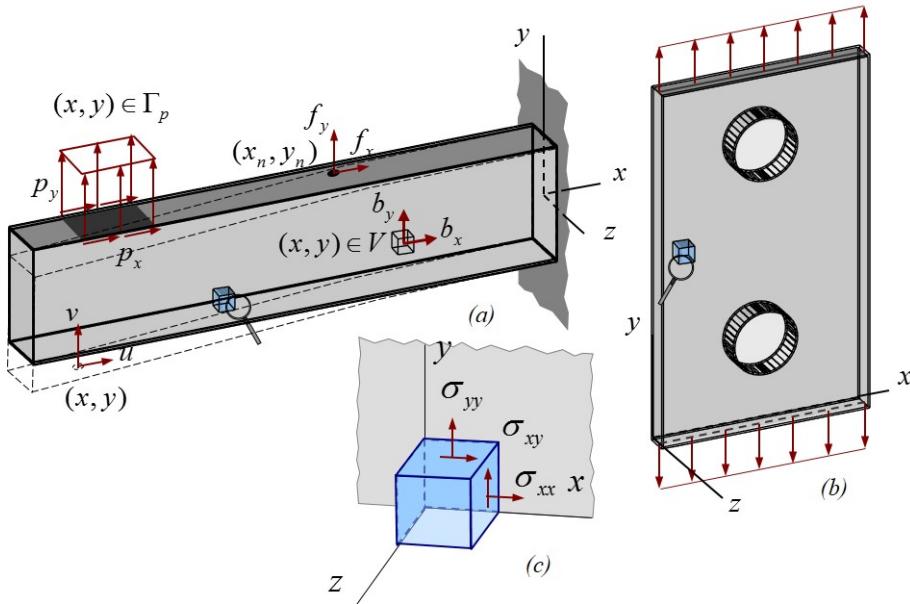


Figura 2.13: Sólido en condición plana de esfuerzos en el plano xy : (a) viga sometida a cargas puntuales, presiones y de cuerpo, (b) lámina sometida a tensión, (c) estado de esfuerzos en un elemento infinitesimal.

y (2.15), de tal forma que:

$$\begin{bmatrix} (\sigma_{xx} - \sigma_{(p)}) & \sigma_{yx} & 0 \\ \sigma_{xy} & (\sigma_{yy} - \sigma_{(p)}) & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_{(p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x^{(p)} \\ n_y^{(p)} \\ n_z^{(p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{(p)}(\sigma_{(p)}^2 - I_1\sigma_{(p)} + I_2) &= 0 \quad , \quad I_3 = 0 \\ I_1 &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} \quad , \quad I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + 2\sigma_{xy}^2)) = \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2 \end{aligned} \quad (2.48)$$

La solución de la ecuación anterior corresponde a los esfuerzos principales sin ordenar $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$. Se observa que uno de los esfuerzos principales es igual a cero, es decir $\sigma_a = 0$, mientras que σ_b, σ_c son las raíces de la ecuación cuadrática a la izquierda de la igualdad en la ecuación anterior, cuyos valores son:

$$\sigma_b, \sigma_c = \frac{1}{2} \left[(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \pm \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \right] \quad (2.49)$$

Los esfuerzos principales: máximo, intermedio y mínimo corresponden a los esfuerzos principales ordenados de mayor a menor, tal que $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. En particular se observa que si uno de los esfuerzos principales es igual a cero, el esfuerzo principal máximo siempre es positivo o cero y el esfuerzo principal mínimo es negativo o cero.



Figura 2.14: Ejemplo de sólido en condición plana de deformaciones: presa hidráulica de Koyna (India) (tomado de www.indianetzone.com)

2.8.2. Condición plana de deformaciones

Un sólido está en *condición plana de deformaciones*, si las componentes de deformación que no están contenidas en dicho plano son nulas. Un ejemplo de tal condición es el comportamiento de algunas presas hidráulicas de sección transversal constante, como la mostrada en la Figura 2.14. En dicho ejemplo, una rebanada de presa o muro de contención que soporta la presión hidráulica y el peso propio, se puede simplificar a una condición plana de deformaciones en el plano xy , como lo indica la Figura 2.15.

Las componentes de deformación fuera del plano xy , en la condición plana de deformaciones corresponden a:

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad , \quad \gamma_{xz} = 0 \quad , \quad \gamma_{yz} = 0 \quad (2.50)$$

y en consecuencia el campo de las deformaciones se puede expresar mediante una matriz columna reducida de la forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}]^T \quad (2.51)$$

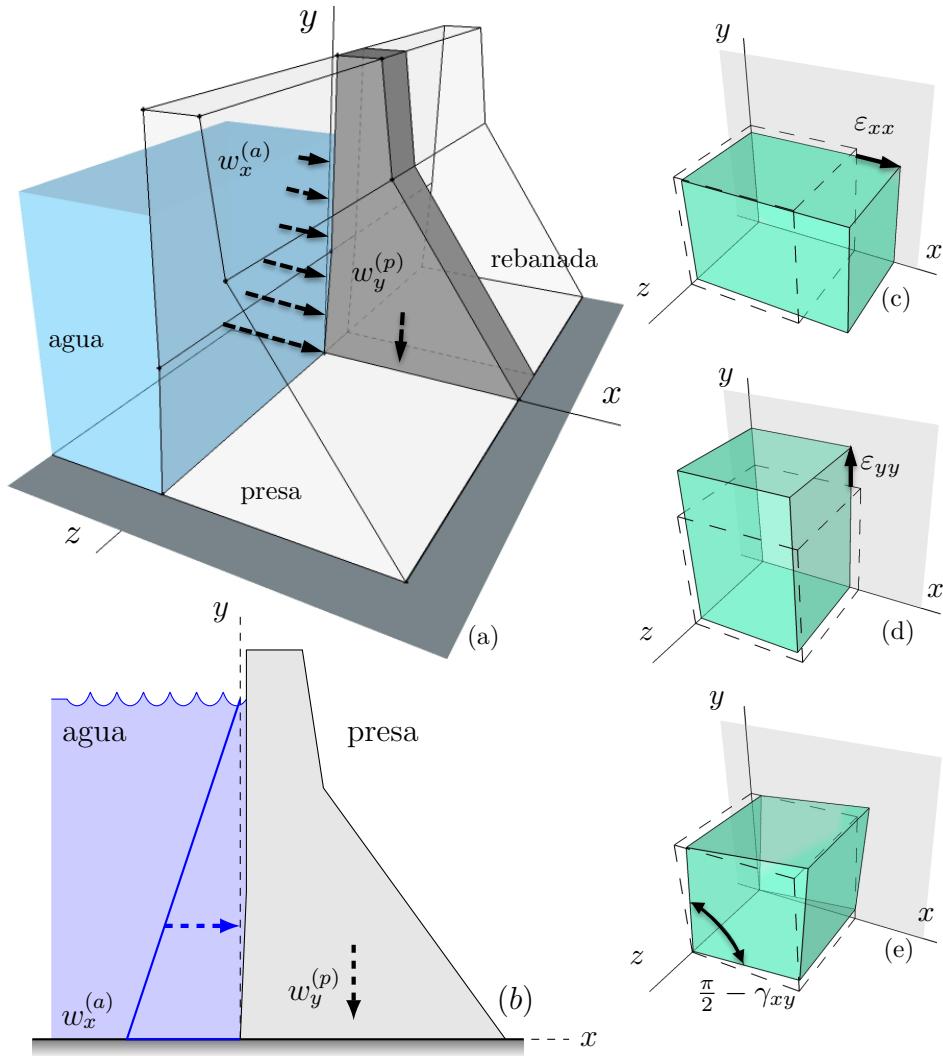


Figura 2.15: Sólido en condición plana de deformaciones en el plano xy : (a) corte de espesor unitario de un muro de contención; estado de deformaciones de un elemento infinitesimal: (b) deformación longitudinal en x , (c) deformación longitudinal en y , (d) deformación angular en el plano xy .

Las componentes de esfuerzo definidas en las ecuaciones (2.19) y (2.21), se reducen a las siguientes:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}] \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_{xx} + (1-\nu)\varepsilon_{yy}] \\ \sigma_{zz} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}] \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \quad , \quad \sigma_{xz} = 0 \quad , \quad \sigma_{yz} = 0\end{aligned}\tag{2.52}$$

A partir de las ecuaciones anteriores se puede expresar una relación matricial $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}$ entre las componentes de esfuerzo y de deformación contenidas en el plano xy , para una condición plana de deformaciones de la forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.53}$$

donde la matriz constitutiva elástica para un estado plano de deformaciones \mathbf{D} y la matriz columna de las componentes del esfuerzo contenidas en el plano xy son iguales a:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.54}$$

La componente de esfuerzo normal en dirección z se expresa mediante una ecuación escalar adicional en función de las demás componentes de esfuerzo normal, de la forma:

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \tag{2.55}$$

En condición plana de deformaciones, los esfuerzos principales se calculan sustituyendo las ecuaciones (2.55) y (2.15), así:

$$\begin{aligned}\sigma_{(p)}^3 - I_1\sigma_{(p)}^2 + I_2\sigma_{(p)} - I_3 &= 0 \\ I_1 &= (1+\nu)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\ I_2 &= \frac{1}{2}((1+\nu)^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2 - (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \nu^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2 + 2\sigma_{xy}^2)) \\ I_3 &= \nu(\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\end{aligned}\tag{2.56}$$

Después de sustituir las invariantes de esfuerzo en la ecuación cúbica y de realizar algunas operaciones algebraicas se tiene:

$$(\sigma_{(p)} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}))(\sigma_{(p)}^2 - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\sigma_{(p)} + (\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2)) = 0 \quad (2.57)$$

De la solución de la ecuación anterior se observa que uno de los esfuerzos principales es igual a $\sigma_a = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$, mientras que σ_b, σ_c son las raíces de la ecuación cuadrática del segundo paréntesis en la ecuación anterior, cuyos valores se indican en la Ecuación (2.49). Asimismo, los esfuerzos principales máximo, intermedio y mínimo corresponden a los esfuerzos principales ordenados de mayor a menor, es decir, $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

En general, en problemas bidimensionales solo se expresan las componentes contenidas en el plano xy del desplazamiento, las fuerzas puntuales, de superficie y de cuerpo, como lo ilustra la Figura 2.13(a). Por lo tanto, los vectores de desplazamiento para todo punto material, una fuerza puntual en un punto (x_n, y_n) , una fuerza de superficie en el contorno Γ_p y la fuerza de cuerpo en todo punto material se expresan de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y) &= [u \ v]^T \quad (x, y) \in V \\ \mathbf{f}(x_n, y_n) &= [f_x \ f_y]^T \quad (x_n, y_n) \in \Gamma_f \\ \mathbf{p}(x, y) &= [p_x \ p_y]^T \quad (x, y) \in \Gamma_p \\ \mathbf{b}(x, y) &= [b_x \ b_y]^T \quad (x, y) \in V \end{aligned} \quad (2.58)$$

A partir de la Ecuación (2.6), la relación entre las componentes contenidas en el plano xy de la deformación y del desplazamiento se expresa de la forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\nabla} \mathbf{u} \rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x u \\ \partial_y v \\ \partial_y u + \partial_x v \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

donde el operador diferencial se reduce a:

$$\tilde{\nabla} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Capítulo 3

Formulación del problema elástico lineal en estructuras formadas por barras sometidas a fuerza axial

La representación del comportamiento mecánico de algunos sistemas estructurales podría simplificarse si se considera que la estructura está conformada por un grupo de barras prismáticas conectadas entre sí.

Las barras son elementos estructurales que tienen una dimensión sustancialmente mayor que las dimensiones de su sección transversal, la cual es habitualmente constante. En consecuencia, los esfuerzos sobre la sección transversal de cada barra son equivalentes a fuerzas y momentos internos que actúan sobre su eje longitudinal.

Este capítulo presenta brevemente la aplicación del método de los elementos finitos a estructuras formadas por barras sometidas a fuerza axial (Weaver & Johnson, 1984; Oñate, 2009).

3.1. Descripción del problema mecánico de fuerza axial

El problema mecánico de una barra sometida exclusivamente a fuerza axial, cuyo material es lineal elástico y su eje longitudinal es paralelo a x , se describe de la siguiente manera. El campo del desplazamiento corresponde a la componente en dirección x del desplazamiento $u(x)$ y se consideran despreciables las componentes en dirección y y z . En consecuencia, la única componente de la deformación diferente de cero es:

$$\varepsilon_{xx} = \partial u / \partial x \quad (3.1)$$

Se establece que la única componente de esfuerzo de interés es el esfuerzo normal

en dirección x , que para un material elástico lineal isótropo de módulo de Young E , es igual a:

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} \quad (3.2)$$

Siendo ε_{xx} independiente de la posición en y y en z , el esfuerzo σ_{xx} será constante sobre la sección transversal y equivalente al cociente entre la fuerza axial interna F_{xx} actuando sobre el eje longitudinal y el área de la sección A .

3.2. Malla de elementos finitos del problema

El dominio Ω de una barra sometida a fuerzas axiales, como la mostrada en la Figura 3.1, se simplifica a un espacio unidimensional $\{x \forall x \in \Omega\}$, en el cual se pretende obtener el campo del desplazamiento en dirección x , llamado $u(x)$. Tal dominio se divide en ne subdominios $\Omega_{(e)}$, donde $\Omega \cong \sum_1^{ne} \Omega_{(e)}$. La función del desplazamiento en el interior de cada subdominio es suave y continua, y además conserva el mismo valor en los lugares comunes entre varios subdominios, es decir, $u(x)$ es una función continua y por tramos en el dominio Ω . Cada uno de los subdominios se denomina *elemento finito* y los puntos materiales donde se conectan los subdominios entre sí, o un subdominio con el contorno de Ω , se definen como los *nudos* externos del elemento finito.

La *función de aproximación* en el subdominio $\Omega_{(e)}$ de un *elemento finito* de barra sometida a fuerza axial corresponde al desplazamiento a lo largo de su eje longitudinal $u(x)$.

3.3. Coordenadas naturales unidimensionales

La posición de un punto en el interior de un elemento finito unidimensional se pueden definir en función de una coordenada global x o de una coordenada natural ξ , como lo ilustra la Figura 3.2(c). Los dos sistemas coordinados se relacionan de la siguiente forma:

$$\xi = \frac{x - x_i^{(e)}}{L^{(e)}} = \frac{x - x_i^{(e)}}{x_j^{(e)} - x_i^{(e)}} \quad (3.3)$$

siendo $L^{(e)}$ la longitud del elemento, y $x_i^{(e)}$ y $x_j^{(e)}$ las coordenadas de los extremos inicial y final, respectivamente. En consecuencia, ξ es adimensional y varía entre $\xi = 0$ en el extremo inicial y $\xi = 1$ en el extremo final del elemento. Asimismo, la derivada de ξ con respecto a x , y por lo tanto el diferencial de posición son iguales

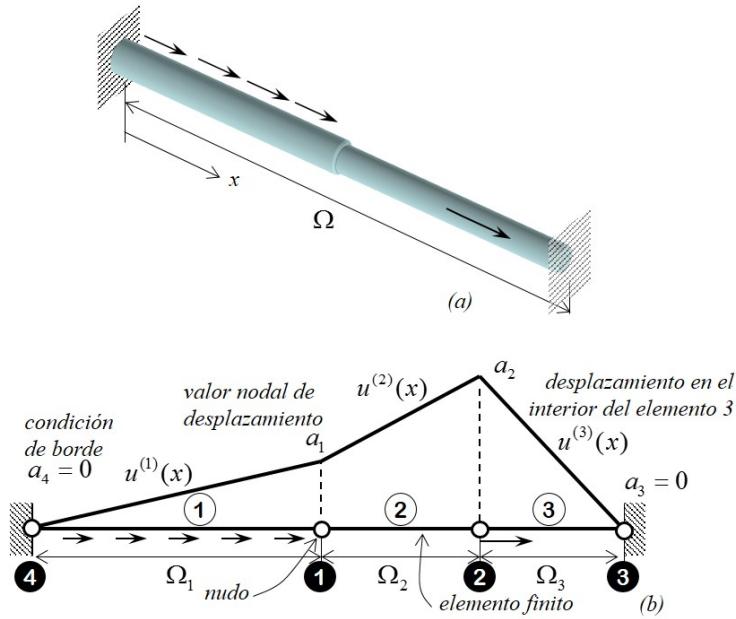


Figura 3.1: Barra sometida a fuerza axial: (a) geometría, condiciones de frontera y cargas aplicadas, (b) malla de elementos finitos y función de desplazamiento longitudinal.

a:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1/L^{(e)} \quad , \quad dx = L^{(e)} d\xi \quad (3.4)$$

3.4. Elemento finito unidimensional lineal

Un *elemento unidimensional lineal* de longitud $L_{(e)}$ tiene dos nudos i y j , ubicados en sus extremos, como lo muestra la Figura 3.2(c). Éste elemento cuenta con una función de aproximación polinómica de grado uno con respecto a x o con respecto a ξ , que representa el desplazamiento en la dirección longitudinal $u(x)$ o $u(\xi)$, de la forma:

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x \quad \forall x \in \Omega_{(e)} \quad (3.5)$$

$$u(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi \quad \forall \xi \in \Omega_{(e)} \quad (3.6)$$

donde los coeficientes α_1 y α_2 , denominados *coordenadas generalizadas*, serán diferentes de acuerdo con el sistema coordenado escogido entre x o ξ .

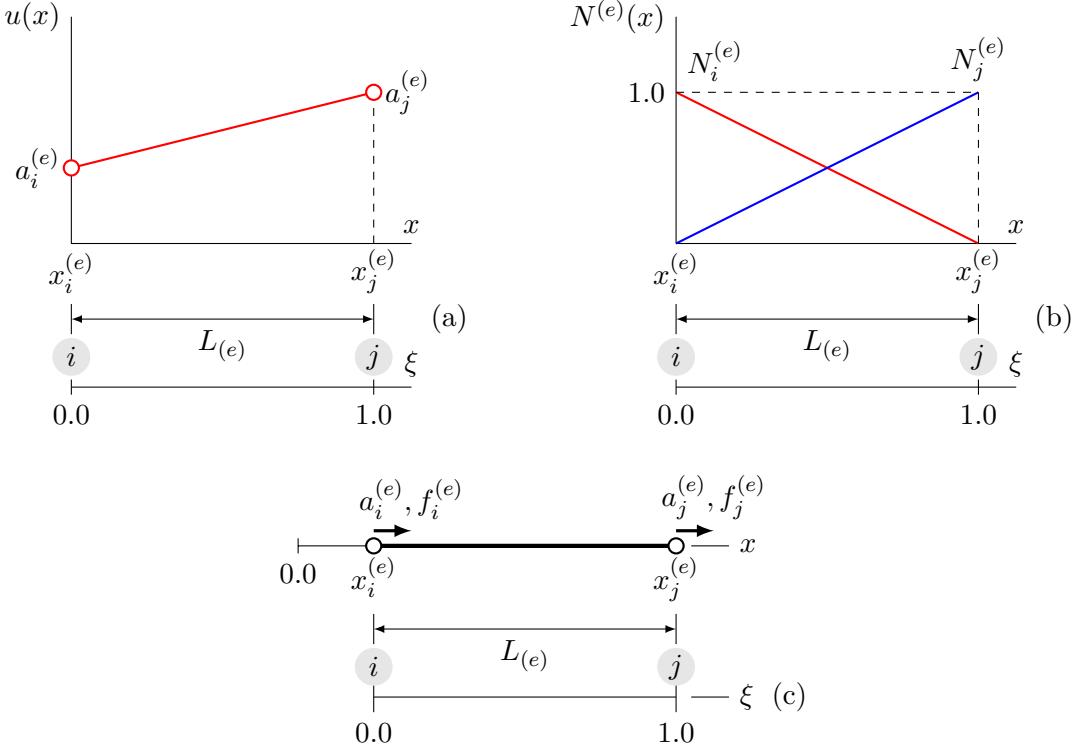


Figura 3.2: Elemento finito unidimensional lineal de barra sometida a fuerza axial: (a) el desplazamiento como función de aproximación, (c) funciones de forma en los nudos i y j , (c) desplazamientos y fuerzas en los nudos.

La función de aproximación también se puede expresar en términos de los valores del desplazamiento en lugares específicos dentro del elemento. Tales lugares corresponden a los *nudos* del elemento finito y se denominan *valores nodales*. Éstos últimos se definen como $a_i^{(e)}$ y $a_j^{(e)}$ y están ubicados en las coordenadas globales $x = x_i^{(e)}$ y $x = x_j^{(e)}$ o en las coordenadas naturales $\xi = 0.0$ y $\xi = 1.0$, respectivamente, como se ilustra en la Figura Figura 3.2(a). En consecuencia:

$$a_i^{(e)} = u(x_i) = \alpha_1 + \alpha_2 x_i^{(e)} \quad , \quad a_j^{(e)} = u(x_j) = \alpha_1 + \alpha_2 x_j^{(e)} \quad (3.7)$$

Despejando las coordenadas generalizadas de las dos ecuaciones anteriores, se puede obtener una nueva expresión de la función de aproximación en términos de los valores nodales, de la forma:

$$u(x) = \left[\frac{x_j^{(e)} - x}{L^{(e)}} \right] a_i^{(e)} + \left[\frac{x - x_i^{(e)}}{L^{(e)}} \right] a_j^{(e)} \quad (3.8)$$

Los coeficientes que multiplican a los valores nodales en cada sumando de la ecuación anterior se llaman *funciones de forma* del elemento finito. Por lo tanto, las funciones de forma de un elemento unidimensional lineal son:

$$N_i^{(e)}(x) = \frac{x_j^{(e)} - x}{L_{(e)}} \quad , \quad N_j^{(e)}(x) = \frac{x - x_i^{(e)}}{L_{(e)}} \quad (3.9)$$

Asimismo, las funciones de forma también se pueden expresar en términos del sistema coordenado natural ξ indicado en la Ecuación 3.3, así:

$$N_i^{(e)}(\xi) = 1 - \xi \quad , \quad N_j^{(e)}(\xi) = \xi \quad (3.10)$$

Tales funciones se dibujan en la Figura 3.2(b). La función de aproximación se puede reescribir como:

$$u(x) = N_i^{(e)}(x) a_i^{(e)} + N_j^{(e)}(x) a_j^{(e)} \quad (3.11)$$

La ecuación anterior es el resultado de la multiplicación matricial entre la matriz de funciones de forma $\mathbf{N}_{(e)}(x)$ y el vector de valores nodales del desplazamiento $\mathbf{a}_{(e)}$ del elemento e , así:

$$u(x) = \mathbf{N}_{(e)}(x) \mathbf{a}_{(e)} \quad \forall x \in \Omega^{(e)} \quad (3.12)$$

donde:

$$\mathbf{N}_{(e)}(x) = \begin{bmatrix} N_i^{(e)} & N_j^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{1}{L_{(e)}} \begin{bmatrix} (x_j^{(e)} - x) & (x - x_i^{(e)}) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

y

$$\mathbf{a}_{(e)} = \begin{bmatrix} a_i^{(e)} \\ a_j^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

El elemento unidimensional lineal establece que la función de aproximación corresponde al campo del desplazamiento longitudinal $u(x)$ y los valores nodales son los desplazamientos en los nudos, sin incluir la primera derivada del desplazamiento con respecto a la posición $\partial_x u(x)$. Por lo tanto, en la solución mediante el método de los elementos finitos, el desplazamiento será una función continua por tramos, mientras que $\partial_x u(x)$ será discontinua en cada nudo común a dos elementos. Los elementos con esta característica se denominan *elementos finitos de continuidad C_0* , como se indicó anteriormente.

Sustituyendo las ecuaciones (3.12) y (3.13), en la relación entre la deformación y el desplazamiento presentada en la Ecuación (3.1), se tiene:

$$\varepsilon_{xx}^{(e)} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{N}_{(e)}(x) \mathbf{a}_{(e)} = \mathbf{B}_{(e)} \mathbf{a}_{(e)} \quad (3.15)$$

Definiendo el operador diferencial para este tipo de problemas como el escalar $\tilde{\nabla} = \partial/\partial x$, la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma de un elemento unidimensional lineal será igual a:

$$\mathbf{B}_{(e)}(x) = \tilde{\nabla} \mathbf{N}_{(e)}(x) = \begin{bmatrix} \partial_x N_i^{(e)} & \partial_x N_j^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{1}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

La relación constitutiva entre la componente de esfuerzo normal y la deformación longitudinal en dirección x indicada en la Ecuación (3.2) muestra que la matriz constitutiva elástica lineal de la Ecuación (2.23) se simplifica para problemas unidimensionales, siendo $\mathbf{D} = E_{(e)}$. Sustituyendo la Ecuación (3.15) en la Expresión (3.2) se obtiene:

$$\sigma_{xx}^{(e)} = E_{(e)} \mathbf{B}_{(e)} \mathbf{a}_{(e)} \quad (3.17)$$

3.5. Matriz de rigidez y vector de fuerzas equivalentes del elemento finito unidimensional lineal de fuerza axial

La Ecuación (2.39) que describe al Principio de los Trabajos Virtuales en un sólido, presentada en el Apartado 2.6, se puede simplificar para el problema de una barra de sección transversal A , sometida a fuerza axial de la forma:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon_{xx} \sigma_{xx} A dx = \int_{\Omega} \delta u b_x A dx + \sum_{n=1}^r \delta u(x_n) f(x_n) \quad (3.18)$$

La barra se divide en un grupo de ne elementos finitos conectados entre sí por nn nudos, como lo ilustra la Figura 3.1(b); por lo tanto el dominio $\Omega = \sum_1^{ne} \Omega_{(e)}$ y la expresión anterior se puede escribir de la forma:

$$\sum_{e=1}^{ne} \left[\int_{\Omega_{(e)}} \delta \varepsilon_{xx}^{(e)} \sigma_{xx}^{(e)} A_{(e)} dx \right] = \sum_{e=1}^{ne} \left[\int_{\Omega_{(e)}} \delta u^{(e)} b_x^{(e)} A_{(e)} dx \right] + \sum_{n=1}^{nn} \delta u(x_n) f(x_n) \quad (3.19)$$

El desplazamiento virtual en el interior del elemento finito se define de la misma forma que el desplazamiento real indicado en la Ecuación (3.12), como:

$$\delta u^{(e)} = \mathbf{N}_{(e)} \delta \mathbf{a}_{(e)} \quad o \quad \delta u^{(e)} = \delta \mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{N}_{(e)}^T \quad (3.20)$$

donde $\delta \mathbf{a}_{(e)}$ es el vector de desplazamientos virtuales nodales del elemento e .

A partir de la expresión de la deformación real (3.15) se obtiene la deformación virtual $\delta\varepsilon_{xx}^{(e)}$ de la forma:

$$\delta\varepsilon_{xx}^{(e)} = \mathbf{B}_{(e)}\delta\mathbf{a}_{(e)} \quad \text{o} \quad \delta\varepsilon_{xx}^{(e)} = \delta\mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{B}_{(e)}^T \quad (3.21)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.15), (3.20) y (3.21) en la expresión (3.19) y recordando que $\delta\mathbf{a}_{(e)}$ y $\mathbf{a}_{(e)}$ son independientes de x , se obtiene:

$$\sum_{e=1}^{ne} \delta\mathbf{a}_{(e)}^T \left[\int_{\Omega_{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T E_{(e)} \mathbf{B}_{(e)} A_{(e)} dx \right] \mathbf{a}_{(e)} = \sum_{e=1}^{ne} \delta\mathbf{a}_{(e)}^T \left[\int_{\Omega_{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T b_x A_{(e)} dx \right] + \delta\mathbf{a}^T \mathbf{f}^{(n)} \quad (3.22)$$

El último término a la derecha de la igualdad anterior corresponde al trabajo virtual externo producido por cargas puntuales en los nudos de la malla. Definiendo a $\delta\mathbf{a} = [\delta a_1, \delta a_2, \dots, \delta a_{nn}]^T$ como la matriz columna de desplazamientos virtuales en los nn nudos de la malla y $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_{nn}]^T$ la matriz columna de cargas puntuales en los nudos de la malla.

Los términos entre corchetes de la ecuación anterior se definen como la matriz de rigidez $\mathbf{K}^{(e)}$ y el vector de fuerza equivalente a una carga distribuida $\mathbf{f}^{(e)}$ del elemento finito de barra sometida a fuerza axial, es decir:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega_{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T E_{(e)} \mathbf{B}_{(e)} A_{(e)} dx \quad , \quad \mathbf{f}^{(e)} = \int_{\Omega_{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T b_x A_{(e)} dx \quad (3.23)$$

En particular, el módulo de elasticidad $E_{(e)}$ y el área de la sección transversal $A_{(e)}$ se consideran constantes en el interior del elemento. La matriz de rigidez de un elemento unidimensional lineal, cuya matriz $\mathbf{B}_{(e)}$ está dada en la Ecuación 3.16, es de la forma:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} k_{ii}^{(e)} & k_{ij}^{(e)} \\ k_{ji}^{(e)} & k_{jj}^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{E_{(e)} A_{(e)}}{L_{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Se define una carga distribuida por unidad de longitud $w_x = b_x A_{(e)}$ y se considera constante en el interior del elemento. El vector de fuerzas equivalentes a la acción de una carga w_x de un elemento unidimensional lineal, cuya matriz $\mathbf{N}_{(e)}$ está definida en la Ecuación 3.13, es:

$$\mathbf{f}^{(e)} = \begin{bmatrix} f_i^{(e)} \\ f_j^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} w_x L_{(e)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

3.6. Elemento finito unidimensional cuadrático

Un *elemento finito unidimensional cuadrático* cuenta con una función de aproximación polinómica de segundo grado así:

$$u_{(e)}(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\xi^2 \quad \forall \xi \in \Omega_{(e)} \quad (3.26)$$

Las coordenadas generalizadas α_1 , α_2 y α_3 se pueden escribir en términos de los valores nodales $a_i^{(e)}$, $a_j^{(e)}$ y $a_k^{(e)}$. Éstos últimos corresponden a los valores de la función de aproximación en el extremo inicial, en el extremo final y en la mitad del elemento, como lo ilustra la Figura 3.3(c). Asimismo, la función de aproximación del elemento de nudos i , j y k , mostrada en la Figura 3.3(a), cumple que:

$$a_i^{(e)} = u^{(e)}(0.0) = \alpha_1 \quad (3.27a)$$

$$a_j^{(e)} = u^{(e)}(1.0) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \quad (3.27b)$$

$$a_k^{(e)} = u^{(e)}(0.5) = \alpha_1 + 0.50\alpha_2 + 0.25\alpha_3 \quad (3.27c)$$

Despejando las coordenadas generalizadas de las tres ecuaciones anteriores, se puede obtener una nueva expresión de la función de aproximación en términos de los valores nodales y las funciones de forma, así:

$$u(\xi) = N_i^{(e)}(\xi) a_i^{(e)} + N_j^{(e)}(\xi) a_j^{(e)} + N_k^{(e)}(\xi) a_k^{(e)} \quad (3.28)$$

siendo las funciones de forma del elemento unidimensional cuadrático, mostradas en la Figura 3.3(b), las siguientes:

$$N_i^{(e)}(\xi) = 1 - 3\xi + 2\xi^2 \quad (3.29a)$$

$$N_j^{(e)}(\xi) = -\xi + 2\xi^2 \quad (3.29b)$$

$$N_k^{(e)}(\xi) = 4\xi - 4\xi^2 \quad (3.29c)$$

La ecuación anterior es el resultado de la siguiente multiplicación matricial:

$$u(\xi) = \mathbf{N}_{(e)}(\xi) \mathbf{a}_{(e)} \quad \forall \xi \in \Omega^{(e)} \quad (3.30)$$

donde la matriz de funciones de forma y $\mathbf{N}_{(e)}(\xi)$ y el vector de valores nodales del desplazamiento $\mathbf{a}_{(e)}$ del elemento e , corresponden a:

$$\mathbf{N}_{(e)}(\xi) = \begin{bmatrix} N_i^{(e)} & N_j^{(e)} & N_k^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_{(e)} = \begin{bmatrix} a_i^{(e)} \\ a_j^{(e)} \\ a_k^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

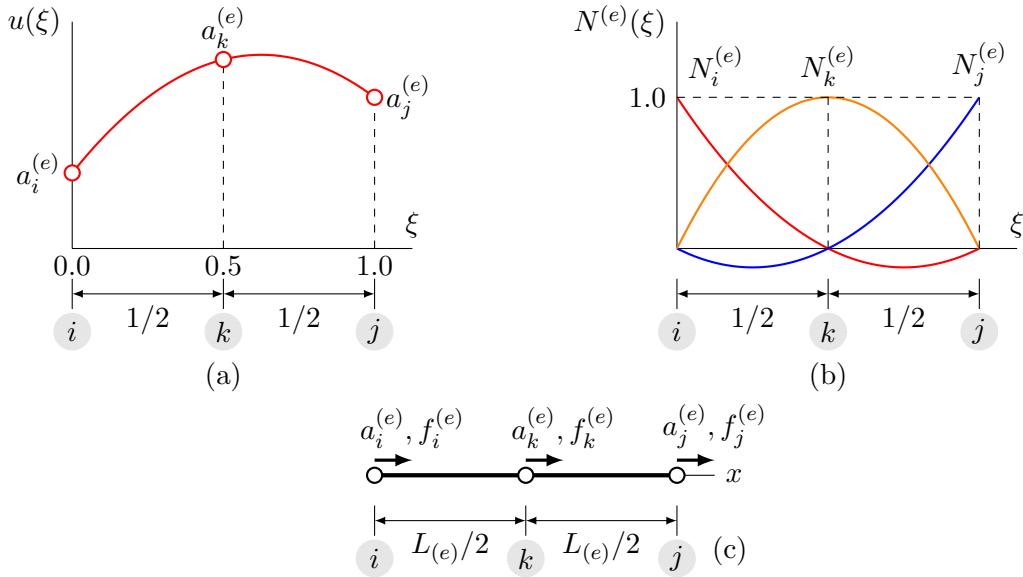


Figura 3.3: Elemento finito unidimensional cuadrático de barra sometida a fuerza axial: (a) el desplazamiento como función de aproximación, (c) funciones de forma en los nudos i , j y k , (c) desplazamientos y fuerzas en los nudos.

La deformación longitudinal en el interior de un elemento unidimensional definida en la ecuación 3.15, permite establecer que la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma del elemento unidimensional cuadrático sea igual a:

$$\mathbf{B}_{(e)}(x) = \begin{bmatrix} B_i^{(e)} & B_j^{(e)} & B_k^{(e)} \end{bmatrix} = \tilde{\nabla} \mathbf{N}_{(e)}(x) = \begin{bmatrix} \partial_x N_i^{(e)} & \partial_x N_j^{(e)} & \partial_x N_k^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Los coeficientes de la matriz $\mathbf{B}_{(e)}$ corresponden a la derivada de cada función de forma con respecto a x . Aplicando la regla de la cadena y la Ecuación 3.4, se tiene que:

$$B_i^{(e)} = \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} = \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi} \frac{1}{L_{(e)}} = \frac{1}{L_{(e)}}(-3 + 4\xi) \quad (3.33a)$$

$$B_j^{(e)} = \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x} = \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial \xi} \frac{1}{L_{(e)}} = \frac{1}{L_{(e)}}(-1 + 4\xi) \quad (3.33b)$$

$$B_k^{(e)} = \frac{\partial N_k^{(e)}}{\partial x} = \frac{\partial N_k^{(e)}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial N_k^{(e)}}{\partial \xi} \frac{1}{L_{(e)}} = \frac{1}{L_{(e)}}(4 - 8\xi) \quad (3.33c)$$

La matriz de rigidez $\mathbf{K}^{(e)}$ y el vector de fuerza equivalente $\mathbf{f}^{(e)}$ a una carga distribuida del elemento finito de barra sometida a fuerza axial fueron establecidos en la ecuación 3.23.

Se considera constante el módulo de elasticidad $E_{(e)}$ y el área de la sección transversal $A_{(e)}$ en el interior del elemento. Se sustituye la matriz $\mathbf{B}_{(e)}$ del elemento unidimensional cuadrático en la ecuación 3.23, se integra en el dominio y se obtiene la matriz de rigidez del elemento. Particularmente, el coeficiente $k_{ii}^{(e)}$ de la matriz de rigidez es igual a:

$$\begin{aligned} k_{ii}^{(e)} &= E_{(e)} A_{(e)} \int_{x_i}^{x_j} B_i^{(e)} B_i^{(e)} dx = \frac{E_{(e)} A_{(e)}}{L_{(e)}^2} \int_{x_i}^{x_j} (9 + 16\xi^2 - 24\xi) dx \\ &= \frac{E_{(e)} A_{(e)}}{L_{(e)}^2} \int_0^1 (9 + 16\xi^2 - 24\xi) L_{(e)} d\xi = \frac{E_{(e)} A_{(e)}}{L_{(e)}} \left[9\xi + \frac{16}{3}\xi^3 - 12\xi^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{7E_{(e)} A_{(e)}}{3L_{(e)}} \end{aligned}$$

De la misma manera se calculan los demás coeficientes, obteniendo la siguiente matriz de rigidez del elemento unidimensional cuadrático:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} k_{ii}^{(e)} & k_{ij}^{(e)} & k_{ik}^{(e)} \\ k_{ij}^{(e)} & k_{jj}^{(e)} & k_{jk}^{(e)} \\ k_{ik}^{(e)} & k_{jk}^{(e)} & k_{kk}^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{E_{(e)} A_{(e)}}{3L_{(e)}} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Ahora, se considera que la carga distribuida aplicada por unidad de longitud es igual a $w_x = b_x A_{(e)}$ y es constante en el interior del elemento. Las funciones de forma $\mathbf{N}_{(e)}$ de la Ecuación 3.29 se sustituyen en la Ecuación 3.23, para obtener el primer término del vector de fuerzas equivalentes a la acción de una carga distribuida uniforme w_x , así:

$$\begin{aligned} f_i^{(e)} &= w_x \int_{x_i}^{x_j} N_i^{(e)}(x) dx = w_x \int_1^0 N_i^{(e)}(\xi) L_{(e)} d\xi \\ &= w_x \int_1^0 (1 - 3\xi + 2\xi^2) L_{(e)} d\xi = w_x L_{(e)} \left[\xi - \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{2}{3}\xi^3 \right]_0^1 = \frac{w_x L_{(e)}}{6} \end{aligned}$$

De la misma forma se calculan los demás coeficientes, obteniendo el siguiente vector de fuerzas equivalentes a w_x :

$$\mathbf{f}^{(e)} = \begin{bmatrix} f_i^{(e)} \\ f_j^{(e)} \\ f_k^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{w_x L_{(e)}}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

3.7. Matriz de rigidez y vector de fuerzas equivalentes de la malla de elementos finitos

El Principio de los Trabajos Virtuales presentado en la Ecuación (3.22), se puede escribir en términos de las matrices elementales $\mathbf{K}^{(e)}$ y $\mathbf{f}^{(e)}$, de la forma:

$$\sum_{e=1}^{ne} \delta \mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}_{(e)} - \sum_{e=1}^{ne} \delta \mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{f}^{(e)} = \delta \mathbf{a}^T \mathbf{f}^{(n)} \quad (3.36)$$

donde $\delta \mathbf{a}$ y $\mathbf{f}^{(n)}$ corresponden a los vectores de desplazamiento virtual y de fuerzas reales en los nudos de la malla de elementos finitos. Las matrices de la ecuación anterior para el ejemplo presentado en la Figura 3.1(b) son iguales a:

$$\mathbf{a}_{(e)} = \begin{bmatrix} a_i^{(e)} \\ a_j^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \delta \mathbf{a}_{(e)} = \begin{bmatrix} \delta a_i^{(e)} \\ \delta a_j^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} k_{ii}^{(e)} & k_{ij}^{(e)} \\ k_{ji}^{(e)} & k_{jj}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^{(e)} = \begin{bmatrix} f_i^{(e)} \\ f_j^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$\delta \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \delta a_1 \\ \delta a_2 \\ \delta a_3 \\ \delta a_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^{(n)} = \begin{bmatrix} f_1^{(n)} \\ f_2^{(n)} \\ f_3^{(n)} \\ f_4^{(n)} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

donde los subíndices i y j están asociados a los nudos en los extremos de cada elemento (e). Además, se define el vector de desplazamientos nodales de la malla de elementos finitos como:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

donde cada término corresponde al desplazamiento de un nudo específico.

De acuerdo a lo anterior, el desplazamiento del nudo inicial del elemento 1 es $a_i^{(1)} = a_4$ y el desplazamiento del nudo final corresponde a $a_j^{(1)} = a_1$. Asimismo, para el elemento 2 los desplazamientos nodales son $a_i^{(2)} = a_1$ y $a_j^{(2)} = a_2$, y para el elemento 3, $a_i^{(3)} = a_2$ y $a_j^{(3)} = a_3$. El identificador del desplazamiento o grado de libertad en los nudos de cada elemento finito se organiza en la Tabla 3.1, denominada tabla de incidencias, en la cual las columnas XGI y XGJ contienen al identificador del desplazamiento en el nudo i y en el nudo j del elemento.

La primera sumatoria de la Ecuación (3.36) se puede escribir de forma *extendida* al total de grados de libertad de la malla sin modificar su resultado, cambiando al vector $\delta\mathbf{a}_{(e)}$ por el vector de desplazamientos nodales virtuales de la malla $\delta\mathbf{a}$, al vector $\mathbf{a}_{(e)}$ por el vector de desplazamientos nodales virtuales de la malla \mathbf{a} , y a la matriz $\mathbf{K}^{(e)}$ por una matriz de rigidez extendida $\mathbf{K}_{ext}^{(e)}$, como se indica a continuación:

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^3 \left(\begin{bmatrix} \delta a_i^{(e)} & \delta a_j^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{ii}^{(e)} & k_{ij}^{(e)} \\ k_{ji}^{(e)} & k_{jj}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i^{(e)} \\ a_j^{(e)} \end{bmatrix} \right) = \\ &= [\delta a_1 \quad \delta a_2 \quad \delta a_3 \quad \delta a_4] \begin{bmatrix} k_{jj}^{(1)} & 0 & 0 & k_{ij}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{ji}^{(1)} & 0 & 0 & k_{ii}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \\ &+ [\delta a_1 \quad \delta a_2 \quad \delta a_3 \quad \delta a_4] \begin{bmatrix} k_{ii}^{(2)} & k_{ij}^{(2)} & 0 & 0 \\ k_{ji}^{(2)} & k_{jj}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \\ &+ [\delta a_1 \quad \delta a_2 \quad \delta a_3 \quad \delta a_4] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{ii}^{(3)} & k_{ij}^{(3)} & 0 \\ 0 & k_{ji}^{(3)} & k_{jj}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La transformación de la primera sumatoria de la Ecuación (3.36), permite factorizar a $\delta\mathbf{a}^T$ y \mathbf{a} , de la forma:

$$\sum_{e=1}^{ne} \delta\mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}_{(e)} = \sum_{e=1}^{ne} \delta\mathbf{a}^T \mathbf{K}_{ext}^{(e)} \mathbf{a} = \delta\mathbf{a}^T \left(\sum_{e=1}^{ne} \mathbf{K}_{ext}^{(e)} \right) \mathbf{a} = \delta\mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} \quad (3.40)$$

donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez del sólido y corresponde a la sumatoria entre las matrices de rigidez extendidas de los elementos. Esta operación implica crear la matriz extendida de cada elemento y sumar reiteradamente sus coeficientes, estén o no asociados a los grados de libertad de cada elemento.

ELE	XGI	XGJ
1	004	001
2	001	002
3	002	003

Tabla 3.1: Ejemplo de barra sometida a fuerza axial. Tabla de incidencias.

3.8. Ensamblaje de matrices de rigidez y de vectores de fuerzas equivalentes

El procedimiento denominado ensamblaje de matrices de rigidez de los elementos $\mathbb{A}_{e=1}^{ne} \mathbf{K}^{(e)}$ conduce al mismo resultado de la ecuación anterior, utilizando menos operaciones y sin necesidad de crear matrices extendidas. Por lo tanto, la matriz de rigidez de la malla es igual a:

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{ne} \mathbf{K}_{ext}^{(e)} = \mathbb{A}_{e=1}^{ne} \mathbf{K}^{(e)} \quad (3.41)$$

Asimismo, la segunda sumatoria de la Ecuación (3.36) se puede expresar en términos del vector de fuerzas equivalentes extendido de cada elemento $\mathbf{f}_{ext}^{(e)}$, como:

$$\sum_{e=1}^{ne} \delta \mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{f}^{(e)} = \sum_{e=1}^{ne} \delta \mathbf{a}^T \mathbf{f}_{ext}^{(e)} = \delta \mathbf{a}^T \left(\sum_{e=1}^{ne} \mathbf{f}_{ext}^{(e)} \right) = \delta \mathbf{a}^T \tilde{\mathbf{f}} \quad (3.42)$$

donde $\tilde{\mathbf{f}}$ es igual a la suma de los vectores extendidos de fuerzas equivalentes en los elementos $\mathbf{f}_{ext}^{(e)}$. Este vector también puede calcularse como el *ensamblaje de los vectores de fuerzas equivalentes* en los elementos $\mathbf{f}^{(e)}$, es decir:

$$\tilde{\mathbf{f}} = \sum_{e=1}^{ne} \mathbf{f}_{ext}^{(e)} = \mathbb{A}_{e=1}^{ne} \mathbf{f}^{(e)} \quad (3.43)$$

La matriz de rigidez extendida y el vector de fuerzas equivalentes extendido del elemento 1 tienen asociados los desplazamientos nodales 4 y 1, y sus coeficientes son:

$$\mathbf{K}_{ext}^{(1)} = \begin{bmatrix} k_{jj}^{(1)} & 0 & 0 & k_{ij}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{ji}^{(1)} & 0 & 0 & k_{ii}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{ext}^{(1)} = \begin{bmatrix} f_j^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ f_i^{(1)} \end{bmatrix} \quad (3.44a)$$

Para los elementos 2 y 3, se definen las siguientes matrices elementales extendidas de acuerdo con la numeración de los desplazamientos nodales:

$$\mathbf{K}_{ext}^{(2)} = \begin{bmatrix} k_{ii}^{(2)} & k_{ij}^{(2)} & 0 & 0 \\ k_{ji}^{(2)} & k_{jj}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{ext}^{(2)} = \begin{bmatrix} f_i^{(2)} \\ f_j^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.44b)$$

$$\mathbf{K}_{ext}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{ii}^{(3)} & k_{ij}^{(3)} & 0 \\ 0 & k_{ji}^{(3)} & k_{jj}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{ext}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_i^{(3)} \\ f_j^{(3)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.44c)$$

Por lo tanto, la matriz de rigidez y el vector de fuerzas equivalentes en el sólido se obtienen de la suma de las matrices de rigidez y vectores de fuerzas equivalentes elementales, así:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{jj}^{(1)} + k_{ii}^{(2)} & k_{ij}^{(2)} & 0 & k_{ij}^{(1)} \\ k_{ji}^{(2)} & k_{jj}^{(2)} + k_{ii}^{(3)} & k_{ij}^{(3)} & 0 \\ 0 & k_{ji}^{(3)} & k_{jj}^{(3)} & 0 \\ k_{ji}^{(1)} & 0 & 0 & k_{ii}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_j^{(1)} + f_i^{(2)} \\ f_j^{(2)} + f_i^{(3)} \\ f_j^{(3)} \\ f_i^{(1)} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

En cambio, el procedimiento de ensamblaje consiste en sumar los coeficientes de una matriz elemental a los términos de una matriz del sólido, ubicados de acuerdo con la numeración de los grados de libertad asociados a cada elemento. Los siguientes pasos describen el procedimiento de ensamblaje para el ejemplo en cuestión.

- Inicialmente se define la tabla de incidencias de la malla y se declara una matriz de rigidez del sólido llena de ceros, cuyo tamaño 4×4 corresponde al total de grados de libertad de la malla de elementos finitos, así:

ELE	XGI	YGI
1	4	1
2	1	2
3	2	3

$$, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.46a)$$

- A continuación se suma el coeficiente $k_{ii}^{(1)}$ de la matriz de rigidez del elemento 1 al término k_{44} de la matriz de rigidez del sólido, se suma el coeficiente $k_{ij}^{(1)}$ al término k_{41} , el coeficiente $k_{ji}^{(1)}$ al término k_{14} y el coeficiente $k_{jj}^{(1)}$ al término k_{11} , es decir:

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} k_{ii}^{(1)} & k_{ij}^{(1)} \\ k_{ji}^{(1)} & k_{jj}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{jj}^{(1)} & 0 & 0 & k_{ij}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{ji}^{(1)} & 0 & 0 & k_{ii}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (3.46b)$$

- Ahora se suman los coeficientes $k_{ii}^{(2)}$, $k_{ij}^{(2)}$, $k_{ji}^{(2)}$ y $k_{jj}^{(2)}$ de la matriz de rigidez del elemento 2 a los términos k_{11} , k_{12} , k_{21} y k_{22} , de \mathbf{K} , respectivamente de la forma:

$$\mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} k_{ii}^{(2)} & k_{ij}^{(2)} \\ k_{ji}^{(2)} & k_{jj}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{jj}^{(1)} + k_{ii}^{(2)} & k_{ij}^{(2)} & 0 & k_{ij}^{(1)} \\ k_{ji}^{(2)} & k_{jj}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{ji}^{(1)} & 0 & 0 & k_{ii}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (3.46c)$$

- Finalmente, se suman los coeficientes $k_{ii}^{(3)}$, $k_{ij}^{(3)}$, $k_{ji}^{(3)}$ y $k_{jj}^{(3)}$ de la matriz de rigidez del elemento 3 a los términos k_{22} , k_{23} , k_{32} y k_{33} , de \mathbf{K} , respectivamente, así:

$$\mathbf{K}^{(3)} = \begin{bmatrix} k_{ii}^{(3)} & k_{ij}^{(3)} \\ k_{ji}^{(3)} & k_{jj}^{(3)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{jj}^{(1)} + k_{ii}^{(2)} & k_{ij}^{(2)} & 0 & k_{ij}^{(1)} \\ k_{ji}^{(2)} & k_{jj}^{(2)} + k_{ii}^{(3)} & k_{ij}^{(3)} & 0 \\ 0 & k_{ji}^{(3)} & k_{jj}^{(3)} & 0 \\ k_{ji}^{(1)} & 0 & 0 & k_{ii}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (3.46d)$$

3.9. Obtención de los desplazamientos nodales desconocidos del sólido

Sustituyendo las expresiones (3.41) y (3.43) en la Ecuación (3.36), esta última se puede escribir en términos del vector de desplazamiento virtual nodal $\delta\mathbf{a}$, del vector de desplazamiento real \mathbf{a} y del vector de fuerzas reales \mathbf{f} en los nudos de la malla de elementos finitos, así:

$$\delta\mathbf{a}^T \mathbf{K}\mathbf{a} - \delta\mathbf{a}^T \mathbf{f} = \delta\mathbf{a}^T (\mathbf{K}\mathbf{a} - \mathbf{f}) = 0 \quad (3.47)$$

donde \mathbf{f} es el vector de fuerzas nodales totales en la malla, el cual se obtiene de la suma entre el vector de fuerzas aplicadas directamente en los nudos $\mathbf{f}^{(n)}$ y el vector $\tilde{\mathbf{f}}$ resultante del ensamblaje de los vectores de fuerza nodales equivalentes a la aplicación de fuerzas distribuidas en cada uno de los elementos finitos $\mathbf{f}^{(e)}$ (Ecuación (3.43)), es decir:

$$\mathbf{f} = \tilde{\mathbf{f}} + \mathbf{f}^{(n)} \quad (3.48)$$

Dado que el vector de desplazamiento virtual nodal transpuesto $\delta\mathbf{a}^T$ de la Ecuación (3.47) es diferente de un vector nulo, se tiene:

$$\mathbf{K}\mathbf{a} - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (3.49)$$

El vector de desplazamientos nodales del sólido \mathbf{a} se puede descomponer en dos subvectores: el subvector de desplazamientos nodales desconocidos \mathbf{a}_α y el subvector de desplazamientos nodales conocidos \mathbf{a}_β . Este último está definido por las condiciones de frontera del problema. De acuerdo a lo anterior el vector \mathbf{a} es de la forma:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_\alpha \\ \mathbf{a}_\beta \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Por lo tanto la Ecuación (3.36) se puede reescribir como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\alpha} & \mathbf{K}_{\alpha\beta} \\ \mathbf{K}_{\beta\alpha} & \mathbf{K}_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_\alpha \\ \mathbf{a}_\beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{f}_\alpha \\ \mathbf{f}_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

donde la matriz de rigidez \mathbf{K} se divide en las submatrices $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}$, $\mathbf{K}_{\alpha\beta}$, $\mathbf{K}_{\beta\alpha}$ y $\mathbf{K}_{\beta\beta}$, de acuerdo con el número de desplazamientos nodales desconocidos y conocidos de la malla.

Por las mismas razones, el vector de fuerzas nodales \mathbf{f} está conformado por los subvectores \mathbf{f}_α y \mathbf{f}_β . Tales subvectores contienen las fuerzas nodales en los grados de libertad cuyo valor de desplazamiento es desconocido y conocido, respectivamente.

En consecuencia, la expresión anterior corresponde a dos ecuaciones matriciales de la forma:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{\alpha\alpha}\mathbf{a}_\alpha + \mathbf{K}_{\alpha\beta}\mathbf{a}_\beta - \mathbf{f}_\alpha = \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{\beta\alpha}\mathbf{a}_\alpha + \mathbf{K}_{\beta\beta}\mathbf{a}_\beta - \mathbf{f}_\beta = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.52)$$

Despejando el vector de desplazamientos nodales desconocidos \mathbf{a}_α de la primera expresión, se tiene el primer resultado del análisis con el método de los elementos finitos, de la forma:

$$\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{-1} (\mathbf{f}_\alpha - \mathbf{K}_{\alpha\beta}\mathbf{a}_\beta) \quad (3.53)$$

Después de obtenido \mathbf{a}_α , se reconstruye el vector de desplazamientos nodales completo de la malla $\mathbf{a} = [\mathbf{a}_\alpha^T \ \mathbf{a}_\beta^T]^T$.

3.10. Obtención de las reacciones en los apoyos del sólido

Después de obtenido el subvector de desplazamientos nodales \mathbf{a}_α , se puede calcular el subvector \mathbf{f}_β despejándolo en la segunda expresión de la Ecuación (3.52), así:

$$\mathbf{f}_\beta = \mathbf{K}_{\beta\alpha}\mathbf{a}_\alpha + \mathbf{K}_{\beta\beta}\mathbf{a}_\beta \quad (3.54)$$

De acuerdo con la Ecuación (3.48), este subvector es igual a la siguiente suma de vectores:

$$\mathbf{f}_\beta = \tilde{\mathbf{f}}_\beta + \mathbf{f}_\beta^{(n)} \quad (3.55)$$

siendo $\tilde{\mathbf{f}}_\beta$ y $\mathbf{f}_\beta^{(n)}$ la parte de los vectores $\tilde{\mathbf{f}}$ y $\mathbf{f}^{(n)}$ respectivamente, asociada a los grados de libertad cuyo desplazamiento es conocido. En problemas mecánicos como este, los términos de $\mathbf{f}_\beta^{(n)}$ son desconocidos y corresponden a las reacciones en los apoyos del sólido. Por lo tanto las reacciones en los apoyos se pueden calcular así:

$$\mathbf{f}_\beta^{(n)} = \mathbf{f}_\beta - \tilde{\mathbf{f}}_\beta = \mathbf{K}_{\beta\alpha}\mathbf{a}_\alpha + \mathbf{K}_{\beta\beta}\mathbf{a}_\beta - \tilde{\mathbf{f}}_\beta \quad (3.56)$$

3.11. Obtención de las deformaciones y esfuerzos en el interior de los elementos

Los coeficientes del vector de desplazamiento en los nudos de cada elemento $\mathbf{a}_{(e)}$ se extraen del vector de desplazamientos nodales de la malla \mathbf{a} , de acuerdo con la numeración de los grados de libertad asociados al elemento e (ELE), que se indican en las columnas XGI y XGJ de la tabla de incidencias (Tabla 3.1). Para el ejemplo, los vectores son:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_{(e)} = \overset{(e)}{\mathbb{E}} \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_i^{(e)} = a_{XGI(ELE)} \\ a_j^{(e)} = a_{XGJ(ELE)} \end{bmatrix}, \quad e = 1 : \quad \mathbf{a}_{(1)} = \overset{(1)}{\mathbb{E}} \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_i^{(1)} = a_4 \\ a_j^{(1)} = a_1 \end{bmatrix} \\ e = 2 : \quad \mathbf{a}_{(2)} &= \overset{(2)}{\mathbb{E}} \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_i^{(2)} = a_1 \\ a_j^{(2)} = a_2 \end{bmatrix}, \quad e = 3 : \quad \mathbf{a}_{(3)} = \overset{(3)}{\mathbb{E}} \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_i^{(3)} = a_2 \\ a_j^{(3)} = a_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.57)$$

La deformación longitudinal $\varepsilon_{xx}^{(e)}$ y el esfuerzo normal $\sigma_{xx}^{(e)}$ en el interior de cada elemento se calculan con las Ecuaciones (3.15) y (3.17). En particular para el elemento unidimensional lineal, la matriz $\mathbf{B}^{(e)}$ no varía con respecto a x , y en consecuencia la deformación y el esfuerzo son constantes en el interior del elemento.

3.12. Obtención de deformaciones y esfuerzos normales promedio en los nudos

La discontinuidad en el valor del esfuerzo normal (o de la deformación longitudinal) en cada nudo, se puede evitarse mediante un proceso denominado *suavizado*, el cual consiste en:

- Identificar los valores de $\sigma_{xx(n)}^{(e)}$ (o de $\varepsilon_{xx(n)}^{(e)}$) en un nudo común n a varios elementos finitos.

- Calcular el promedio entre ellos $\sigma_{xx(n)}^{prom}$ (o $\varepsilon_{xx(n)}^{prom}$), y designarlo como el valor en el nudo. Tal promedio se realiza entre los elementos finitos que tienen las mismas propiedades mecánicas y geométricas, como el módulo de elasticidad y el área de la sección transversal. Es decir, los nudos compartidos entre dos elementos de diferentes propiedades tendrán dos valores promedio distintos.
- Interpolan en el interior del elemento utilizando sus funciones de forma.

3.13. Ejemplo de aplicación de una barra sometida a fuerza axial

Una barra de acero de 8.00m de longitud, empotrada en sus extremos, tiene una sección transversal circular con diámetro de 0.050m en su primera mitad y con diámetro de 0.025m en su segundo tramo. El material de la barra tiene un módulo de Young de 200 GPa. La barra soporta una carga distribuida uniforme axial de 10kN/m y una carga puntual de 50kN, como lo indica la Figura 3.4. Se desea obtener el desplazamiento, la deformación longitudinal ε_{xx} y el esfuerzo normal σ_{xx} en la barra.

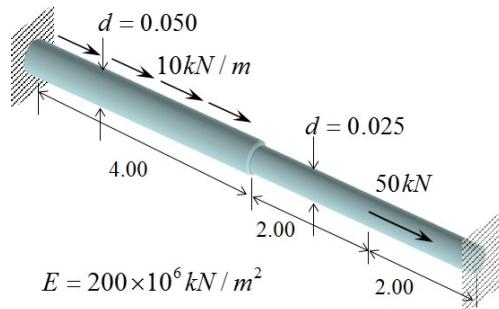


Figura 3.4: Ejemplo de aplicación de barra sometida a fuerza axial: geometría, condiciones de frontera y cargas impuestas.

3.13.1. Resultados de la solución analítica del ejemplo de aplicación

A partir de los conceptos de la resistencia de materiales aplicados a barras sometidas a fuerza axial, se obtiene la solución analítica del ejemplo presentado anteriormente.

Las reacciones en los apoyos izquierdo y derecho de la barra son $R_i = -56.00\text{ kN}$ y $R_d = -34.00\text{ kN}$, respectivamente. Asimismo, la función del desplazamiento obtenida

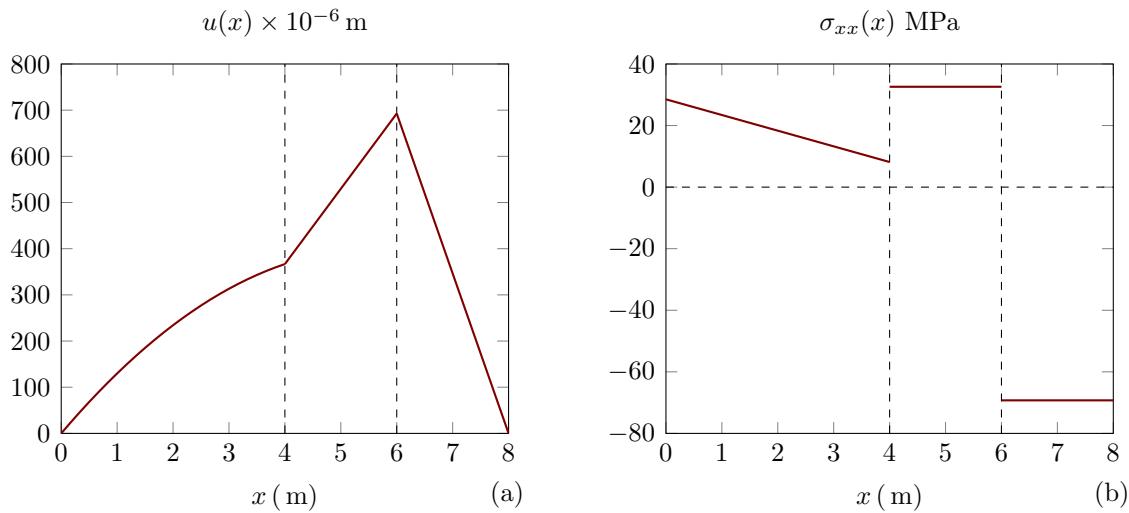


Figura 3.5: Ejemplo de una barra sometida a fuerza axial. Solución analítica: (a) desplazamiento en dirección longitudinal y (b) esfuerzo normal.

$u(x)$ mostrada en la Figura 3.5(a), corresponde a:

$$u(x) \times 10^{-6} \text{ m} = \begin{cases} 2.5465 \cdot (56.0x - 5.0x^2) & (0.0 < x < 4.0) \text{ m} \\ 10.1864 \cdot 16.0 \cdot (x - 4.0) + 366.69 & (4.0 < x < 6.0) \text{ m} \\ 10.1864 \cdot (-34.0) \cdot (x - 6.0) + 692.7 & (6.0 < x < 8.0) \text{ m} \end{cases}$$

Mientras que el esfuerzo normal en la barra varía con respecto a la posición de la forma (Figura 3.5(b)):

$$\sigma_{xx}(x) \text{ MPa} = \begin{cases} 28.521 - 5.093x & (0.0 < x < 4.0) \text{ m} \\ 32.595 & (4.0 < x < 6.0) \text{ m} \\ -69.264 & (6.0 < x < 8.0) \text{ m} \end{cases}$$

3.13.2. Procedimiento y resultados de la simulación numérica con una malla de 3 elementos unidimensionales lineales

La Figura 3.6 ilustra una malla de 3 elementos finitos unidimensionales lineales y 4 nudos que representa el problema. Se establece que los desplazamientos de los nudos 3 y 4 son conocidos e iguales a cero. La carga distribuida uniforme de 10 kN/m está aplicada sobre el elemento 1 y la carga puntual de 50 kN se ubica en el nudo 2.

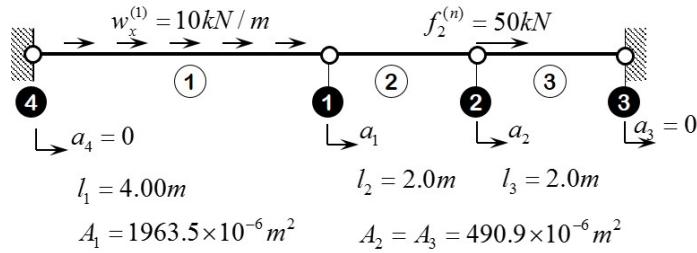


Figura 3.6: Ejemplo de aplicación de barra sometida a fuerza axial: malla de elementos finitos.

Después de identificar el área de la sección transversal y la longitud de cada elemento finito, su matriz de rigidez se calcula mediante la Ecuación (3.24), así:

$$\mathbf{K}^{(1)} = 98.15 \times 10^3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ kN/m} , \quad \mathbf{K}^{(2)} = \mathbf{K}^{(3)} = 49.09 \times 10^3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ kN/m}$$

El número identificador de los desplazamientos en los nudos asociados a cada elemento se indica en la tabla de incidencias (Tabla 3.1). Con tal información y con las matrices de rigidez de los elementos $\mathbf{K}_{(e)}$ se calcula la matriz de rigidez de la malla \mathbf{K} mediante el procedimiento de ensamblaje y se obtiene:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 147.2 & -49.09 & 0 & -98.15 \\ -49.09 & 98.18 & -49.09 & 0 \\ 0 & -49.09 & 49.09 & 0 \\ -98.15 & 0 & 0 & 98.15 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ kN/m}$$

El vector de fuerzas equivalentes a la acción de una carga distribuida de 10 kN/m sobre el elemento 1, se calcula con la Ecuación (3.25), así:

$$\tilde{\mathbf{f}}^{(1)} = 20 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

Los elementos 2 y 3 no tienen fuerzas distribuidas en su longitud, por lo tanto $\mathbf{f}^{(2)} = \mathbf{f}^{(3)} = \mathbf{0}$.

El vector $\tilde{\mathbf{f}}$ se obtiene del ensamblaje del vector de fuerzas equivalentes $\tilde{\mathbf{f}}^{(1)}$ de acuerdo con la numeración de sus grados de libertad, de la forma:

$$\tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

La carga puntual de 50 kN aplicada en el grado de libertad 2 está representada por el coeficiente $f_2^{(n)}$ del vector de fuerzas aplicadas directamente a los nudos $\mathbf{f}^{(n)}$, es decir:

$$\mathbf{f}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \\ f_3^{(n)} \\ f_4^{(n)} \end{bmatrix} \text{ kN}$$

Los términos $f_3^{(n)}$ y $f_4^{(n)}$ corresponden a las reacciones en los apoyos derecho e izquierdo, asociados a los grados de libertad 3 y 4, respectivamente.

Como lo indica la Ecuación 3.48, el vector de fuerzas totales \mathbf{f} será la suma entre el vector que contiene a las fuerzas equivalentes en los nudos a la acción de fuerzas distribuidas en la longitud de los elementos $\tilde{\mathbf{f}}^{(e)}$ y el vector de fuerzas aplicadas directamente sobre los nudos $\mathbf{f}^{(n)}$, de tal forma que:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 20 \\ 50 \\ f_3^{(n)} \\ 20 + f_4^{(n)} \end{bmatrix} \text{ kN}$$

La ecuación de equilibrio del sistema (3.51), incluyendo la subdivisión matricial asociada a los grados de libertad desconocidos y las condiciones de frontera del problema, es:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 147.2 & -49.09 & 0 & -98.15 \\ -49.09 & 98.18 & -49.09 & 0 \\ \hline 0 & -49.09 & 49.09 & 0 \\ -98.15 & 0 & 0 & 98.15 \end{array} \right] \times 10^3 \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 50 \\ f_3^{(n)} \\ 20 + f_4^{(n)} \end{bmatrix}$$

Como lo indica la Ecuación (3.53), el subvector de desplazamientos nodales desconocidos de la malla \mathbf{a}_α es igual a:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 147.2 & -49.09 \\ -49.09 & 98.18 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 20 \\ 50 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -98.15 \\ -49.09 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \times 10^{-3} = \begin{bmatrix} 366.7 \\ 692.6 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

Siendo $\mathbf{a}_\beta = \mathbf{0}$, el vector de desplazamientos nodales de la malla $\mathbf{a} = [\mathbf{a}_\alpha^T \quad \mathbf{a}_\beta^T]^T$ será igual a:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 366.7 \\ 692.6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{-6} \text{ m}$$

Por otro lado, el vector \mathbf{f}_β se obtiene aplicando la Ecuación (3.41)(3.54), así:

$$\begin{bmatrix} 0 & -49.09 \\ -98.15 & 0 \end{bmatrix} \times 10^3 \begin{bmatrix} 366.7 \\ 692.6 \end{bmatrix} \times 10^{-6} + \begin{bmatrix} 49.09 & 0 \\ 0 & 98.15 \end{bmatrix} \times 10^3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -34.00 \\ -36.00 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

Las reacciones en los apoyos izquierdo $f_4^{(n)}$ y derecho $f_3^{(n)}$, se calculan remplazando el resultado anterior en la Ecuación (3.56), de la forma:

$$\begin{bmatrix} f_3^{(n)} \\ f_4^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -34.00 \\ -36.00 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.00 \\ 20.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -34.00 \\ -56.00 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

En la Figura 3.7 se presenta el desplazamiento en los nudos y en el interior de cada elemento finito. Se observa que $u(x)$ es una función continua por tramos de variación lineal dada por la función de aproximación de cada uno de los elementos unidimensionales lineales, indicada en la Ecuación 3.12. Los valores de desplazamiento en los nudos son iguales a los obtenidos de forma analítica. Sin embargo, la variación lineal dada en la simulación en el elemento 1 difiere un poco de la función cuadrática obtenida analíticamente.

El vector de desplazamientos nodales de cada uno de los elementos se extrae del vector \mathbf{a} , como lo indica la Ecuación (3.57), de tal forma que:

$$\mathbf{a}_{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 366.7 \end{bmatrix} \times 10^{-6} \text{ m}, \quad \mathbf{a}_{(2)} = \begin{bmatrix} 366.7 \\ 692.6 \end{bmatrix} \times 10^{-6} \text{ m}, \quad \mathbf{a}_{(3)} = \begin{bmatrix} 692.6 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{-6} \text{ m}$$

Según la Ecuación (3.16), la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma de cada uno de los elementos finitos unidimensionales lineales es igual a:

$$\mathbf{B}_{(1)} = 0.25 \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{(2)} = \mathbf{B}_{(3)} = 0.50 \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La deformación longitudinal $\varepsilon_{xx}^{(e)}$ y el esfuerzo normal $\sigma_{xx}^{(e)}$ en el interior de cada elemento se obtienen utilizando las ecuaciones (3.15) y (3.17), de la forma:

$$\varepsilon_{xx}^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.25 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 366.7 \end{bmatrix} \times 10^{-6} = 91.69 \times 10^{-6}$$

$$\sigma_{xx}^{(1)} = 2 \times 10^8 \cdot 91.69 \times 10^{-6} = 18.34 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$$

$$\varepsilon_{xx}^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.50 & 0.50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 366.7 \\ 692.6 \end{bmatrix} \times 10^{-6} = 162.9 \times 10^{-6}$$

$$\sigma_{xx}^{(2)} = 2 \times 10^8 \cdot (-162.9 \times 10^{-6}) = 32.59 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$$

$$\varepsilon_{xx}^{(3)} = \begin{bmatrix} -0.50 & 0.50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 692.6 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{-6} = -346.3 \times 10^{-6}$$

$$\sigma_{xx}^{(3)} = 2 \times 10^8 \cdot (-346.3 \times 10^{-6}) = -69.26 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$$

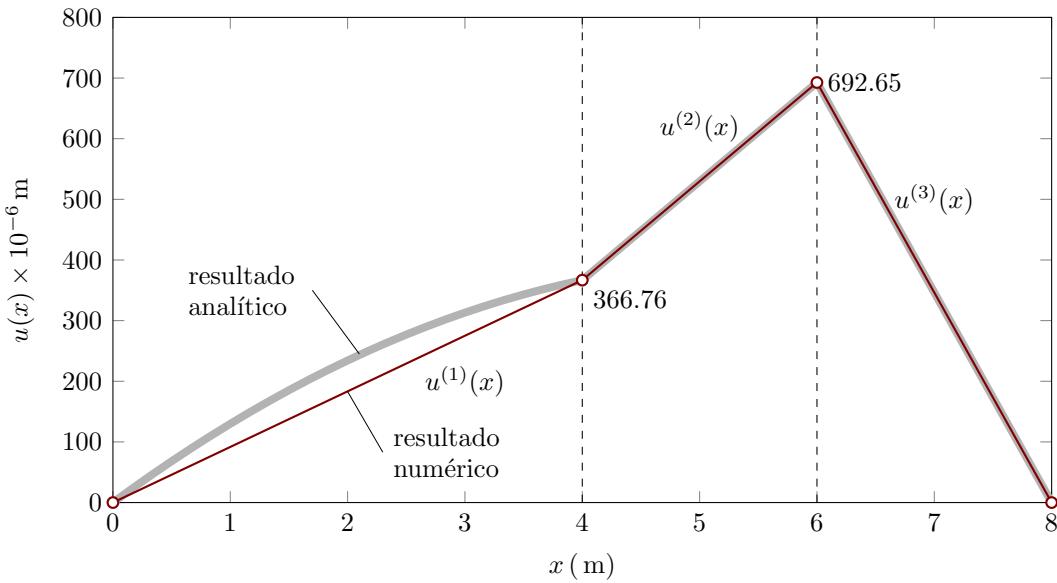


Figura 3.7: Ejemplo de una barra sometida a fuerza axial. Desplazamiento en dirección longitudinal para una malla de 3 elementos finitos unidimensionales lineales

En la Figura 3.8 se observa que el esfuerzo normal no es una función continua en los nudos, lo cual es esperable en elementos finitos de continuidad C^0 , como el elemento unidimensional lineal. En este tipo de elementos los valores nodales corresponden a desplazamientos en los nudos exclusivamente, sin incluir a las primeras derivadas de $u(x)$.

El esfuerzo normal calculado en los elementos finitos 2 y 3 son iguales a los obtenidos de forma analítica (Figura 3.8). Sin embargo, en el tramo de la barra que estaba sometido a una carga distribuida uniforme, la solución analítica indica que el desplazamiento $u(x)$ es una función cuadrática de la posición y en consecuencia la deformación longitudinal y el esfuerzo normal varían de forma lineal. Tal comportamiento no puede ser representado exactamente por un solo elemento unidimensional lineal entre 0.0 y 4.0 m, ya que dicho elemento considera que el desplazamiento es función lineal de la posición y en consecuencia la deformación longitudinal y el esfuerzo normal son constantes en su interior. A pesar de esto, el valor constante del esfuerzo en la simulación corresponde al valor promedio entre los extremos de la solución analítica. En particular, el esfuerzo normal obtenido de forma analítica en $x = 0.0$ es de 28.521 MPa y en $x = 4.0$ m de 8.149 MPa, obteniendo un promedio de 18.335 MPa, mientras que el resultado en el elemento finito 1 es de 18.338 MPa.

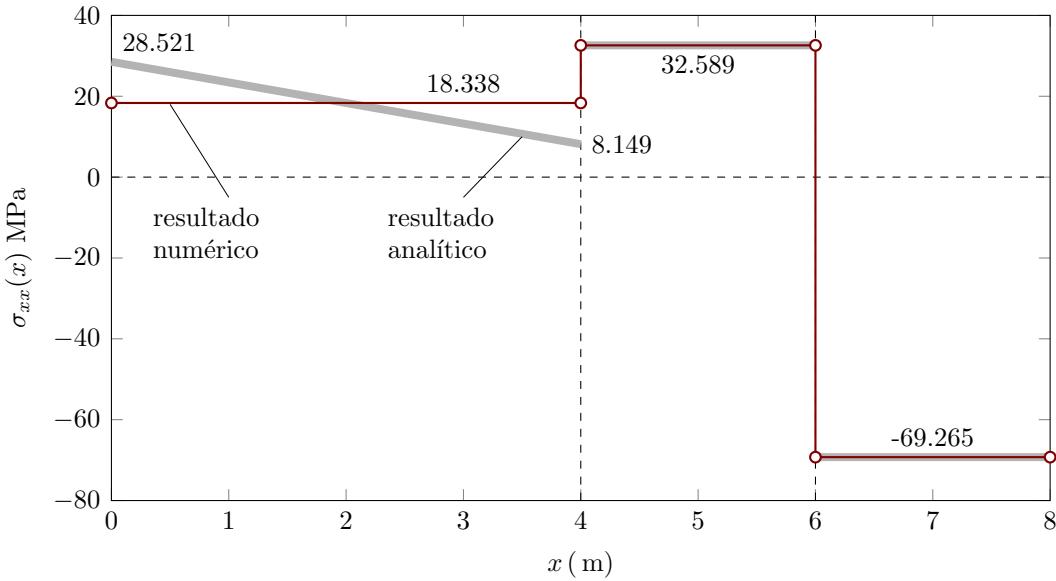


Figura 3.8: Ejemplo de una barra sometida a fuerza axial. Esfuerzo normal en una malla de 3 elementos finitos unidimensionales lineales

Para mejorar la aproximación a la solución de problemas de barras sometidas a cargas distribuidas axiales se pueden construir mallas más finas con elementos unidimensionales lineales en los tramos donde se aplica la carga o también se pueden utilizar elementos unidimensionales cuadráticos.

3.13.3. Resultados de la simulación numérica con una malla de 10 elementos unidimensionales lineales

El problema presentado en la sección anterior se simula a continuación con una malla de 11 nudos y 10 elementos unidimensional lineales, distribuidos como lo ilustra la Figura 3.9. El tramo de barra donde se aplica la carga distribuida de 10 kN/m se dividió en 8 elementos finitos de longitud $L_{(e)} = 0.5$ m. El resto de la barra se dividió en dos elementos donde el nudo entre ellos tiene la carga puntual de 50 kN.

El desplazamiento en dirección x obtenido en los nudos de la malla y en el interior de los elementos se muestra en la Figura 3.10. Se observa que los resultados de la simulación representan la misma variación del desplazamiento con respecto a x obtenida en la solución analítica.

El esfuerzo normal en el interior de cada elemento finito se ilustra en la Figura 3.11. Allí se observa que el esfuerzo normal constante en cada elemento finito

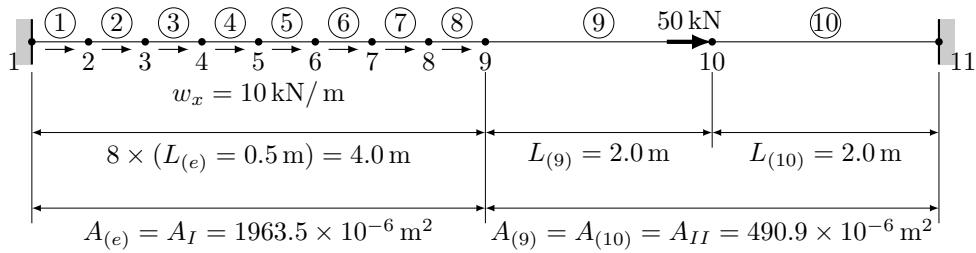


Figura 3.9: Ejemplo de una barra sometida a fuerza axial. Malla de 10 elementos finitos unidimensionales lineales

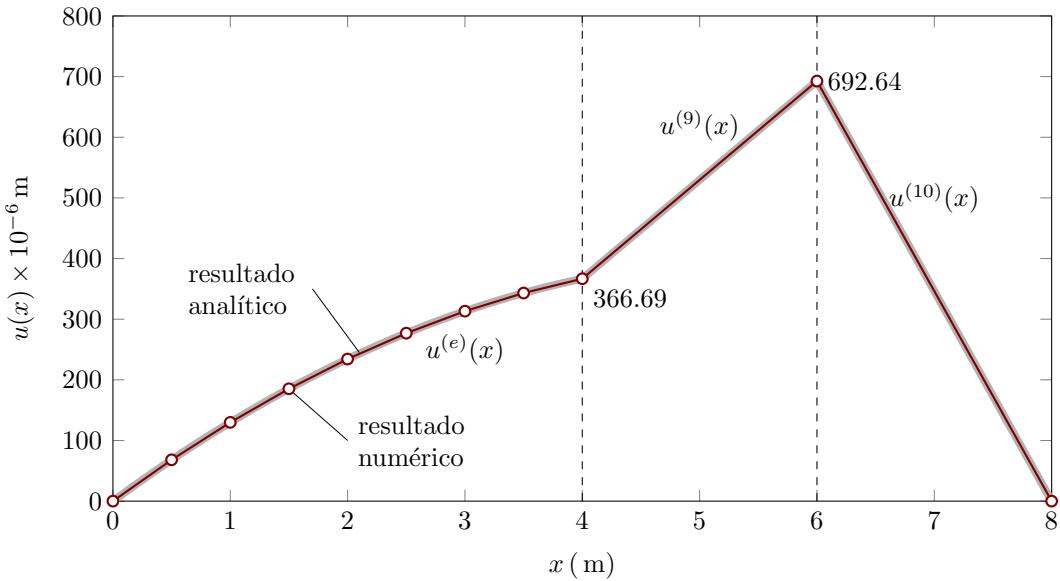


Figura 3.10: Ejemplo de una barra sometida a fuerza axial. Desplazamiento en dirección longitudinal para una malla de 10 elementos finitos unidimensionales lineales

describe satisfactoriamente y de forma escalonada la variación dada analíticamente.

3.13.4. Resultados promedio en los nudos de la simulación numérica con una malla fina de elementos unidimensionales lineales

El ejemplo de aplicación en cuestión se simula con una malla de 33 nudos y 32 elementos unidimensionales lineales de $L_{(e)} = 0.25 \text{ m}$, numerados de forma secuencial de izquierda a derecha como se muestra en la Figura 3.12. El tramo de barra con área de sección transversal $A_I = 1963.5 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ se divide en 16 elementos finitos y el tramo donde $A_{II} = 490.9 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ se divide en otros 16 elementos. Asimismo, la carga distribuida uniforme de 10 kN/m está aplicada en los primeros 16 elementos y

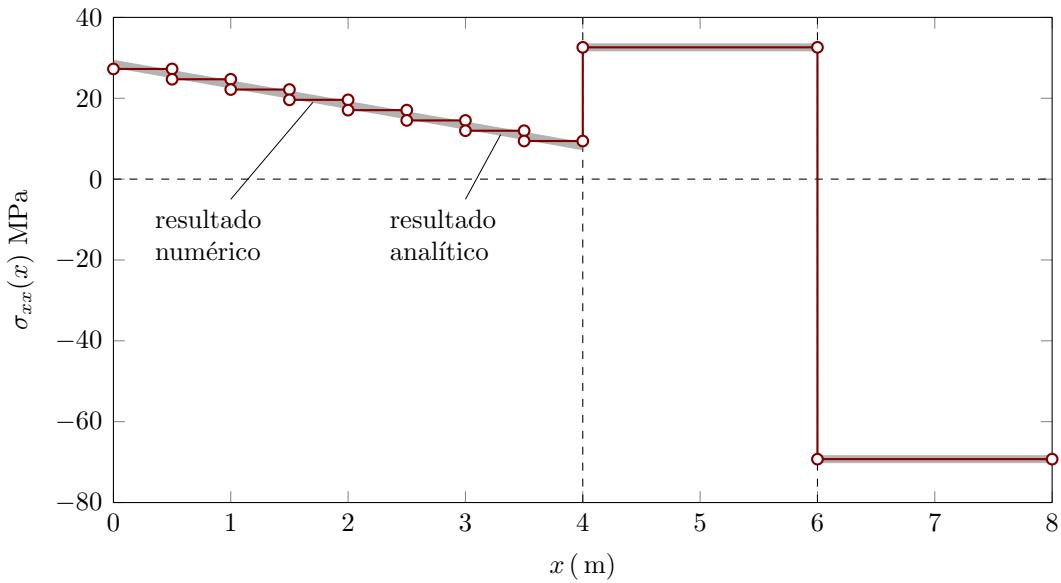


Figura 3.11: Ejemplo de una barra sometida a fuerza axial. Esfuerzo normal en una malla de 10 elementos finitos unidimensionales lineales

la carga puntual de 50 kN ocurre en el nudo 25.

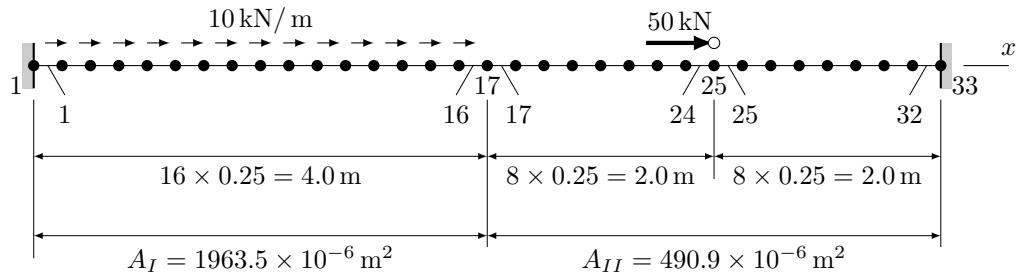


Figura 3.12: Ejemplo de una barra sometida a fuerza axial. Esfuerzo normal en una malla de 10 elementos finitos unidimensionales lineales

Después del análisis por elementos finitos se obtiene el esfuerzo normal en el interior de cada elemento indicado en la Figura 3.13 como *resultado numérico elemental*.

A continuación se realiza el proceso de suavizado de los resultados elementales para obtener los esfuerzos normales promedio en los nudos. Algunos de los cálculos

realizados son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx}^{prom}(0.00) &= \sigma_{xx}^{(1)} = 27.88 \text{ MPa} \\
 \sigma_{xx}^{prom}(0.25) &= \frac{1}{2}(\sigma_{xx}^{(1)} + \sigma_{xx}^{(2)}) = \frac{1}{2}(27.88 \text{ MPa} + 26.61 \text{ MPa}) = 27.25 \text{ MPa} \\
 \sigma_{xx}^{prom}(0.50) &= \frac{1}{2}(\sigma_{xx}^{(2)} + \sigma_{xx}^{(3)}) = \frac{1}{2}(26.61 \text{ MPa} + 25.34 \text{ MPa}) = 25.97 \text{ MPa} \\
 &\dots \\
 \sigma_{xx}^{prom}(4.00) &= \sigma_{xx}^{(16)} = 8.78 \text{ MPa} \\
 \sigma_{xx}^{prom}(4.00) &= \sigma_{xx}^{(17)} = 32.59 \text{ MPa} \\
 \sigma_{xx}^{prom}(4.25) &= \frac{1}{2}(\sigma_{xx}^{(17)} + \sigma_{xx}^{(18)}) = \frac{1}{2}(32.59 \text{ MPa} + 32.59 \text{ MPa}) = 32.59 \text{ MPa} \\
 &\dots \\
 \sigma_{xx}^{prom}(6.00) &= \frac{1}{2}(\sigma_{xx}^{(24)} + \sigma_{xx}^{(25)}) = \frac{1}{2}(32.59 \text{ MPa} - 69.26 \text{ MPa}) = -18.33 \text{ MPa} \\
 &\dots \\
 \sigma_{xx}^{prom}(8.00) &= \sigma_{xx}^{(32)} = -69.26 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

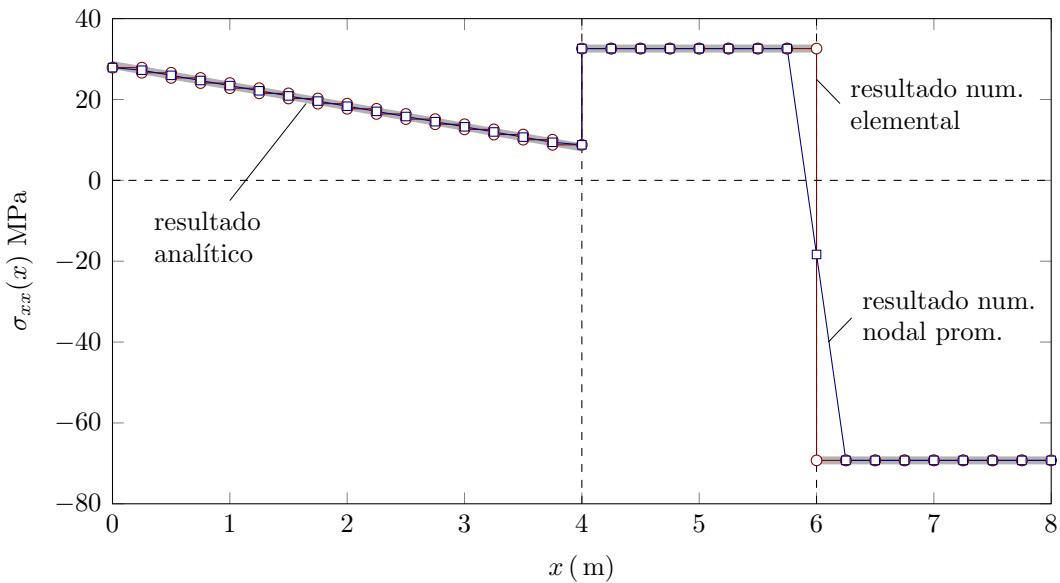


Figura 3.13: Ejemplo de una barra sometida a fuerza axial. Esfuerzo normal elemental y nodal promedio en una malla de 32 elementos finitos unidimensionales lineales.

Los elementos que comparten el nudo ubicado en $x = 4.0 \text{ m}$ tienen área de sección transversal diferente y en consecuencia existen dos valores distintos de esfuerzo nor-

mal en ese punto. Por otro lado, en $x = 6.0$ m el esfuerzo normal cambia fuertemente, produciendo un valor promedio satisfactorio, solo si la malla es suficientemente fina como la utilizada en este ejemplo.

3.14. Generalidades del sistema estructural de armadura

El sistema estructural de armadura o cercha consiste en un conjunto de barras conectadas en sus extremos o nudos, el cual soporta cargas externas aplicadas sobre algunos de ellos y se apoya en otros restringiendo su desplazamiento. Las barras que lo conforman están sometidas a fuerza axial de tensión o de compresión y tienen orientaciones diferentes que mantienen la configuración estable del sistema.

En las armaduras tridimensionales como la mostrada en la Figura 3.14, se considera que cada nudo puede desplazarse en las direcciones de los ejes de un sistema coordenado global xyz , por lo tanto se identifican los 3 grados de libertad por nudo u_i , v_i y w_i . Asimismo, en aquellas armaduras cuya geometría y acciones externas están contenidas en el plano xy , los grados de libertad por nudo se pueden reducir a u_i y v_i , como se ilustra en la Figura 3.15.

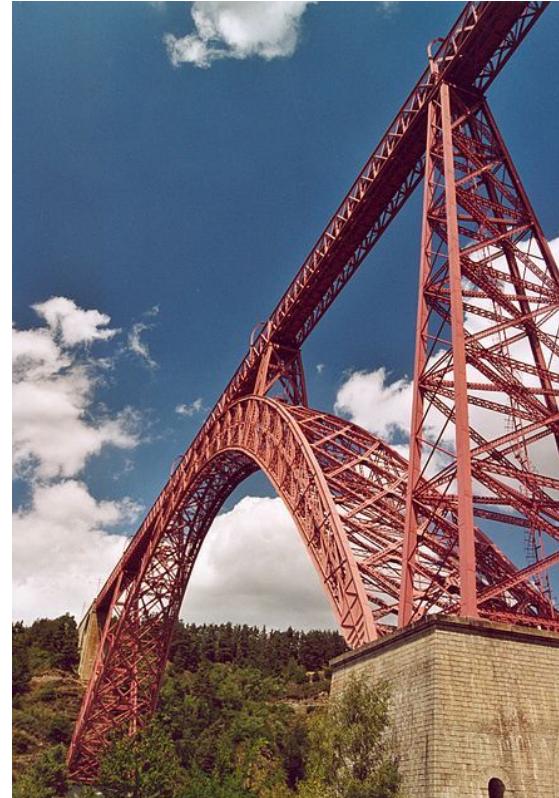


Figura 3.14: Armadura tridimensional de una pila y un arco del viaducto de Garabit (Francia).

3.15. Elemento de armadura en sistema coordenado local y global

La formulación presentada hasta el momento considera que los grados de libertad son los desplazamientos en los nudos de la malla en una dirección común. Esta última coincide con la orientación del eje longitudinal de todos los elementos que la conforman. En cambio, las armaduras están formadas por barras, las cuales están

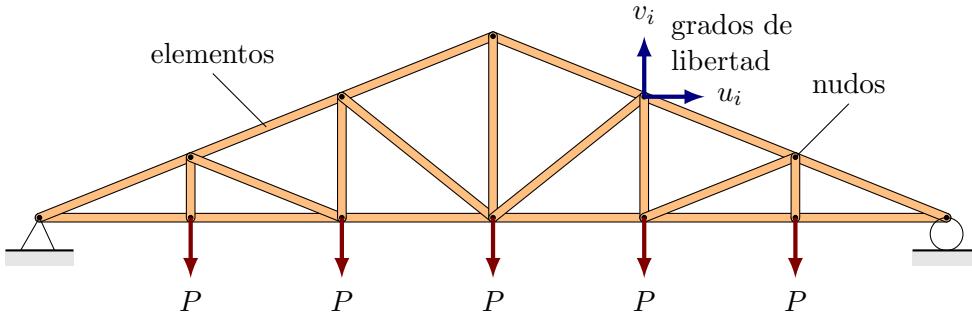


Figura 3.15: Armadura plana tipo Howe sometida a cargas puntuales en su cordón inferior.

orientadas en direcciones diferentes definidas por un *sistema coordenado local*.

Los grados de libertad en los nudos de la armadura corresponden a las componentes de desplazamiento referidas a un *sistema coordenado global*. Por lo tanto es necesario transformar los vectores de desplazamiento de los nudos de cada elemento entre su sistema coordinado local y el sistema coordinado global de la estructura.

El elemento de barra mostrado en la Figura 3.16 está conformado por los nudos 1 y 2 en los extremos. En cada uno de ellos existe un vector de desplazamiento, que se aproxima de forma lineal en su interior. Las componentes de tales vectores pueden referirse a un sistema coordinado local de la forma (Figura 3.16(a)):

$$\bar{\mathbf{u}}_1^{(e)} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1^{(e)} & \bar{v}_1^{(e)} & \bar{w}_1^{(e)} \end{bmatrix}^T \quad \bar{\mathbf{u}}_2^{(e)} = \begin{bmatrix} \bar{u}_2^{(e)} & \bar{v}_2^{(e)} & \bar{w}_2^{(e)} \end{bmatrix}^T \quad (3.58a)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_1^{(e)} = \bar{u}_1^{(e)}\bar{\mathbf{i}} + \bar{v}_1^{(e)}\bar{\mathbf{j}}^* + \bar{k}_1^{(e)}\bar{\mathbf{k}}^* \quad \bar{\mathbf{u}}_2^{(e)} = \bar{u}_2^{(e)}\bar{\mathbf{i}} + \bar{v}_2^{(e)}\bar{\mathbf{j}}^* + \bar{k}_2^{(e)}\bar{\mathbf{k}}^* \quad (3.58b)$$

Los ejes \bar{x} , \bar{y}^* y \bar{z}^* de este sistema tienen las direcciones de los vectores unitarios $\bar{\mathbf{i}}$, $\bar{\mathbf{j}}^*$ y $\bar{\mathbf{k}}^*$. El vector unitario $\bar{\mathbf{i}}$ está determinado por el segmento entre los extremos de la barra. En cambio, los vectores $\bar{\mathbf{j}}^*$ y $\bar{\mathbf{k}}^*$ son normales a $\bar{\mathbf{i}}$, pero no son únicos.

Asimismo, las componentes de los vectores de desplazamiento en los extremos de la barra se pueden expresar con respecto a un sistema coordinado global así (Figura 3.16(b)):

$$\mathbf{u}_1^{(e)} = \begin{bmatrix} u_1^{(e)} & v_1^{(e)} & w_1^{(e)} \end{bmatrix}^T \quad \mathbf{u}_2^{(e)} = \begin{bmatrix} u_2^{(e)} & v_2^{(e)} & w_2^{(e)} \end{bmatrix}^T \quad (3.59a)$$

$$\mathbf{u}_1^{(e)} = u_1^{(e)}\mathbf{i} + v_1^{(e)}\mathbf{j} + w_1^{(e)}\mathbf{k} \quad \mathbf{u}_2^{(e)} = u_2^{(e)}\mathbf{i} + v_2^{(e)}\mathbf{j} + w_2^{(e)}\mathbf{k} \quad (3.59b)$$

Los ejes x , y y z de este sistema tienen las direcciones de los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} .

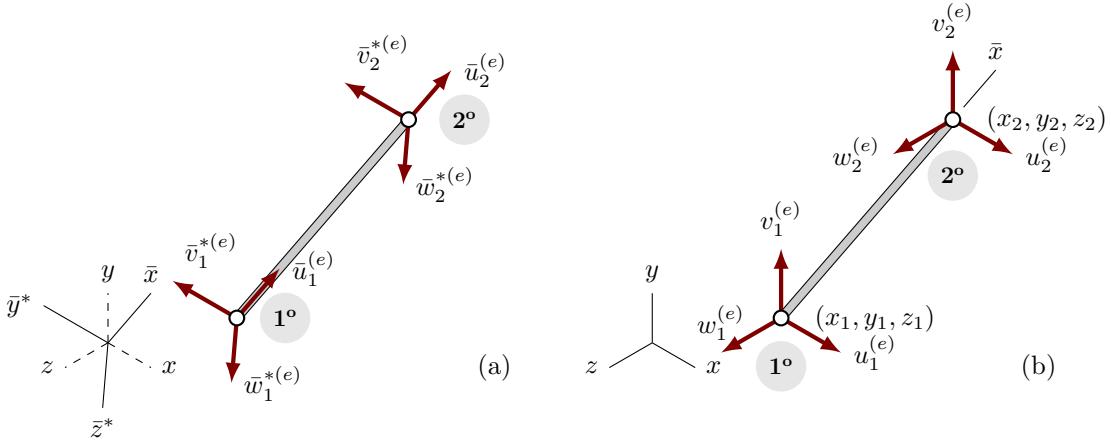


Figura 3.16: Elemento de armadura: desplazamientos en los nudos del elemento: (a) definido en sistema coordenado local y (b) definido en sistema coordenado global.

La relación de las componentes de desplazamiento del elemento armadura entre los dos sistemas coordinados está determinada por la siguiente operación matricial:

$$\bar{\mathbf{a}}_{(e)} = \mathbf{T}_{(e)} \mathbf{a}_{(e)} \quad \mathbf{a}_{(e)} = \mathbf{T}_{(e)}^T \bar{\mathbf{a}}_{(e)} \quad (3.60a)$$

$$\bar{\mathbf{a}}_{(e)} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_1^{(e)} \\ \bar{\mathbf{u}}_2^{(e)} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{a}}_{(e)} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1^{(e)} & \bar{v}_1^{(e)} & \bar{w}_1^{(e)} & \bar{u}_2^{(e)} & \bar{v}_2^{(e)} & \bar{w}_2^{(e)} \end{bmatrix}^T \quad (3.60b)$$

$$\mathbf{a}_{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^{(e)} \\ \mathbf{u}_2^{(e)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_{(e)} = \begin{bmatrix} u_1^{(e)} & v_1^{(e)} & w_1^{(e)} & u_2^{(e)} & v_2^{(e)} & w_2^{(e)} \end{bmatrix}^T \quad (3.60c)$$

$$\mathbf{T}_{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{v(e)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{v(e)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{(e)}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{v(e)}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{v(e)}^T \end{bmatrix} \quad (3.60d)$$

siendo $\mathbf{T}_{(e)}$ la matriz de transformación de los desplazamientos en los nudos de un elemento de armadura, y $\mathbf{T}_{v(e)}$ la matriz de transformación de un vector en el espacio dada en las ecuaciones (1.19) y (1.26).

Particularmente, las componentes de desplazamiento en los nudos perpendiculares al eje longitudinal de una barra sometida a fuerza axial son nulas, es decir $\bar{v}_1^{(e)} = 0$, $\bar{w}_1^{(e)} = 0$, $\bar{v}_2^{(e)} = 0$ y $\bar{w}_2^{(e)} = 0$. Esto permite reducir la matriz columna de desplazamientos nodales del elemento con respecto a su sistema coordenado local así:

$$\bar{\mathbf{a}}_{(e)} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1^{(e)} \\ \bar{u}_2^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Esta última corresponde con el vector de valores nodales de desplazamiento en el elemento unidimensional lineal presentado en la ecuación (3.14).

Lo anterior conduce a simplificar la operación matricial de transformación de valores nodales del desplazamiento dada en la ecuación (3.60a), así:

$$\bar{\mathbf{a}}_{(e)} = \mathbf{T}_{(e)} \mathbf{a}_{(e)}, \quad \begin{bmatrix} \bar{u}_1^{(e)} \\ \bar{u}_2^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{\bar{x}x}^{(e)} & \lambda_{\bar{x}y}^{(e)} & \lambda_{\bar{x}z}^{(e)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{\bar{x}x}^{(e)} & \lambda_{\bar{x}y}^{(e)} & \lambda_{\bar{x}z}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ v_1^{(e)} \\ w_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \\ v_2^{(e)} \\ w_2^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

donde la matriz de transformación entre las componentes de desplazamiento en los dos sistemas coordenados se reescribe como:

$$\mathbf{T}_{(e)} = \begin{bmatrix} \lambda_{\bar{x}x}^{(e)} & \lambda_{\bar{x}y}^{(e)} & \lambda_{\bar{x}z}^{(e)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{\bar{x}x}^{(e)} & \lambda_{\bar{x}y}^{(e)} & \lambda_{\bar{x}z}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Recordando la ecuación (1.19), los cosenos directores del elemento $\lambda_{\bar{x}x}^{(e)}$, $\lambda_{\bar{x}y}^{(e)}$ y $\lambda_{\bar{x}z}^{(e)}$, corresponden a:

$$\lambda_{\bar{x}x}^{(e)} = \bar{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{i}, \quad \lambda_{\bar{x}y}^{(e)} = \bar{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{j}, \quad \lambda_{\bar{x}z}^{(e)} = \bar{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{k} \quad (3.64)$$

donde el vector unitario $\bar{\mathbf{i}}$ indica la dirección del eje longitudinal del elemento de armadura \bar{x} , mientras que \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} son los vectores unitarios direccionales de los ejes del sistema coordenado global xyz . En la Figura 3.16(b) ilustra una barra de coordenadas (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) , en sus nudos 1 y 2, respectivamente. El vector unitario direccional $\bar{\mathbf{i}}$ de dicha barra es igual a:

$$\bar{\mathbf{i}} = \frac{(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \quad (3.65)$$

Cada barra de la armadura corresponde a un elemento unidimensional lineal de continuidad C_0 , el cual define el desplazamiento longitudinal en su interior a partir de la función de la aproximación dada en la ecuación (3.12).

La deformación en el interior del elemento se obtiene mediante la ecuación (3.15), en términos de la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma en sistema coordenado local $\bar{\mathbf{B}}_{(e)}$. Esta última se define de la misma forma

como lo indica la ecuación (3.16), es decir:

$$\bar{\mathbf{B}}_{(e)} = \frac{1}{L_{(e)}} [-1 \quad 1] \quad (3.66a)$$

$$\varepsilon_{xx}^{(e)} = \bar{\mathbf{B}}_{(e)} \bar{\mathbf{a}}_{(e)} = \bar{\mathbf{B}}_{(e)} \mathbf{T}_{(e)} \mathbf{a}_{(e)} = \mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{T}_{(e)}^T \bar{\mathbf{B}}_{(e)}^T \quad (3.66b)$$

Asimismo, el esfuerzo normal en un elemento de armadura de material elástico lineal con módulo de Young $E_{(e)}$ es igual a:

$$\sigma_{xx}^{(e)} = E_{(e)} \varepsilon_{xx}^{(e)} = E_{(e)} \bar{\mathbf{B}}_{(e)} \mathbf{T}_{(e)} \mathbf{a}_{(e)} \quad (3.67)$$

3.16. Desplazamientos nodales en una armadura

De acuerdo con el principio de los trabajos virtuales aplicado a un sistema de barras sometidas a fuerza axial presentado en la ecuación (3.19) y en ausencia de cargas distribuidas a lo largo de los elementos $b_x^{(e)} A_{(e)} = 0$, se tiene que:

$$\sum_{e=1}^{ne} \left[\int_{\Omega_{(e)}} \delta \varepsilon_{xx}^{(e)} \sigma_{xx}^{(e)} A_{(e)} dx \right] = \sum_{n=1}^{nn} \delta u(x_n) f(x_n) \quad (3.68)$$

El término a la derecha de la igualdad anterior corresponde al trabajo virtual externo producido por cargas puntuales en los nn nudos de la armadura. Esta sumatoria se puede expresar como el producto entre la transpuesta de la matriz columna de desplazamientos nodales de la armadura $\delta \mathbf{a} = [\delta a_1, \delta a_2, \dots, \delta a_{nn}]^T$ y la correspondiente matriz columna de fuerzas aplicadas en los nudos $\mathbf{f}^{(n)} = [f_1, f_2, \dots, f_{nn}]^T$, es decir $\delta \mathbf{a}^T \mathbf{f}^{(n)}$.

El término entre corchetes a la izquierda de la igualdad corresponde al trabajo virtual interno aportado por el elemento e . Con el fin de establecer un desplazamiento virtual común en este término, es necesario expresarlo con respecto a un sistema coordenado global.

De la misma forma como se define la deformación real en la ecuación (3.66b), se establece que la deformación virtual $\delta \varepsilon_{xx}^{(e)}$ es igual a:

$$\delta \varepsilon_{xx}^{(e)} = \bar{\mathbf{B}}_{(e)} \delta \bar{\mathbf{a}}_{(e)} = \bar{\mathbf{B}}_{(e)} \mathbf{T}_{(e)} \delta \mathbf{a}_{(e)} = \delta \mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{T}_{(e)}^T \bar{\mathbf{B}}_{(e)}^T \quad (3.69)$$

siendo $\delta \mathbf{a}_{(e)}$ la matriz columna de desplazamientos nodales virtuales del elemento.

Sustituyendo las ecuaciones (3.69) y (3.67) en la expresión (3.68) y recordando que $\delta\mathbf{a}_{(e)}$ y $\mathbf{a}_{(e)}$ son independientes de x , se obtiene:

$$\sum_{e=1}^{ne} \delta\mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{T}_{(e)}^T \left[\int_{\Omega_{(e)}} \bar{\mathbf{B}}_{(e)}^T E_{(e)} A_{(e)} \bar{\mathbf{B}}_{(e)} dx \right] \mathbf{T}_{(e)} \mathbf{a}_{(e)} = \delta\mathbf{a}^T \mathbf{f}^{(n)} \quad (3.70)$$

El término entre corchetes indicado en la expresión anterior se define como a la matriz de rigidez del elemento de armadura en sistema coordenado local $\bar{\mathbf{K}}^{(e)}$, y corresponde a la matriz de rigidez del elemento unidimensional lineal de continuidad C_0 expresada en la ecuación (3.24), es decir:

$$\bar{\mathbf{K}}^{(e)} = \frac{E_{(e)} A_{(e)}}{L_{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Esta matriz cuadrada tiene tamaño 2 y está asociada a los desplazamientos longitudinales en los nudos del elemento.

En cambio, la matriz de rigidez del elemento de armadura en sistema coordenado global se obtiene de la siguiente operación:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{T}_{(e)}^T \bar{\mathbf{K}}^{(e)} \mathbf{T}_{(e)} \quad (3.72a)$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \lambda_{\bar{x}x}^{(e)} & 0 \\ \lambda_{\bar{x}y}^{(e)} & 0 \\ \lambda_{\bar{x}z}^{(e)} & 0 \\ 0 & \lambda_{\bar{x}x}^{(e)} \\ 0 & \lambda_{\bar{x}y}^{(e)} \\ 0 & \lambda_{\bar{x}z}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{k} & -\bar{k} \\ -\bar{k} & \bar{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{\bar{x}x}^{(e)} & \lambda_{\bar{x}y}^{(e)} & \lambda_{\bar{x}z}^{(e)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{\bar{x}x}^{(e)} & \lambda_{\bar{x}y}^{(e)} & \lambda_{\bar{x}z}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.72b)$$

siendo $\bar{k} = E_{(e)} A_{(e)} / L_{(e)}$. La matriz de rigidez del elemento de armadura en sistema coordenado global tiene tamaño 6×6 y está asociada a las componentes de desplazamiento en las tres direcciones del sistema coordenado y en los dos nudos de sus extremos.

Reemplazando los resultados anteriores en la ecuación (3.70) y recordando la operación de ensamblaje de la matriz de rigidez de la armadura matrices $\mathbf{K} = \mathbb{A}_{e=1}^{ne} \mathbf{K}^{(e)}$, se obtiene:

$$\sum_{e=1}^{ne} \delta\mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}_{(e)} = \delta\mathbf{a}^T \left(\mathbb{A}_{e=1}^{ne} \mathbf{K}^{(e)} \right) \mathbf{a} = \delta\mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} = \delta\mathbf{a}^T \mathbf{f}^{(n)} \rightarrow \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f}^{(n)} \quad (3.73)$$

donde $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_{nn}]^T$ es la matriz columna de desplazamientos nodales de la armadura. Esta matriz está formada por dos subvectores que contienen los desplazamientos desconocidos \mathbf{a}_α y conocidos \mathbf{a}_β de la armadura.

Lo anterior conduce a la partición matricial explicada en la Sección 3.9, donde se obtiene el vector \mathbf{a}_α mediante la ecuación (3.53). Particularmente en la formulación de las armaduras se han considerado nulas las cargas distribuidas en las barras, por lo tanto el vector indicado como $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{0}$.

3.17. Deformación y esfuerzo en un elemento de armadura

A partir del vector de desplazamientos nodales de la armadura \mathbf{a} , obtenido en el apartado anterior, se extrae el respectivo vector de desplazamientos nodales del elemento en sistema coordenado global $\mathbf{a}_{(e)}$. Este procedimiento consiste en construir un vector con los coeficientes de \mathbf{a} que están asociados a los grados de libertad del elemento e , y se indica de la forma:

$$\mathbf{a}_{(e)} = \mathbb{E}(\mathbf{a}, e) \quad (3.74)$$

El vector de desplazamientos nodales del elemento en sistema coordenado local $\bar{\mathbf{a}}_{(e)}$ se obtiene de la transformación dada en las ecuaciones (3.60a) y (3.63).

La deformación longitudinal $\varepsilon_{xx}^{(e)}$ y el esfuerzo normal $\sigma_{xx}^{(e)}$ en el interior del elemento de armadura e se calculan mediante las expresiones (3.66b) y (3.67), respectivamente. Se observa que el valor de ambas entidades es constante con respecto a la posición en el elemento.

3.18. Armadura plana

Una armadura plana es aquella cuya geometría y cargas externas están contenidas en un plano, generando desplazamientos en esas mismas direcciones.

Lo anterior permite simplificar la formulación de la armadura a un plano xy , considerando 2 grados de libertad por nudo correspondientes a las componentes de desplazamiento u_i y v_i en las direcciones x y y , respectivamente. Por lo tanto, el vector de desplazamientos nodales en el elemento con respecto a un sistema coordenado global, mostrado en la Figura 3.17, es de la forma:

$$\mathbf{a}_{(e)} = \begin{bmatrix} u_1^{(e)} & v_1^{(e)} & u_2^{(e)} & v_2^{(e)} \end{bmatrix}^T \quad (3.75)$$

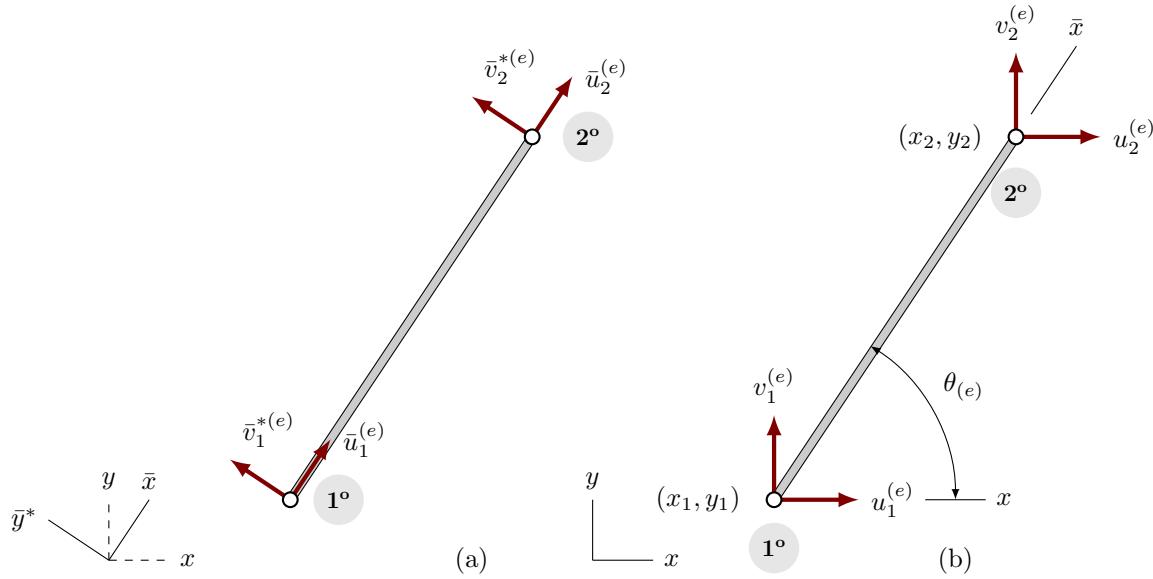


Figura 3.17: Elemento de armadura plana: desplazamientos en los nudos del elemento: (a) definido en sistema coordenado local y (b) definido en sistema coordenado global.

En cambio, el vector de desplazamientos nodales del elemento en el sistema local de coordenadas $\bar{\mathbf{a}}_{(e)}$ se puede escribir en términos de los desplazamientos longitudinales en sus extremos $\bar{u}_1^{(e)}$ y $\bar{u}_2^{(e)}$, recordando que los desplazamientos transversales $\bar{v}_1^{(e)}$ y $\bar{v}_2^{(e)}$ son nulos, como se define en la ecuación (3.61).

De acuerdo a esto, la operación matricial de transformación de desplazamientos nodales entre sistemas coordinados es particularmente de la forma:

$$\bar{\mathbf{a}}_{(e)} = \mathbf{T}_{(e)} \mathbf{a}_{(e)}, \quad \begin{bmatrix} \bar{u}_1^{(e)} \\ \bar{u}_2^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{\bar{x}x}^{(e)} & \lambda_{\bar{x}y}^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{\bar{x}x}^{(e)} & \lambda_{\bar{x}y}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ v_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \\ v_2^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

donde la matriz de transformación se reduce a:

$$\mathbf{T}_{(e)} = \begin{bmatrix} \lambda_{\bar{x}x}^{(e)} & \lambda_{\bar{x}y}^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{\bar{x}x}^{(e)} & \lambda_{\bar{x}y}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

Si el ángulo formado entre el eje x del sistema coordenado global y el eje \bar{x} del sistema coordenado local de un elemento de armadura plana se define como $\theta_{(e)}$, el

vector unitario direccional del elemento será:

$$\bar{\mathbf{i}} = \cos \theta_{(e)} \mathbf{i} + \sin \theta_{(e)} \mathbf{j} \quad (3.78)$$

y en consecuencia, los cosenos directores de la matriz de transformación corresponden a:

$$\lambda_{\bar{x}x}^{(e)} = \cos \theta_{(e)}, \quad \lambda_{\bar{y}x}^{(e)} = \sin \theta_{(e)} \quad (3.79)$$

La matriz de rigidez del elemento de armadura plana en sistema coordenado global $\mathbf{K}^{(e)}$ se obtiene de la forma expresada en la ecuación (3.72a), considerando ahora la matriz de transformación $\mathbf{T}_{(e)}$ indicada en la expresión (3.77) y la matriz de rigidez local $\bar{\mathbf{K}}(e)$ dada en la ecuación (3.71), así:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \lambda_{\bar{x}x}^{(e)} & 0 \\ \lambda_{\bar{x}y}^{(e)} & 0 \\ 0 & \lambda_{\bar{x}x}^{(e)} \\ 0 & \lambda_{\bar{x}y}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{k} & -\bar{k} \\ -\bar{k} & \bar{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{\bar{x}x}^{(e)} & \lambda_{\bar{x}y}^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{\bar{x}x}^{(e)} & \lambda_{\bar{x}y}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.80a)$$

siendo $\bar{k} = E_{(e)} A_{(e)} / L_{(e)}$. La matriz de rigidez del elemento de armadura plana en sistema coordenado global tiene tamaño 4×4 y está asociada a las componentes de desplazamiento en las dos direcciones del sistema coordenado xy y en los dos nudos de sus extremos.

Capítulo 4

Formulación del problema elástico lineal en estructuras formadas por barras sometidas a flexión

Este capítulo describe el problema mecánico de barras sometidas a flexión o vigas considerando las hipótesis planteadas por la teoría de vigas de Euler–Bernoulli. Asimismo, aquí se indica la formulación del problema en el marco del método de los elementos finitos y se presenta su aplicación a sistemas de vigas de sección transversal variable, sometidos a carga perpendicular a su eje.

4.1. Descripción del problema mecánico de vigas de Euler–Bernoulli

El problema mecánico de la barra prismática sometida a flexión en el plano xz mostrada en la Figura 4.1, cuyo material es lineal elástico y su eje longitudinal es paralelo a x , incluye las siguientes hipótesis (Oñate, 1995, 2009):

- *Hipótesis 1:* el desplazamiento en dirección x de los puntos materiales sobre el eje longitudinal de la viga son iguales a cero, es decir, $u = 0$. Asimismo, si el plano de flexión es xz , los desplazamientos en dirección y se consideran nulos. Por lo tanto, los puntos materiales del eje longitudinal solo se desplazan en dirección z .
- *Hipótesis 2:* Los puntos materiales que hacen parte de una misma línea recta normal al eje longitudinal tienen el mismo desplazamiento en dirección z .
- *Hipótesis 3:* Los puntos materiales que conforman una línea recta normal al eje longitudinal antes de la aplicación de las cargas, permanecen sobre la misma

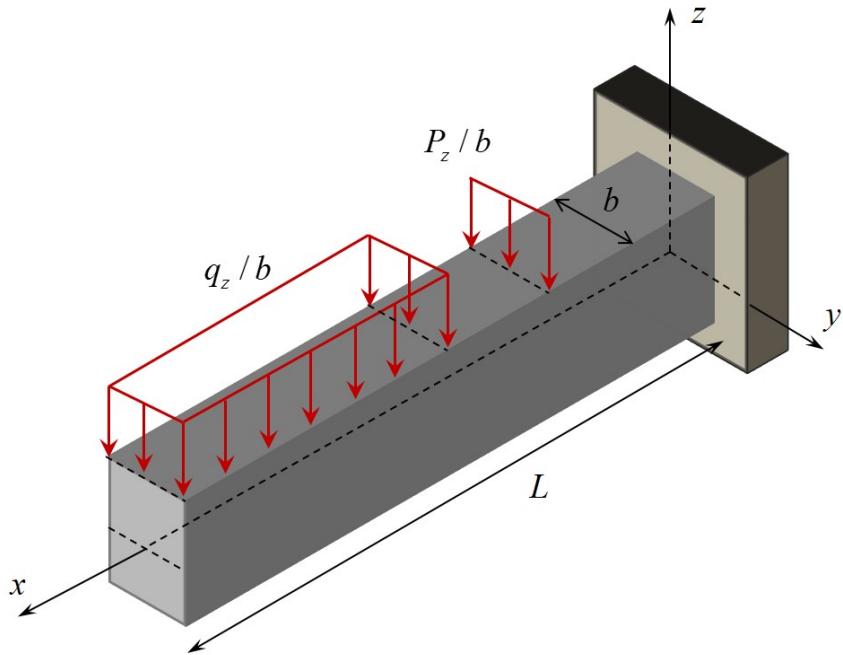


Figura 4.1: Geometría y acciones externas aplicadas sobre una viga a flexión en el plano xz .

línea recta después de aplicadas las cargas, que además conserva la ortogonalidad con el eje longitudinal.

Se define a ϕ como el ángulo en el plano xz , formado entre una línea recta normal al eje longitudinal en la configuración no deformada y la línea recta formada por los mismos puntos materiales en la configuración deformada, como lo muestra la Figura 4.2(a). Este ángulo se considera positivo en la dirección $-y$.

De acuerdo con la Hipótesis 1 y recordando que el eje longitudinal está ubicado en $z = 0$, las componentes u y v son:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -z\phi(x) \\ v(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

De la Hipótesis 2 se concluye que la componente del desplazamiento en dirección z es independiente de la componente de la posición en las direcciones y y z , es decir:

$$w(x, y, z) = w(x) \tag{4.2}$$

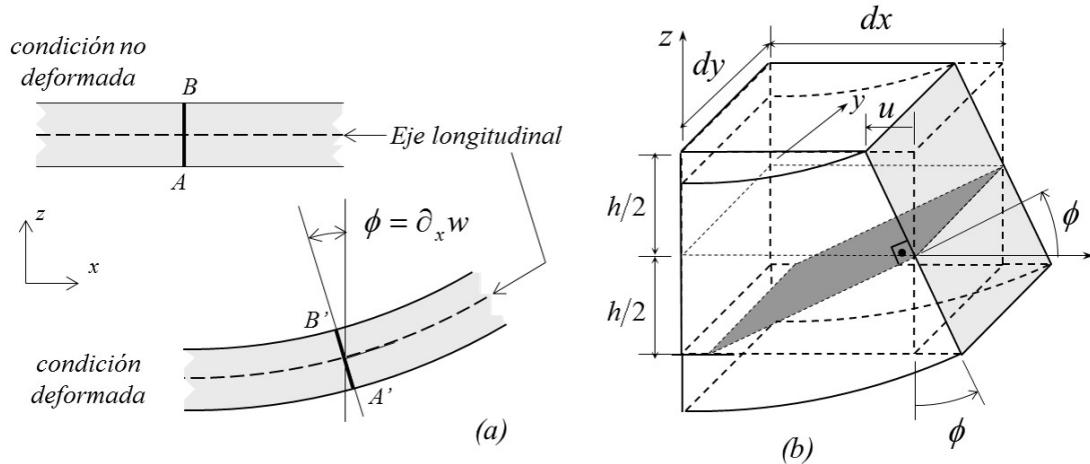


Figura 4.2: Viga de Euler - Bernoulli: (a) Eje longitudinal y línea material AB en condición deformada y no deformada, (b) elemento diferencial de viga deformado.

Se observa que la componente del desplazamiento lineal w y el desplazamiento angular ϕ son constantes en y y en z .

La Hipótesis 3 define una relación entre el desplazamiento angular ϕ o giro y la primera derivada del desplazamiento en dirección z , de la forma:

$$\phi = \frac{dw}{dx} \quad (4.3)$$

En otras palabras, el desplazamiento angular de una línea inicialmente normal al plano medio coincide con la pendiente de dicho plano, es decir que la primera derivada de la deflexión con respecto a x es igual al giro alrededor del eje y en su sentido negativo.

A partir de las ecuaciones anteriores se establece que el campo del desplazamiento lineal en dirección x es igual a:

$$u(x, z) = -z \frac{dw}{dx} \quad (4.4)$$

y en consecuencia, el campo de la deformación longitudinal en esa misma dirección, definido por la Ecuación (2.1), es:

$$\epsilon_{xx}(x, z) = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{d^2w}{dx^2} \quad (4.5)$$

mientras que las demás componentes de deformación son iguales a cero, es decir:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad , \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad , \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad , \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0\end{aligned}\quad (4.6)$$

Sustituyendo las componentes de la deformación en las ecuaciones (2.19) y (2.21), se obtiene la única componente del esfuerzo diferente de cero para un material lineal elástico isótropo, como:

$$\sigma_{xx}(x, z) = E\varepsilon_{xx} = -zE \frac{d^2w}{dx^2} = -zE\kappa \quad (4.7)$$

siendo E el módulo de elasticidad. En la ecuación anterior se introduce el concepto de curvatura de la viga κ , como la segunda derivada de la deflexión con respecto a la posición, es decir, $\kappa = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

La ecuación anterior indica que el esfuerzo normal se distribuye de forma lineal sobre la sección transversal de la viga como se indica en la Figura 3.10.

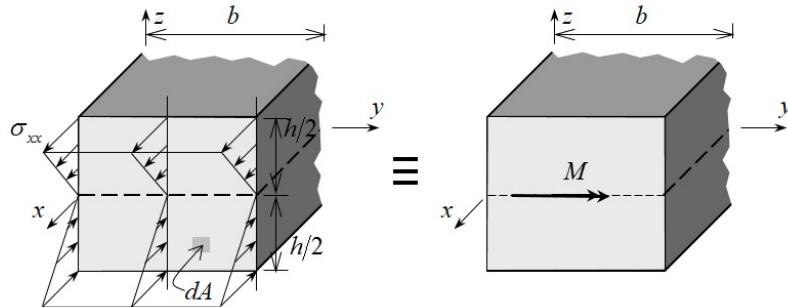


Figura 4.3: Viga de Euler - Bernoulli: distribución del esfuerzo normal sobre la sección transversal y momento flector equivalente.

En un elemento diferencial dA sobre la sección transversal actúa una fuerza $\sigma_{xx}dA$ a una distancia z , generando un diferencial de momento alrededor del eje y igual a $dM = -z\sigma_{xx}dA$. Por lo tanto, el esfuerzo σ_{xx} distribuido sobre la sección transversal es estáticamente equivalente a la acción de un momento flector M , de la forma:

$$M = - \int_A z\sigma_{xx}dA = E \frac{d^2w}{dx^2} \int_A z^2 dA = EI \frac{d^2w}{dx^2} = EI\kappa \quad (4.8)$$

siendo I el segundo momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje y .

4.2. Elemento finito unidimensional cúbico de continuidad C_1

El dominio Ω de una viga sometida a flexión se simplifica a un espacio unidimensional $\{x \mid \forall x \in \Omega\}$, donde se pretende obtener el campo del desplazamiento en dirección z o deflexión $w(x)$. Tal dominio se divide en subdominios o elementos finitos $\Omega_{(e)}$, donde $\Omega \cong \sum_1^{ne} \Omega_{(e)}$.

Con el fin de representar la deflexión de la viga mediante una función suave, la función de la deflexión w en el interior de cada elemento finito debe ser continua con los elementos vecinos, al igual que su primera derivada $\partial_x w$. Para vigas de Euler – Bernoulli, la primera derivada de la deflexión es igual al giro en el plano de flexión como lo indica la Ecuación (4.3). Esta última condición identifica a los *elementos finitos de continuidad C_1* .

La función de aproximación más sencilla en el dominio del elemento finito $\Omega_{(e)}$, que permite representar una deflexión suave y continua de la viga, es un polinomio de tercer orden de la forma:

$$w(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \quad \forall x \in \Omega_{(e)} \quad (4.9)$$

el cual resulta de la doble integración de la ecuación diferencial (4.8) cuando actúan momentos diferentes en los extremos de la viga.

De acuerdo con su función de aproximación y su condición de continuidad en la primera derivada de la función de aproximación, este elemento finito se denomina *unidimensional cúbico de continuidad C_1* .

La primera derivada con respecto a la posición de la ecuación anterior es igual a:

$$\partial_x w(x) = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2 \quad \forall x \in \Omega_{(e)} \quad (4.10)$$

Dado un elemento finito unidimensional e de longitud $L_{(e)}$, entre los nudos i y j , como se indica en la Figura 4.4(a). Los valores nodales corresponden a la deflexión $w_i^{(e)} = a_1^{(e)}$ y el giro $\partial_x w_i^{(e)} = \phi_i^{(e)} = a_2^{(e)}$ en el nudo i , y a la deflexión $w_j^{(e)} = a_3^{(e)}$ y el giro $\partial_x w_j^{(e)} = \phi_j^{(e)} = a_4^{(e)}$ en el nudo j .

La función de aproximación y su primera derivada evaluada en $x = 0$ y en $x = L_{(e)}$ son los valores nodales, de la forma:

$$\begin{aligned} w_i^{(e)} &= a_1^{(e)} = w(0) = \alpha_1 \\ \partial_x w_i^{(e)} &= \phi_i^{(e)} = a_2^{(e)} = \partial_x w(0) = \alpha_2 \\ w_j^{(e)} &= a_3^{(e)} = w(L_{(e)}) = \alpha_1 + \alpha_2 L_{(e)} + \alpha_3 L_{(e)}^2 + \alpha_4 L_{(e)}^3 \\ \partial_x w_j^{(e)} &= \phi_j^{(e)} = a_4^{(e)} = \partial_x w(L_{(e)}) = \alpha_2 + 2\alpha_3 L_{(e)} + 3\alpha_4 L_{(e)}^2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Después de despejar los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ del sistema de cuatro ecuaciones (9.10) en función de los valores nodales $a_1^{(e)}, a_2^{(e)}, a_3^{(e)}, a_4^{(e)}$, y de remplazar los coeficientes en la Ecuación (4.9), se puede reescribir la función de aproximación así:

$$w(x) = N_1^{(e)}(x) a_1^{(e)} + N_2^{(e)}(x) a_2^{(e)} + N_3^{(e)}(x) a_3^{(e)} + N_4^{(e)}(x) a_4^{(e)} \quad (4.12)$$

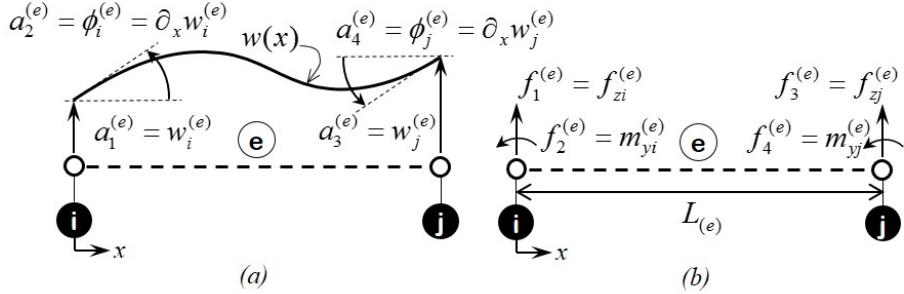


Figura 4.4: Elemento unidimensional cúbico C_1 : (a) deflexión y giro para todo x y en los nudos, (b) fuerza y momento flector en los nudos.

Los coeficientes que multiplican a los valores nodales en cada sumando de la ecuación anterior corresponden a las siguientes *funciones de forma* del elemento unidimensional cúbico de continuidad C_1 :

$$\begin{aligned} N_1^{(e)}(x) &= 1 - \frac{3x^2}{L_{(e)}^2} + \frac{2x^3}{L_{(e)}^3}, & N_2^{(e)}(x) &= x - \frac{2x^2}{L_{(e)}} + \frac{x^3}{L_{(e)}^2} \\ N_3^{(e)}(x) &= \frac{3x^2}{L_{(e)}^2} - \frac{2x^3}{L_{(e)}^3}, & N_4^{(e)}(x) &= -\frac{x^2}{L_{(e)}} + \frac{x^3}{L_{(e)}^2} \end{aligned} \quad (4.13)$$

La Figura 4.5 ilustra a cada una de las funciones de forma en función de x en el dominio del elemento finito.

La ecuación (4.12) se puede expresar como una multiplicación matricial de la forma:

$$w(x) = \mathbf{N}_{(e)}(x) \mathbf{a}_{(e)} \quad \forall x \in \Omega^{(e)} \quad (4.14)$$

donde $\mathbf{N}_{(e)}(x)$ es la matriz de funciones de forma y $\mathbf{a}_{(e)}$ es el vector de valores nodales del desplazamiento del elemento e , definidos como:

$$\mathbf{N}_{(e)}(x) = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & N_2^{(e)} & N_3^{(e)} & N_4^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_{(e)} = \begin{bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \\ a_3^{(e)} \\ a_4^{(e)} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

La curvatura de la viga o la segunda derivada de la deflexión con respecto a x , se puede expresar como:

$$\kappa = \frac{d^2w}{dx^2} = \mathbf{B}_{(e)}(x) \mathbf{a}_{(e)} \quad \forall x \in \Omega^{(e)} \quad (4.16)$$

donde $\mathbf{B}_{(e)}(x)$ es el operador diferencial $\tilde{\nabla} = \partial^2/\partial x^2$ actuando sobre funciones de forma, es decir:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{(e)}(x) &= \tilde{\nabla} \mathbf{N}_{(e)}(x) = \begin{bmatrix} \partial_x^2 N_1^{(e)} & \partial_x^2 N_2^{(e)} & \partial_x^2 N_3^{(e)} & \partial_x^2 N_4^{(e)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} B_1^{(e)} & B_2^{(e)} & B_3^{(e)} & B_4^{(e)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.17)$$

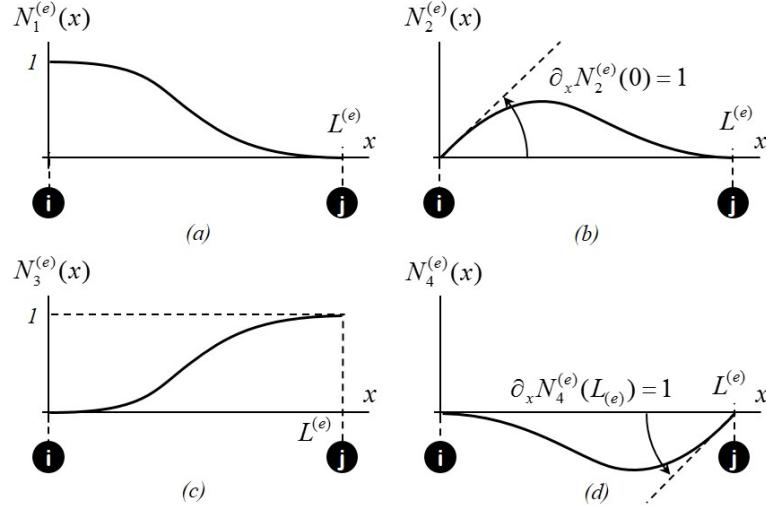


Figura 4.5: Elemento unidimensional cúbico C_1 : funciones de forma.

Por lo tanto, los coeficientes de la matriz $\mathbf{B}_{(e)}(x)$ son iguales a:

$$\begin{aligned} B_1^{(e)}(x) &= -\frac{6}{L_{(e)}^2} + \frac{12x}{L_{(e)}^3}, & B_2^{(e)}(x) &= -\frac{4}{L_{(e)}} + \frac{6x}{L_{(e)}^2} \\ B_3^{(e)}(x) &= \frac{6}{L_{(e)}^2} - \frac{12x}{L_{(e)}^3}, & B_4^{(e)}(x) &= -\frac{2}{L_{(e)}} + \frac{6x}{L_{(e)}^2} \end{aligned} \quad (4.18)$$

4.3. Matriz de rigidez y vector de fuerzas equivalentes del elemento finito unidimensional de viga

El Principio de los Trabajos Virtuales presentado en el Apartado 2.6 se puede simplificar para el problema de vigas a flexión de la forma:

$$\iint \delta\varepsilon_{xx} \sigma_{xx} dA dx = \int \delta w q_z dx + \sum_{n=1}^r \delta w(x_n) P_z(x_n) \quad (4.19)$$

siendo δw el desplazamiento virtual en z y $\delta\varepsilon_{xx}$ la deformación longitudinal virtual, la cual es función de la curvatura virtual o segunda derivada de la deflexión virtual $\delta\kappa = \partial_x^2(\delta w)$ de la forma $\delta\varepsilon_{xx} = -z\delta\kappa$.

Los términos a la derecha de la igualdad representan el trabajo virtual externo realizado por una fuerza distribuida por unidad de longitud q_z y por una fuerza puntual $P_z(x_n)$ en cada punto material x_n , como se ilustra en la Figura 4.1.

Después de reemplazar el esfuerzo normal y la deformación longitudinal de la Ecuación (4.7) en la ecuación anterior, el término a la izquierda de la igualdad, que indica el trabajo virtual interno, será igual a:

$$\iint \delta\varepsilon_{xx} \sigma_{xx} dA dx = \left[\int_A z^2 dA \right] \left[\int_0^L (\delta\kappa) E \kappa dx \right] = \int_0^L (\delta\kappa) EI \kappa dx \quad (4.20)$$

La viga del ejemplo de aplicación mostrado en la Figura 3.15 se divide en un grupo de ne elementos finitos conectados entre sí por nn nudos, como lo ilustra la Figura 3.16(a). Por lo tanto el dominio y la expresión anterior se pueden escribir de la forma:

$$\sum_{e=1}^{ne} \left[\int_0^{L_{(e)}} (\delta\kappa) E_{(e)} I_{(e)} \kappa dx \right] = \sum_{e=1}^{ne} \left[\int_0^{L_{(e)}} \delta w q_z dx \right] + \sum_{n=1}^{nn} \delta w(x_n) P_z(x_n) \quad (4.21)$$

donde $E_{(e)}$, $I_{(e)}$ y $L_{(e)}$ es el módulo de elasticidad, el momento de inercia con respecto a y y la longitud del elemento finito e , respectivamente.

La curvatura virtual en el interior del elemento finito $\delta\kappa$ se define de la misma forma que la curvatura real indicada en la Ecuación (4.16), como:

$$\delta\kappa = \mathbf{B}_{(e)} \delta \mathbf{a}_{(e)} \quad o \quad \delta\kappa = \delta \mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{B}_{(e)}^T \quad (4.22)$$

Mientras que la deflexión virtual se define de la misma forma que la deflexión real mostrada en la Ecuación (4.14), así:

$$\delta w = \mathbf{N}_{(e)} \delta \mathbf{a}_{(e)} \quad o \quad \delta w = \delta \mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{N}_{(e)}^T \quad (4.23)$$

Remplazando las Ecuaciones (4.22) y (4.23) en la expresión del trabajo virtual (4.21), se tiene:

$$\sum_{e=1}^{ne} \delta \mathbf{a}_{(e)}^T \left[\int_0^{L_{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T E_{(e)} I_{(e)} \mathbf{B}_{(e)} dx \right] \mathbf{a}_{(e)} = \sum_{e=1}^{ne} \delta \mathbf{a}_{(e)}^T \left[\int_0^{L_{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T q_z dx \right] + \delta \mathbf{a}^T \mathbf{f}^{(n)} \quad (4.24)$$

donde $\delta \mathbf{a}$ y $\mathbf{f}^{(n)}$ corresponden a los vectores de desplazamientos virtuales y de acciones reales en los nudos de la malla de elementos finitos.

Los términos entre corchetes de la ecuación anterior se definen como la matriz de rigidez $\mathbf{K}^{(e)}$ y el vector de fuerza equivalente a la carga distribuida $\mathbf{f}^{(e)}$ del elemento finito de viga a flexión de módulo de elasticidad y momento de inercia constante, es decir:

$$\mathbf{K}^{(e)} = E_{(e)} I_{(e)} \int_0^{L_{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T \mathbf{B}_{(e)} dx , \quad \mathbf{f}^{(e)} = \int_0^{L_{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T q_z dx \quad (4.25)$$

Sustituyendo la matriz $\mathbf{B}_{(e)}$ y sus componentes presentadas en las ecuaciones (4.17) y (4.18), se establece que la matriz de rigidez del elemento corresponde a:

$$\mathbf{K}^{(e)} = E_{(e)} I_{(e)} \int_0^{L_{(e)}} \begin{bmatrix} B_1^{(e)} B_1^{(e)} & B_1^{(e)} B_2^{(e)} & B_1^{(e)} B_3^{(e)} & B_1^{(e)} B_4^{(e)} \\ & B_2^{(e)} B_2^{(e)} & B_2^{(e)} B_3^{(e)} & B_2^{(e)} B_4^{(e)} \\ & & B_3^{(e)} B_3^{(e)} & B_3^{(e)} B_4^{(e)} \\ & & & B_4^{(e)} B_4^{(e)} \end{bmatrix} dx$$

sim.

Por ejemplo, el coeficiente $k_{11}^{(e)}$ es igual a:

$$\begin{aligned} k_{11}^{(e)} &= E_{(e)} I_{(e)} \int_0^{L_{(e)}} B_1^{(e)} B_1^{(e)} dx = E_{(e)} I_{(e)} \int_0^{L_{(e)}} \left[-\frac{6}{L_{(e)}^2} + \frac{12x}{L_{(e)}^3} \right]^2 dx \\ &= E_{(e)} I_{(e)} \int_0^{L_{(e)}} \left[\frac{36}{L_{(e)}^4} + \frac{144x^2}{L_{(e)}^6} - \frac{144x}{L_{(e)}^5} \right] dx = \frac{12E_{(e)} I_{(e)}}{L_{(e)}^3} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Después de calcular los demás coeficientes se concluye que la matriz de rigidez es igual a:

$$\mathbf{K}^{(e)} = E_{(e)} I_{(e)} \begin{bmatrix} 12/L_{(e)}^3 & 6/L_{(e)}^2 & -12/L_{(e)}^3 & 6/L_{(e)}^2 \\ & 4/L_{(e)} & -6/L_{(e)}^2 & 2/L_{(e)} \\ & & 12/L_{(e)}^3 & -6/L_{(e)}^2 \\ & & & 4/L_{(e)} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

sim.

Al remplazar la matriz de funciones de forma descrita en las ecuaciones (4.13) y (4.15) en la Ecuación (4.25), se obtiene el vector de fuerza equivalente a la carga distribuida $\mathbf{f}^{(e)}$ del elemento, considerando que q_z es la carga distribuida uniforme positiva en la dirección $z+$, mostrada en la Figura 3.13, como:

$$\mathbf{f}^{(e)} = \begin{bmatrix} q_z L_{(e)} / 2 \\ q_z L_{(e)}^2 / 12 \\ q_z L_{(e)} / 2 \\ -q_z L_{(e)}^2 / 12 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Por ejemplo, el segundo coeficiente del vector anterior fue calculado de la forma:

$$f_2^{(e)} = q_z \int_0^{L_{(e)}} N_2^{(e)} dx = q_z \int_0^{L_{(e)}} \left[x - \frac{2x^2}{L_{(e)}} + \frac{x^3}{L_{(e)}^2} \right] dx = \frac{q_z L_{(e)}^2}{12} \quad (4.29)$$

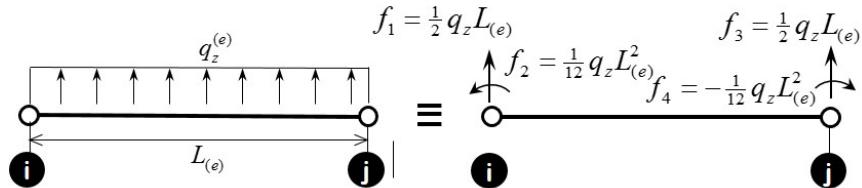


Figura 4.6: Elemento de viga: Acciones equivalentes a una carga distribuida uniforme.

4.4. Procedimiento de cálculo del desplazamiento en los nudos de la malla en una viga

El Principio de los Trabajos Virtuales presentado en la Ecuación (4.21), se puede escribir en términos de la matriz de rigidez del elemento $\mathbf{K}^{(e)}$ indicada en la Ecuación (4.27) y el vector de fuerzas equivalentes del elemento $\mathbf{f}^{(e)}$ mostrado en la Ecuación (4.29). Tal resultado corresponde a la Ecuación (3.36), donde las matrices elementales son de la forma:

$$\mathbf{a}_{(e)} = \begin{bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \\ a_3^{(e)} \\ a_4^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \delta \mathbf{a}_{(e)} = \begin{bmatrix} \delta a_1^{(e)} \\ \delta a_2^{(e)} \\ \delta a_3^{(e)} \\ \delta a_4^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} & k_{13}^{(e)} & k_{14}^{(e)} \\ & k_{22}^{(e)} & k_{23}^{(e)} & k_{24}^{(e)} \\ & & k_{33}^{(e)} & k_{34}^{(e)} \\ & & & k_{44}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^{(e)} = \begin{bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \\ f_3^{(e)} \\ f_4^{(e)} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Los subíndices de los coeficientes presentados en la anterior ecuación indican cada uno de los valores nodales asociados al elemento, como se indica en la Figura (4.4).

Para el ejemplo ilustrado en la Figura 3.15, los vectores de desplazamiento nodal de la malla de elementos finitos virtuales $\delta\mathbf{a}$ y reales \mathbf{a} son iguales a:

$$\delta\mathbf{a}^T = [\delta a_1 \ \delta a_2 \ \delta a_3 \ \delta a_4 \ \delta a_5 \ \delta a_6 \ \delta a_7 \ \delta a_8 \ \delta a_9 \ \delta a_{10}] \quad (4.31)$$

$$\mathbf{a}^T = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7 \ a_8 \ a_9 \ a_{10}] \quad (4.32)$$

cuyos coeficientes están asociados a los grados de libertad numerados en la Figura 3.16(b). Tal numeración sigue la siguiente regla: los grados de libertad de valor desconocidos se numeran de forma ascendente desde 1 y los grados de libertad de valor conocido se numeran de forma descendente desde el total de grados de libertad. El vector de fuerzas nodales de la malla tiene componentes numeradas de la misma forma y corresponde a:

$$\mathbf{f}^{(n)T} = [f_1^{(n)} \ f_2^{(n)} \ f_3^{(n)} \ f_4^{(n)} \ f_5^{(n)} \ f_6^{(n)} \ f_7^{(n)} \ f_8^{(n)} \ f_9^{(n)} \ f_{10}^{(n)}] \quad (4.33)$$

Por ejemplo, la deflexión y el giro del nudo inicial del elemento 1 son $a_1^{(1)} = w_i^{(1)} = a_{10}$ y $a_2^{(1)} = \phi_i^{(1)} = a_9$, respectivamente. El identificador del desplazamiento nodal o grado de libertad en cada nudo y en cada elemento finito se organizan en la Tabla 3.2 y en la Tabla 3.3, respectivamente. Esta última se denomina *tabla de incidencias* y sus columnas UZI, RYI, UZJ y RYJ contienen al identificador de la deflexión y el giro en el nudo i y en el nudo j del elemento, respectivamente.

La primera sumatoria de la Ecuación (3.36) se podría escribir de forma extendida al total de grados de libertad de la malla como se explicó en el Apartado 3.4. Lo cual permitiría factorizar al vector de desplazamiento virtual de la malla $\delta\mathbf{a}^T$ de la forma presentada en la Ecuación (3.26). A cambio de crear la matriz extendida de cada elemento y sumar reiteradamente los coeficientes asociados y no asociados al elemento, se propone el mismo procedimiento de ensamblaje de la matriz de rigidez y del vector de fuerza equivalente, presentado en el Apartado 3.8.

Asimismo, los procedimientos para obtener los desplazamientos nodales desconocidos y las reacciones en los apoyos de una viga corresponden a los que se presentaron en los apartados 3.9 y 3.10, respectivamente.

4.5. Obtención de las acciones internas en los elementos de viga

Los coeficientes del vector de desplazamiento en los nudos de cada elemento $\mathbf{a}_{(e)}$ se extraen del vector de desplazamientos nodales de la malla a indicado en la Ecuación

	NUD	UZ	RY
1	010	009	
2	001	002	
3	003	004	
4	005	006	
5	008	007	

Tabla 4.1: Ejemplo de viga a flexión: Tabla de grados de libertad en cada nudo.

ELE	UZI	RYI	UZJ	RYJ
1	010	009	001	002
2	001	002	003	004
3	003	004	005	006
4	005	006	008	007

Tabla 4.2: Ejemplo de viga a flexión: Tabla de incidencias.

(4.32), de acuerdo con la numeración de los grados de libertad asociados al elemento e (ELE), presentados en las columnas UZI, RYI, UZJ y RYJ de la tabla de incidencias (Tabla 4.2), es decir:

$$\mathbf{a}_{(e)} = \mathbb{E}^{(e)} \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1^{(e)} = a_{\text{UZI(ELE)}} \\ a_2^{(e)} = a_{\text{RYI(ELE)}} \\ a_3^{(e)} = a_{\text{UZJ(ELE)}} \\ a_4^{(e)} = a_{\text{RYJ(ELE)}} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Para el ejemplo en particular, los vectores $\mathbf{a}_{(e)}$ en cada elemento son los siguientes:

$$e = 1 \rightarrow \mathbf{a}_{(1)} = \mathbb{E}^{(1)} \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1^{(1)} = a_{10} \\ a_2^{(1)} = a_9 \\ a_3^{(1)} = a_1 \\ a_4^{(1)} = a_2 \end{bmatrix}, \quad e = 2 \rightarrow \mathbf{a}_{(2)} = \mathbb{E}^{(2)} \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1^{(2)} = a_1 \\ a_2^{(2)} = a_2 \\ a_3^{(2)} = a_3 \\ a_4^{(2)} = a_4 \end{bmatrix}$$

$$e = 3 \rightarrow \mathbf{a}_{(3)} = \mathbb{E}^{(3)} \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1^{(3)} = a_3 \\ a_2^{(3)} = a_4 \\ a_3^{(3)} = a_5 \\ a_4^{(3)} = a_6 \end{bmatrix}, \quad e = 4 \rightarrow \mathbf{a}_{(4)} = \mathbb{E}^{(4)} \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1^{(4)} = a_5 \\ a_2^{(4)} = a_6 \\ a_3^{(4)} = a_8 \\ a_4^{(4)} = a_7 \end{bmatrix}$$

De manera análoga a la Ecuación (3.49), se puede plantear la siguiente expresión

de equilibrio de cada elemento finito:

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}_{(e)} = \mathbf{f}^{(e)} + \mathbf{f}^{\text{int}(e)} \quad (4.35)$$

Siendo $\mathbf{f}^{(e)}$ el vector de fuerzas equivalentes a cargas distribuidas en la longitud del elemento y $\mathbf{f}^{\text{int}(e)}$ el vector de fuerzas en los nudos del elemento o también denominadas acciones internas del elemento. Despejando este último vector se tiene que:

$$\mathbf{f}^{\text{int}(e)} = \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}_{(e)} - \mathbf{f}^{(e)} \quad (4.36)$$

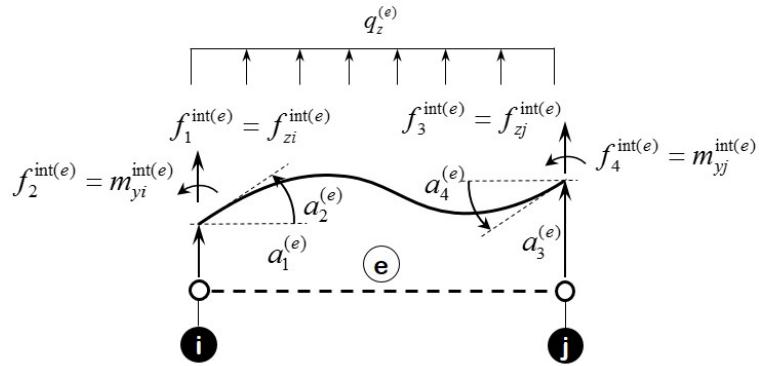


Figura 4.7: Elemento de viga: Acciones internas en los nudos.

Las componentes de $\mathbf{f}^{\text{int}(e)}$ representan la fuerza transversal y el momento flector en los extremos de la viga, que han producido los desplazamientos nodales $\mathbf{a}_{(e)}$, como se ilustra en la Figura 4.7. Tal vector se puede expresar como:

$$\mathbf{f}^{\text{int}(e)} = \begin{bmatrix} f_1^{\text{int}(e)} = f_{zi} \\ f_2^{\text{int}(e)} = m_{yi}^{\text{int}(e)} \\ f_3^{\text{int}(e)} = f_{zj} \\ f_4^{\text{int}(e)} = m_{yj}^{\text{int}(e)} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

4.6. Ejemplo de aplicación de una viga a flexión

Una viga de acero de 8.00m de longitud, empotrada en el extremo izquierdo y simplemente apoyada en el extremo derecho, soporta una carga uniforme distribuida y una carga puntual como se indica en la Figura 4.8.

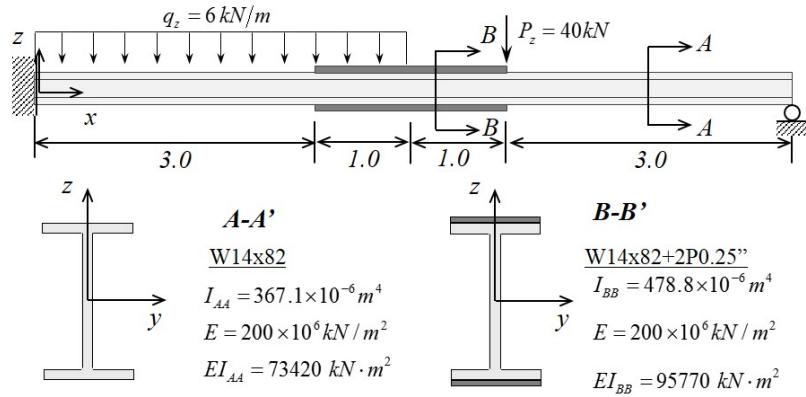


Figura 4.8: Ejemplo de viga a flexión: esquema general.

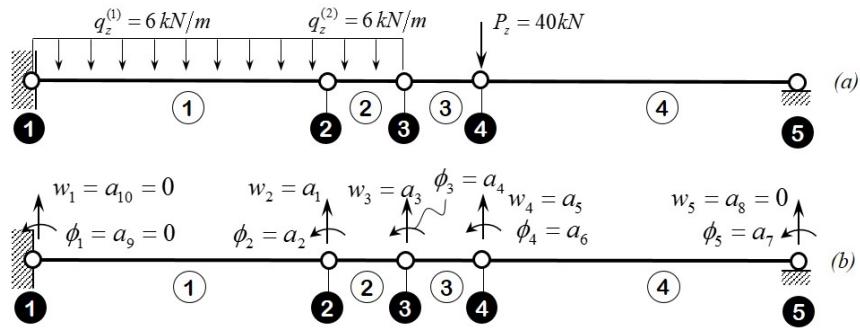


Figura 4.9: Ejemplo de viga a flexión: (a) malla de elementos finitos y (b) numeración de los grados de libertad del ejemplo de aplicación.

Se desea calcular la deflexión y las acciones internas a lo largo de la viga, teniendo en cuenta que la sección transversal corresponde a un perfil W14x85, reforzado en los dos metros centrales de la viga con dos platinas de 0.25 pulgadas de espesor.

En el primer paso en la solución del problema se construye una malla de 4 elementos finitos y 5 nudos como se indica en la Figura 4.9(a), de tal forma que la carga puntual está ubicada en uno de los nudos de la malla y la carga q_z está contenida en algunos elementos.

En cada nudo se definen dos grados de libertad asociados a la deflexión y al giro, o a la fuerza en dirección z y al momento flector alrededor de y , cuya numeración se indica en la Figura 4.9(a). En consecuencia, los identificadores de los grados de libertad relacionados con cada uno de los elementos finitos se presentan en la tabla de incidencias (Tabla 4.2), donde las columnas UZI, RYI, UZJ y RYJ contienen al

identificador de la deflexión y el giro en el nudo i y en el nudo j de cada elemento, respectivamente.

El módulo de elasticidad **EYOU** en kN/m², la longitud **ELON** en m, el momento de inercia **EINY** en m⁴, y la carga distribuida aplicada **ELQZ** en kN/m de los elementos finitos se indica en la Tabla 4.3.

ELE	EYOU (kN/m ²)	ELON (m)	EINY (m ⁴)	ELQZ (kN/m)
1	2.0000E+08	3.0000E-00	3.6710E-04	-6.0000E+00
2	2.0000E+08	1.0000E-00	4.7880E-04	-6.0000E+00
3	2.0000E+08	1.0000E-00	4.7880E-04	0.0000E+00
4	2.0000E+08	3.0000E-00	3.6710E-04	0.0000E+00

Tabla 4.3: Ejemplo de viga a flexión: Tabla de propiedades y cargas distribuidas de los elementos.

Las propiedades de los elementos se remplazan en la Ecuación (4.27) para obtener la matriz de rigidez de cada uno de los elementos finitos, así:

$$\mathbf{K}^{(1)} = \mathbf{K}^{(4)} = \begin{bmatrix} 32.63 & 48.95 & -32.63 & 48.95 \\ & 97.89 & -48.95 & 48.95 \\ & & 32.63 & -48.95 \\ & & & 97.89 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$\text{sim.}$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = \mathbf{K}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1149.1 & 574.6 & -1149.1 & 574.6 \\ & 383.0 & -574.6 & 191.5 \\ & & 1149.1 & -574.6 \\ & & & 383.0 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$\text{sim.}$$

Con la información de la tabla de incidencias y con las matrices de rigidez de los elementos se calcula la matriz de rigidez **K** de la malla mediante el procedimiento de ensamblaje descrito en el Apartado 3.8.

El vector de fuerzas equivalentes a la acción de una carga distribuida por unidad de longitud de 6kN/m sobre los elementos 1 y 2, se calcula con la Ecuación (4.28), de la forma:

$$\mathbf{f}^{(1)} = \begin{bmatrix} -9.00 \\ -4.50 \\ -9.00 \\ 4.50 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^{(2)} = \begin{bmatrix} -3.00 \\ -0.50 \\ -3.00 \\ 0.50 \end{bmatrix}$$

Los elementos 3 y 4 no tienen fuerzas distribuidas en su longitud, por lo tanto $\mathbf{f}^{(3)} = \mathbf{f}^{(4)} = \mathbf{0}$.

El vector $\tilde{\mathbf{f}}$ se obtiene del ensamblaje de los vectores de fuerzas equivalentes $\mathbf{f}^{(1)}$ y $\mathbf{f}^{(2)}$ de acuerdo con la numeración de sus grados de libertad, de la forma:

$$\tilde{\mathbf{f}}^T = [-12.0 \ 4.0 \ -3.0 \ 0.5 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ -4.5 \ -9.0]$$

La carga de 40 kN en el grado de libertad 5 está representada por el coeficiente $f_5^{(n)}$ del vector de fuerzas aplicadas directamente a los nudos $\mathbf{f}^{(n)}$. Asimismo, la fuerza de reacción en el apoyo derecho y la fuerza y el momento de reacción en el apoyo izquierdo corresponden a los coeficientes $f_8^{(n)}$, $f_{10}^{(n)}$ y $f_9^{(n)}$, respectivamente. En consecuencia, el vector $\mathbf{f}^{(n)}$ será igual a:

$$\mathbf{f}^{(n)T} = [0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ -40.0 \ 0.0 \ 0.0 \ f_8^{(n)} \ f_9^{(n)} \ f_{10}^{(n)}]$$

El vector de fuerzas totales \mathbf{f} será la suma entre el vector que contiene a las fuerzas equivalentes en los nudos a la acción de fuerzas distribuidas en la longitud de los elementos $\mathbf{f}^{(e)}$ y el vector de fuerzas aplicadas directamente sobre los nudos $\mathbf{f}^{(n)}$, de tal forma que:

$$\mathbf{f}^T = [-12.0 \ 4.0 \ -3.0 \ 0.5 \ -40.0 \ 0.0 \ 0.0 \ f_8^{(n)} \ (-4.5 + f_9^{(n)}) \ (-9.0 + f_{10}^{(n)})]$$

Se recuerda que el vector de desplazamientos nodales de la malla \mathbf{a} se puede dividir en un subvector de desplazamientos nodales desconocidos \mathbf{a}_α de tamaño 7 por 1 y un subvector de desplazamientos nodales conocidos \mathbf{a}_β de tamaño 3 por 1. Este último está dado por las condiciones de frontera del problema, que en particular son desplazamientos iguales a cero, es decir, $\mathbf{a}_\beta = \mathbf{0}$. Por lo tanto, el cálculo del subvector \mathbf{a}_α de la Ecuación (3.40) se reduce a $\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{-1} \mathbf{f}_\alpha$, siendo:

$$\mathbf{K}_{\alpha\alpha} = \begin{bmatrix} 1181.8 & 525.6 & -1149.1 & 574.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 480.9 & -574.6 & 191.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 2298.2 & 0.0 & -1149.1 & 574.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ & 766.1 & -574.6 & 191.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ & & 1181.8 & -525.6 & 48.95 & 0.0 & 0.0 \\ & & & 480.9 & 48.95 & 0.0 & 0.0 \\ & & & & & 97.89 & 0.0 \end{bmatrix} \times 10^3, \quad \mathbf{f}_\alpha = \begin{bmatrix} -12.0 \\ 4.0 \\ -3.0 \\ 0.5 \\ -40.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

sim.

El vector de desplazamientos nodales desconocido de la malla será igual a:

$$\mathbf{a}_\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.257 \\ -0.824 \\ -2.909 \\ -0.443 \\ -3.077 \\ 0.140 \\ 1.468 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

Con este resultado y las condiciones de frontera $\mathbf{a}_\beta = \mathbf{0}$, se reconstruye el vector de desplazamientos nodales de la malla $\mathbf{a} = [\mathbf{a}_\alpha^T \quad \mathbf{a}_\beta^T]^T$.

En la Tabla 4.4 se presenta la deflexión UZ en metros y el giro RY en radianes obtenido en cada uno de los nudos de la malla, la cual se obtiene de organizar los coeficientes de \mathbf{a} por nudo.

NUD	UZ (m)	RY (rad)
1	0.0000E+00	0.0000E+00
2	-2.2575E-03	-8.2399E-04
3	-2.9095E-03	-4.4282E-04
4	-3.0767E-03	1.4024E-04
5	0.0000E+00	1.4682E-03

Tabla 4.4: Ejemplo de viga a flexión: deflexión y giro en cada nudo de la malla.

Las reacciones en los apoyos son los coeficientes del subvector $\mathbf{f}_\beta^{(n)}$ y se obtienen aplicando la Ecuación (3.56), recordando que $\mathbf{a}_\beta = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{K}_{\beta\alpha} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -32.6 & -48.9 & -48.9 \\ -48.9 & 48.9 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -32.6 & 48.9 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ y } \tilde{\mathbf{f}}_\beta = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -4.5 \\ -9.0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{f}_\beta^{(n)} = \mathbf{K}_{\beta\alpha}\mathbf{a}_\alpha - \tilde{\mathbf{f}}_\beta \quad \rightarrow \quad \mathbf{f}_\beta^{(n)} = \begin{bmatrix} f_8^{(n)} \\ f_9^{(n)} \\ f_{10}^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21.67 \\ 74.67 \\ 42.33 \end{bmatrix}$$

La deflexión en el interior de cada elemento se obtiene del producto entre la matriz de funciones de forma y el vector de valores de desplazamiento nodal, como lo indica la Ecuación (4.14). La Figura 3.17 representa a $w(x)$ como una función continua y suave en los nudos, en virtud de la continuidad de la primera derivada de w o giro establecida por el elemento finito.

El vector de desplazamientos nodales de cada uno de los elementos se extrae del

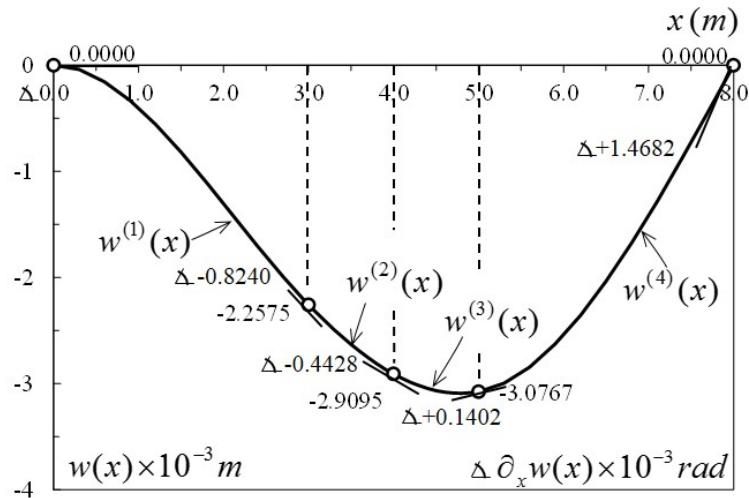


Figura 4.10: Ejemplo de viga a flexión: desplazamiento en z evaluado en el interior de cada elemento.

vector \mathbf{a} , como lo indica la Ecuación (4.34), de tal forma que:

$$\mathbf{a}_{(1)} = \begin{bmatrix} 0.000 \\ 0.000 \\ -2.257 \\ -0.839 \end{bmatrix} \times 10^{-3}, \quad \mathbf{a}_{(2)} = \begin{bmatrix} -2.257 \\ -0.839 \\ -2.909 \\ -0.443 \end{bmatrix} \times 10^{-3},$$

$$\mathbf{a}_{(3)} = \begin{bmatrix} -2.909 \\ -0.443 \\ -3.077 \\ 0.140 \end{bmatrix} \times 10^{-3}, \quad \mathbf{a}_{(4)} = \begin{bmatrix} -3.077 \\ 0.140 \\ 0.000 \\ 1.468 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

El vector de las acciones internas de cada elemento $\mathbf{f}^{\text{int}(e)}$ se calcula con la Ecu-

ción (4.36), utilizando los resultados elementales anteriores, así:

$$e = 1 : \mathbf{K}^{(1)} \mathbf{a}_{(1)} - \mathbf{f}^{(1)} = \mathbf{f}^{\text{int}(1)}$$

$$\begin{bmatrix} 32.63 & 48.95 & -32.63 & 48.95 \\ & 97.89 & -48.95 & 48.95 \\ & & 32.63 & -48.95 \\ sim. & & & 97.89 \end{bmatrix} \times 10^3 \begin{bmatrix} 0.000 \\ 0.000 \\ -2.257 \\ -0.839 \end{bmatrix} \times 10^{-3} - \begin{bmatrix} -9.00 \\ -4.50 \\ -9.00 \\ 4.50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42.33 \\ 74.66 \\ -24.33 \\ 25.33 \end{bmatrix}$$

$$e = 2 : \mathbf{K}^{(2)} \mathbf{a}_{(2)} - \mathbf{f}^{(2)} = \mathbf{f}^{\text{int}(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1149.1 & 574.6 & -1149.1 & 574.6 \\ & 383.0 & -574.6 & 191.5 \\ & & 1149.1 & -574.6 \\ sim. & & & 383.0 \end{bmatrix} \times 10^3 \begin{bmatrix} -2.257 \\ -0.839 \\ -2.909 \\ -0.443 \end{bmatrix} \times 10^{-3} - \begin{bmatrix} -3.00 \\ -0.50 \\ -3.00 \\ 0.50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24.33 \\ -25.33 \\ -18.33 \\ 46.67 \end{bmatrix}$$

$$e = 3 : \mathbf{K}^{(3)} \mathbf{a}_{(3)} - \mathbf{f}^{(3)} = \mathbf{f}^{\text{int}(3)}$$

$$\begin{bmatrix} 1149.1 & 574.6 & -1149.1 & 574.6 \\ & 383.0 & -574.6 & 191.5 \\ & & 1149.1 & -574.6 \\ sim. & & & 383.0 \end{bmatrix} \times 10^3 \begin{bmatrix} -2.909 \\ -0.443 \\ -3.077 \\ 0.140 \end{bmatrix} \times 10^{-3} - \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.33 \\ -46.67 \\ -18.33 \\ 65.00 \end{bmatrix}$$

$$e = 4 : \mathbf{K}^{(4)} \mathbf{a}_{(4)} - \mathbf{f}^{(4)} = \mathbf{f}^{\text{int}(4)}$$

$$\begin{bmatrix} 32.63 & 48.95 & -32.63 & 48.95 \\ & 97.89 & -48.95 & 48.95 \\ & & 32.63 & -48.95 \\ sim. & & & 97.89 \end{bmatrix} \times 10^3 \begin{bmatrix} -3.077 \\ 0.140 \\ 0.000 \\ 1.468 \end{bmatrix} \times 10^{-3} - \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21.67 \\ -65.00 \\ 21.67 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

La Figura 4.11(a) ilustra el diagrama de cuerpo libre de cada elemento finito, indicando las fuerzas transversales $f_{zi}^{\text{int}(e)}$ y $f_{zj}^{\text{int}(e)}$, y los momentos $m_{yi}^{\text{int}(e)}$ y $m_{yj}^{\text{int}(e)}$ en los extremos. La fuerza cortante $V^{(e)}(x)$ y el momento flector $M^{(e)}(x)$ en cualquier punto de la estructura se obtienen del equilibrio de un tramo de cada elemento finito, como lo muestra la Figura (4.11)(b) y (c), así:

$$V^{(e)}(x) = f_{zi}^{\text{int}(e)} + q_z^{(e)}x \quad , \quad M^{(e)}(x) = -m_{yi}^{\text{int}(e)} + f_{zi}^{\text{int}(e)}x + \frac{1}{2}q_z^{(e)}x^2 \quad (4.38)$$

4.7. Generalidades del sistema estructural de pórticos

PENDIENTE

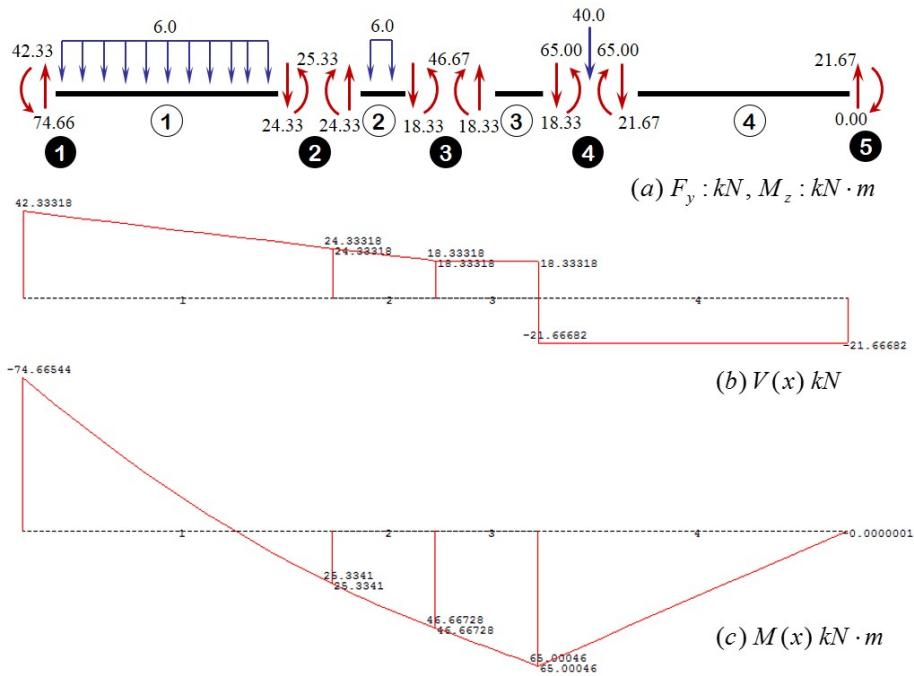


Figura 4.11: Ejemplo de viga a flexión: (a) fuerzas internas en los elementos, (b) fuerza cortante y (c) momento flector.

4.8. Elemento de pórtico en sistema coordenado local

PENDIENTE

4.9. Ejes locales de un elemento de pórtico y transformación a sistema coordenado global

PENDIENTE

4.10. Cargas distribuidas aplicadas a elementos de pórtico

PENDIENTE

4.11. Desplazamientos y rotaciones en los nudos de un pórtico

PENDIENTE

4.12. Acciones internas en los extremos de cada elemento de pórtico

PENDIENTE

4.13. Problemas propuestos

Problema 4.13.1 Obtener el vector de fuerzas equivalentes a la acción de una fuerza distribuida de variación lineal, de magnitud $q_{zi}^{(e)}$ en el extremo i y $q_{zj}^{(e)}$ en el extremo j , como se indica en la Figura 4.12. Implementar esta formulación en un programa de elementos finitos.

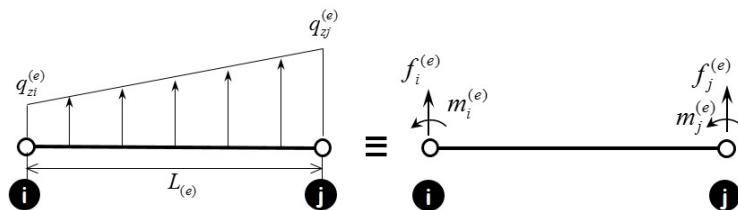


Figura 4.12: Elemento de viga: Acciones equivalentes a una carga distribuida de variación lineal.

Problema 4.13.2 Calcular el desplazamiento y las acciones internas de la viga de tres luces sometida a una carga triangular mostrada en la Figura 4.13, mediante el método de los elementos finitos. Dicha viga tiene una sección transversal rectangular de base 0.20 m y altura 0.30 m, y está hecha de un material con un módulo de elasticidad $E = 20 \times 10^6$ kN/m².

Para resolver este problema represente la carga aplicada con el vector de fuerzas equivalentes a la acción de una carga trapezoidal, el cual se obtuvo en el problema anterior. Ese resultado compárela con otra simulación que aproxime la solución con un vector de fuerza equivalente a una carga distribuida constante.

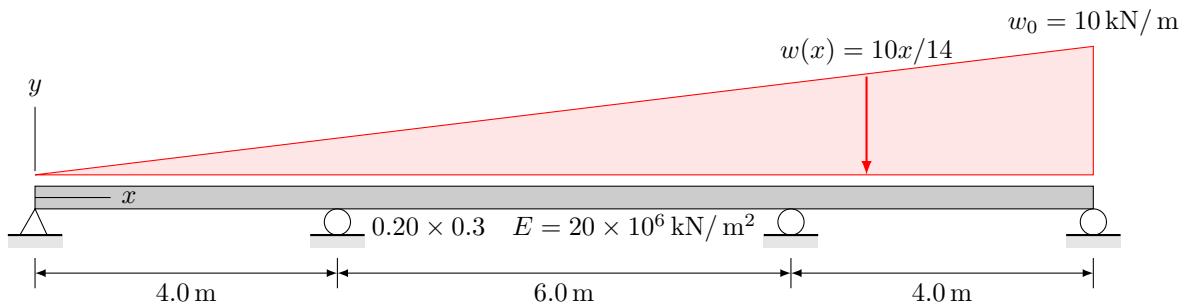


Figura 4.13: Viga de tres luces con carga distribuida triangular

Problema 4.13.3 Una viga simétrica doblemente empotrada está sometida a una carga distribuida uniforme aplicada en su primera mitad como lo indica la Figura 4.14(a). La viga tiene una sección transversal rectangular cuya base es constante de 0.60 m y su altura varía de la forma $h(x) = 0.45 + (x-3)^2/20$ entre $h(0) = 0.90 \text{ m}$ y $h(3 \text{ m}) = 0.45 \text{ m}$. El material de la viga tiene un módulo de Young de $20 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$. Calcular la deflexión y las acciones internas a lo largo de la viga.

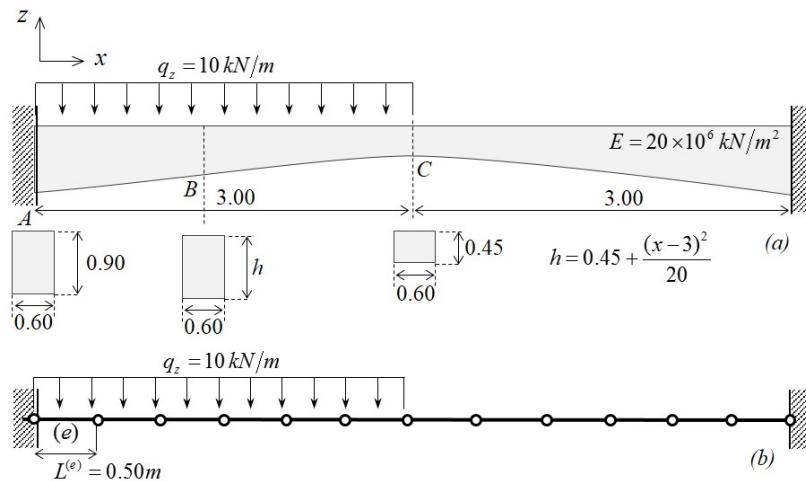


Figura 4.14: Viga doblemente empotrada con sección transversal variable: (a) esquema general y (b) malla de elementos finitos.

Representar la variación de la sección trasversal de la viga, simulando el problema con una malla de 12 elementos unidimensionales cúbicos de continuidad C_1 , cuya sección transversal es constante y su longitud es $L^{(e)} = 0.50 \text{ m}$.

Capítulo 5

Formulación general del problema elástico lineal para sólidos

Este capítulo presenta la formulación mediante el método de los elementos finitos del problema mecánico para sólidos sometidos a fuerzas estáticas puntuales o distribuidas, cuyo material es elástico, lineal e isótropo (Segerlind, 1984; Weaver & Johnson, 1984; Cook, Malkus, & Plesha, 1989; Oñate, 1995; Hughes, 2000; Oñate & Zárate, 2000; O.C. Zienkiewicz & Taylor, 2005)

5.1. Principio de los trabajos virtuales

Sea un sólido cuyo volumen V es aproximadamente igual a suma de n_e subdominios de cada elemento finito $V^{(e)}$, como lo indica la Figura 5.1, el Principio de los Trabajos Virtuales se puede expresar de la forma:

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{n_e} \int_{V^{(e)}} (\tilde{\nabla} \delta \mathbf{u}_{(e)})^T \boldsymbol{\sigma}_{(e)} dV = \\ &= \sum_{e=1}^{n_e} \left(\int_{\Gamma_p^{(e)}} \delta \mathbf{u}_{(e)}^T \mathbf{p}_{(e)} dS + \int_{V^{(e)}} \delta \mathbf{u}_{(e)}^T \mathbf{b}_{(e)} dV \right) + \sum_{n=1}^r \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_n)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde los vectores $\mathbf{p}_{(e)}$, $\mathbf{b}_{(e)}$, $\boldsymbol{\sigma}_{(e)}$ y $\delta \mathbf{u}_{(e)}$ corresponden a las fuerzas de superficie, a las fuerzas de cuerpo, a los esfuerzos y a los desplazamientos virtuales, respectivamente, en el interior del elemento finito (EF) número e . El vector \mathbf{x}_n define la posición de un punto material ubicado en uno de los r nudos de la malla de elementos finitos. Por lo tanto, el último término a la derecha en la ecuación anterior indica el trabajo

virtual generado por las fuerzas nodales. Las fuerzas de superficie $\mathbf{p}_{(e)}$ actúan sobre los contornos $\Gamma_p^{(e)}$ de los elementos finitos que pertenecen al contorno Γ_p indicado en la Figura 2.11.

5.2. Función de aproximación del desplazamiento en el EF

En el problema mecánico se busca el campo vectorial del desplazamiento $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = [u \ v \ w]^T$ para todo punto material de posición $\mathbf{x} = [x \ y \ z]^T$ del sólido. Si se divide el cuerpo en subregiones denominadas elementos finitos de volumen $V^{(e)}$, el campo del desplazamiento se puede representar mediante una función de aproximación suave y continua por cada elemento $\mathbf{u}^{(e)}(\mathbf{x}) = [u^{(e)} \ v^{(e)} \ w^{(e)}]^T$, tal que $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^{(e)}(\mathbf{x}) \ \forall \mathbf{x} \in V^{(e)}$.

Se observa que la función de aproximación del elemento finito es una cantidad vectorial de tres componentes, las cuales se expresan como funciones de aproximación escalares in-dependientes de la forma:

$$\begin{aligned} u^{(e)}(x, y, z) &= N_1^{(e)}(x, y, z) u_1^{(e)} + \dots + N_n^{(e)}(x, y, z) u_n^{(e)} \quad \forall (x, y, z) \in V^{(e)} \\ v^{(e)}(x, y, z) &= N_1^{(e)}(x, y, z) v_1^{(e)} + \dots + N_n^{(e)}(x, y, z) v_n^{(e)} \quad \forall (x, y, z) \in V^{(e)} \\ w^{(e)}(x, y, z) &= N_1^{(e)}(x, y, z) w_1^{(e)} + \dots + N_n^{(e)}(x, y, z) w_n^{(e)} \quad \forall (x, y, z) \in V^{(e)} \end{aligned} \quad (5.2)$$

El elemento finito tridimensional mostrado en la Figura 5.1(c) tiene tres funciones de aproximación asociadas a las tres componentes de desplazamientos y en consecuencia cuenta con tres valores nodales de desplazamiento $u_i^{(e)}, v_i^{(e)}, w_i^{(e)}$ en el nudo i , de un total de n nudos. Asimismo, el elemento tiene n funciones de forma $N_i^{(e)}$.

Esta familia de elementos finitos cuyos valores nodales corresponden a las funciones de aproximación evaluadas en los nudos, sin incluir a sus derivadas se denominan elementos de continuidad C_0 . Las tres ecuaciones escalares derivadas de las funciones

de aproximación se pueden reescribir matricialmente de la forma:

$$\begin{bmatrix} u^{(e)} \\ v^{(e)} \\ w^{(e)} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} N_1^{(e)} & 0 & 0 & N_2^{(e)} & 0 & 0 & \cdots & N_n^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} & 0 & 0 & N_2^{(e)} & 0 & \cdots & 0 & N_n^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & N_1^{(e)} & 0 & 0 & N_2^{(e)} & \cdots & 0 & 0 & N_n^{(e)} \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ v_1^{(e)} \\ w_1^{(e)} \\ \hline u_2^{(e)} \\ v_2^{(e)} \\ w_2^{(e)} \\ \hline \vdots \\ u_n^{(e)} \\ v_n^{(e)} \\ w_n^{(e)} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Por lo tanto, el vector de desplazamiento en cualquier punto de su interior $\mathbf{u}_{(e)}(\mathbf{x})$ es el producto entre las funciones de forma del elemento $\mathbf{N}_{(e)}(\mathbf{x})$ y el vector de valores nodales del desplazamiento $\mathbf{a}_{(e)}$, es decir:

$$\mathbf{u}_{(e)}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_{(e)}(\mathbf{x}) \mathbf{a}_{(e)} \quad \forall \mathbf{x} \in V^{(e)} \quad (5.4)$$

donde

$$\mathbf{N}_{(e)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} N_1^{(e)} & 0 & 0 & N_2^{(e)} & 0 & 0 & \cdots & N_n^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} & 0 & 0 & N_2^{(e)} & 0 & \cdots & 0 & N_n^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & N_1^{(e)} & 0 & 0 & N_2^{(e)} & \cdots & 0 & 0 & N_n^{(e)} \end{array} \right] \quad (5.5a)$$

$$\mathbf{a}_{(e)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} u_1^{(e)} & v_1^{(e)} & w_1^{(e)} & u_2^{(e)} & v_2^{(e)} & w_2^{(e)} & \cdots & u_n^{(e)} & v_n^{(e)} & w_n^{(e)} \end{array} \right]^T \quad (5.5b)$$

El número de filas de la matriz de funciones de forma $\mathbf{N}_{(e)}$ corresponde al número de funciones de aproximación escalares definidas por nudo o número de grados de libertad por nudo (tres en problemas tridimensionales), mientras que el número de columnas es igual al número de nudos del elemento multiplicado por el número de grados de libertad por nudo. El tamaño del vector de valores nodales de desplazamiento de un elemento finito $\mathbf{a}_{(e)}$ está definido por el total de grados de libertad del elemento, es decir, por el número de nudos n multiplicado por el número de grados de libertad por nudo.

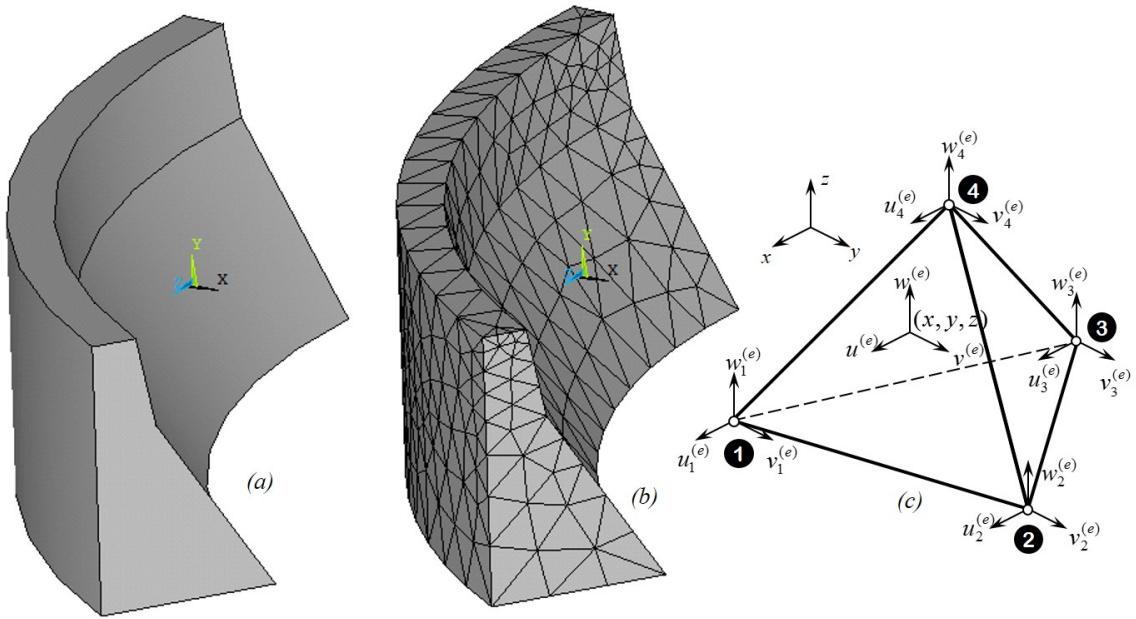


Figura 5.1: Representación de un sólido mediante una malla de elementos finitos tridimensionales: (a) esquema del sólido, (b) malla de elementos finitos en la superficie, (c) un elemento finito tetraédrico lineal.

5.3. Deformación y esfuerzo en el EF

La matriz columna de las componentes de la deformación es igual al operador diferencial actuando sobre el vector del desplazamiento. Al sustituir la expresión anterior en la Ecuación (2.6), se obtiene:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon}_{(e)}(\mathbf{x}) &= \tilde{\nabla} \mathbf{u}_{(e)}(\mathbf{x}) = \tilde{\nabla} \mathbf{N}_{(e)}(\mathbf{x}) \mathbf{a}_{(e)} \\ \boldsymbol{\epsilon}_{(e)}(\mathbf{x}) &= \mathbf{B}_{(e)}(\mathbf{x}) \mathbf{a}_{(e)} \quad \forall \mathbf{x} \in V^{(e)}\end{aligned}\tag{5.6}$$

Siendo $\mathbf{B}_{(e)} = \tilde{\nabla} \mathbf{N}_{(e)}$ el operador diferencial definido en la Ecuación (2.7), actuando sobre la matriz de las funciones de forma del elemento, es decir:

$$\mathbf{B}_{(e)} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_y & \partial_x & 0 \\ \partial_z & 0 & \partial_x \\ 0 & \partial_z & \partial_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 & 0 & | & N_2^{(e)} & 0 & 0 & | & \cdots & | & N_n^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} & 0 & | & 0 & N_2^{(e)} & 0 & | & \cdots & | & 0 & N_n^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & N_1^{(e)} & | & 0 & 0 & N_2^{(e)} & | & \cdots & | & 0 & 0 & N_n^{(e)} \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

El número de filas de la matriz anterior corresponde al número de componentes de de-formación (seis en el problema tridimensional), mientras que el número de columnas es igual al número de grados de libertad del elemento finito. A partir de la relación entre el esfuerzo y la deformación definida por la Ecuación (2.24) para un sólido lineal elástico isótropo, se puede establecer dicha relación en el interior de un elemento finito de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma}_{(e)}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}_{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}_{(e)}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in V^{(e)} \quad (5.8)$$

donde la matriz constitutiva elástica del elemento $\mathbf{D}_{(e)}$ es igual a la matriz \mathbf{D} definida en la Ecuación (2.23).

Sustituyendo la Ecuación (5.6) en la expresión anterior se tiene:

$$\boldsymbol{\sigma}_{(e)} = \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_{(e)} \mathbf{a}_{(e)} \quad (5.9)$$

5.4. Rigidez y fuerzas equivalentes en el EF

De la misma forma como se expresa el desplazamiento real en términos de las funciones de forma y los valores nodales, el desplazamiento virtual $\delta\mathbf{u}_{(e)}$ y la deformación virtual $\tilde{\nabla}\delta\mathbf{u}_{(e)}$ en un elemento finito son iguales a:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{u}_{(e)} &= \mathbf{N}_{(e)}\delta\mathbf{a}_{(e)}, & \delta\mathbf{u}_{(e)}^T &= \delta\mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{N}_{(e)}^T \\ \tilde{\nabla}\delta\mathbf{u}_{(e)} &= \mathbf{B}_{(e)}\delta\mathbf{a}_{(e)}, & \left(\tilde{\nabla}\delta\mathbf{u}_{(e)}\right)^T &= \delta\mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{B}_{(e)}^T \end{aligned} \quad (5.10)$$

siendo $\delta\mathbf{a}_{(e)}$ el vector de valores nodales de desplazamiento virtual del elemento finito.

Sustituyendo las expresiones (5.9) y (5.10) en la Ecuación (5.1), se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{ne} \delta\mathbf{a}_{(e)}^T &\left(\int_{V^{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_{(e)} dV \right) \mathbf{a}_{(e)} = \\ \sum_{e=1}^{ne} \delta\mathbf{a}_{(e)}^T &\left(\int_{\Gamma_p^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{P}_{(e)} dS + \int_{V^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{b}_{(e)} dV \right) + \delta\mathbf{a}^T \mathbf{f}^{(n)} \end{aligned} \quad (5.11)$$

donde $\delta\mathbf{a}$ y $\mathbf{f}^{(n)}$ corresponden al vector de desplazamiento virtual y al vector de fuerza real en los nudos de la malla de elementos finitos.

El término entre paréntesis a la izquierda de la igualdad anterior se define como la matriz de rigidez del elemento $\mathbf{K}^{(e)}$, mientras que el término entre paréntesis a la derecha $\mathbf{f}^{(e)}$ es la suma del vector de fuerzas nodales equivalentes a la acción de fuerzas de superficie $\mathbf{f}_s^{(e)}$ más el vector de fuerzas nodales equivalentes a la acción de fuerzas de cuerpo $\mathbf{f}_b^{(e)}$ del elemento, es decir:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_{(e)} dV \quad (5.12)$$

$$\mathbf{f}_s^{(e)} = \int_{\Gamma^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{P}_{(e)} dS, \quad \mathbf{f}_b^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{b}_{(e)} dV, \quad \mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{f}_s^{(e)} + \mathbf{f}_b^{(e)} \quad (5.13)$$

Remplazando las ecuaciones (5.12) y (5.13) en la expresión (5.11) se tiene:

$$\sum_{e=1}^{ne} \delta \mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}_{(e)} - \sum_{e=1}^{ne} \delta \mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{f}^{(e)} - \delta \mathbf{a}^T \mathbf{f}^{(n)} = 0 \quad (5.14)$$

El triple producto $\delta \mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}_{(e)}$ de la ecuación anterior se puede expresar en función de todos los grados de libertad de la malla de elementos finitos como $\delta \mathbf{a}^T \mathbf{K}_{ext}^{(e)} \mathbf{a}$, donde $\mathbf{K}_{ext}^{(e)}$ es la matriz de rigidez extendida del elemento e y \mathbf{a} es el vector de valores nodales reales de la malla. De igual forma, el producto $\delta \mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{f}^{(e)}$ se puede escribir como $\delta \mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{f}_{ext}^{(e)}$, donde $\mathbf{f}_{ext}^{(e)}$ es el vector de fuerzas nodales equivalentes extendido del elemento e . La matriz y el vector extendido $\mathbf{K}_{ext}^{(e)}$ y $\mathbf{f}_{ext}^{(e)}$ fueron explicados en el Apartado 3.7.

5.5. Rigidez y fuerzas equivalentes en el sólido

La ecuación anterior se puede escribir en términos del vector de desplazamiento virtual $\delta \mathbf{a}$ y del vector de desplazamiento real \mathbf{a} en los nudos de la malla de elementos finitos, de tal forma que:

$$\delta \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} - \delta \mathbf{a}^T \mathbf{f} = \delta \mathbf{a}^T (\mathbf{K} \mathbf{a} - \mathbf{f}) = 0 \quad (5.15)$$

donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez del sólido obtenida del ensamblaje de las matrices de rigidez de los elementos, de la forma:

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{c|c} ne & \mathbf{K}^{(e)} \\ \hline (e)=1 & \end{array} \right] \quad (5.16)$$

El vector \mathbf{f} contiene las fuerzas nodales totales en la malla y se obtiene de la suma entre el vector de fuerzas nodales aplicadas directamente en los nudos de la malla $\mathbf{f}^{(n)}$ y el vector $\tilde{\mathbf{f}}$, el cual es el resultado del ensamblaje de los vectores de fuerza nodales equivalentes a la acción de fuerzas distribuidas en cada uno de los elementos finitos $\mathbf{f}^{(e)}$, es decir:

$$\mathbf{f} = \tilde{\mathbf{f}} + \mathbf{f}^{(n)} \quad (5.17)$$

$$\tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} ne \\ \mathbb{A} \\ (e)=1 \end{bmatrix} \mathbf{f}^{(e)} \quad (5.18)$$

5.6. Desplazamientos nodales en el sólido

Dado que el vector de desplazamientos virtuales nodales transpuesto $\delta\mathbf{a}^T$ de la Ecuación (5.15) no es igual a un vector nulo, se tiene:

$$\mathbf{K}\mathbf{a} - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (5.19)$$

El vector de desplazamientos nodales del sólido \mathbf{a} se puede descomponer en un subvector de desplazamientos nodales desconocidos \mathbf{a}_α y un subvector de desplazamientos nodales conocidos \mathbf{a}_β dado por las condiciones de frontera del problema, de tal manera que la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{\alpha\alpha} & \mathbf{K}_{\alpha\beta} \\ \hline \mathbf{K}_{\beta\alpha} & \mathbf{K}_{\beta\beta} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{a}_\alpha \\ \mathbf{a}_\beta \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \mathbf{f}_\alpha \\ \mathbf{f}_\beta \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (5.20)$$

La matriz de rigidez \mathbf{K} se ha dividido en las submatrices $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}$, $\mathbf{K}_{\alpha\beta}$, $\mathbf{K}_{\beta\alpha}$ y $\mathbf{K}_{\beta\beta}$, de acuerdo con el número de desplazamientos nodales (o grados de libertad) desconocidos y conocidos de la malla. Por las mismas razones el vector de fuerzas nodales \mathbf{f} está conformado por los subvectores \mathbf{f}_α y \mathbf{f}_β . En consecuencia, la ecuación anterior corresponde a dos ecuaciones matriciales de la forma:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{\alpha\alpha}\mathbf{a}_\alpha + \mathbf{K}_{\alpha\beta}\mathbf{a}_\beta - \mathbf{f}_\alpha = \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{\beta\alpha}\mathbf{a}_\alpha + \mathbf{K}_{\beta\beta}\mathbf{a}_\beta - \mathbf{f}_\beta = \mathbf{0} \end{cases} \quad (5.21)$$

El vector de desplazamientos nodales desconocidos \mathbf{a}_α se obtiene despejando la primera expresión de la ecuación anterior, así:

$$\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{-1} (\mathbf{f}_\alpha - \mathbf{K}_{\alpha\beta}\mathbf{a}_\beta) \quad (5.22)$$

5.7. Fuerzas de reacción en el sólido

Asimismo, el subvector \mathbf{f}_β se puede calcular despejándolo de la segunda expresión del a Ecuación (5.21), así:

$$\mathbf{f}_\beta = \mathbf{K}_{\beta\alpha}\mathbf{a}_\alpha + \mathbf{K}_{\beta\beta}\mathbf{a}_\beta \quad (5.23)$$

De acuerdo con la Ecuación (5.17), este resultado corresponde a la suma de los vectores $\tilde{\mathbf{f}}_\beta$ y $\mathbf{f}_\beta^{(n)}$, de la forma:

$$\mathbf{f}_\beta = \tilde{\mathbf{f}}_\beta + \mathbf{f}_\beta^{(n)} \quad (5.24)$$

los cuales corresponden a la parte asociada a los grados de libertad cuyo desplazamiento es conocido de los vectores $\tilde{\mathbf{f}}$ y $\mathbf{f}^{(n)}$, respectivamente. En este tipo de problemas, los términos de $\mathbf{f}_\beta^{(n)}$ son desconocidos y corresponden a las reacciones en los apoyos del sólido. Por lo tanto, las reacciones en los apoyos se pueden calcular así:

$$\mathbf{f}_\beta^{(n)} = \mathbf{f}_\beta - \tilde{\mathbf{f}}_\beta = \mathbf{K}_{\beta\alpha}\mathbf{a}_\alpha + \mathbf{K}_{\beta\beta}\mathbf{a}_\beta - \tilde{\mathbf{f}}_\beta \quad (5.25)$$

Después de conocer el vector de desplazamientos nodales completo $\mathbf{a} = [\mathbf{a}_\alpha^T \quad \mathbf{a}_\beta^T]^T$, se pueden extraer, a partir de él, los vectores de desplazamiento en los nudos de cada elemento $\mathbf{a}_{(e)}$, de acuerdo con la numeración de los grados de libertad asociados al elemento que se indican en la tabla de incidencias.

5.8. Desplazamiento, deformación y esfuerzo en el EF

El vector del desplazamiento en el interior del elemento $\mathbf{u}_{(e)}(x, y, z) = [u \quad v \quad w]^T$ se calcula como el producto de la matriz de funciones de forma evaluada para la coordenada (x, y, z) y el vector de desplazamientos nodales del elemento $\mathbf{a}_{(e)}$, como lo indica la Ecuación (5.4).

La matriz columna que contiene las componentes de la deformación en el interior de cada elemento finito $\varepsilon_{(e)}(x, y, z) = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}]^T$, se calcula mediante el producto entre la matriz de operadores diferenciales actuando sobre las funciones de forma evaluada para la coordenada (x, y, z) y el vector de desplazamientos nodales del elemento $\mathbf{a}_{(e)}$, como lo indica la Ecuación (5.6).

La matriz columna que contiene las componentes del esfuerzo en el interior de cada elemento finito $\sigma_{(e)}(x, y, z) = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{yz}]^T$, se obtiene de la multiplicación matricial entre la matriz constitutiva elástica $\mathbf{D}_{(e)}$ y la matriz columna de la deformación $\varepsilon_{(e)}(x, y, z)$ en un punto específico \mathbf{x} , es decir:

$$\sigma_{(e)}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}_{(e)} \varepsilon_{(e)}(\mathbf{x}) \quad \forall(\mathbf{x}) \in V^{(e)} \quad (5.26)$$

Las componentes de esfuerzo y de deformación se obtienen a partir de las primeras derivadas de las componentes de desplazamiento; en consecuencia, no existe continuidad de estas cantidades en cada contorno compartido por varios elementos finitos.

5.9. Algoritmo de cálculo

La formulación presentada anteriormente permite obtener el campo de los desplazamientos, las deformaciones y los esfuerzos sobre un sólido en condición plana de esfuerzos o de deformaciones. El procedimiento desarrollado con el método de los elementos finitos se indica en la Figura 4.2 y Figura 4.3, donde se incluyen los nombres de las subrutinas y variables implementadas en el programa PEFiCA (Linero, 2009).

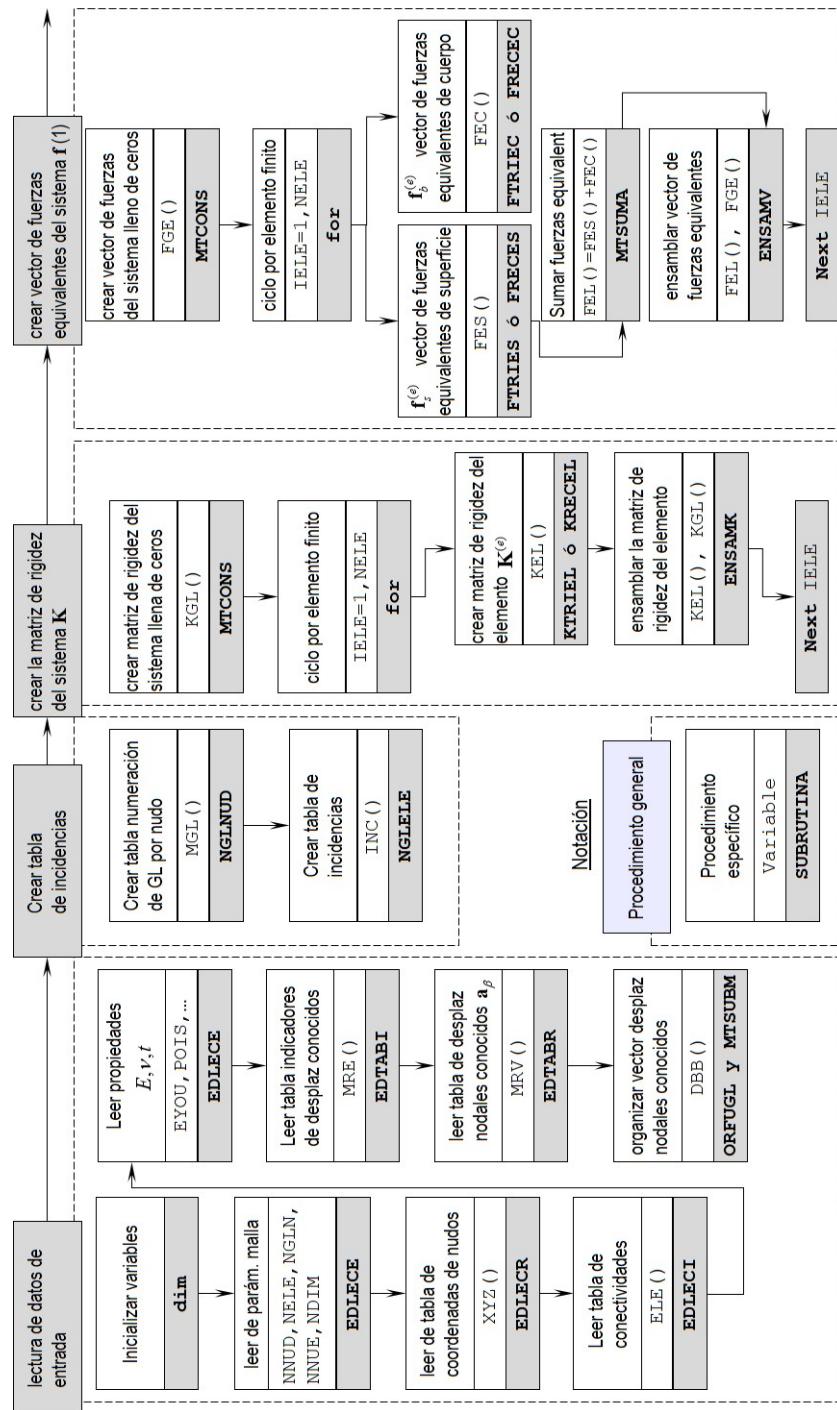


Figura 5.2: Algoritmo de cálculo para problemas mecánicos bidimensionales (parte 1).

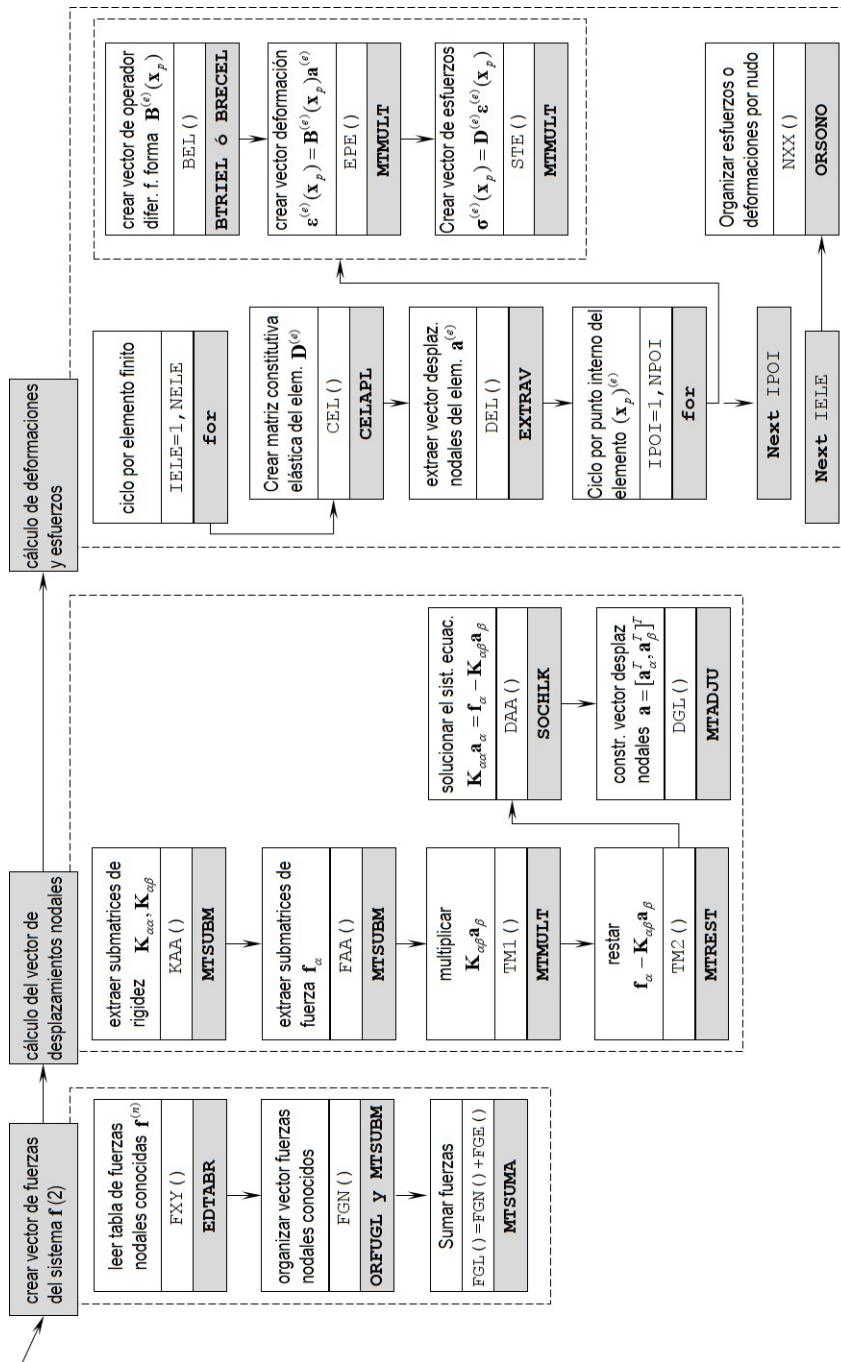


Figura 5.3: Algoritmo de cálculo para problemas mecánicos bidimensionales (parte 2).

Capítulo 6

Formulación del problema elástico lineal bidimensional mediante el método de los elementos finitos. Temas básicos

Este capítulo presenta la formulación básica mediante el método de los elementos finitos del problema elástico lineal bidimensional (Segerlind, 1984; Weaver & Johnson, 1984; Cook *et al.*, 2001; Reddy, 2005; Oñate, 2009). Asimismo, aquí se describen dos de los elementos finitos más sencillos: el triangular lineal y el rectangular bilineal.

6.1. Formulación del problema elástico lineal bidimensional

Un problema mecánico puede simplificarse en un espacio bidimensional xy si los campos del desplazamiento, la deformación y el esfuerzo son independientes de la posición z , es decir, son funciones exclusivamente de la posición en el plano xy . Asimismo, el sólido puede mostrar una geometría cualquiera en el plano xy , mientras que en la dirección z tiene un espesor constante t para un estado plano de esfuerzos o un espesor unitario $t = 1.0$ para un estado plano de deformaciones. En consecuencia, las cantidades de interés en un punto material ubicado en (x, y, z) es la misma para todo z en el espesor del sólido.

La reducción del problema a un dominio bidimensional se establece expresando el volumen del sólido V como el producto entre su área A en el plano xy y su espesor t . Asimismo, el volumen en un elemento infinitesimal del sólido es igual a un diferencial de área por el espesor, es decir, $dV = t dA$. Si el dominio del problema se divide en pequeños subdominios representados por elementos finitos bidimensionales de área $A^{(e)}$ en el plano xy y espesor $t^{(e)}$, el diferencial de volumen será igual a $dV^{(e)} = t^{(e)} dA^{(e)}$. La Figura 6.1 muestra la malla de elementos finitos bidimensionales que representan el área del sólido en el plano xy , la cual corresponde a $A \cong \sum_{e=1}^{ne} A^{(e)}$.

Siendo el campo vectorial de los desplazamientos la variable que se desea obtener del planteamiento del problema mecánico, la función de aproximación del elemento finito corresponde al vector del desplazamiento en cualquier punto de su interior. Si el desplazamiento es función de la posición (x, y) , la función de aproximación del elemento finito estará definida en el espacio bidimensional xy , es decir, $\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{u}^{(e)}(x, y) \forall (x, y) \in A^{(e)}$.

De acuerdo a lo anterior, la función de aproximación del elemento es una cantidad vectorial que a su vez corresponde a dos funciones de aproximación escalares independientes: $u^{(e)}(x, y)$ y $v^{(e)}(x, y)$, las cuales representan las componentes del desplazamiento en dirección x y y , respectivamente (Figura 6.1(c)). Cada función de aproximación escalar se puede expresar en términos de las funciones de forma y de los valores nodales del elemento finito, como:

$$\begin{aligned} u^{(e)}(x, y) &= N_1^{(e)}(x, y) u_1^{(e)} + \dots + N_n^{(e)}(x, y) u_n^{(e)} \quad \forall (x, y) \in A^{(e)} \\ v^{(e)}(x, y) &= N_1^{(e)}(x, y) v_1^{(e)} + \dots + N_n^{(e)}(x, y) v_n^{(e)} \quad \forall (x, y) \in A^{(e)} \end{aligned} \quad (6.1)$$

siendo n el número de nudos del elemento. Estas ecuaciones escalares se pueden reescribir matricialmente de la forma:

$$\begin{bmatrix} u^{(e)} \\ v^{(e)} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|c:c|cc} N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & 0 & \cdots & \cdots & N_n^{(e)} & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & \cdots & \cdots & 0 & N_n^{(e)} \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ v_1^{(e)} \\ \vdots \\ u_2^{(e)} \\ v_2^{(e)} \\ \vdots \\ u_n^{(e)} \\ v_n^{(e)} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Por lo tanto, el desplazamiento de cualquier punto (x, y) en el dominio de un elemento finito cuya matriz de funciones de forma es $\mathbf{N}_{(e)}(x, y)$, se expresa en términos de los valores nodales del desplazamiento en el elemento $\mathbf{a}_{(e)}$ como:

$$\mathbf{u}_{(e)}(x, y) = \mathbf{N}_{(e)}(x, y) \mathbf{a}_{(e)} \quad \forall (x, y) \in A^{(e)} \quad (6.3)$$

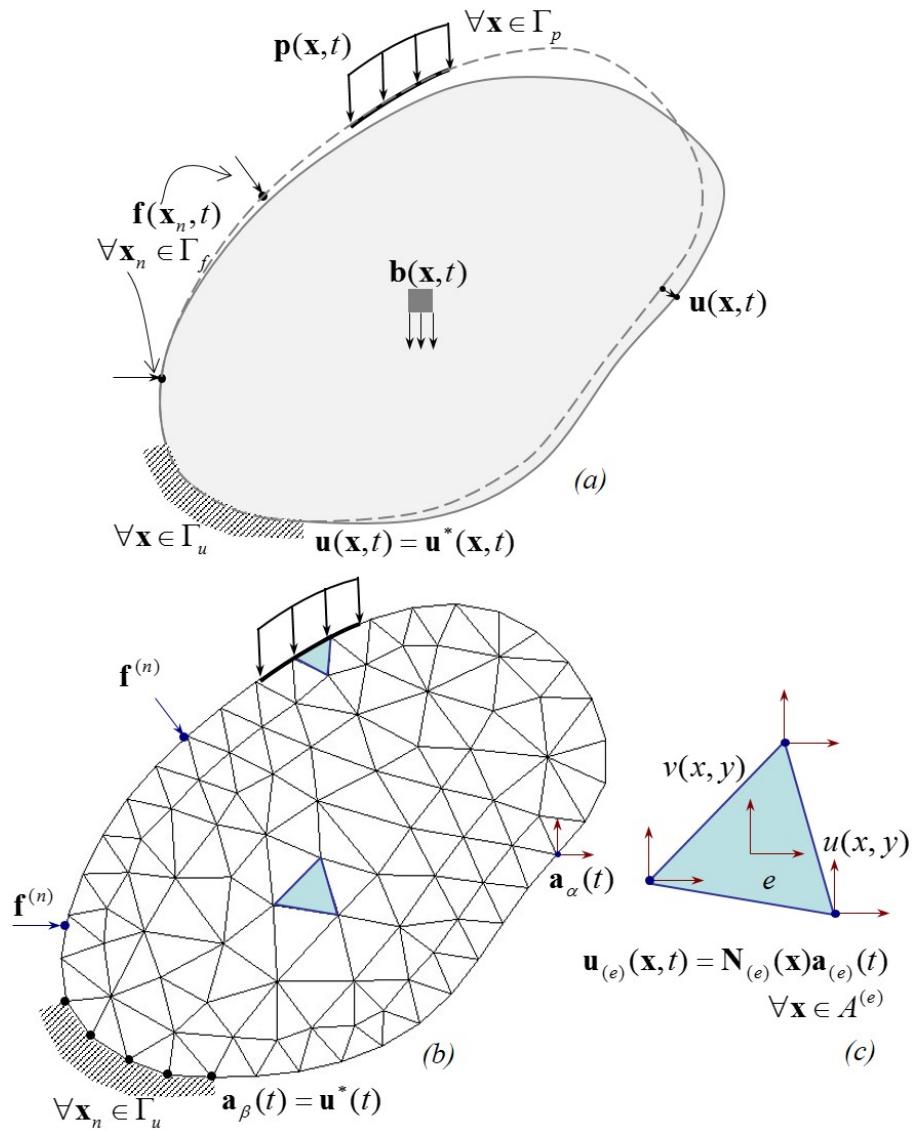


Figura 6.1: Representación de un sólido mediante una malla de elementos finitos bidimensionales: (a) esquema del sólido, (b) malla de elementos finitos y (c) un elemento finito triangular lineal.

donde

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_{(e)}(x, y) &= \left[\begin{array}{cc|cc|c|cc} N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & 0 & \cdots & \cdots & N_n^{(e)} & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & \cdots & \cdots & 0 & N_n^{(e)} \end{array} \right] \\ \mathbf{a}_{(e)} &= \left[\begin{array}{cc|cc|c|cc} u_1^{(e)} & v_1^{(e)} & u_2^{(e)} & v_2^{(e)} & \cdots & \cdots & u_n^{(e)} & v_n^{(e)} \end{array} \right]^T \\ \mathbf{u}^{(e)} &= [u^{(e)} \quad v^{(e)}]^T\end{aligned}\tag{6.4}$$

Se recuerda que este tipo de elementos finitos bidimensionales tienen continuidad C_0 , es decir, sus valores nodales corresponden a la función de aproximación evaluada en los nudos sin incluir a sus derivadas, como se indicó en el capítulo anterior.

De acuerdo con la Ecuación (5.6), la matriz columna de la deformación en el interior del elemento finito para problemas bidimensionales $\boldsymbol{\varepsilon}_{(e)}(x, y) = [\varepsilon_{xx}^{(e)} \quad \varepsilon_{yy}^{(e)} \quad \gamma_{xy}^{(e)}]^T$ se define como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(e)}(x, y) = \mathbf{B}_{(e)}(x, y) \mathbf{a}_{(e)} \quad \forall(x, y) \in A^{(e)}\tag{6.5}$$

siendo $\mathbf{B}_{(e)}(x, y)$ el operador diferencial dado en la Ecuación (2.60) actuando sobre las funciones de forma, es decir:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{(e)}(x, y) &= \begin{bmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|cc|c|cc} N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & 0 & \cdots & \cdots & N_n^{(e)} & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & \cdots & \cdots & 0 & N_n^{(e)} \end{array} \right] \\ &= \begin{bmatrix} \partial_x N_1^{(e)} & 0 & \partial_x N_2^{(e)} & 0 & \cdots & \cdots & \partial_x N_n^{(e)} & 0 \\ 0 & \partial_y N_1^{(e)} & 0 & \partial_y N_2^{(e)} & \cdots & \cdots & 0 & \partial_y N_n^{(e)} \\ \partial_y N_1^{(e)} & \partial_x N_1^{(e)} & \partial_y N_2^{(e)} & \partial_x N_2^{(e)} & \cdots & \cdots & \partial_y N_n^{(e)} & \partial_x N_n^{(e)} \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{6.6}$$

La matriz columna que contiene a las componentes de esfuerzo en el interior de un elemento finito bidimensional $\boldsymbol{\sigma}_{(e)}(x, y) = [\sigma_{xx}^{(e)} \quad \sigma_{yy}^{(e)} \quad \sigma_{xy}^{(e)}]^T$ para materiales lineales elásticos, es igual a:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_{(e)}(x, y) &= \mathbf{D}_{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}_{(e)}(x, y) \\ &= \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_{(e)}(x, y) \mathbf{a}_{(e)} \quad \forall(x, y) \in A^{(e)}\end{aligned}\tag{6.7}$$

La matriz constitutiva elástica $\mathbf{D}_{(e)}$ corresponde a una matriz cuadrada de tamaño 3 de la forma:

$$\mathbf{D}_{(e)} = \begin{bmatrix} D_{11}^{(e)} & D_{12}^{(e)} & 0 \\ D_{12}^{(e)} & D_{22}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^{(e)} \end{bmatrix}\tag{6.8}$$

Como se indicó en la Ecuación (2.45) para condición plana de esfuerzos los términos de $\mathbf{D}_{(e)}$ son:

$$D_{11}^{(e)} = D_{22}^{(e)} = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad D_{12}^{(e)} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2}, \quad D_{33}^{(e)} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (6.9)$$

De acuerdo con la Ecuación (2.54), los términos de $\mathbf{D}_{(e)}$ en condición plana de deformaciones son:

$$D_{11}^{(e)} = D_{22}^{(e)} = \frac{(1 - \nu)E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad D_{12}^{(e)} = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad D_{33}^{(e)} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (6.10)$$

La matriz de rigidez del elemento finito $\mathbf{K}^{(e)}$ definida en la Ecuación (5.12), se puede expresar para problemas bidimensionales de la forma:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_{(e)} dV = \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_{(e)} t^{(e)} dA \quad (6.11)$$

donde el diferencial de volumen dV se ha sustituido por el producto entre el espesor t y el diferencial de área dA . El espesor $t^{(e)}$ es la dimensión del dominio del problema en la dirección z y $A^{(e)}$ es el área del elemento finito dada en el plano xy .

A partir de la Ecuación (5.13), el vector de fuerzas nodales equivalentes a la acción de las fuerzas de superficie en el elemento $\mathbf{f}_s^{(e)}$, se puede expresar para problemas bidimensionales de la forma:

$$\mathbf{f}_s^{(e)} = \int_{\Gamma_p^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{p}_{(e)} dS = \int_{L^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{p}_{(e)} t^{(e)} dL \quad (6.12)$$

donde el diferencial de superficie dS mostrado en la Figura 6.2(c), ha sido remplazado por el producto entre el espesor $t^{(e)}$ y el diferencial de longitud dL .

La integral anterior está definida en las nc caras del elemento finito de longitud como lo indica la Figura 6.2(a), por lo tanto:

$$\mathbf{f}_s^{(e)} = \sum_{c=1}^{nc} \left(\int_{L_c^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{p}_c^{(e)} t^{(e)} dL \right) \quad (6.13)$$

donde $\mathbf{p}_c^{(e)} = [p_{xc}^{(e)} \quad p_{yc}^{(e)}]^T$ es el vector de fuerzas distribuidas por unidad de área con respecto a las coordenadas globales xy , que han sido aplicadas sobre la superficie definida por la cara c de longitud $L_c^{(e)}$ y el espesor $t^{(e)}$ (Figura 6.2(b)).

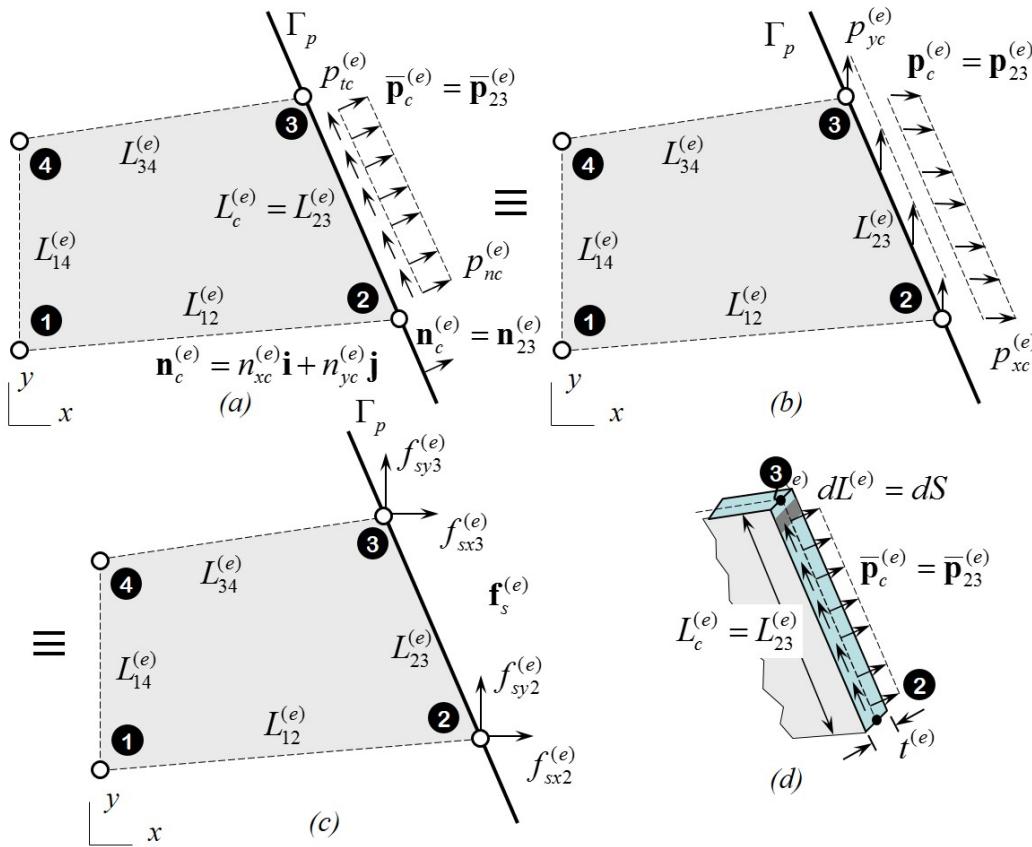


Figura 6.2: Vector de fuerzas nodales equivalentes de superficie sobre la cara 23 del elemento finito e: (a) fuerza distribuida normal y tangencial sobre la cara, (b) fuerza distribuida en dirección x y en y sobre la cara, (c) fuerzas equivalentes en los nudos y (d) detalle de la fuerza distribuida por unidad de superficie en el contorno del subdominio del sólido.

En particular, la Figura 6.2 ilustra las componentes de la fuerza nodal equivalente a la acción de una fuerza de superficie sobre la cara 2 – 3 de un elemento cuadrilátero.

La fuerza distribuida por unidad de área también podría aplicarse en dirección normal $p_{nc}^{(e)}$ y tangencial $p_{tc}^{(e)}$ a la cara del elemento, como se ilustra en la Figura 6.2(a). Si las componentes de un vector normal unitario a la cara cargada con respecto a x y a y son $n_{xc}^{(e)}$ y $n_{yc}^{(e)}$, respectivamente, el vector de fuerzas distribuidas por unidad de área en coordenadas globales es igual a:

$$\mathbf{p}_c^{(e)} = \mathbf{T}_n^T \bar{\mathbf{p}}_c^{(e)} = \begin{bmatrix} p_{xc}^{(e)} \\ p_{yc}^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{xc}^{(e)} & -n_{yc}^{(e)} \\ n_{yc}^{(e)} & n_{xc}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{nc}^{(e)} \\ p_{tc}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

donde $\bar{\mathbf{p}}_c^{(e)}$ es el vector de fuerzas distribuidas por unidad de área con respecto a la dirección de la cara y $\mathbf{T}_n^T = \mathbf{T}_n^{-1}$ es la matriz de transformación de vectores inversa, la cual es igual a su transpuesta en virtud de su ortogonalidad.

El vector de fuerzas nodales equivalentes a la acción de fuerzas de cuerpo o másicas en el elemento $\mathbf{f}_b^{(e)}$ se puede expresar en el espacio bidimensional como:

$$\mathbf{f}_b^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{b}_{(e)} dV = \int_{A^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{b}_{(e)} t^{(e)} dA \quad (6.15)$$

donde el diferencial de volumen dV ha sido remplazado por el producto entre el espesor $t^{(e)}$ y el diferencial de área dA . Las componentes del vector de fuerzas másicas $\mathbf{b}_{(e)} = [b_x^{(e)} \ b_y^{(e)}]^T$ son fuerzas distribuidas por unidad de volumen en dirección x y en dirección y , como se indica en la Figura 6.3. El peso propio del material γ es el ejemplo más común de fuerza másica, en cuyo caso el vector es de la forma $\mathbf{b}_{(e)} = [0 \ -\gamma]^T$, suponiendo que la gravedad tiene la dirección de un vector unitario $-\mathbf{j}$ sobre el eje coordenado y .

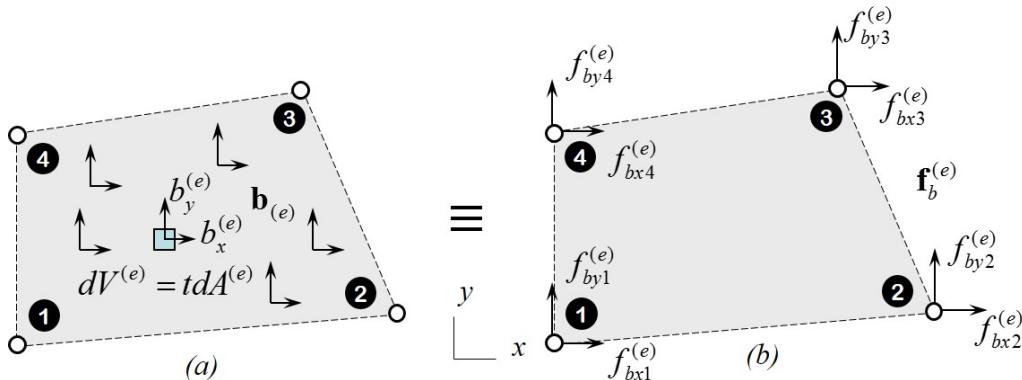


Figura 6.3: Vector de fuerzas nodales equivalentes de cuerpo en el elemento finito e: (a) fuerzas distribuidas por unidad de volumen y (b) fuerzas equivalentes en los nudos.

De acuerdo con la Ecuación (5.13), el vector de fuerzas nodales equivalentes a la acción de fuerzas distribuidas en el elemento finito es igual a:

$$\mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{f}_s^{(e)} + \mathbf{f}_b^{(e)} \quad (6.16)$$

Una forma alternativa para expresar las operaciones matriciales anteriores consiste en reescribir las matrices elementales en términos de submatrices asociadas a cada nudo.

La matriz de funciones de forma se puede expresar en términos de sus submatrices como:

$$\mathbf{N}_{(e)} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{N}_1^{(e)} & \mathbf{N}_2^{(e)} & \cdots & \mathbf{N}_n^{(e)} \end{array} \right] \quad (6.17)$$

donde la submatriz de funciones de forma del nudo i en el elemento e es igual a:

$$\mathbf{N}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} N_i^{(e)} & 0 \\ 0 & N_i^{(e)} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

De igual manera, la matriz de operadores diferenciales actuando sobre las funciones de forma se reescribe como:

$$\mathbf{B}_{(e)} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{B}_1^{(e)} & \mathbf{B}_2^{(e)} & \cdots & \mathbf{B}_n^{(e)} \end{array} \right] \quad (6.19)$$

donde la submatriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma del nudo i en el elemento e es igual a:

$$\mathbf{B}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} \partial_x N_i^{(e)} & 0 \\ 0 & \partial_y N_i^{(e)} \\ \partial_y N_i^{(e)} & \partial_x N_i^{(e)} \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

El vector de desplazamientos nodales de un elemento finito se puede expresar en términos de subvectores asociados a cada nudo de la forma:

$$\mathbf{a}_{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{(e)} \\ \mathbf{a}_2^{(e)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^{(e)} \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

donde el subvector $\mathbf{a}_i^{(e)}$ contiene las componentes de desplazamiento en cada nudo, es decir:

$$\mathbf{a}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} u_i^{(e)} \\ v_i^{(e)} \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

La matriz de rigidez del elemento finito $\mathbf{K}^{(e)}$ definida en la Ecuación (5.11), se

puede expresar en términos de submatrices por nudo de la forma:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}^{(e)} &= \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_{(e)} t dA \\
 &= \int_{A^{(e)}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^{(e)T} \\ \mathbf{B}_2^{(e)T} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_n^{(e)T} \end{bmatrix} \mathbf{D}_{(e)} \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{B}_1^{(e)} & \mathbf{B}_2^{(e)} & \cdots & \mathbf{B}_n^{(e)} \end{array} \right] t dA \\
 &= \int_{A^{(e)}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^{(e)T} \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_1^{(e)} & \mathbf{B}_1^{(e)T} \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_2^{(e)} & \cdots & \mathbf{B}_1^{(e)T} \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_n^{(e)} \\ \mathbf{B}_2^{(e)T} \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_1^{(e)} & \mathbf{B}_2^{(e)T} \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_2^{(e)} & \cdots & \mathbf{B}_2^{(e)T} \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_n^{(e)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_n^{(e)T} \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_1^{(e)} & \mathbf{B}_n^{(e)T} \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_2^{(e)} & \cdots & \mathbf{B}_n^{(e)T} \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_n^{(e)} \end{bmatrix} t dA
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

es decir,

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(e)} & \mathbf{K}_{12}^{(e)} & \cdots & \mathbf{K}_{1n}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{21}^{(e)} & \mathbf{K}_{22}^{(e)} & \cdots & \mathbf{K}_{2n}^{(e)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{n1}^{(e)} & \mathbf{K}_{n2}^{(e)} & \cdots & \mathbf{K}_{nn}^{(e)} \end{bmatrix} \tag{6.24}$$

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}_i^{(e)T} \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_j^{(e)} t dA \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

En la expresión anterior se observa que toda submatriz de rigidez $\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \mathbf{K}_{ji}^{(e)}$, lo cual demuestra la simetría de la matriz de rigidez $\mathbf{K}^{(e)}$.

El vector de fuerzas nodales equivalentes de superficie indicado en la Ecuación (6.13) y el vector de fuerzas nodales equivalentes de cuerpo dado en la Ecuación

(6.15) se pueden escribir de la forma:

$$\mathbf{f}_s^{(e)} = \sum_{c=1}^{nc} \left(\int_{L_c^{(e)}}^{\mathbf{N}_1^{(e)T} \mathbf{p}_c^{(e)}} \cdots \int_{L_c^{(e)}}^{\mathbf{N}_n^{(e)T} \mathbf{p}_c^{(e)}} t^{(e)} dL \right) \quad (6.25)$$

$$\mathbf{f}_b^{(e)} = \int_{A^{(e)}}^{\mathbf{N}_1^{(e)T} \mathbf{b}_{(e)}} \cdots \int_{A^{(e)}}^{\mathbf{N}_n^{(e)T} \mathbf{b}_{(e)}} t^{(e)} dA \quad (6.26)$$

es decir,

$$\mathbf{f}_s^{(e)} = \sum_{c=1}^{nc} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{s1}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{s2}^{(e)} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{sn}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{si}^{(e)} = \int_{L_c^{(e)}}^{\mathbf{N}_i^{(e)T} \mathbf{p}_c^{(e)}} t^{(e)} dL \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.27)$$

$$\mathbf{f}_b^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{b1}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{b2}^{(e)} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{bn}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{bi}^{(e)} = \int_{A^{(e)}}^{\mathbf{N}_i^{(e)T} \mathbf{b}_{(e)}} t^{(e)} dA \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.28)$$

6.2. Elemento triangular lineal

Sea el elemento finito triangular lineal definido por los nudos 1, 2 y 3 mostrado en la Figura 5.4; se pueden expresar las componentes de desplazamiento en x y en y de un punto (x, y) en el interior del elemento mediante funciones de aproximación polinómicas lineales de la forma:

$$u^{(e)}(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad \forall (x, y) \in A^{(e)} \quad (6.29a)$$

$$v^{(e)}(x, y) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \quad \forall (x, y) \in A^{(e)} \quad (6.29b)$$

Se ha escogido un orden anti-horario de la numeración de los nudos a partir de cualquier nudo 1, con el fin de obtener siempre un valor positivo del área del elemento.

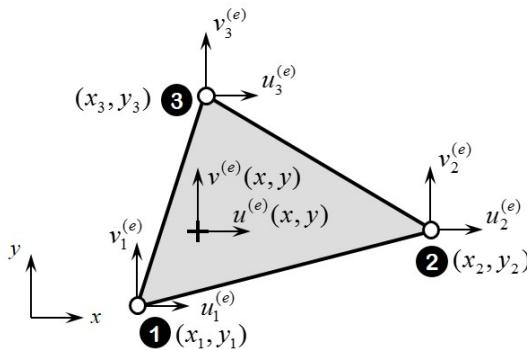


Figura 6.4: Elemento triangular lineal: Esquema general.

6.2.1. Función de aproximación y funciones de forma

Se definen los valores de la función de aproximación $u^{(e)}(x, y)$ de la componente de desplazamiento en x en los nudos del elemento como $u_1^{(e)}, u_2^{(e)}$ y $u_3^{(e)}$. Evaluando la función de aproximación $u^{(e)}(x, y)$ en los nudos se tiene:

$$u_1^{(e)} = u^{(e)}(x_1, y_1) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 \quad (6.30a)$$

$$u_2^{(e)} = u^{(e)}(x_2, y_2) = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 \quad (6.30b)$$

$$u_3^{(e)} = u^{(e)}(x_3, y_3) = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 \quad (6.30c)$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \\ u_3^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

De acuerdo con la regla de Cramer explicada en Apartado 1.5.3, las coordenadas generalizadas α_1, α_2 y α_3 corresponden al siguiente cociente entre determinantes:

$$\alpha_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} u_1^{(e)} & x_1 & y_1 \\ u_2^{(e)} & x_2 & y_2 \\ u_3^{(e)} & x_3 & y_3 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}}, \quad \alpha_2 = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & u_1^{(e)} & y_1 \\ 1 & u_2^{(e)} & y_2 \\ 1 & u_3^{(e)} & y_3 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}}, \quad \alpha_3 = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & u_1^{(e)} \\ 1 & x_2 & u_2^{(e)} \\ 1 & x_3 & u_3^{(e)} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}}$$

El determinante del denominador en la ecuación anterior es igual al doble del área del triángulo que constituye al elemento finito, es decir:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} = 2A^{(e)}$$

En consecuencia, los coeficientes se expresan en función de los valores nodales $u_1^{(e)}, u_2^{(e)} y u_3^{(e)}$, de la forma:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{2A^{(e)}}((x_2y_3 - x_3y_2)u_1^{(e)} + (x_3y_1 - x_1y_3)u_2^{(e)} + (x_1y_2 - x_2y_1)u_3^{(e)}) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2A^{(e)}}((y_2 - y_3)u_1^{(e)} + (y_3 - y_1)u_2^{(e)} + (y_1 - y_2)u_3^{(e)}) \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2A^{(e)}}((x_3 - x_2)u_1^{(e)} + (x_1 - x_3)u_2^{(e)} + (x_2 - x_1)u_3^{(e)})\end{aligned}$$

La función de aproximación se puede reescribir de la siguiente forma sustituyendo las coordenadas generalizadas obtenidas.

$$u^{(e)}(x, y) = N_1^{(e)}(x, y)u_1^{(e)} + N_2^{(e)}(x, y)u_2^{(e)} + N_3^{(e)}(x, y)u_3^{(e)} \quad \forall(x, y) \in A^{(e)} \quad (6.31)$$

donde $N_i^{(e)}$ es la función de forma en el nudo i del elemento e, representada en la Figura 6.5. Dichas funciones de forma de un elemento finito triangular lineal en términos de las coordenadas de sus nudos (x_i, y_i) , son:

$$\begin{aligned}N_i^{(e)}(x, y) &= \frac{1}{2A^{(e)}}(a_i + b_ix + c_iy) \\ a_i &= x_jy_k - x_ky_j, \quad b_i = y_j - y_k, \quad c_i = x_k - x_j \\ (i, j, k) &= 1, 2, 3 ; (i, j, k) = 2, 3, 1 ; (i, j, k) = 3, 1, 2 \\ 2A^{(e)} &= \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.32)$$

es decir,

$$\begin{aligned}
 N_1^{(e)}(x, y) &= \frac{1}{2A^{(e)}}(a_1 + b_1x + c_1y) \\
 N_2^{(e)}(x, y) &= \frac{1}{2A^{(e)}}(a_2 + b_2x + c_2y) \\
 N_3^{(e)}(x, y) &= \frac{1}{2A^{(e)}}(a_3 + b_3x + c_3y) \\
 a_1 &= x_2y_3 - x_3y_2 , \quad b_1 = y_2 - y_3 , \quad c_1 = x_3 - x_2 \\
 a_2 &= x_3y_1 - x_1y_3 , \quad b_2 = y_3 - y_1 , \quad c_2 = x_1 - x_3 \\
 a_3 &= x_1y_2 - x_2y_1 , \quad b_3 = y_1 - y_2 , \quad c_3 = x_2 - x_1
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

Ahora se definen los valores de la función de aproximación $v^{(e)}(x, y)$ de la componente de desplazamiento en y en los nudos del elemento como $v_1^{(e)}, v_2^{(e)}$ y $v_3^{(e)}$. Evaluando la función de aproximación $v^{(e)}(x, y)$ de la Ecuación (5.29) en los nudos se tiene:

$$\begin{aligned}
 v_1^{(e)} &= v^{(e)}(x_1, y_1) = \alpha_4 + \alpha_5x_1 + \alpha_6y_1 \\
 v_2^{(e)} &= v^{(e)}(x_2, y_2) = \alpha_4 + \alpha_5x_2 + \alpha_6y_2 \\
 v_3^{(e)} &= v^{(e)}(x_3, y_3) = \alpha_4 + \alpha_5x_3 + \alpha_6y_3
 \end{aligned}$$

Asimismo, se obtiene la función de aproximación $v^{(e)}(x, y)$ despejando los coeficientes α_4, α_5 y α_6 en términos de los valores nodales $v_1^{(e)}, v_2^{(e)}$ y $v_3^{(e)}$, así:

$$v^{(e)}(x, y) = N_1^{(e)}(x, y)v_1^{(e)} + N_2^{(e)}(x, y)v_2^{(e)} + N_3^{(e)}(x, y)v_3^{(e)} \quad \forall(x, y) \in A^{(e)} \tag{6.34}$$

donde las funciones de forma $N_i^{(e)}$ son las mismas definidas en la Ecuación (6.33).

De acuerdo a lo anterior, el elemento triangular lineal tiene 2 componentes de desplazamiento en cada nudo, para un total de 6 componentes de desplazamiento nodal, es decir, 6 grados de libertad.

Si se define la matriz de funciones de forma $\mathbf{N}_{(e)}$, el vector de valores nodales de desplazamiento $\mathbf{a}_{(e)}$ y el vector de desplazamientos en el interior del elemento $\mathbf{u}_{(e)}$ como:

$$\mathbf{N}_{(e)} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & 0 & N_3^{(e)} & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & 0 & N_3^{(e)} \end{array} \right] \tag{6.35}$$

$$\mathbf{a}_{(e)} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} u_1^{(e)} & v_1^{(e)} & u_2^{(e)} & v_2^{(e)} & u_3^{(e)} & v_3^{(e)} \end{array} \right]^T \tag{6.36}$$

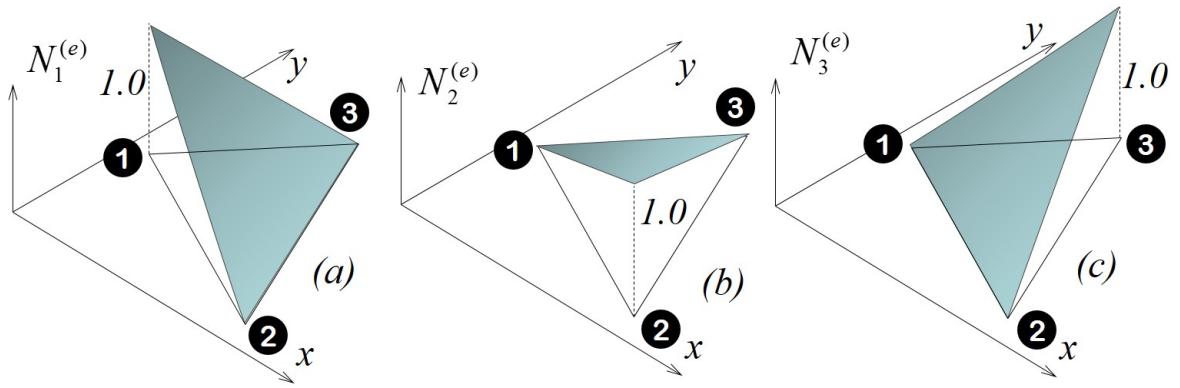


Figura 6.5: Elemento triangular lineal. Funciones de forma: (a) asociada al nudo 1, (b) asociada al nudo 2 y (c) asociada al nudo 3.

$$\mathbf{u}^{(e)} = [u^{(e)} \quad v^{(e)}]^T \quad (6.37)$$

Las expresiones (6.31) y (6.34) se pueden escribir matricialmente como $\mathbf{u}_{(e)} = \mathbf{N}_{(e)} \mathbf{a}_{(e)}$, es decir:

$$\begin{bmatrix} u^{(e)} \\ v^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & 0 & N_3^{(e)} & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & 0 & N_3^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ v_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \\ v_2^{(e)} \\ u_3^{(e)} \\ v_3^{(e)} \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

6.2.2. Matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma y componentes de la deformación y el esfuerzo

Las componentes de deformación en el interior de un elemento presentadas en la Ecuación (6.5) dependen de un operador diferencial actuando sobre las funciones de forma $\mathbf{B}_{(e)}(x, y)$ expresado como:

$$\mathbf{B}_{(e)}(x, y) = \begin{bmatrix} \partial_x N_1^{(e)} & 0 & \partial_x N_2^{(e)} & 0 & \partial_x N_3^{(e)} & 0 \\ 0 & \partial_y N_1^{(e)} & 0 & \partial_y N_2^{(e)} & 0 & \partial_y N_3^{(e)} \\ \partial_y N_1^{(e)} & \partial_x N_1^{(e)} & \partial_y N_2^{(e)} & \partial_x N_2^{(e)} & \partial_y N_3^{(e)} & \partial_x N_3^{(e)} \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

cuyos términos corresponden a las derivadas de las funciones de forma con respecto a x y a y . Sustituyendo en la expresión anterior las funciones de forma dadas en la Ecuación (6.33) se tiene:

$$\mathbf{B}_{(e)} = \frac{1}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

Observación 6.2.1 En general, la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma es función de la posición en el interior del elemento (x, y) ; sin embargo, en el elemento triangular lineal en particular la matriz $\mathbf{B}_{(e)}$ es constante con respecto a (x, y) , porque sus términos son derivadas de funciones lineales.

De acuerdo con lo anterior, la matriz columna de la deformación definida como $\boldsymbol{\epsilon}_{(e)} = \mathbf{B}_{(e)} \mathbf{a}_{(e)}$ se puede expresar en el interior de un elemento finito triangular lineal de la forma:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(e)} \\ \varepsilon_{yy}^{(e)} \\ \gamma_{xy}^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ v_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \\ v_2^{(e)} \\ u_3^{(e)} \\ v_3^{(e)} \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

La matriz columna de las componentes de esfuerzo se obtiene de la multiplicación entre la matriz de constitutiva elástica indicada en la Ecuación (5.8) y la matriz columna de las componentes de deformación indicada en la ecuación anterior, es decir, $\boldsymbol{\sigma}_{(e)} = \mathbf{D}_{(e)} \boldsymbol{\epsilon}_{(e)}$.

Observación 6.2.2 En un elemento triangular lineal la matriz de operadores diferenciales y el vector de valores nodales es constante con respecto a la posición (x, y) ; por lo tanto, las componentes de deformación son las mismas en cualquier punto del interior del elemento finito. Por esta razón, los elementos triangulares lineales también son llamados elementos de deformación constante. Al igual que las deformaciones, los esfuerzos son constantes en el interior de un elemento triangular lineal.

Una forma alternativa de expresar las operaciones anteriores consiste en definir submatrices asociadas a cada uno de los nudos en las matrices elementales, de tal manera que la submatriz de funciones de forma del nudo i en el elemento e es igual a:

$$\mathbf{N}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} N_i^{(e)} & 0 \\ 0 & N_i^{(e)} \end{bmatrix}, \quad N_i^{(e)} = \frac{1}{2A^{(e)}}(a_i + b_i x + c_i y) \quad (6.42)$$

La submatriz de operadores diferenciales actuando sobre las funciones de forma del nudo i en el elemento e es igual a:

$$\mathbf{B}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} \partial_x N_i^{(e)} & 0 \\ 0 & \partial_y N_i^{(e)} \\ \partial_y N_i^{(e)} & \partial_x N_i^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

y el subvector de desplazamientos en el nudo i del elemento e corresponde a:

$$\mathbf{a}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} u_i^{(e)} \\ v_i^{(e)} \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

Por lo tanto, la matriz de funciones de forma, la matriz $\mathbf{B}_{(e)}$ y el vector de desplazamientos nodales de un elemento triangular lineal se pueden escribir en términos de sus submatrices como:

$$\mathbf{N}_{(e)} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{N}_1^{(e)} & \mathbf{N}_2^{(e)} & \mathbf{N}_3^{(e)} \end{array} \right], \quad \mathbf{B}_{(e)} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{B}_1^{(e)} & \mathbf{B}_2^{(e)} & \mathbf{B}_3^{(e)} \end{array} \right], \quad \mathbf{a}_{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{(e)} \\ \hline \mathbf{a}_2^{(e)} \\ \hline \mathbf{a}_3^{(e)} \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

6.2.3. Matriz de rigidez

La matriz de rigidez de un elemento triangular lineal $\mathbf{K}^{(e)}$ se obtiene al sustituir las Ecuaciones (6.40) y (6.8) en la expresión (6.11) y después de realizar el triple

producto matricial como se indica a continuación:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_{(e)} t^{(e)} dA = \mathbf{B}_{(e)}^T \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_{(e)} t^{(e)} A^{(e)}$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{t^{(e)}}{4A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & c_1 \\ 0 & c_1 & b_1 \\ b_2 & 0 & c_2 \\ 0 & c_2 & b_2 \\ b_3 & 0 & c_3 \\ 0 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11}^{(e)} & D_{12}^{(e)} & 0 \\ D_{12}^{(e)} & D_{11}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

Como se indicó en la Ecuación (6.24), la matriz de rigidez del elemento también puede expresarse en términos de submatrices asociadas a los nudos de la forma:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(e)} & \mathbf{K}_{12}^{(e)} & \mathbf{K}_{13}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{21}^{(e)} & \mathbf{K}_{22}^{(e)} & \mathbf{K}_{23}^{(e)} \\ sim & sim & \mathbf{K}_{33}^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}_i^{(e)T} \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_j^{(e)} t^{(e)} dA \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (6.47)$$

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \frac{t^{(e)}}{4A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_i & 0 & c_i \\ 0 & c_i & b_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11}^{(e)} & D_{12}^{(e)} & 0 \\ D_{12}^{(e)} & D_{11}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_j & 0 \\ 0 & c_j \\ c_j & b_j \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \frac{t^{(e)}}{4A^{(e)}} \begin{bmatrix} (b_i b_j D_{11}^{(e)} + c_i c_j D_{33}^{(e)}) & (b_i c_j D_{12}^{(e)} + c_i b_j D_{33}^{(e)}) \\ (c_i b_j D_{12}^{(e)} + b_i c_j D_{33}^{(e)}) & (b_i b_j D_{33}^{(e)} + c_i c_j D_{22}^{(e)}) \end{bmatrix}$$

6.2.4. Coordenadas de área de un triángulo

La ubicación de un punto en el interior de un elemento finito triangular se puede definir mediante un sistema coordenado natural denominado *coordenadas de área*. La coordenada de área L_1 de un punto P en el interior de un elemento triangular es una cantidad adimensional entre 0 y 1, obtenida de la relación entre las áreas de los triángulos $P23$ y 123 mostrados en la Figura 6.6(a), lo cual es equivalente a la relación entre las alturas de los mismos h_1/h . De la misma forma se definen las coordenadas de área L_2 y L_3 , como se indica en la Figura 6.6. Sustituyendo el área

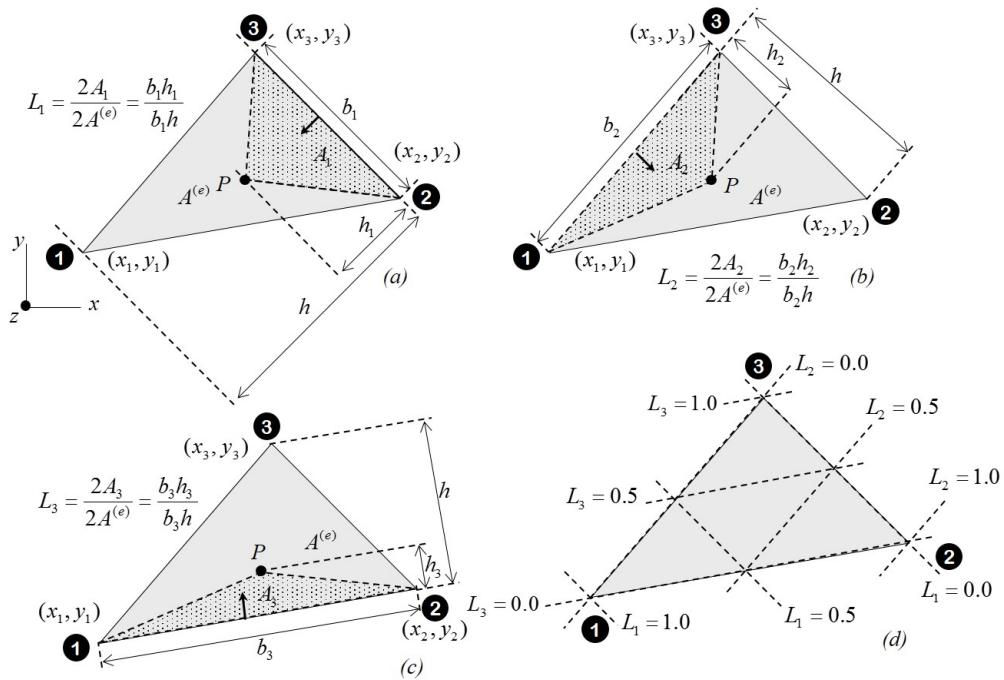


Figura 6.6: Coordenadas de área de un elemento finito triangular: (a) definición de la coordenada de área L_1 , (b) definición de la coordenada de área L_2 , (c) definición de la coordenada de área L_3 , (d)coordenadas de área.

A_i en términos de las coordenadas de los nudos y del punto interior del elemento, se pueden expresar las coordenadas de área de un triángulo de área $A^{(e)}$ de la forma:

$$\begin{aligned}
 L_i(x, y) &= \frac{1}{2A^{(e)}}(a_i + b_i x + c_i y) \\
 a_i &= x_j y_k - x_k y_j, \quad b_i = y_j - y_k, \quad c_i = x_k - x_j \\
 (i, j, k) &= 1, 2, 3 ; \quad (i, j, k) = 2, 3, 1 ; \quad (i, j, k) = 3, 1, 2 \quad \sum_{i=1}^3 L_i = 1
 \end{aligned} \tag{6.48}$$

es decir,

$$\begin{aligned} L_1(x, y) &= \frac{1}{2A^{(e)}}(a_1 + b_1x + c_1y) \\ L_2(x, y) &= \frac{1}{2A^{(e)}}(a_2 + b_2x + c_2y) \\ L_3(x, y) &= \frac{1}{2A^{(e)}}(a_3 + b_3x + c_3y) \\ a_1 &= x_2y_3 - x_3y_2, & b_1 &= y_2 - y_3, & c_1 &= x_3 - x_2 \\ a_2 &= x_3y_1 - x_1y_3, & b_2 &= y_3 - y_1, & c_2 &= x_1 - x_3 \\ a_3 &= x_1y_2 - x_2y_1, & b_3 &= y_1 - y_2, & c_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \quad (6.49)$$

Se observa que las coordenadas de área de un triángulo $L_1(x, y), L_2(x, y), L_3(x, y)$ coinciden con las funciones de forma de un elemento triangular lineal $N_1^{(e)}(x, y), N_2^{(e)}(x, y), N_3^{(e)}(x, y)$, respectivamente.

Por otro lado, las integrales del producto entre coordenadas de área de un triángulo se pueden obtener de la forma (Eisenberg & Malvern, 1973):

$$\int_A L_1^a L_2^b L_3^c dA = \frac{a! b! c!}{(a+b+c+2)!} 2A^{(e)} \quad (6.50)$$

La propiedad anterior y la igualdad entre L_i y $N_i^{(e)}$ permiten obtener la integral del producto de las funciones de forma en el área del elemento finito, como:

$$\int_{A^{(e)}} L_1^a L_2^b L_3^c dA = \int_{A^{(e)}} N_1^a N_2^b N_3^c dA = \frac{a! b! c!}{(2+a+b+c)!} 2A^{(e)} \quad (6.51)$$

Asimismo, la integral de línea de las funciones de forma sobre cada lado del elemento se evalúa mediante la expresión presentada por Abramowitz & Stegun en 1964, de la forma:

$$\int_{L_{ij}^{(e)}} L_i^a L_j^b dL = \int_{L_{ij}^{(e)}} N_i^a N_j^b dL = \frac{a! b!}{(1+a+b)!} L_{ij}^{(e)} \quad (6.52)$$

De acuerdo a lo anterior, la integral de la función de forma del nudo i cualquiera de un elemento triangular lineal e en el área es igual a:

$$\int_{A^{(e)}} N_i^{(e)} dA = \frac{A^{(e)}}{3} \quad (6.53)$$

La integral de la función de forma en el nudo i o en el nudo j sobre el lado $i-j$ de longitud $L_{ij}^{(e)}$ en un elemento triangular lineal e es igual a:

$$\int_{L_{ij}^{(e)}} N_i^{(e)} dL = \int_{L_{ij}^{(e)}} N_j^{(e)} dL = \frac{L_{ij}^{(e)}}{2} \quad (6.54)$$

Recordando que la función de forma del nudo k de un elemento triangular lineal $N_k^{(e)}(x, y)$ es una función lineal sobre el lado $i-j$ y que además es igual a cero en los nudos i y j , se concluye que $N_k^{(e)}(x, y) = 0 \forall (x, y) \in L_{ij}^{(e)}$ y en consecuencia su integral definida en $L_{ij}^{(e)}$ también es nula.

6.2.5. Vector de fuerzas nodales equivalentes a la acción de fuerzas de superficie y de cuerpo

El vector de fuerzas nodales equivalentes a la acción de fuerzas de superficie sobre los lados $L_{12}^{(e)}, L_{23}^{(e)}, L_{13}^{(e)}$ de un elemento triangular lineal es igual a:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_s^{(e)} &= \sum_{c=1}^{nc} \left(\int_{L_c^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{p}_c^{(e)} t^{(e)} dL \right) = \int_{L_{12}^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{p}_{1-2}^{(e)} t^{(e)} dL + \int_{L_{23}^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{p}_{2-3}^{(e)} t^{(e)} dL \\ &\quad + \int_{L_{13}^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{p}_{1-3}^{(e)} t^{(e)} dL \\ &= \int_{L_{12}^{(e)}} \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} \\ \hline N_2^{(e)} & 0 \\ 0 & N_2^{(e)} \\ \hline N_3^{(e)} & 0 \\ 0 & N_3^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x1-2}^{(e)} \\ p_{y1-2}^{(e)} \end{bmatrix} t^{(e)} dL + \int_{L_{23}^{(e)}} \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} \\ \hline N_2^{(e)} & 0 \\ 0 & N_2^{(e)} \\ \hline N_3^{(e)} & 0 \\ 0 & N_3^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x2-3}^{(e)} \\ p_{y2-3}^{(e)} \end{bmatrix} t^{(e)} dL \\ &\quad + \int_{L_{13}^{(e)}} \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} \\ \hline N_2^{(e)} & 0 \\ 0 & N_2^{(e)} \\ \hline N_3^{(e)} & 0 \\ 0 & N_3^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x1-3}^{(e)} \\ p_{y1-3}^{(e)} \end{bmatrix} t^{(e)} dL \end{aligned} \quad (6.55)$$

donde $\mathbf{p}_{i-j}^{(e)} = \begin{bmatrix} p_{x(i-j)}^{(e)} & p_{y(i-j)}^{(e)} \end{bmatrix}^T$ corresponde al vector de fuerzas distribuidas por unidad de área actuante sobre el lado $i-j$ del elemento finito. La Figura 5.7 muestra las fuerzas nodales equivalentes a la acción de las presiones en x y en y sobre las caras 1–2, 2–3 y 1–3, respectivamente.

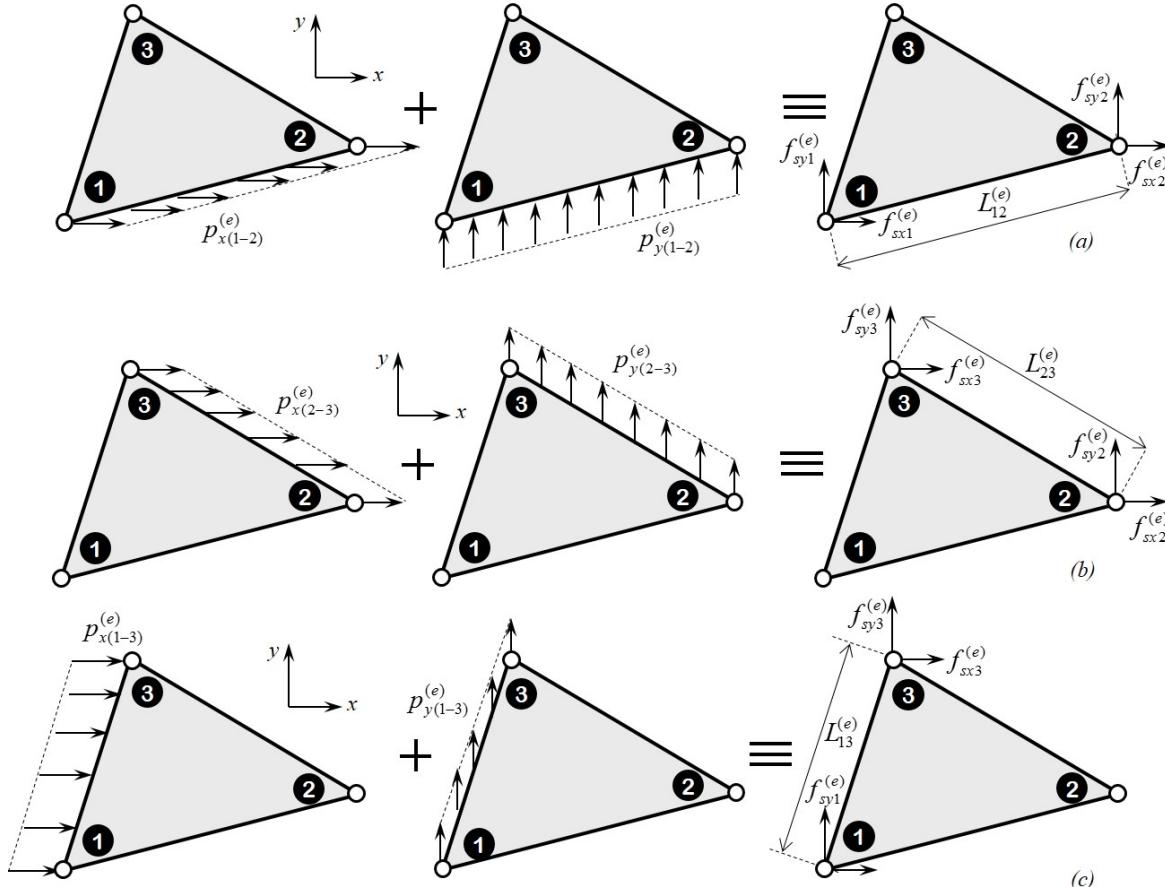


Figura 6.7: Elemento triangular lineal. Fuerzas nodales equivalentes a la acción de las fuerzas de superficie: (a) sobre la cara 1-2 del elemento, (b) sobre la cara 2-3 del elemento y (c) sobre la cara 1-3 del elemento.

Utilizando las submatrices de las funciones de forma por nudo, la ecuación anterior se puede expresar como:

$$\mathbf{f}_s^{(e)} = \sum_{c=1}^{nc} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{s1}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{s2}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{s3}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{si}^{(e)} = \int_{L_c^{(e)}} \mathbf{N}_i^{(e)T} \mathbf{p}_c^{(e)} t^{(e)} dL \quad (i = 1, 2, 3) \quad (c = (1-2), (2-3), (1-3)) \quad (6.56)$$

Teniendo en cuenta la consideración anterior y evaluando la integral de cada función de forma como lo indica la Ecuación (6.54), se obtiene un vector de fuerzas nodales equivalentes de superficie de la forma:

$$\mathbf{f}_s^{(e)} = \begin{bmatrix} f_{sx1}^{(e)} \\ f_{sy1}^{(e)} \\ f_{sx2}^{(e)} \\ f_{sy2}^{(e)} \\ f_{sx3}^{(e)} \\ f_{sy3}^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} L_{12}^{(e)} t^{(e)} \begin{bmatrix} p_{x(1-2)}^{(e)} \\ p_{y(1-2)}^{(e)} \\ p_{x(1-2)}^{(e)} \\ p_{y(1-2)}^{(e)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} L_{23}^{(e)} t^{(e)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{x(2-3)}^{(e)} \\ p_{y(2-3)}^{(e)} \\ p_{x(2-3)}^{(e)} \\ p_{y(2-3)}^{(e)} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} L_{13}^{(e)} t^{(e)} \begin{bmatrix} p_{x(1-3)}^{(e)} \\ p_{y(1-3)}^{(e)} \\ 0 \\ 0 \\ p_{x(1-3)}^{(e)} \\ p_{y(1-3)}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

Como un caso particular de la Ecuación (6.15), el vector de fuerzas nodales equivalentes a la acción de fuerzas de cuerpo de un elemento triangular lineal se expresa como:

$$\mathbf{f}_b^{(e)} = \int_{A^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{b}_{(e)} t^{(e)} dA = \int_{A^{(e)}} \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} \\ N_2^{(e)} & 0 \\ 0 & N_2^{(e)} \\ N_3^{(e)} & 0 \\ 0 & N_3^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x^{(e)} \\ b_y^{(e)} \end{bmatrix} t^{(e)} dA \quad (6.58)$$

En la ecuación anterior $\mathbf{b}_{(e)} = [b_x^{(e)} \ b_y^{(e)}]^T$ es el vector de fuerzas distribuidas por unidad de volumen indicado en la Figura 6.8.

Utilizando las submatrices de las funciones de forma por nudo, la ecuación anterior se puede expresar como:

$$\mathbf{f}_b^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{b1}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{b2}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{b3}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{bi}^{(e)} = \int_{A^{(e)}} \mathbf{N}_i^{(e)T} \mathbf{b}_{(e)} t^{(e)} dA \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6.59)$$

Después de integrar las funciones de forma en el área como lo indica la Ecuación (6.53), se obtiene el vector de fuerzas nodales equivalentes de cuerpo de un elemento

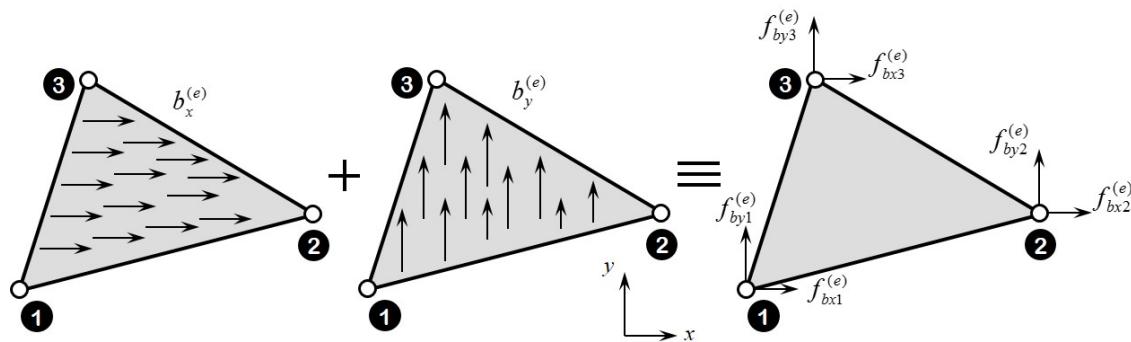


Figura 6.8: Elemento triangular lineal: Fuerzas nodales equivalentes de cuerpo del elemento.

triangular lineal de la forma:

$$\mathbf{f}_b^{(e)} = \begin{bmatrix} f_{bx1}^{(e)} \\ f_{by1}^{(e)} \\ f_{bx2}^{(e)} \\ f_{by2}^{(e)} \\ f_{bx3}^{(e)} \\ f_{by3}^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} A^{(e)} t^{(e)} \begin{bmatrix} b_x^{(e)} \\ b_y^{(e)} \\ b_x^{(e)} \\ b_y^{(e)} \\ b_x^{(e)} \\ b_y^{(e)} \end{bmatrix} \quad (6.60)$$

6.3. Elemento rectangular bilineal

La Figura 6.9 muestra un elemento finito rectangular bilineal definido en un sistema coordenado natural con origen en el centro del elemento y con ejes ξ y η paralelos a los ejes de un sistema coordenado general x y y , respectivamente. La posición de un punto en el interior del elemento está dada en coordenadas naturales como (ξ, η) y en coordenadas generales como (x, y) .

El elemento rectangular bilineal está conformado por los nudos 1, 2, 3 y 4 ubicados en las esquinas, cuyas coordenadas en el sistema general son (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) y (x_4, y_4) respectivamente y en el sistema natural corresponden a $(-1, -1)$, $(+1, -1)$, $(+1, +1)$ y $(-1, +1)$.

Se ha escogido como nudo 1 el extremo inferior izquierdo del elemento y los nudos 2, 3 y 4 ordenados en sentido anti-horario.

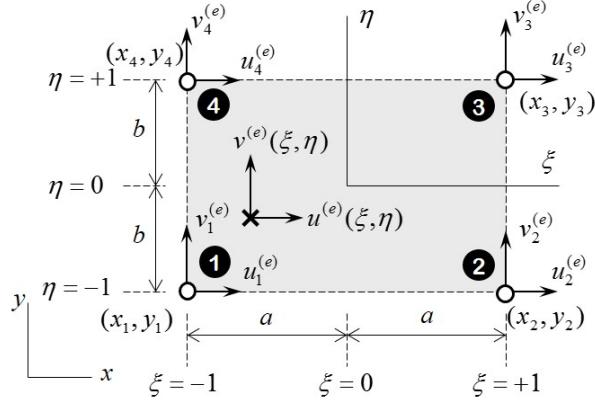


Figura 6.9: Elemento rectangular bilineal. Esquema general.

La relación entre el sistema coordenado natural $\xi\eta$ y el sistema coordenado general xy para un elemento rectangular de dimensiones $2a$ por $2b$, es de la forma:

$$\xi = \frac{x}{a} - \frac{x_1 + x_2}{2a}, \quad \eta = \frac{y}{b} - \frac{y_1 + y_3}{2b} \quad (6.61)$$

Las componentes de desplazamiento en x y en y de un punto en el interior del elemento (ξ, η) están determinadas por funciones de aproximación polinómicas bilineales de la forma:

$$\begin{aligned} u^{(e)}(\xi, \eta) &= \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi\eta \quad \forall(\xi, \eta) \in A^{(e)} \\ v^{(e)}(\xi, \eta) &= \alpha_5 + \alpha_6\xi + \alpha_7\eta + \alpha_8\xi\eta \quad \forall(\xi, \eta) \in A^{(e)} \end{aligned} \quad (6.62)$$

6.3.1. Funciones de aproximación y funciones de forma

Los valores nodales $u_1^{(e)}, u_2^{(e)}, u_3^{(e)}, u_4^{(e)}$ del desplazamiento en dirección x , mostrados en la Figura 6.9 son $u^{(e)}(-1, -1), u^{(e)}(+1, -1), u^{(e)}(+1, +1), u^{(e)}(-1, +1)$, respectivamente. Asimismo, los valores nodales $v_1^{(e)}, v_2^{(e)}, v_3^{(e)}, v_4^{(e)}$ de desplazamiento en y corresponden a $v^{(e)}(-1, -1), v^{(e)}(+1, -1), v^{(e)}(+1, +1), v^{(e)}(-1, +1)$. Las coordenadas generalizadas de la ecuación anterior $\alpha_1, \dots, \alpha_8$ se pueden sustituir por dichos valores nodales, de tal manera que:

$$\begin{aligned} u^{(e)}(\xi, \eta) &= N_1^{(e)} u_1^{(e)} + N_2^{(e)} u_2^{(e)} + N_3^{(e)} u_3^{(e)} + N_4^{(e)} u_4^{(e)} \quad \forall(\xi, \eta) \in A^{(e)} \\ v^{(e)}(\xi, \eta) &= N_1^{(e)} v_1^{(e)} + N_2^{(e)} v_2^{(e)} + N_3^{(e)} v_3^{(e)} + N_4^{(e)} v_4^{(e)} \quad \forall(\xi, \eta) \in A^{(e)} \end{aligned} \quad (6.63)$$

donde $N_i^{(e)}(\xi, \eta)$ es la función de forma en el nudo i del elemento e , representada en la Figura 6.10. En particular, las funciones de forma de los nudos 1, 2, 3 y 4 de un elemento finito rectangular bilineal en sistema coordenado natural son:

$$\begin{aligned} N_1^{(e)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), & N_2^{(e)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3^{(e)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), & N_4^{(e)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (6.64)$$

Por lo tanto el elemento rectangular bilineal tiene 2 componentes de desplazamiento en cada nudo, para un total de 8 componentes de desplazamiento nodal, es decir, 8 grados de libertad.

Se define la matriz de funciones de forma $\mathbf{N}_{(e)}$, el vector de valores nodales de desplazamiento $\mathbf{a}_{(e)}$ y el vector de desplazamientos en el interior del elemento $\mathbf{u}_{(e)}$ como:

$$\mathbf{N}_{(e)} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & 0 & N_3^{(e)} & 0 & N_4^{(e)} & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & 0 & N_3^{(e)} & 0 & N_4^{(e)} \end{array} \right] \quad (6.65)$$

$$\mathbf{a}_{(e)} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} u_1^{(e)} & v_1^{(e)} & u_2^{(e)} & v_2^{(e)} & u_3^{(e)} & v_3^{(e)} & u_4^{(e)} & v_4^{(e)} \end{array} \right]^T \quad (6.66)$$

$$\mathbf{u}^{(e)} = [u^{(e)} \quad v^{(e)}]^T \quad (6.67)$$

respectivamente.

Las dos funciones de aproximación del campo del desplazamiento indicadas en la Ecuación (6.63) se pueden escribir de forma matricial como $\mathbf{u}_{(e)} = \mathbf{N}_{(e)} \mathbf{a}_{(e)}$, es decir:

$$\left[\begin{array}{c} u^{(e)} \\ v^{(e)} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & 0 & N_3^{(e)} & 0 & N_4^{(e)} & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & 0 & N_3^{(e)} & 0 & N_4^{(e)} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} u_1^{(e)} \\ v_1^{(e)} \\ \hline u_2^{(e)} \\ v_2^{(e)} \\ \hline u_3^{(e)} \\ v_3^{(e)} \\ \hline u_4^{(e)} \\ v_4^{(e)} \end{array} \right] \quad (6.68)$$

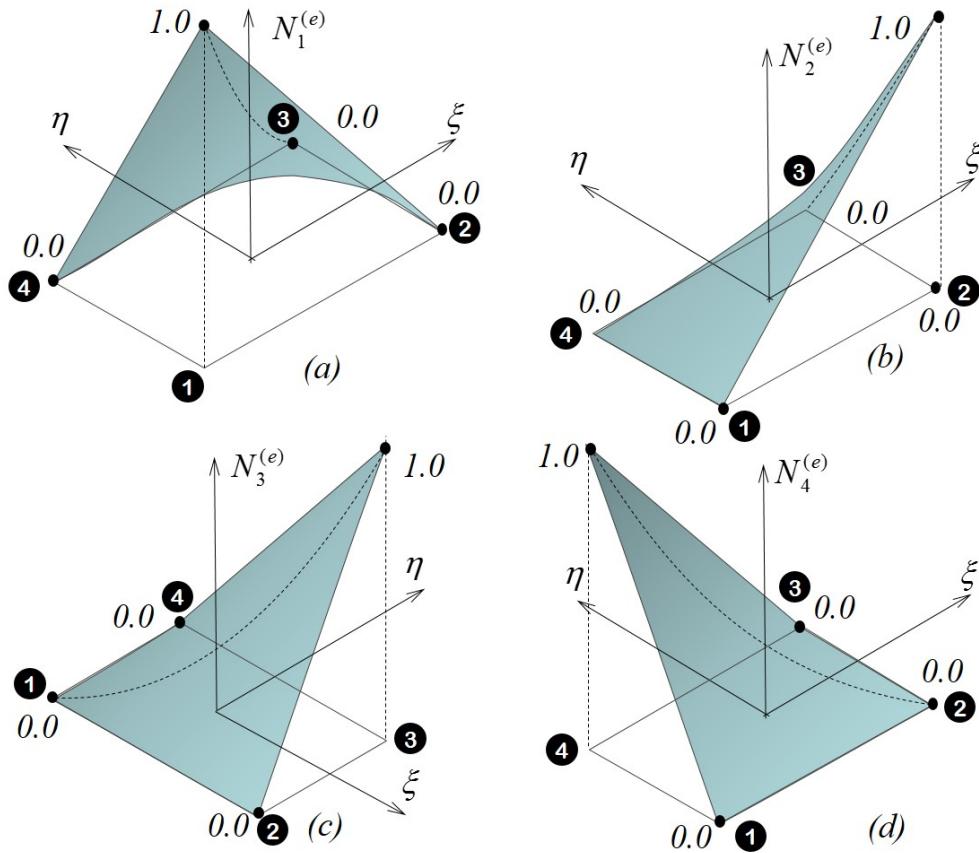


Figura 6.10: Elemento rectangular bilineal. Funciones de forma: (a) asociada al nudo 1, (b) asociada al nudo 2, (c) asociada al nudo 3 y (d) asociada al nudo 4.

6.3.2. Matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma y componentes de la deformación y del esfuerzo

Las componentes de deformación en el interior de un elemento presentadas en la Ecuación (6.5), dependen de un operador diferencial actuando sobre las funciones de forma $\mathbf{B}_{(e)}(x, y)$ expresado como:

$$\mathbf{B}_{(e)}(x, y) = \begin{bmatrix} \partial_x N_1^{(e)} & 0 & \partial_x N_2^{(e)} & 0 & \partial_x N_3^{(e)} & 0 & \partial_x N_4^{(e)} & 0 \\ 0 & \partial_y N_1^{(e)} & 0 & \partial_y N_2^{(e)} & 0 & \partial_y N_3^{(e)} & 0 & \partial_y N_4^{(e)} \\ \partial_y N_1^{(e)} & \partial_x N_1^{(e)} & \partial_y N_2^{(e)} & \partial_x N_2^{(e)} & \partial_y N_3^{(e)} & \partial_x N_3^{(e)} & \partial_y N_4^{(e)} & \partial_x N_4^{(e)} \end{bmatrix} \quad (6.69)$$

cuyos términos corresponden a las derivadas de las funciones de forma con respecto a x y a y . De acuerdo con la Ecuación (6.61) y con la regla de la cadena dichas

derivadas se pueden expresar como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} &= \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi} \frac{1}{a} \\ \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} &= \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \eta} \frac{1}{b}\end{aligned}\quad (6.70)$$

En consecuencia, la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma de un elemento rectangular bilineal es:

$$\mathbf{B}_{(e)} = \frac{1}{4ab} \left[\begin{array}{cc|cc} -b(1-\eta) & 0 & b(1-\eta) & 0 \\ 0 & -a(1-\xi) & 0 & -a(1+\xi) \\ -a(1-\xi) & -b(1-\eta) & -a(1+\xi) & b(1-\eta) \\ \hline b(1+\eta) & 0 & -b(1+\eta) & 0 \\ 0 & a(1+\xi) & 0 & a(1-\xi) \\ a(1+\xi) & b(1+\eta) & a(1-\xi) & -b(1+\eta) \end{array} \right] \quad (6.71)$$

La matriz columna de la deformación en un punto (ξ, η) en el interior de un elemento finito rectangular bilineal es el resultado del producto entre la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma de la Ecuación (6.71) y el vector de desplazamientos nodales de la Ecuación (6.66), es decir, $\boldsymbol{\varepsilon}_{(e)}(\xi, \eta) = \mathbf{B}_{(e)}(\xi, \eta) \mathbf{a}_{(e)}$.

La matriz columna del esfuerzo en el mismo punto (ξ, η) se obtiene multiplicando la matriz constitutiva elástica del material dada en la Ecuación (6.8) por la matriz columna de la deformación, es decir, $\boldsymbol{\sigma}_{(e)}(\xi, \eta) = \mathbf{D}_{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}_{(e)}(\xi, \eta)$.

6.3.3. Presentación alternativa mediante submatrices por nudo

Otra forma de expresar las operaciones anteriores consiste en definir submatrices asociadas a cada uno de los nudos en las matrices elementales. La matriz de funciones de forma se puede expresar como:

$$\mathbf{N}_{(e)} = \left[\mathbf{N}_1^{(e)} \mid \mathbf{N}_2^{(e)} \mid \mathbf{N}_3^{(e)} \mid \mathbf{N}_4^{(e)} \right], \quad \mathbf{N}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} N_i^{(e)} & 0 \\ 0 & N_i^{(e)} \end{bmatrix} \quad (6.72)$$

Las funciones de forma $N_i^{(e)}$ dadas en la Ecuación (6.64) también se pueden escribir de manera general como:

$$N_i^{(e)}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \quad (6.73)$$

donde ξ_i y η_i corresponden a las coordenadas ξ y η en el nudo i , respectivamente. Es decir,

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} i & \xi_i & \eta_i \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ 2 & +1 & -1 \\ 3 & +1 & +1 \\ 4 & -1 & +1 \end{array} \end{array} \quad (6.74)$$

Asimismo, la matriz de operadores diferenciales actuando sobre las funciones de forma se reescribe como:

$$\mathbf{B}_{(e)} = \left[\mathbf{B}_1^{(e)} \mid \mathbf{B}_2^{(e)} \mid \mathbf{B}_3^{(e)} \mid \mathbf{B}_4^{(e)} \right] \quad , \quad \mathbf{B}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} \partial_x N_i^{(e)} & 0 \\ 0 & \partial_y N_i^{(e)} \\ \partial_y N_i^{(e)} & \partial_x N_i^{(e)} \end{bmatrix} \quad (6.75)$$

donde las derivadas de la función de forma con respecto a x y a y son:

$$\frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} = \frac{\xi_i}{4a}(1 + \eta_i \eta), \quad \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} = \frac{\eta_i}{4b}(1 + \xi_i \xi) \quad (6.76)$$

Por lo tanto, la submatriz de operadores diferenciales actuando sobre las funciones de forma en el nudo i del elemento e es igual a:

$$\mathbf{B}_i^{(e)} = \frac{1}{4ab} \begin{bmatrix} \xi_i b (1 + \eta_i \eta) & 0 \\ 0 & \eta_i a (1 + \xi_i \xi) \\ \eta_i a (1 + \xi_i \xi) & \xi_i b (1 + \eta_i \eta) \end{bmatrix} = \frac{1}{4ab} \begin{bmatrix} h_i(\eta) & 0 \\ 0 & g_i(\xi) \\ g_i(\xi) & h_i(\eta) \end{bmatrix} \quad (6.77)$$

El vector de desplazamientos nodales de un elemento finito se puede expresar en términos de subvectores asociados a cada nudo de la forma:

$$\mathbf{a}_{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{(e)} \\ \mathbf{a}_2^{(e)} \\ \mathbf{a}_3^{(e)} \\ \mathbf{a}_4^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} u_i^{(e)} \\ v_i^{(e)} \end{bmatrix} \quad (6.78)$$

6.3.4. Matriz de rigidez

La matriz de rigidez del elemento finito $\mathbf{K}^{(e)}$ definida en la Ecuación (6.11), se puede expresar en términos de submatrices por nudo de la forma:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(e)} & \mathbf{K}_{12}^{(e)} & \mathbf{K}_{13}^{(e)} & \mathbf{K}_{14}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{21}^{(e)} & \mathbf{K}_{22}^{(e)} & \mathbf{K}_{23}^{(e)} & \mathbf{K}_{24}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{31}^{(e)} & \mathbf{K}_{32}^{(e)} & \mathbf{K}_{33}^{(e)} & \mathbf{K}_{34}^{(e)} \\ sim & & & \mathbf{K}_{44}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (6.79)$$

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}_i^{(e)T} \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_j^{(e)} t^{(e)} dA \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

Recordando la relación entre sistemas coordenados, el diferencial de área dA expresado en función de las coordenadas naturales de obtiene así:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{a} - \frac{x_1 + x_2}{2a} \quad \rightarrow \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{a} \quad \rightarrow \quad dx = a d\xi \\ \eta &= \frac{y}{b} - \frac{y_1 + y_2}{2b} \quad \rightarrow \quad \frac{d\eta}{dy} = \frac{1}{b} \quad \rightarrow \quad dy = b d\eta \\ dA &= dx dy = ab d\xi d\eta \end{aligned} \quad (6.80)$$

En consecuencia, la submatriz $\mathbf{K}_{ij}^{(e)}$ corresponde a una integral en el área con respecto al sistema coordenado natural de la forma:

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_i^{(e)T} \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_j^{(e)} t^{(e)} ab d\xi d\eta \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \quad (6.81)$$

Sustituyendo las ecuaciones (6.8) y (6.77) en la expresión anterior se tiene:

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{t^{(e)}}{16ab} \begin{bmatrix} h_i(\eta) & 0 & g_i(\xi) \\ 0 & g_i(\xi) & h_i(\eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11}^{(e)} & D_{12}^{(e)} & 0 \\ D_{12}^{(e)} & D_{22}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_j(\eta) & 0 \\ 0 & g_j(\xi) \\ g_j(\xi) & h_j(\eta) \end{bmatrix} d\xi d\eta \quad (6.82)$$

$$h_i(\eta) = \xi_i b (1 + \eta_i \eta), \quad g_i(\xi) = \eta_i a (1 + \xi_i \xi)$$

$$h_j(\eta) = \xi_j b (1 + \eta_j \eta), \quad g_j(\xi) = \eta_j a (1 + \xi_j \xi)$$

Realizando el triple producto,

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{t^{(e)}}{16ab} \begin{bmatrix} (h_i h_j D_{11}^{(e)} + g_i g_j D_{33}^{(e)}) & (h_i g_j D_{12}^{(e)} + g_i h_j D_{33}^{(e)}) \\ (g_i h_j D_{12}^{(e)} + h_i g_j D_{33}^{(e)}) & (h_i h_j D_{33}^{(e)} + g_i g_j D_{22}^{(e)}) \end{bmatrix} d\xi d\eta \quad (6.83)$$

Integrando en los límites dados por el sistema coordenado natural se obtiene:

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \frac{t^{(e)}}{12ab} \begin{bmatrix} (\xi_i \xi_j \eta_{ij} b^2 D_{11}^{(e)} + \eta_i \eta_j \xi_{ij} a^2 D_{33}^{(e)}) & (3\xi_i \eta_j a b D_{12}^{(e)} + 3\xi_j \eta_i a b D_{33}^{(e)}) \\ (3\xi_j \eta_i a b D_{12}^{(e)} + 3\xi_i \eta_j a b D_{33}^{(e)}) & (\xi_i \xi_j \eta_{ij} b^2 D_{33}^{(e)} + \eta_i \eta_j \xi_{ij} a^2 D_{22}^{(e)}) \end{bmatrix} \quad (6.84)$$

$$\eta_{ij} = 3 + \eta_i \eta_j, \quad \xi_{ij} = 3 + \xi_i \xi_j$$

En conclusión, la matriz de rigidez de un elemento rectangular bilineal en términos de sus submatrices por nudo, recordando las coordenadas ξ_i y η_i de la Ecuación (6.74), es igual a:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(e)} & \mathbf{K}_{12}^{(e)} & \mathbf{K}_{13}^{(e)} & \mathbf{K}_{14}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{21}^{(e)} & \mathbf{K}_{22}^{(e)} & \mathbf{K}_{23}^{(e)} & \mathbf{K}_{24}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{31}^{(e)} & \mathbf{K}_{32}^{(e)} & \mathbf{K}_{33}^{(e)} & \mathbf{K}_{34}^{(e)} \\ sim & & & \mathbf{K}_{44}^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{33}^{(e)} = \mathbf{K}_{11}^{(e)}, \quad \mathbf{K}_{34}^{(e)} = \mathbf{K}_{12}^{(e)}, \quad \mathbf{K}_{44}^{(e)} = \mathbf{K}_{22}^{(e)}, \quad \mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \mathbf{K}_{ji}^{(e)}$$

$$\mathbf{K}_{11}^{(e)} = \frac{t^{(e)}}{12ab} \begin{bmatrix} (4b^2 D_{11}^{(e)} + 4a^2 D_{33}^{(e)}) & (3ab D_{12}^{(e)} + 3ab D_{33}^{(e)}) \\ (3ab D_{12}^{(e)} + 3ab D_{33}^{(e)}) & (4b^2 D_{33}^{(e)} + 4a^2 D_{22}^{(e)}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{12}^{(e)} = \frac{t^{(e)}}{12ab} \begin{bmatrix} (-4b^2 D_{11}^{(e)} + 2a^2 D_{33}^{(e)}) & (3ab D_{12}^{(e)} - 3ab D_{33}^{(e)}) \\ (-3ab D_{12}^{(e)} + 3ab D_{33}^{(e)}) & (-4b^2 D_{33}^{(e)} + 2a^2 D_{22}^{(e)}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{13}^{(e)} = \frac{t^{(e)}}{12ab} \begin{bmatrix} (-2b^2 D_{11}^{(e)} - 2a^2 D_{33}^{(e)}) & (-3ab D_{12}^{(e)} - 3ab D_{33}^{(e)}) \\ (-3ab D_{12}^{(e)} - 3ab D_{33}^{(e)}) & (-2b^2 D_{33}^{(e)} - 2a^2 D_{22}^{(e)}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{14}^{(e)} = \frac{t^{(e)}}{12ab} \begin{bmatrix} (2b^2 D_{11}^{(e)} - 4a^2 D_{33}^{(e)}) & (-3ab D_{12}^{(e)} + 3ab D_{33}^{(e)}) \\ (3ab D_{12}^{(e)} - 3ab D_{33}^{(e)}) & (2b^2 D_{33}^{(e)} - 4a^2 D_{22}^{(e)}) \end{bmatrix} \quad (6.85)$$

$$\mathbf{K}_{22}^{(e)} = \frac{t^{(e)}}{12ab} \begin{bmatrix} (4b^2 D_{11}^{(e)} + 4a^2 D_{33}^{(e)}) & (-3ab D_{12}^{(e)} - 3ab D_{33}^{(e)}) \\ (-3ab D_{12}^{(e)} - 3ab D_{33}^{(e)}) & (4b^2 D_{33}^{(e)} + 4a^2 D_{22}^{(e)}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{23}^{(e)} = \frac{t^{(e)}}{12ab} \begin{bmatrix} (2b^2 D_{11}^{(e)} - 4a^2 D_{33}^{(e)}) & (3ab D_{12}^{(e)} - 3ab D_{33}^{(e)}) \\ (-3ab D_{12}^{(e)} + 3ab D_{33}^{(e)}) & (2b^2 D_{33}^{(e)} - 4a^2 D_{22}^{(e)}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{24}^{(e)} = \frac{t^{(e)}}{12ab} \begin{bmatrix} (-2b^2 D_{11}^{(e)} - 2a^2 D_{33}^{(e)}) & (3ab D_{12}^{(e)} + 3ab D_{33}^{(e)}) \\ (3ab D_{12}^{(e)} + 3ab D_{33}^{(e)}) & (-2b^2 D_{33}^{(e)} - 2a^2 D_{22}^{(e)}) \end{bmatrix}$$

6.3.5. Vector de fuerzas equivalentes a fuerzas de superficie y de cuerpo

La Figura 5.11 ilustra las fuerzas nodales equivalentes a la acción de las presiones en x y en y sobre el lado 2 – 3 del elemento finito.

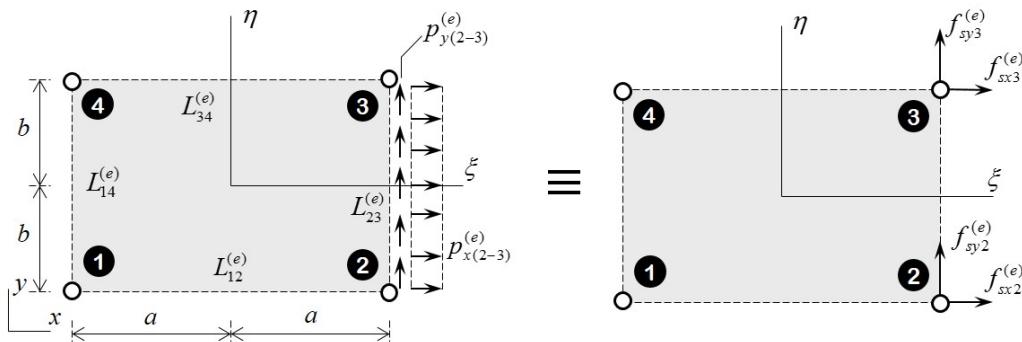


Figura 6.11: Elemento rectangular bilineal: fuerzas nodales equivalentes de superficie sobre el lado (2-3) del elemento.

El vector de fuerzas nodales equivalentes de superficie sobre los lados $L_{12}^{(e)}, L_{23}^{(e)}, L_{34}^{(e)}, L_{14}^{(e)}$ de un elemento rectangular bilineal es igual a:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_s^{(e)} &= \sum_{c=1}^{nc} \left(\int_{L_c^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{p}_c^{(e)} t^{(e)} dL \right) \\ &= \int_{L_{12}^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{p}_{1-2}^{(e)} t^{(e)} dL + \int_{L_{23}^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{p}_{2-3}^{(e)} t^{(e)} dL + \int_{L_{34}^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{p}_{3-4}^{(e)} t^{(e)} dL \\ &\quad + \int_{L_{14}^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{p}_{1-4}^{(e)} t^{(e)} dL \end{aligned} \quad (6.86)$$

donde,

$$\mathbf{N}_{(e)}^T = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} \\ \hline N_2^{(e)} & 0 \\ 0 & N_2^{(e)} \\ \hline N_3^{(e)} & 0 \\ 0 & N_3^{(e)} \\ \hline N_4^{(e)} & 0 \\ 0 & N_4^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_{1-2}^{(e)} = \begin{bmatrix} p_{x1-2}^{(e)} \\ p_{y1-2}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_{2-3}^{(e)} = \begin{bmatrix} p_{x2-3}^{(e)} \\ p_{y2-3}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_{3-4}^{(e)} = \begin{bmatrix} p_{x3-4}^{(e)} \\ p_{y3-4}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_{1-4}^{(e)} = \begin{bmatrix} p_{x1-4}^{(e)} \\ p_{y1-4}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (6.87)$$

Utilizando las submatrices de las funciones de forma por nudo, la ecuación anterior se puede expresar como:

$$\mathbf{f}_s^{(e)} = \sum_{c=1}^{nc} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{s1}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{s2}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{s3}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{s4}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{si}^{(e)} = \int_{L_c^{(e)}} \mathbf{N}_i^{(e)T} \mathbf{p}_c^{(e)} t^{(e)} dL \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3, 4 \\ c = (1-2), (2-3), (3-4), (1-4) \end{cases} \quad (6.88)$$

Como lo muestra la Figura 6.11, los lados (1–2) y (3–4) del elemento rectangular bilineal son paralelos al eje coordenado x; por lo tanto, las integrales de línea de las funciones de forma sobre dichos lados se pueden expresar en términos de x . Sin embargo, dado que las funciones de forma presentadas en la Ecuación (6.32), están expresadas en términos del sistema coordenado natural, la integral de línea en función de ξ se puede obtener así:

$$\begin{aligned} \int_{L_{12}^{(e)}} N_i^{(e)} t^{(e)} dL &= \int_{L_{34}^{(e)}} N_i^{(e)} t^{(e)} dL = \int_{x_1}^{x_2} N_i^{(e)} t^{(e)} dx = \int_{-1}^{+1} N_i^{(e)}(\xi, \eta) t^{(e)} a d\xi \\ &= \frac{t^{(e)} a}{4} \int_{-1}^{+1} (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) d\xi = (1 + \eta_i \eta) \frac{t^{(e)} a}{2} \end{aligned} \quad (6.89)$$

Las integrales de línea de las funciones de forma sobre el lado (1–2), cuya coor-

denada natural es $\eta = -1$ corresponden a:

$$\begin{aligned} \int_{L_{12}^{(e)}} N_1^{(e)} t^{(e)} dL &= t^{(e)} a, & \int_{L_{12}^{(e)}} N_2^{(e)} t^{(e)} dL &= t^{(e)} a \\ \int_{L_{12}^{(e)}} N_3^{(e)} t^{(e)} dL &= 0, & \int_{L_{12}^{(e)}} N_4^{(e)} t^{(e)} dL &= 0 \end{aligned} \quad (6.90)$$

Las integrales de línea de las funciones de forma sobre el lado (3–4), cuya coordenada natural es $\eta = +1$ corresponden a:

$$\begin{aligned} \int_{L_{34}^{(e)}} N_1^{(e)} t^{(e)} dL &= 0, & \int_{L_{34}^{(e)}} N_2^{(e)} t^{(e)} dL &= 0 \\ \int_{L_{34}^{(e)}} N_3^{(e)} t^{(e)} dL &= t^{(e)} a, & \int_{L_{34}^{(e)}} N_4^{(e)} t^{(e)} dL &= t^{(e)} a \end{aligned} \quad (6.91)$$

Asimismo, los lados (2–3) y (1–4) del elemento rectangular bilineal son paralelos al eje coordenado y ; por lo tanto, las integrales de línea de las funciones de forma sobre dichos lados se pueden expresar en términos de y . Sin embargo, dado que las funciones de forma presentadas en la Ecuación (6.73), están expresadas en términos del sistema coordenado natural, la integral de línea en función de η se puede obtener así:

$$\begin{aligned} \int_{L_{23}^{(e)}} N_i^{(e)} t^{(e)} dL &= \int_{L_{14}^{(e)}} N_i^{(e)} t^{(e)} dL = \int_{y_2}^{y_3} N_i^{(e)} t^{(e)} dy = \int_{-1}^{+1} N_i^{(e)}(\xi, \eta) t^{(e)} b d\eta \\ &= \frac{t^{(e)} b}{4} \int_{-1}^{+1} (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) d\eta = (1 + \xi_i \xi) \frac{t^{(e)} b}{2} \end{aligned} \quad (6.92)$$

Las integrales de línea de las funciones de forma sobre el lado (2–3), cuya coordenada natural es $\xi = +1$ corresponden a:

$$\begin{aligned} \int_{L_{23}^{(e)}} N_1^{(e)} t^{(e)} dL &= 0, & \int_{L_{23}^{(e)}} N_2^{(e)} t^{(e)} dL &= t^{(e)} b \\ \int_{L_{23}^{(e)}} N_3^{(e)} t^{(e)} dL &= t b, & \int_{L_{23}^{(e)}} N_4^{(e)} t^{(e)} dL &= 0 \end{aligned} \quad (6.93)$$

Las integrales de línea de las funciones de forma sobre el lado (1–4), cuya coordenada natural es $\xi = -1$ corresponden a:

$$\begin{aligned} \int_{L_{14}^{(e)}} N_1^{(e)} t^{(e)} dL &= tb \quad , \quad \int_{L_{14}^{(e)}} N_2^{(e)} t^{(e)} dL = 0 \\ \int_{L_{14}^{(e)}} N_3^{(e)} t^{(e)} dL &= 0 \quad , \quad \int_{L_{14}^{(e)}} N_4^{(e)} t^{(e)} dL = t^{(e)} b \end{aligned} \quad (6.94)$$

Después de sustituir las integrales de línea de las funciones de forma se obtiene un vector de fuerzas nodales equivalentes de superficie igual a:

$$\mathbf{f}_s^{(e)} = t^{(e)} a \begin{bmatrix} p_{x(1-2)}^{(e)} \\ p_{y(1-2)}^{(e)} \\ p_{x(1-2)}^{(e)} \\ p_{y(1-2)}^{(e)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t^{(e)} b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{x(2-3)}^{(e)} \\ p_{y(2-3)}^{(e)} \\ p_{x(2-3)}^{(e)} \\ p_{y(2-3)}^{(e)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t^{(e)} a \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_{x(3-4)}^{(e)} \\ p_{y(3-4)}^{(e)} \\ p_{x(3-4)}^{(e)} \\ p_{y(3-4)}^{(e)} \\ 0 \end{bmatrix} + t^{(e)} b \begin{bmatrix} p_{x(1-4)}^{(e)} \\ p_{y(1-4)}^{(e)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_{x(1-4)}^{(e)} \\ p_{y(1-4)}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (6.95)$$

Por otro lado, el vector de fuerzas nodales equivalentes de cuerpo de un elemento rectangular bilineal es de la forma:

$$\mathbf{f}_b^{(e)} = \int_{A^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{b}_{(e)} t^{(e)} dA = \int_{A^{(e)}} \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} \\ \hline N_2^{(e)} & 0 \\ 0 & N_2^{(e)} \\ \hline N_3^{(e)} & 0 \\ 0 & N_3^{(e)} \\ \hline N_4^{(e)} & 0 \\ 0 & N_4^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x^{(e)} \\ b_y^{(e)} \end{bmatrix} t^{(e)} dA \quad (6.96)$$

donde $\mathbf{b}_{(e)} = [b_x^{(e)} \quad b_y^{(e)}]^T$ es el vector de fuerzas distribuidas por unidad de volumen indicado en la Figura 6.12.

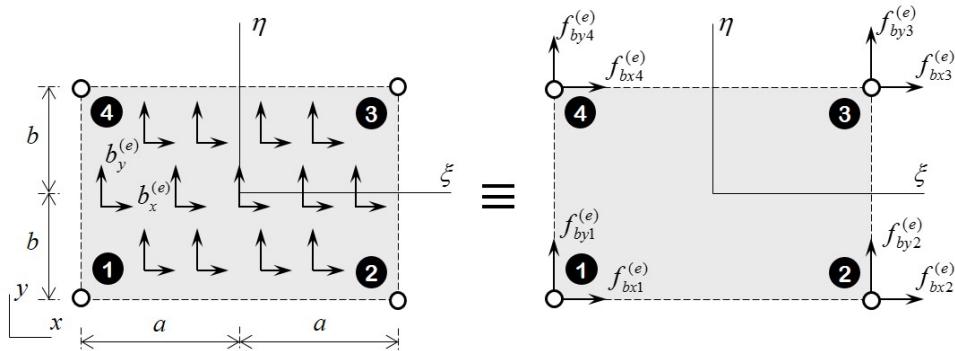


Figura 6.12: Elemento rectangular bilineal: fuerzas nodales equivalentes de cuerpo sobre el elemento.

Utilizando las submatrices de las funciones de forma por nudo, la ecuación anterior se puede expresar como:

$$\mathbf{f}_b^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{b1}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{b2}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{b3}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{b4}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{bi}^{(e)} = \int_{A^{(e)}} \mathbf{N}_i^{(e)T} \mathbf{b}_{(e)} t^{(e)} dA \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (6.97)$$

La integral en el área de la función de forma del nudo i del elemento finito e presentada en la Ecuación (6.73), se puede evaluar en términos del sistema coordenado natural como:

$$\begin{aligned} \int_{A^{(e)}} N_i^{(e)} t^{(e)} dA &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_i^{(e)}(\xi, \eta) t^{(e)} ab d\xi d\eta \\ &= \frac{t^{(e)} ab}{4} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) d\xi d\eta = t^{(e)} ab \end{aligned} \quad (6.98)$$

Después de sustituir las integrales de las funciones de forma en el área del elemento

finito, se obtiene un vector de fuerzas nodales equivalentes de cuerpo de la forma:

$$\mathbf{f}_b^{(e)} = \begin{bmatrix} f_{bx1}^{(e)} \\ f_{by1}^{(e)} \\ f_{bx2}^{(e)} \\ f_{by2}^{(e)} \\ f_{bx3}^{(e)} \\ f_{by3}^{(e)} \\ f_{bx4}^{(e)} \\ f_{by4}^{(e)} \end{bmatrix} = t^{(e)} ab \begin{bmatrix} b_x^{(e)} \\ b_y^{(e)} \\ b_x^{(e)} \\ b_y^{(e)} \\ b_x^{(e)} \\ b_y^{(e)} \\ b_x^{(e)} \\ b_y^{(e)} \end{bmatrix} \quad (6.99)$$

6.4. Problemas propuestos

6.4.1. Vector de fuerzas equivalentes a la acción de una presión de variación lineal sobre una cara de un elemento triangular lineal

Obtener el vector de fuerzas equivalentes a la acción de una presión de variación lineal sobre la cara 2-3 de un elemento triangular lineal, de magnitud $p_{n3(2-3)}^{(e)}$ en el nudo 3 y $p_{n2(2-3)}^{(e)}$ en el nudo 2, como se indica en la Figura 6.13.

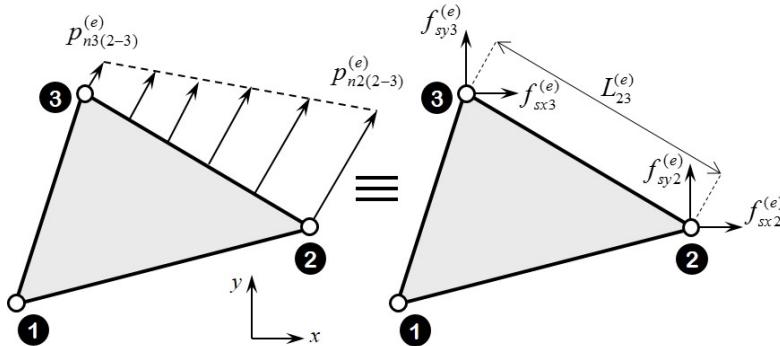


Figura 6.13: Elemento triangular lineal. Acciones equivalentes a una carga distribuida de variación lineal actuando sobre la cara 2-3.

6.4.2. Matriz de rigidez de una región rectangular formada por dos elementos triangulares lineales

Calcular la matriz de rigidez de una región rectangular de dimensiones $2a$ por $2b$, formada por dos elementos triangulares lineales, dispuestos de dos formas distintas como lo indica la Figura 6.14.

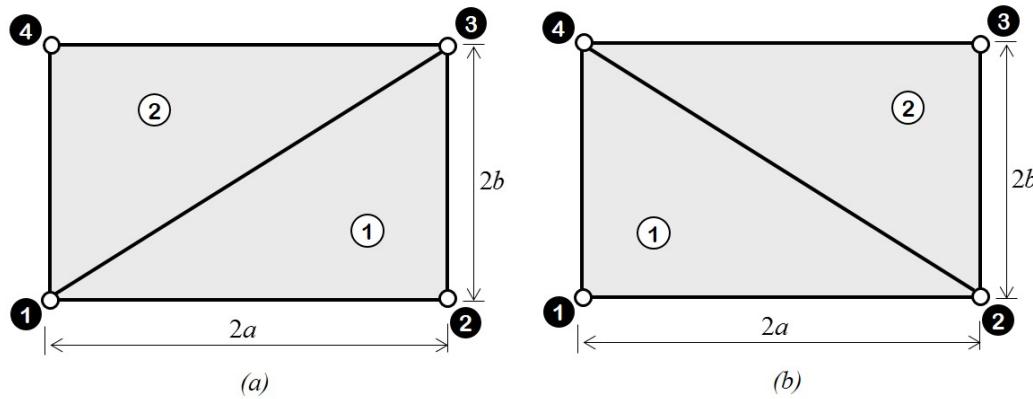


Figura 6.14: Región rectangular formada por dos elementos triangulares lineales: (a) primera configuración, (b) segunda configuración.

Comparar los dos resultados con la matriz de rigidez del elemento rectangular bilineal definida en el Apartado 6.3.4. Suponer que el material tiene un módulo de Young E y una relación de Poisson ν y que el problema se simplifica a una condición plana de deformaciones con espesor unitario.

Capítulo 7

Formulación del problema elástico lineal bidimensional mediante el método de los elementos finitos. Temas avanzados

Este capítulo presenta algunos temas avanzados acerca de la formulación del problema elástico lineal bidimensional mediante el método de los elementos finitos. En particular, se exponen algunas generalidades sobre los elementos de orden superior y los elementos isoparamétricos, como también se describe el elemento cuadrilateral bilineal isoparamétrico. Además, se tratan brevemente la intervención de los esfuerzos y las deformaciones iniciales, las técnicas de representación suave de la deformación y del esfuerzo y la calidad de la aproximación de los elementos rectangulares bilineales sometidos a flexión pura (Segerlind, 1984; Weaver & Johnson, 1984; Cook *et al.*, 2001; Reddy, 2005; Oñate, 2009).

7.1. Generalidades sobre los elementos finitos de orden superior

Existen elementos finitos definidos en el espacio bidimensional cuya función de aproximación de las componentes del desplazamiento es un polinomio de orden mayor que el lineal (K.J. Bathe, 1996; Oñate, 2009).

Los términos de los polinomios que representan a las funciones de aproximación se seleccionan utilizando el triángulo de Pascal (Figura 7.1(d)). En particular, el elemento triangular lineal, el elemento cuadrático y el elemento cúbico mostrados en la Figura 7.1 cuentan con funciones de aproximación de las componentes de desplazamiento polinómicas completas.

En el elemento triangular cuadrático las componentes del desplazamiento en di-

rección x y y se definen así:

$$u^{(e)}(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 \quad \forall(x, y) \in A^{(e)} \quad (7.1a)$$

$$v^{(e)}(x, y) = \alpha_7 + \alpha_8 x + \alpha_9 y + \alpha_{10} xy + \alpha_{11} x^2 + \alpha_{12} y^2 \quad \forall(x, y) \in A^{(e)} \quad (7.1b)$$

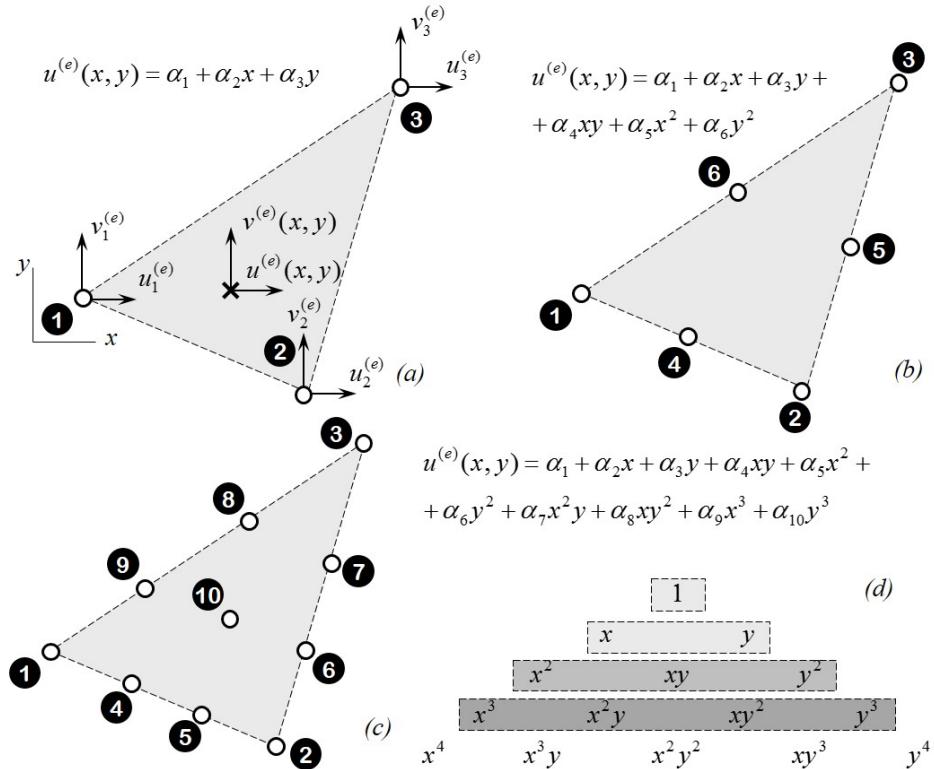


Figura 7.1: Algunos elementos finitos bidimensionales triangulares y la función de aproximación de una de las componentes del desplazamiento: (a) elemento lineal, (b) elemento cuadrático, (c) elemento cúbico y (d) el triángulo de Pascal.

Se establece que el elemento finito tiene 6 nudos con el fin de definir 6 valores nodales para la función de aproximación $u^{(e)}(x, y)$, correspondientes al desplazamiento en x en los nudos: $u_1^{(e)}, u_2^{(e)}, u_3^{(e)}, u_4^{(e)}, u_5^{(e)}$ y $u_6^{(e)}$, y 6 valores nodales para la función de aproximación $v^{(e)}(x, y)$, iguales al desplazamiento en y en los nudos: $v_1^{(e)}, v_2^{(e)}, v_3^{(e)}, v_4^{(e)}, v_5^{(e)}$ y $v_6^{(e)}$. Las coordenadas generalizadas se pueden sustituir por

los valores nodales en la función de aproximación de tal forma que:

$$\begin{aligned} u^{(e)}(x, y) = & N_1^{(e)}(x, y) u_1^{(e)} + N_2^{(e)}(x, y) u_2^{(e)} + N_3^{(e)}(x, y) u_3^{(e)} + \\ & + N_4^{(e)}(x, y) u_4^{(e)} + N_5^{(e)}(x, y) u_5^{(e)} + N_6^{(e)}(x, y) u_6^{(e)} \quad \forall(x, y) \in A^{(e)} \end{aligned} \quad (7.2a)$$

$$\begin{aligned} v^{(e)}(x, y) = & N_1^{(e)}(x, y) v_1^{(e)} + N_2^{(e)}(x, y) v_2^{(e)} + N_3^{(e)}(x, y) v_3^{(e)} + \\ & + N_4^{(e)}(x, y) v_4^{(e)} + N_5^{(e)}(x, y) v_5^{(e)} + N_6^{(e)}(x, y) v_6^{(e)} \quad \forall(x, y) \in A^{(e)} \end{aligned} \quad (7.2b)$$

donde las funciones de forma $N_i^{(e)}(x, y)$ del elemento serán polinomios de segundo orden en x y en y .

A partir de las coordenadas de área $L_1(x, y), L_2(x, y), L_3(x, y)$ definidas en la Ecuación (6.49) se establecen las funciones de forma del elemento triangular de 6 nudos como (Hutton, 2004):

$$\begin{aligned} N_1^{(e)}(x, y) &= L_1(2L_1 - 1), \quad N_2^{(e)}(x, y) = L_2(2L_2 - 1) \\ N_3^{(e)}(x, y) &= L_3(2L_3 - 1), \quad N_4^{(e)}(x, y) = 4L_1L_2 \\ N_5^{(e)}(x, y) &= 4L_2L_3, \quad N_6^{(e)}(x, y) = 4L_1L_3 \end{aligned} \quad (7.3)$$

Por otro lado, los elementos rectangulares: bilineal, de 9 nudos y de 16 nudos presenta-dos en la Figura 7.2, tienen funciones de aproximación del desplazamiento que son polinomios incompletos de orden 2, 3 y 4, respectivamente. Estos elementos hacen parte de la familia de Lagrange porque sus funciones de forma son productos entre funciones de interpolación unidimensional de Lagrange (Segerlind, 1984).

7.2. Generalidades sobre los elementos finitos isoparamétricos

Los elementos finitos isoparamétricos son aquellos de geometría definida por la interpolación de las coordenadas de los nudos, utilizando las mismas funciones de forma empleadas para la interpolación de las componentes de desplazamiento. Asimismo, las funciones de aproximación de las componentes de desplazamiento en sistema coordenado natural de un elemento isoparamétrico son iguales a las funciones $u^{(e)}(\xi, \eta)$ y $v^{(e)}(\xi, \eta)$ de su *elemento patrón o normalizado* (Weaver & Johnson, 1984; Oñate, 1995).

Si la geometría se obtiene a partir de una función de interpolación de un orden inferior a la función de aproximación del desplazamiento, el elemento finito se denomina *subparamétrico*. En cambio, si la función de la geometría es de orden superior a

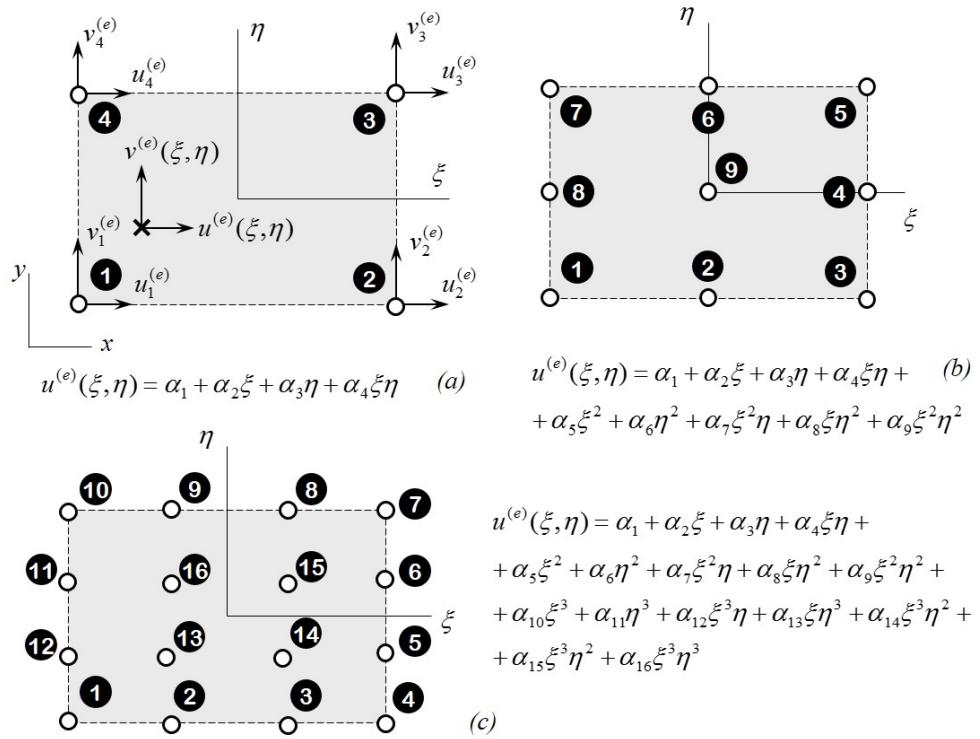


Figura 7.2: Algunos elementos finitos bidimensionales rectangulares de Lagrange y su función de aproximación de una de las componentes del desplazamiento: (a) elemento bilineal, (b) elemento de 9 nudos y (c) elemento de 16 nudos.

la función de aproximación del desplazamiento, el elemento finito se identifica como *superparamétrico* (O. C. Zienkiewicz *et al.*, 2005).

En la Figura 7.3(a) se muestra el elemento isoparamétrico cuadrilátero bilineal, generado a partir de la parametrización de un elemento patrón rectangular bilineal. En cambio, en la Figura 7.3(b) se ilustra el elemento isoparamétrico de 9 nudos obtenido del elemento patrón rectangular de igual número de nudos. Los lados del elemento isoparamétrico de 9 nudos son curvos debido a que las funciones de aproximación del desplazamiento en el elemento patrón son polinomios incompletos de segundo orden.

7.3. Elemento cuadrilátero bilineal isoparamétrico

Sea el elemento finito cuadrilátero bilineal isoparamétrico definido en un sistema coordenado natural con origen en el centro del elemento y con ejes ξ y η , como se

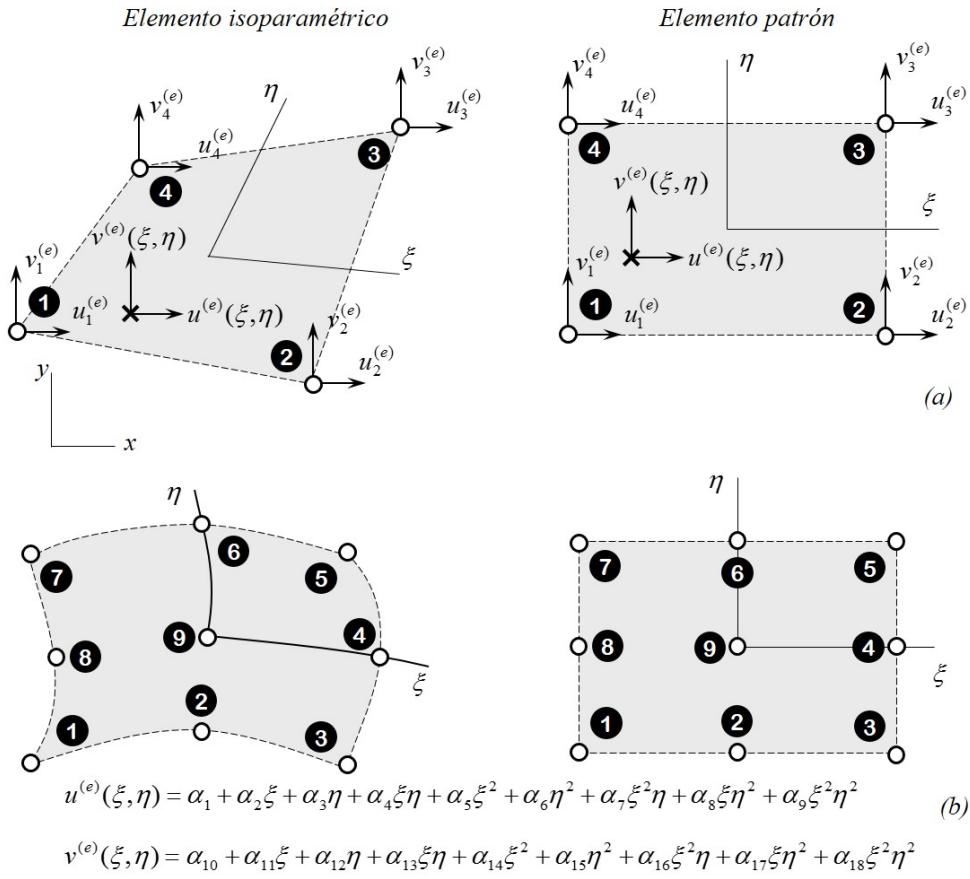


Figura 7.3: Algunos elementos finitos bidimensionales isoparamétricos y su elemento patrón: (a) elemento cuadrilateral lineal y (b) elemento isoparamétrico de 9 nudos.

muestra en la Figura 7.4. El elemento tiene 4 nudos ubicados en las esquinas, cuyas coordenadas en el sistema coordenado global son $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ y (x_4, y_4) y en el sistema coordenado natural corresponden a $(-1, -1), (+1, -1), (+1, +1)$ y $(-1, +1)$, respectivamente. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} & x^{(e)}(\xi, \eta) : \\ & x^{(e)}(-1, -1) = x_1^{(e)} \quad x^{(e)}(+1, -1) = x_2^{(e)} \quad x^{(e)}(+1, +1) = x_3^{(e)} \quad x^{(e)}(-1, +1) = x_4^{(e)} \\ & y^{(e)}(\xi, \eta) : \\ & y^{(e)}(-1, -1) = y_1^{(e)} \quad y^{(e)}(+1, -1) = y_2^{(e)} \quad y^{(e)}(+1, +1) = y_3^{(e)} \quad y^{(e)}(-1, +1) = y_4^{(e)} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Se escogió una numeración anti-horaria de los nudos del elemento comenzando por el nudo ubicado en el extremo inferior izquierdo. Este tipo de numeración asegura

que el determinante de la matriz jacobiano, calculado más adelante, sea positivo.

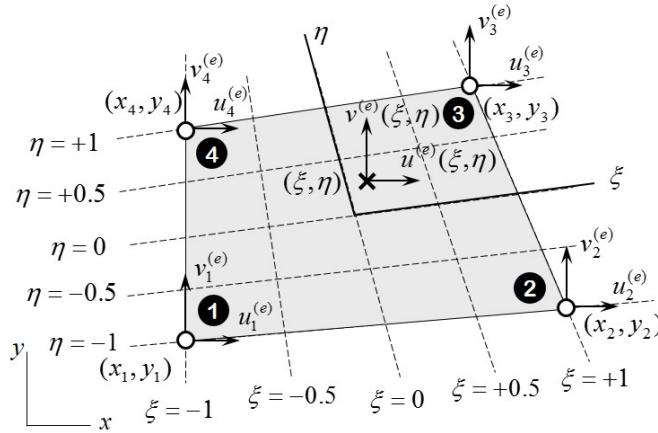


Figura 7.4: Elemento cuadrilátero bilineal isoparamétrico. Esquema general: desplazamientos nodales, coordenadas globales de los nudos y coordenadas naturales de un punto en el interior del elemento.

7.3.1. Geometría del elemento finito

La posición de un punto en el interior del elemento en coordenadas globales (x, y) se obtiene de la interpolación de las coordenadas de sus nudos:

$$\begin{aligned} x^{(e)}(\xi, \eta) &= N_1^{(e)} x_1^{(e)} + N_2^{(e)} x_2^{(e)} + N_3^{(e)} x_3^{(e)} + N_4^{(e)} x_4^{(e)} \\ y^{(e)}(\xi, \eta) &= N_1^{(e)} y_1^{(e)} + N_2^{(e)} y_2^{(e)} + N_3^{(e)} y_3^{(e)} + N_4^{(e)} y_4^{(e)} \end{aligned} \quad (7.5)$$

siendo $N_i^{(e)}(\xi, \eta)$ las funciones de forma en coordenadas naturales del elemento finito patrón rectangular bilineal, las cuales se indican en la Ecuación (6.64) o en la Ecuación (6.73). Las dos ecuaciones escalares anteriores se pueden expresar de forma matricial de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} x^{(e)} & y^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & N_2^{(e)} & N_3^{(e)} & N_4^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(e)} & y_1^{(e)} \\ x_2^{(e)} & y_2^{(e)} \\ x_3^{(e)} & y_3^{(e)} \\ x_4^{(e)} & y_4^{(e)} \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

La matriz fila a la izquierda de la igualdad $\mathbf{x}_{(e)} = [x^{(e)} \ y^{(e)}]$ contiene la posición de un punto en sistema coordenado global. La matriz de coordenadas de los nudos de elemento $\mathbf{c}_{(e)}$ y la matriz reducida de funciones de forma $\hat{\mathbf{N}}_{(e)}$ se definen como:

$$\mathbf{c}_{(e)} = \begin{bmatrix} x_1^{(e)} & y_1^{(e)} \\ x_2^{(e)} & y_2^{(e)} \\ x_3^{(e)} & y_3^{(e)} \\ x_4^{(e)} & y_4^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{N}}_{(e)} = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & N_2^{(e)} & N_3^{(e)} & N_4^{(e)} \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{x}_{(e)} = \hat{\mathbf{N}}_{(e)} \mathbf{c}_{(e)} \quad (7.8)$$

7.3.2. Funciones de aproximación y funciones de forma

Los desplazamientos sobre los nudos del elemento están definidos como $u_1^{(e)}, u_2^{(e)}, u_3^{(e)}, u_4^{(e)}$ en la dirección x y $v_1^{(e)}, v_2^{(e)}, v_3^{(e)}, v_4^{(e)}$ en la dirección y , como se indica en la Figura 7.4. Estos desplazamientos nodales representan los 8 grados de libertad del elemento finito.

Las componentes de desplazamiento en un punto ubicado en la coordenada natural (ξ, η) se obtienen mediante las funciones de aproximación expresadas en la Ecuación (6.63). Las funciones de forma son las mismas del elemento patrón indicadas en la Ecuación (6.64). Por lo tanto, la forma matricial de expresar las dos funciones de aproximación de las componentes del desplazamiento es:

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}_{(e)} \mathbf{a}_{(e)} \quad (7.9)$$

donde la matriz de funciones de forma $\mathbf{N}_{(e)}$, el vector de valores nodales de desplazamiento $\mathbf{a}_{(e)}$ y el vector de desplazamientos en el interior del elemento $\mathbf{u}_{(e)}$ están definidos en las ecuaciones (6.65), (6.66) y (6.67), respectivamente.

7.3.3. Matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma

El desplazamiento en dirección x en el interior del elemento es función de las coordenadas naturales que a su vez es función de las coordenadas globales. En consecuencia, las primeras derivadas de $u^{(e)}$ con respecto a ξ y η aplicando la regla de la cadena

son iguales a:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^{(e)}}{\partial \xi} &= \frac{\partial u^{(e)}}{\partial x^{(e)}} \frac{\partial x^{(e)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(e)}}{\partial y^{(e)}} \frac{\partial y^{(e)}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u^{(e)}}{\partial \eta} &= \frac{\partial u^{(e)}}{\partial x^{(e)}} \frac{\partial x^{(e)}}{\partial \eta} + \frac{\partial u^{(e)}}{\partial y^{(e)}} \frac{\partial y^{(e)}}{\partial \eta}\end{aligned}\quad (7.10)$$

Esta ecuación se puede expresar matricialmente de la forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u^{(e)}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u^{(e)}}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^{(e)}}{\partial \xi} & \frac{\partial y^{(e)}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x^{(e)}}{\partial \eta} & \frac{\partial y^{(e)}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial u^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{(e)} \begin{bmatrix} \frac{\partial u^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial u^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

La matriz cuadrada de tamaño 2 que premultiplica a las derivadas del desplazamiento con respecto a las coordenadas globales $\mathbf{J}_{(e)}$ es la *matriz jacobiano del elemento* y sus componentes son:

$$\mathbf{J}_{(e)} = \begin{bmatrix} J_{11}^{(e)} & J_{12}^{(e)} \\ J_{21}^{(e)} & J_{22}^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^{(e)}}{\partial \xi} & \frac{\partial y^{(e)}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x^{(e)}}{\partial \eta} & \frac{\partial y^{(e)}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

Derivando las coordenadas globales presentadas en la Ecuación (7.5) con respecto a las coordenadas naturales se tiene:

$$\begin{aligned}J_{11}^{(e)} &= \frac{\partial x^{(e)}}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial \xi} x_1^{(e)} + \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial \xi} x_2^{(e)} + \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial \xi} x_3^{(e)} + \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial \xi} x_4^{(e)} \\ J_{21}^{(e)} &= \frac{\partial x^{(e)}}{\partial \eta} = \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial \eta} x_1^{(e)} + \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial \eta} x_2^{(e)} + \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial \eta} x_3^{(e)} + \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial \eta} x_4^{(e)} \\ J_{12}^{(e)} &= \frac{\partial y^{(e)}}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial \xi} y_1^{(e)} + \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial \xi} y_2^{(e)} + \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial \xi} y_3^{(e)} + \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial \xi} y_4^{(e)} \\ J_{22}^{(e)} &= \frac{\partial y^{(e)}}{\partial \eta} = \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial \eta} y_1^{(e)} + \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial \eta} y_2^{(e)} + \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial \eta} y_3^{(e)} + \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial \eta} y_4^{(e)}\end{aligned}\quad (7.13)$$

Por lo tanto, la matriz jacobiano se obtiene escribiendo de forma matricial a las cuatro expresiones anteriores, así:

$$\mathbf{J}_{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^{(e)}}{\partial \xi} & \frac{\partial y^{(e)}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x^{(e)}}{\partial \eta} & \frac{\partial y^{(e)}}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(e)} & y_1^{(e)} \\ x_2^{(e)} & y_2^{(e)} \\ x_3^{(e)} & y_3^{(e)} \\ x_4^{(e)} & y_4^{(e)} \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

o de la forma:

$$\mathbf{J}_{(e)} = \hat{\mathbf{B}}_{(e)} \mathbf{c}_{(e)} \quad (7.15)$$

Siendo $\hat{\mathbf{B}}_{(e)}$ la matriz *reducida* de operadores diferenciales en coordenadas naturales actuando sobre funciones de forma,

$$\hat{\mathbf{B}}_{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

Las derivadas de las funciones de forma con respecto a las coordenadas naturales de la expresión anterior son las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial \xi} &= -\frac{1}{4}(1-\eta), & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial \eta} &= -\frac{1}{4}(1-\xi) \\ \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}(1-\eta), & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial \eta} &= -\frac{1}{4}(1+\xi) \\ \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}(1+\eta), & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}(1+\xi) \\ \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial \xi} &= -\frac{1}{4}(1+\eta), & \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}(1-\xi) \end{aligned} \quad (7.17)$$

En consecuencia,

$$\hat{\mathbf{B}}_{(e)} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

Una forma alternativa de expresar los coeficientes de la matriz Jacobiano de un elemento cuadrilateral bilineal isoparamétrico es:

$$\begin{aligned} J_{11}^{(e)} &= \frac{1}{4} \left(-(1-\eta)x_1^{(e)} + (1-\eta)x_2^{(e)} + (1+\eta)x_3^{(e)} - (1+\eta)x_4^{(e)} \right) \\ J_{21}^{(e)} &= \frac{1}{4} \left(-(1-\xi)x_1^{(e)} - (1+\xi)x_2^{(e)} + (1+\xi)x_3^{(e)} + (1-\xi)x_4^{(e)} \right) \\ J_{12}^{(e)} &= \frac{1}{4} \left(-(1-\eta)y_1^{(e)} + (1-\eta)y_2^{(e)} + (1+\eta)y_3^{(e)} - (1+\eta)y_4^{(e)} \right) \\ J_{22}^{(e)} &= \frac{1}{4} \left(-(1-\xi)y_1^{(e)} - (1+\xi)y_2^{(e)} + (1+\xi)y_3^{(e)} + (1-\xi)y_4^{(e)} \right) \end{aligned} \quad (7.19)$$

Asimismo, derivando la función de forma de un nudo cualquiera i expresada en

la Ecuación (6.73), se obtienen tales coeficientes de la forma:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc} & i & \xi_i & \eta_i \\ \hline & 1 & -1 & -1 \\ & 2 & +1 & -1 \\ & 3 & +1 & +1 \\ \hline & 4 & -1 & +1 \end{array} \\
 \begin{array}{ll} J_{11}^{(e)} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \xi_i (1 + \eta_i \eta) x_i^{(e)} & J_{12}^{(e)} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \xi_i (1 + \eta_i \eta) y_i^{(e)} \\ J_{21}^{(e)} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \eta_i (1 + \xi_i \xi) x_i^{(e)} & J_{22}^{(e)} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \eta_i (1 + \xi_i \xi) y_i^{(e)} \end{array} \end{array} \quad (7.20)$$

Por otro lado, al despejar la matriz columna con las derivadas del desplazamiento con respecto a las coordenadas globales se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial u^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{(e)}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u^{(e)}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u^{(e)}}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}_{(e)}} \begin{bmatrix} J_{22}^{(e)} & -J_{12}^{(e)} \\ -J_{21}^{(e)} & J_{11}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u^{(e)}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u^{(e)}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

Recordando que $\det \mathbf{J}_{(e)} = J_{11}^{(e)} J_{22}^{(e)} - J_{12}^{(e)} J_{21}^{(e)}$. De la misma forma, las derivadas del desplazamiento $v^{(e)}$ en el interior del elemento con respecto a las coordenadas globales se pueden expresar como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial v^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{(e)}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial v^{(e)}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v^{(e)}}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}_{(e)}} \begin{bmatrix} J_{22}^{(e)} & -J_{12}^{(e)} \\ -J_{21}^{(e)} & J_{11}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial v^{(e)}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v^{(e)}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

Las componentes de la deformación corresponden a derivadas de las componentes del desplazamiento con respecto a coordenadas globales, que se pueden expresar en términos de derivadas naturales de $u^{(e)}$ y $v^{(e)}$ de acuerdo a las dos ecuaciones anteriores, así:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(e)} \\ \varepsilon_{yy}^{(e)} \\ \gamma_{xy}^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial v^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial u^{(e)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(e)}}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}_{(e)}} \begin{bmatrix} J_{22}^{(e)} & -J_{12}^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21}^{(e)} & J_{11}^{(e)} \\ -J_{21}^{(e)} & J_{11}^{(e)} & J_{22}^{(e)} & -J_{12}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u^{(e)}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u^{(e)}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v^{(e)}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v^{(e)}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

Es decir,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(e)} = \mathbf{G}_{(e)} \tilde{\nabla} \mathbf{u}_{(e)} \quad (7.24)$$

$$\mathbf{G}_{(e)} = \frac{1}{\det \mathbf{J}_{(e)}} \begin{bmatrix} J_{22}^{(e)} & -J_{12}^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21}^{(e)} & J_{11}^{(e)} \\ -J_{21}^{(e)} & J_{11}^{(e)} & J_{22}^{(e)} & -J_{12}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (7.25)$$

$$\det \mathbf{J}_{(e)} = J_{11}^{(e)} J_{22}^{(e)} - J_{12}^{(e)} J_{21}^{(e)}$$

$$\tilde{\nabla} \mathbf{u}_{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(e)} \\ v^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u^{(e)}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u^{(e)}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v^{(e)}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v^{(e)}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

En las ecuaciones anteriores $\mathbf{G}_{(e)}$ se denomina *matriz de parametrización geométrica* y $\tilde{\nabla} \mathbf{u}_{(e)}$ contiene las derivadas de las componentes de desplazamiento con respecto a las coordenadas naturales. A partir de la Ecuación (6.63), tales derivadas se pueden expresar en términos de las funciones de forma así:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{(e)}}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial \xi} u_1^{(e)} + \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial \xi} u_2^{(e)} + \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial \xi} u_3^{(e)} + \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial \xi} u_4^{(e)} \\ \frac{\partial u^{(e)}}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial \eta} u_1^{(e)} + \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial \eta} u_2^{(e)} + \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial \eta} u_3^{(e)} + \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial \eta} u_4^{(e)} \\ \frac{\partial v^{(e)}}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial \xi} v_1^{(e)} + \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial \xi} v_2^{(e)} + \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial \xi} v_3^{(e)} + \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial \xi} v_4^{(e)} \\ \frac{\partial v^{(e)}}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial \eta} v_1^{(e)} + \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial \eta} v_2^{(e)} + \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial \eta} v_3^{(e)} + \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial \eta} v_4^{(e)} \end{aligned} \quad (7.27)$$

o matricialmente de la forma:

$$\tilde{\nabla} \mathbf{u}_{(e)} = \tilde{\mathbf{B}}_{(e)} \mathbf{a}_{(e)} \quad (7.28)$$

En la ecuación anterior $\tilde{\mathbf{B}}_{(e)}$ es la matriz de operadores diferenciales en coordenadas naturales actuando sobre funciones de forma, expresada como:

$$\tilde{\mathbf{B}}_{(e)} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial \xi} & 0 \\ \hline \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial \xi} \end{array} \right] \quad (7.29)$$

Los coeficientes de la matriz anterior se obtienen derivando las funciones de forma indicadas en la Ecuación (6.64) con respecto a las coordenadas naturales, como se indica en la Ecuación (7.17). Por lo tanto la matriz $\tilde{\mathbf{B}}_{(e)}$ es igual a:

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) & 0 \\ -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) & 0 \\ 0 & -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) \\ 0 & -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

Sustituyendo la Ecuación (7.28) en la Ecuación (7.24) se obtiene la siguiente expresión del vector de la deformación en función del vector de desplazamientos nodales del elemento:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(e)} = \mathbf{G}_{(e)} \tilde{\mathbf{B}}_{(e)} \mathbf{a}_{(e)} = \mathbf{B}_{(e)} \mathbf{a}_{(e)} \quad (7.31)$$

Por lo tanto, el operador diferencial en coordenadas globales actuando sobre las funciones de forma es igual a:

$$\mathbf{B}_{(e)} = \mathbf{G}_{(e)} \tilde{\mathbf{B}}_{(e)} \quad (7.32)$$

El procedimiento para calcular la matriz en un punto en el interior del elemento de coordenadas naturales se resume en el algoritmo presentado en la Tabla 6.1.

Entrada: Coordenada del punto (ξ, η) , Matriz de coordenadas de los nudos $\mathbf{c}_{(e)}$ Ecuación (7.7)

Calcular $\hat{\mathbf{B}}_{(e)}(\xi, \eta)$ Ecuación (7.18)

Calcular $\mathbf{J}_{(e)}(\xi, \eta) = \hat{\mathbf{B}}_{(e)}(\xi, \eta) \mathbf{c}_{(e)}$ Ecuación (7.15)

Calcular $\det \mathbf{J}_{(e)} = J_{11}^{(e)} J_{22}^{(e)} - J_{12}^{(e)} J_{21}^{(e)}$

Calcular $\mathbf{G}_{(e)}(J_{11}^{(e)}, J_{22}^{(e)}, J_{12}^{(e)}, J_{21}^{(e)})$ Ecuación (7.25)

Calcular $\tilde{\mathbf{B}}_{(e)}(\xi, \eta)$ Ecuación (7.30)

Calcular $\mathbf{B}_{(e)}(\xi, \eta) = \mathbf{G}_{(e)}(\xi, \eta) \tilde{\mathbf{B}}_{(e)}(\xi, \eta)$ Ecuación (7.32)

Salida: $\mathbf{B}_{(e)}(\xi, \eta), \det \mathbf{J}_{(e)}(\xi, \eta)$

Tabla 7.1: Algoritmo para calcular el determinante de la matriz Jacobiano y la matriz de operadores diferenciales en coordenadas globales actuando sobre las funciones de forma.

7.3.4. Matriz de rigidez

La matriz de rigidez de un elemento cuadrilateral lineal se puede obtener a partir de la Ecuación (5.11), transformando al diferencial de área $dA = dx dy$ en $\det \mathbf{J}_{(e)} d\xi d\eta$ (Kreysig, 1983) y considerando los límites de integración entre -1 y $+1$. Por lo tanto,

$$\mathbf{K}^{(e)} = \iint \mathbf{B}_{(e)}^T \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_{(e)} t^{(e)} dx dy = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_{(e)}^T \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_{(e)} t^{(e)} \det \mathbf{J}_{(e)} d\xi d\eta \quad (7.33)$$

Dado que el resultado de $\mathbf{B}_{(e)}^T \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_{(e)} \det \mathbf{J}_{(e)}$, siendo $\mathbf{B}^{(e)} = \mathbf{G}_{(e)} \tilde{\mathbf{B}}^{(e)}$, es una función en términos de ξ y de η difícil de integrar, se recurre al método numérico de la *Cuadratura de Gauss* (Antia, 2002), el cual obtiene aproximadamente a la integral a partir de la sumatoria ponderada de la función evaluada en puntos especiales, denominados *puntos de integración*. El total de puntos de integración escogidos determina la aproximación al valor exacto de la integral.

Sea $f(\xi)$ una función continua en términos de la coordenada natural ξ y limitada en -1 y $+1$, la integral definida $\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi$ es aproximadamente igual a $\sum_{p=1}^{np} W(\xi_p) f(\xi_p)$, siendo np el total de puntos de integración, ξ_p la ubicación del punto de integración p y $W(\xi_p)$ su respectivo factor de ponderación o peso. En la Tabla 6.2 se indica la ubicación de los puntos de integración y sus respectivos pesos, cuando se aproxima una integral en ξ con 1, 2 o 3 puntos de integración. Asimismo, la Figura 7.5 representa la integral de la función $f(\xi)$ como el área bajo la curva calculada mediante el método de integración numérica de cuadratura de Gauss, considerando 1,2 y 3 puntos de integración.

np	p	ξ_p	$W(\xi_p)$
1	1	0.0	2.0
2	1	$-\sqrt{3}/3 = -0.57735027$	1.0
	2	$+\sqrt{3}/3 = +0.57735027$	1.0
3	1	0.0	$8/9 = 0.88888889$
	2	$-\sqrt{(3/5)} = -0.77459667$	$5/9 = 0.55555556$
	3	$+\sqrt{(3/5)} = +0.77459667$	$5/9 = 0.55555556$

Tabla 7.2: Puntos de integración y ponderaciones en el método de integración numérica de cuadratura de Gauss.

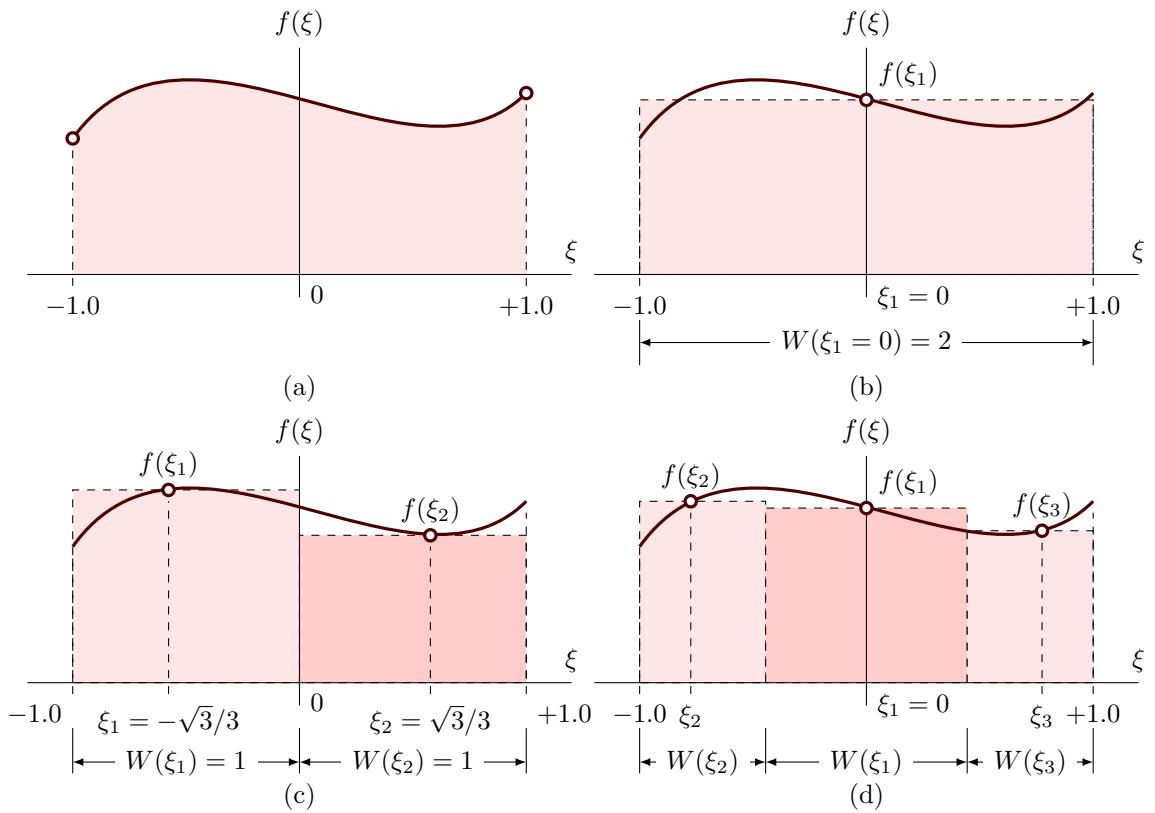


Figura 7.5: Integral de una función $f(\xi)$ para $-1 < \xi < +1$ representada como el área bajo la curva calculada: (a) de forma analítica con solución exacta, y (b), (c) y (d) mediante integración numérica utilizando 1,2 y 3 puntos de Gauss, respectivamente.

En cambio, la integral doble de una función $h(\xi, \eta)$, definida en coordenadas naturales ξ y de η y limitada entre -1 y $+1$, es aproximadamente igual a:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} h(\xi, \eta) d\xi d\eta \cong \sum_{p=1}^{np} \sum_{q=1}^{nq} W(\xi_p) W(\eta_q) h(\xi_p, \eta_q) \quad (7.34)$$

siendo nq el total de puntos de integración, η_q la ubicación del punto de integración q y $W(\eta_q)$ su respectivo peso. Los parámetros presentados en la Tabla 7.2 también pueden aplicarse en la integración numérica con respecto a η .

La doble sumatoria presentada en la ecuación anterior se puede reducir a una integral sencilla de np por nq puntos de integración en un espacio bidimensional de

la forma:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} h(\xi, \eta) d\xi d\eta \cong \sum_{g=1}^{ng} W(\xi_g)W(\eta_g)h(\xi_g, \eta_g) \quad (7.35)$$

donde cada punto de integración g está ubicado en una coordenada (ξ_g, η_g) y tiene una función de ponderación igual al producto $W(\xi_g)W(\eta_g)$. La Tabla 7.3 indica los respectivos parámetros cuando se aproxima la integral doble en ξ y η con 1, 4 o 9 puntos de integración.

$ng = np \times nq$	g	(ξ_g, η_g)	$W(\xi_g) \cdot W(\eta_g)$
1=1x1	1	(0, 0)	$2 \cdot 2 = 4$
4=2x2	1	($-\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3$)	$1 \cdot 1 = 1$
	2	($-\sqrt{3}/3, +\sqrt{3}/3$)	$1 \cdot 1 = 1$
	3	($+\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3$)	$1 \cdot 1 = 1$
	4	($+\sqrt{3}/3, +\sqrt{3}/3$)	$1 \cdot 1 = 1$
9=3x3	1	($-\sqrt{(3/5)}, -\sqrt{(3/5)}$)	$5/9 \cdot 5/9 = 25/81$
	2	(0, $-\sqrt{(3/5)}$)	$8/9 \cdot 5/9 = 40/81$
	3	($+\sqrt{(3/5)}, -\sqrt{(3/5)}$)	$5/9 \cdot 5/9 = 25/81$
	4	($-\sqrt{(3/5)}, 0$)	$5/9 \cdot 8/9 = 40/81$
	5	(0, 0)	$8/9 \cdot 8/9 = 64/81$
	6	($+\sqrt{(3/5)}, 0$)	$5/9 \cdot 8/9 = 40/81$
	7	($-\sqrt{(3/5)}, +\sqrt{(3/5)}$)	$5/9 \cdot 5/9 = 25/81$
	8	(0, $+\sqrt{(3/5)}$)	$8/9 \cdot 5/9 = 40/81$
	9	($+\sqrt{(3/5)}, +\sqrt{(3/5)}$)	$5/9 \cdot 5/9 = 25/81$

Tabla 7.3: Puntos de integración y ponderaciones en el método de integración numérica de cuadratura de Gauss, para una integral doble.

La Figura 7.6 ilustra la ubicación de los puntos de integración en un elemento cuadrilátero bilineal cuando se ha escogido 1, 2 y 3 puntos de integración por dimensión, es decir, un total de 1, 4 y 9 puntos de integración, respectivamente.

De acuerdo a lo anterior, la integral doble con respecto a ξ y a η mostrada en la Ecuación (7.33), que define a la matriz de rigidez del elemento cuadrilátero bilineal,

se puede calcular utilizando el método de la Cuadratura de Gauss, de la forma:

$$\mathbf{K}^{(e)} \cong \sum_{g=1}^{ng} W(\xi_g) W(\eta_g) \mathbf{B}_{(e)}^T(\xi_g, \eta_g) \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_{(e)}(\xi_g, \eta_g) t^{(e)} \det \mathbf{J}_{(e)}(\xi_g, \eta_g) \quad (7.36)$$

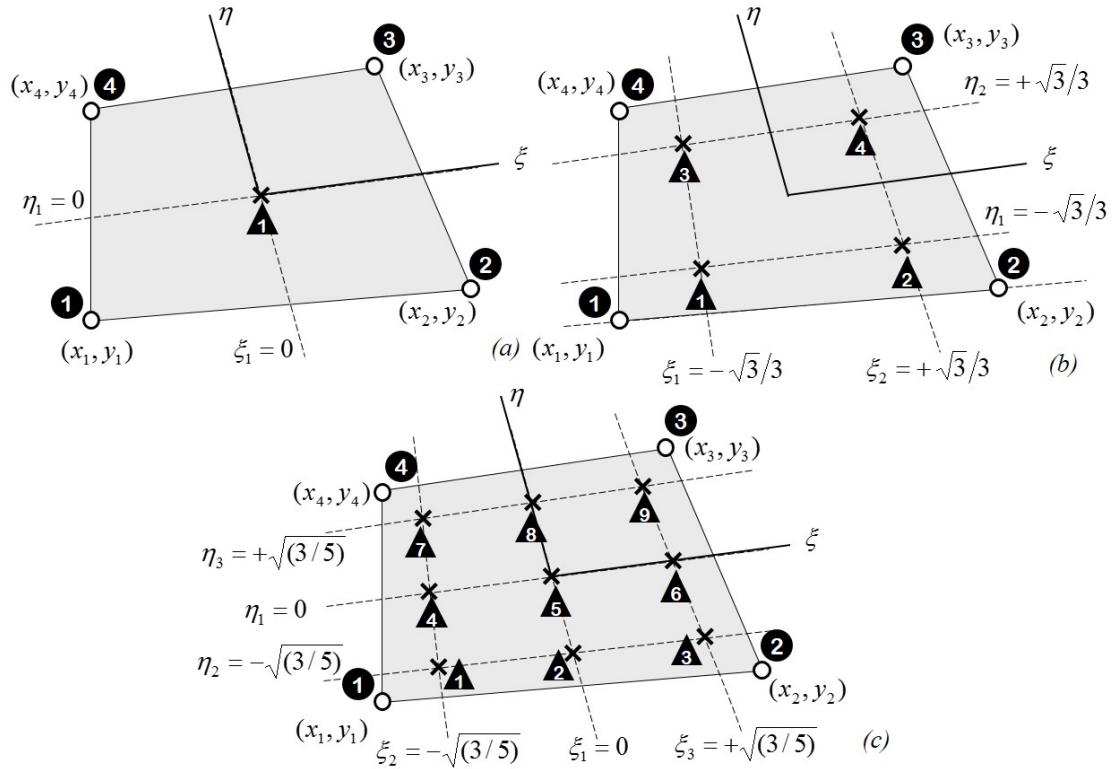


Figura 7.6: Elemento cuadrilátero bilineal isoparamétrico. Ubicación de los puntos de integración: (a) 1 punto de integración por dimensión, (b) 2 puntos de integración por dimensión y (c) 3 puntos de integración por dimensión.

El procedimiento para calcular la matriz de rigidez se resume en el algoritmo presentado en la Tabla 6.4.

Entrada: total de puntos de integración ng , matriz de coordenadas de los nudos $\mathbf{c}_{(e)}$, propiedades mecánicas del material E, ν , espesor $t^{(e)}$

Calcular $\mathbf{D}_{(e)}(E, \nu)$ Ecuaciones (6.8) a (6.10)

Ciclo $g = 1, ng$

Leer (ξ_g, η_g) y $W(\xi_g)W(\eta_g)$ **Tabla 7.3**

Calcular $\mathbf{B}_{(e)}(\mathbf{c}_{(e)}, \xi_g, \eta_g)$ y $\det \mathbf{J}_{(e)}(\mathbf{c}_{(e)}, \xi_g, \eta_g)$ Algoritmo **Tabla 7.1**

Calcular $\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)} + W(\xi_g)W(\eta_g)\mathbf{B}_{(e)}^T(\xi_g, \eta_g)\mathbf{D}_{(e)}\mathbf{B}_{(e)}(\xi_g, \eta_g)t^{(e)}\det \mathbf{J}_{(e)}(\xi_g, \eta_g)$

Fin del ciclo

Salida: Matriz de rigidez del elemento $\mathbf{K}^{(e)}$

Tabla 7.4: . Algoritmo para calcular la matriz de rigidez de un elemento cuadrilateral bilineal mediante integración numérica.

7.3.5. Presentación alternativa mediante submatrices por nudo

Una forma alternativa de expresar las matrices del elemento consiste en definir submatrices asociadas a cada uno de los nudos. La matriz de funciones de forma se puede expresar con la Ecuación (6.72), donde las funciones de forma $N_i^{(e)}$ se indican en la Ecuación (6.73).

El vector de desplazamientos nodales del elemento finito se puede expresar en términos de subvectores asociados a cada nudo como se expresa en la Ecuación (6.78).

La matriz de operadores diferenciales en coordenadas naturales actuando sobre las funciones de forma se reescribe así:

$$\tilde{\mathbf{B}}_{(e)} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1^{(e)} & \tilde{\mathbf{B}}_2^{(e)} & \tilde{\mathbf{B}}_3^{(e)} & \tilde{\mathbf{B}}_4^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (7.37)$$

donde las derivadas de la función de forma con respecto a ξ y a η son iguales a:

$$\frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi} = \frac{\xi_i}{4}(1 + \eta_i \eta) \quad , \quad \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \eta} = \frac{\eta_i}{4}(1 + \xi_i \xi) \quad (7.38)$$

Por lo tanto, la matriz de operadores diferenciales en coordenadas globales actuando sobre las funciones de forma en el nudo i y en el elemento e es:

$$\mathbf{B}_i^{(e)} = \mathbf{G}_{(e)} \tilde{\mathbf{B}}_i^{(e)} \quad \text{y} \quad \mathbf{B}_{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^{(e)} & \mathbf{B}_2^{(e)} & \mathbf{B}_3^{(e)} & \mathbf{B}_4^{(e)} \end{bmatrix}, \text{ respectivamente.} \quad (7.39)$$

La matriz de rigidez del elemento finito isoparamétrico cuadrilateral lineal $\mathbf{K}^{(e)}$ tambien se puede expresar en términos de submatrices por nudo de la forma:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{K}_{11}^{(e)} & \mathbf{K}_{12}^{(e)} & \mathbf{K}_{13}^{(e)} & \mathbf{K}_{14}^{(e)} \\ \hline & \mathbf{K}_{22}^{(e)} & \mathbf{K}_{23}^{(e)} & \mathbf{K}_{24}^{(e)} \\ \hline & & \mathbf{K}_{33}^{(e)} & \mathbf{K}_{34}^{(e)} \\ \hline & sim & & \mathbf{K}_{44}^{(e)} \end{array} \right] \quad (7.40)$$

Cada submatriz $\mathbf{K}_{ij}^{(e)}$ para $i, j = 1, 2, 3, 4$ es el resultado de la siguiente integral en el área del elemento, en la cual la matriz $\mathbf{B}_j^{(e)}$ está expresada en función de las coordenadas naturales. En consecuencia, la integral se define en el espacio de dichas coordenadas, transformando al diferencial de área $dA = dx dy$ en $\det \mathbf{J}_{(e)} d\xi d\eta$ y considerando los límites de integración entre -1 y $+1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ij}^{(e)} &= t^{(e)} \iint \mathbf{B}_i^{(e)T} \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_j^{(e)} dx dy = t^{(e)} \iint \tilde{\mathbf{B}}_i^{(e)T} \mathbf{G}_{(e)}^T \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{G}_{(e)} \tilde{\mathbf{B}}_j^{(e)} dx dy \\ \mathbf{K}_{ij}^{(e)} &= t^{(e)} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \tilde{\mathbf{B}}_i^{(e)T} \mathbf{G}_{(e)}^T \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{G}_{(e)} \tilde{\mathbf{B}}_j^{(e)} \det \mathbf{J}_{(e)} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (7.41)$$

La integral doble con respecto a ξ y a η se reemplaza por la doble sumatoria de la función $\tilde{\mathbf{B}}_i^{(e)T} \mathbf{G}_{(e)}^T \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{G}_{(e)} \tilde{\mathbf{B}}_j^{(e)} \det \mathbf{J}_{(e)}$ evaluada en la coordenada (ξ_p, η_q) multiplicada por las ponderaciones $W_p W_q = W(\xi_p) W(\eta_q)$, entre $p = 1$ y $p = np$ puntos de integración en ξ y entre $q = 1$ y $q = nq$ puntos de integración en η . Por lo tanto, la submatriz de rigidez se puede expresar de la forma:

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} \cong t^{(e)} \sum_{p=1}^{np} \sum_{q=1}^{nq} W_p W_q \tilde{\mathbf{B}}_i^{(e)T}(\xi_p, \eta_q) \mathbf{G}_{(e)}^T(\xi_p, \eta_q) \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{G}_{(e)}(\xi_p, \eta_q) \tilde{\mathbf{B}}_j^{(e)}(\xi_p, \eta_q) \det \mathbf{J}_{(e)}(\xi_p, \eta_q) \quad (7.42)$$

Las ecuaciones (7.43) y (7.44) resumen las matrices relacionadas con el cálculo

de $\mathbf{K}_{ij}^{(e)}$ evaluadas en un punto de integración (ξ_p, η_q) .

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{B}}_{(e)}(\xi_p, \eta_q) &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1 - \eta_q) & (1 - \eta_q) & (1 + \eta_q) & -(1 + \eta_q) \\ -(1 - \xi_p) & -(1 + \xi_p) & (1 + \xi_p) & (1 - \xi_p) \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_{(e)}(\xi_p, \eta_q) &= \hat{\mathbf{B}}_{(e)}(\xi_p, \eta_q) \mathbf{c}_{(e)} = \begin{bmatrix} J_{11}^{(e)} & J_{12}^{(e)} \\ J_{21}^{(e)} & J_{22}^{(e)} \end{bmatrix} \\ \det \mathbf{J}_{(e)} &= J_{11}^{(e)} J_{22}^{(e)} - J_{12}^{(e)} J_{21}^{(e)} \\ \mathbf{G}_{(e)}(\xi_p, \eta_q) &= \frac{1}{\det \mathbf{J}_{(e)}} \begin{bmatrix} J_{22}^{(e)} & -J_{12}^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21}^{(e)} & J_{11}^{(e)} \\ -J_{21}^{(e)} & J_{11}^{(e)} & J_{22}^{(e)} & -J_{12}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (7.43) \\ \tilde{\mathbf{B}}_r^{(e)}(\xi_p, \eta_q) &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \xi_r(1 + \eta_r \eta_q) & 0 \\ \eta_r(1 + \xi_r \xi_p) & 0 \\ 0 & \xi_r(1 + \eta_r \eta_q) \\ 0 & \eta_r(1 + \xi_r \xi_p) \end{bmatrix} \begin{array}{l} \hline r & \xi_r & \eta_r \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ 2 & +1 & -1 \\ 3 & +1 & +1 \\ 4 & -1 & +1 \end{array} \\ \text{para los nudos } r &= i \text{ o } r = j.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_r^{(e)}(\xi_p, \eta_q) &= \mathbf{G}_{(e)}(\xi_p, \eta_q) \tilde{\mathbf{B}}_r^{(e)}(\xi_p, \eta_q) = \begin{bmatrix} B_{r11}^{(e)} & 0 \\ 0 & B_{r22}^{(e)} \\ B_{r31}^{(e)} & B_{r32}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (7.44) \\ B_{r11}^{(e)} = B_{r32}^{(e)} &= \frac{1}{4 \det \mathbf{J}_{(e)}} (J_{22}^{(e)} \xi_r (1 + \eta_r \eta_q) - J_{12}^{(e)} \eta_r (1 + \xi_r \xi_p)) \\ B_{r22}^{(e)} = B_{r31}^{(e)} &= \frac{1}{4 \det \mathbf{J}_{(e)}} (-J_{21}^{(e)} \xi_r (1 + \eta_r \eta_q) + J_{11}^{(e)} \eta_r (1 + \xi_r \xi_p))\end{aligned}$$

Observación 7.3.1 La matriz de rigidez de un elemento cuadrilateral bilineal obtenida mediante la integración numérica con 4 puntos de integración es aproximadamente igual a la calculada con 9 puntos de integración. En consecuencia, se considera

suficiente que la integral asociada a la matriz de rigidez se evalúe con 4 puntos de integración.

7.3.6. Vector de fuerzas equivalentes a fuerzas de superficie y de cuerpo

Las fuerzas distribuidas por unidad de superficie o presiones están aplicadas en las caras del elemento finito, las cuales corresponden a segmentos rectos donde las coordenadas naturales adoptan un valor constante. Por ejemplo, en el lado 2 – 3 del elemento la coordenada $\xi = +1$ como se indica en la Figura 7.7(a).

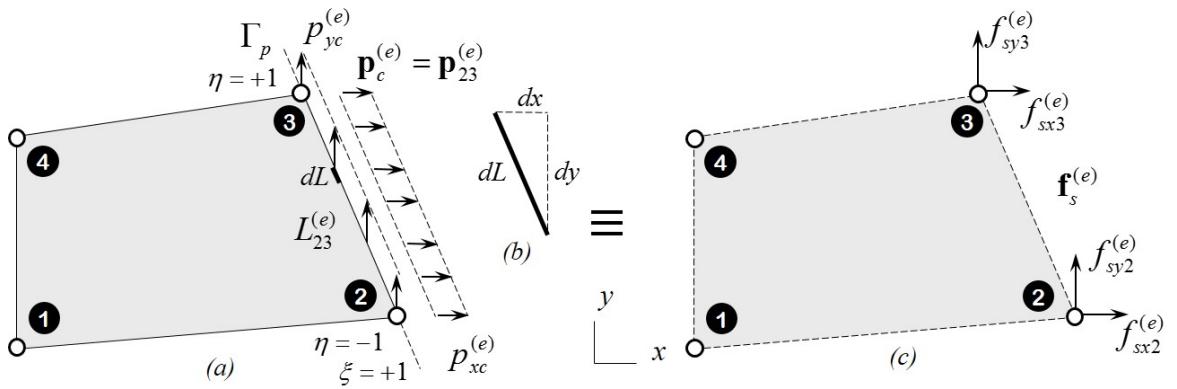


Figura 7.7: Elemento cuadrilátero bilineal isoparamétrico. Fuerzas nodales equivalentes a la acción de fuerzas de superficie sobre el lado (2-3) del elemento.

Siendo x y y funciones de ξ y de η , los diferenciales de posición en coordenadas globales dependen de los diferenciales en coordenadas naturales, así:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta = J_{11}^{(e)} d\xi + J_{21}^{(e)} d\eta \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta = J_{12}^{(e)} d\xi + J_{22}^{(e)} d\eta \end{aligned} \quad (7.45)$$

Cuando ξ es constante, como en el lado 2–3, la ecuación anterior se simplifica a:

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)_{\xi=1} \cdot d\eta = J_{21}^{(e)}(+1, \eta) d\eta, \quad dy = \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)_{\xi=1} \cdot d\eta = J_{22}^{(e)}(+1, \eta) d\eta \quad (7.46)$$

Si las componentes de la presión $p_{x2-3}^{(e)}$ en dirección x y $p_{y2-3}^{(e)}$ en dirección y se aplican sobre la cara 2–3 de un elemento cuadrilateral, como se ilustra en la Figura

7.7(a), el vector de fuerzas nodales equivalentes a la acción de tal presión es igual a:

$$\mathbf{f}_{s2-3}^{(e)} = \int_{L_{23}^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{p}_{2-3}^{(e)} t^{(e)} dL \quad (7.47)$$

donde la matriz de funciones de forma transpuesta $\mathbf{N}_{(e)}^T$ y el vector de fuerzas de superficie $\mathbf{p}_{2-3}^{(e)}$ sobre el lado 2–3 están expresados en la Ecuación (6.87).

El diferencial de longitud de la ecuación anterior se relaciona con los diferenciales de posición con respecto a las coordenadas globales y en consecuencia con respecto a las coordenadas naturales de la forma:

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(J_{21}^{(e)}(+1, \eta))^2 + (J_{22}^{(e)}(+1, \eta))^2} d\eta \quad (7.48)$$

El vector de fuerzas equivalentes se puede reescribir como:

$$\mathbf{f}_{s2-3}^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \mathbf{N}_{(e)}^T(+1, \eta) \mathbf{p}_{2-3}^{(e)} t^{(e)} \sqrt{(J_{21}^{(e)}(+1, \eta))^2 + (J_{22}^{(e)}(+1, \eta))^2} d\eta \quad (7.49)$$

Los coeficientes de la matriz jacobiano evaluados en la coordenada natural $(+1, \eta)$ mediante la Ecuación (7.19) y la raíz cuadrada indicada en la expresión anterior son iguales a:

$$\begin{aligned} J_{21}^{(e)}(+1, \eta) &= \frac{1}{4}(-x_2^{(e)} + x_3^{(e)}), & J_{22}^{(e)}(+1, \eta) &= \frac{1}{4}(-y_2^{(e)} + y_3^{(e)}) \\ \sqrt{(J_{21}^{(e)}(+1, \eta))^2 + (J_{22}^{(e)}(+1, \eta))^2} &= \frac{1}{2}\sqrt{(-x_2^{(e)} + x_3^{(e)})^2 + (-y_2^{(e)} + y_3^{(e)})^2} = \frac{L_{23}^{(e)}}{2} \end{aligned} \quad (7.50)$$

En consecuencia, las componentes del vector de fuerzas equivalentes a la acción de una presión sobre la cara 2–3 mostradas en la Figura 7.7(b) son:

$$\mathbf{f}_{s2-3}^{(e)} = \frac{L_{23}^{(e)} t^{(e)}}{2} \mathbf{p}_{2-3}^{(e)} \int_{-1}^{+1} \mathbf{N}_{(e)}^T(+1, \eta) d\eta = \frac{L_{23}^{(e)} t^{(e)}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x^{(e)} \\ p_y^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{L_{23}^{(e)} t^{(e)}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline p_x^{(e)(2-3)} \\ p_y^{(e)(2-3)} \\ \hline p_x^{(e)(2-3)} \\ p_y^{(e)(2-3)} \\ \hline 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.51)$$

El vector de fuerzas equivalentes a la acción de la presión sobre las otras tres caras del elemento se obtiene mediante un procedimiento similar al aplicado para la

cara 2–3, de tal forma que:

$$\mathbf{f}_{s(1-2)}^{(e)} = \frac{L_{12}^{(e)} t^{(e)}}{2} \begin{bmatrix} p_x^{(e)} \\ p_y^{(e)} \\ p_x^{(e)} \\ p_y^{(e)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{s(3-4)}^{(e)} = \frac{L_{34}^{(e)} t^{(e)}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_x^{(e)} \\ p_y^{(e)} \\ p_x^{(e)} \\ p_y^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{s(1-4)}^{(e)} = \frac{L_{14}^{(e)} t^{(e)}}{2} \begin{bmatrix} p_x^{(e)} \\ p_y^{(e)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_x^{(e)} \\ p_y^{(e)} \end{bmatrix} \quad (7.52)$$

$$\mathbf{f}_s^{(e)} = \mathbf{f}_{s(1-2)}^{(e)} + \mathbf{f}_{s(2-3)}^{(e)} + \mathbf{f}_{s(3-4)}^{(e)} + \mathbf{f}_{s(1-4)}^{(e)}$$

De la misma manera como se evaluó la integral de área asociada a la matriz de rigidez, se obtiene el vector de fuerzas nodales equivalentes a la acción de las fuerzas de cuerpo en un elemento cuadrilátero isoparamétrico, así:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_b^{(e)} &= \int_{A^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{b}_{(e)} t^{(e)} dA = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{b}_{(e)} t^{(e)} \det \mathbf{J}_{(e)} d\xi d\eta \\ \mathbf{f}_b^{(e)} &\cong t^{(e)} \sum_{p=1}^{np} \sum_{q=1}^{nq} W(\xi_p) W(\eta_q) \det \mathbf{J}_{(e)}(\xi_p, \eta_q) \mathbf{N}_{(e)}^T(\xi_p, \eta_q) \mathbf{b}_{(e)} \\ \mathbf{f}_b^{(e)} &\cong t^{(e)} \sum_{g=1}^{ng} W(\xi_g) W(\eta_g) \det \mathbf{J}_{(e)}(\xi_g, \eta_g) \mathbf{N}_{(e)}^T(\xi_g, \eta_g) \mathbf{b}_{(e)} \end{aligned} \quad (7.53)$$

siendo $\mathbf{b}_{(e)} = \begin{bmatrix} b_x^{(e)} & b_y^{(e)} \end{bmatrix}^T$ el vector de fuerzas distribuidas por unidad de volumen, indicado en la Figura 7.8.

El procedimiento para calcular el vector de fuerzas equivalentes a la acción de fuerzas de cuerpo de un elemento cuadrilátero bilineal se resume en el algoritmo presentado en la Tabla 6.4.

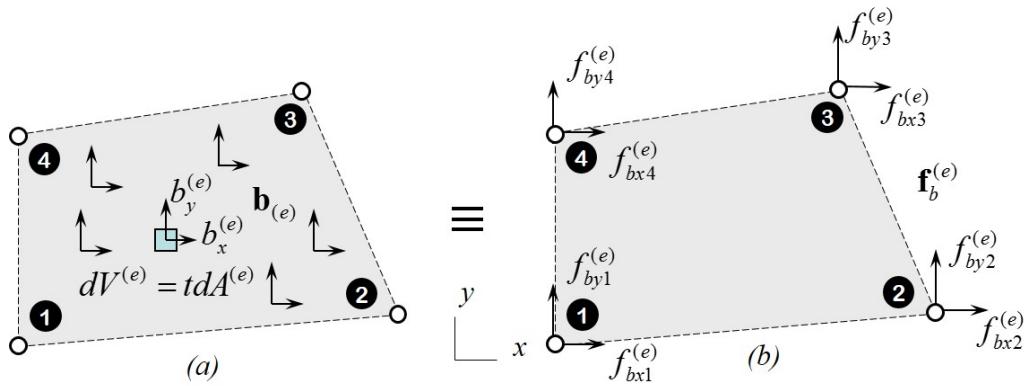


Figura 7.8: Elemento cuadrilátero bilineal isoparamétrico. Fuerzas nodales equivalentes a la acción de las fuerzas de cuerpo del elemento.

Entrada: total de puntos de integración ng , matriz de coordenadas de los nudos, vector de fuerzas de cuerpo $\mathbf{b}_{(e)}$, espesor $t^{(e)}$

Ciclo $g = 1, ng$

Leer (ξ_g, η_g) y $W(\xi_g)W(\eta_g)$ Tabla 7.3

Calcular $\mathbf{N}_{(e)}^T(\xi_g, \eta_g)$ Ecuaciones (6.64) y (6.65)

Calcular $\det \mathbf{J}_{(e)}(\mathbf{c}_{(e)}, \xi_g, \eta_g)$ Algoritmo 7.1

Calcular $\mathbf{f}_b^{(e)} = \mathbf{f}_b^{(e)} + W(\xi_g)W(\eta_g)\mathbf{N}_{(e)}^T(\xi_g, \eta_g)\mathbf{b}_{(e)} t^{(e)} \det \mathbf{J}_{(e)}(\xi_g, \eta_g)$

Fin del ciclo

Salida: vector fuerzas equivalentes a la acción de fuerzas de cuerpo $\mathbf{f}_b^{(e)}$

Tabla 7.5: Algoritmo para calcular el vector fuerzas equivalentes a la acción de fuerzas de cuerpo de un elemento cuadrilátero bilineal mediante integración numérica.

7.4. Esfuerzos y deformaciones iniciales

En muchos problemas mecánicos unidimensionales el esfuerzo normal y la deformación longitudinal inicial son iguales a cero, como se indica en la Figura (7.9)a. En general, el esfuerzo y la deformación en la configuración inicial es igual a $\sigma^{(0)}$ y a $\varepsilon^{(0)}$, respectivamente, como lo muestra la Figura (7.9)(b).

Considerando un material lineal elástico que cumple con la Ley de Hooke, la

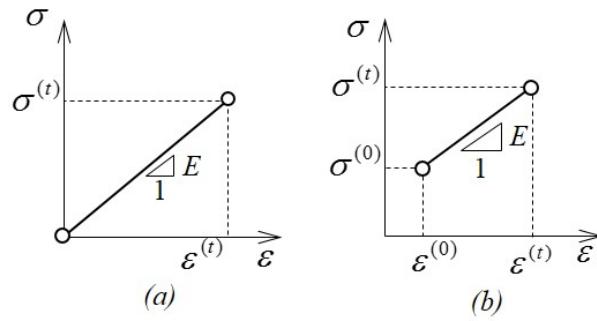


Figura 7.9: Relación uniaxial entre el esfuerzo y la deformación para el paso inicial y final de carga: (a) sin esfuerzo y deformación inicial y (b) con esfuerzo y deformación inicial.

relación entre el esfuerzo y la deformación es lineal, con una pendiente igual al módulo de Young del material E, definida como:

$$E = \frac{\sigma^{(t)} - \sigma^{(0)}}{\varepsilon^{(t)} - \varepsilon^{(0)}}$$

donde $\sigma^{(t)}$ y $\varepsilon^{(t)}$ es el esfuerzo y la deformación en la configuración final, respectivamente. Despejando $\sigma^{(t)}$ de la ecuación anterior, se obtiene:

$$\sigma^{(t)} = E(\varepsilon^{(t)} - \varepsilon^{(0)}) + \sigma^{(0)} \quad (7.54)$$

Extendiendo la ecuación anterior a un estado tridimensional de esfuerzos y deformaciones, se obtiene la ecuación constitutiva de un material lineal elástico isótropo incluyendo la matriz columna del esfuerzo inicial σ^0 y de la deformación inicial ϵ^0 , así:

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon^0) + \sigma^0 \quad (7.55)$$

donde \mathbf{D} es la matriz constitutiva elástica indicada en la Ecuación (2.22) y las componentes de $\boldsymbol{\epsilon}^0$ y de $\boldsymbol{\sigma}^0$ son:

$$\boldsymbol{\sigma}^0 = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^0 & \sigma_{yy}^0 & \sigma_{zz}^0 & \sigma_{xy}^0 & \sigma_{xz}^0 & \sigma_{yz}^0 \end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 & \varepsilon_{yy}^0 & \varepsilon_{zz}^0 & \varepsilon_{xy}^0 & \varepsilon_{xz}^0 & \varepsilon_{yz}^0 \end{bmatrix}^T \quad (7.56)$$

Se observa que se mantiene la proporcionalidad entre el esfuerzo y la deformación mecánica dada por la diferencia entre la deformación final y la deformación inicial.

Asimismo, la relación entre el esfuerzo y la deformación en el interior de un elemento finito e , cuyos esfuerzos y deformaciones iniciales son constantes, es de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma}_{(e)}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}_{(e)}(\boldsymbol{\varepsilon}_{(e)}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}_{(e)}^0) + \boldsymbol{\sigma}_{(e)}^0 \quad \forall \mathbf{x} \in V^{(e)} \quad (7.57)$$

Sustituyendo la relación entre la deformación y el desplazamiento nodal presentada en la Ecuación (4.6) en la expresión anterior se tiene:

$$\boldsymbol{\sigma}_{(e)}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}_{(e)}\mathbf{B}_{(e)}(\mathbf{x})\mathbf{a}_{(e)} - \mathbf{D}_{(e)}\boldsymbol{\varepsilon}_{(e)}^0 + \boldsymbol{\sigma}_{(e)}^0 \quad \forall \mathbf{x} \in V^{(e)} \quad (7.58)$$

Remplazando la ecuación anterior y la Ecuación (5.10) en el Principio de los Trabajos Virtuales indicado en la Ecuación (5.1), se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^m \delta \mathbf{a}_{(e)}^T & \left(\int_{V^{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_{(e)} dV \right) \mathbf{a}_{(e)} = \\ & \sum_{e=1}^m \delta \mathbf{a}_{(e)}^T \left(\int_{\Gamma_t} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{P}_{(e)} dS + \int_{V^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{b}_{(e)} dV + \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T \mathbf{D}_{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}_{(e)}^0 dV - \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T \boldsymbol{\sigma}_{(e)}^0 dV \right) + \delta \mathbf{a}^T \mathbf{f}^{(n)} \end{aligned} \quad (7.59)$$

El término entre paréntesis a la izquierda de la igualdad anterior se define como la matriz de rigidez del elemento $\mathbf{K}^{(e)}$ mostrado en la Ecuación (4.12). En cambio, el término entre paréntesis a la derecha es el vector de fuerzas nodales equivalentes del elemento $\mathbf{f}^{(e)}$, el cual corresponde a la suma del vector de fuerzas nodales equivalentes de superficie $\mathbf{f}_s^{(e)}$, de cuerpo $\mathbf{f}_b^{(e)}$, de deformaciones iniciales $\mathbf{f}_\varepsilon^{(e)}$ y de esfuerzos iniciales $\mathbf{f}_\sigma^{(e)}$, como se indica en las siguientes ecuaciones.

$$\mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{f}_s^{(e)} + \mathbf{f}_b^{(e)} + \mathbf{f}_\varepsilon^{(e)} + \mathbf{f}_\sigma^{(e)} \quad (7.60)$$

$$\mathbf{f}_s^{(e)} = \int_{\Gamma^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{P}_{(e)} dS \quad (7.61)$$

$$\mathbf{f}_b^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{b}_{(e)} dV \quad (7.62)$$

$$\mathbf{f}_\varepsilon^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T \mathbf{D}_{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}_{(e)}^0 dV \quad (7.63)$$

$$\mathbf{f}_\sigma^{(e)} = - \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T \boldsymbol{\sigma}_{(e)}^0 dV \quad (7.64)$$

El resto de la formulación del método de los elementos finitos está expresado en las ecuaciones (5.14) a (5.22), considerando que el vector de fuerzas nodales equivalentes está dado en la Ecuación (7.60) y en las ecuaciones (7.61) a (7.64).

Los vectores de fuerzas nodales equivalentes obtenidos por deformaciones y por esfuerzos iniciales se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\mathbf{f}_\varepsilon^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\varepsilon 1}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{\varepsilon 2}^{(e)} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{\varepsilon n}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{\varepsilon i}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}_i^{(e)T} \mathbf{D}_{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}_{(e)}^0 dV \quad (i = 1, 2, \dots, 4) \quad (7.65)$$

$$\mathbf{f}_\sigma^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\sigma 1}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{\sigma 2}^{(e)} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{\sigma n}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{\sigma i}^{(e)} = - \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}_i^{(e)T} \boldsymbol{\sigma}_{(e)}^0 dV \quad (i = 1, 2, \dots, 4) \quad (7.66)$$

Adicionalmente a las acciones externas aplicadas, como las fuerzas puntuales, las fuerzas de superficie y las fuerzas de cuerpo, el sólido también podría estar sometido a esfuerzos y deformaciones iniciales, por ejemplo, los esfuerzos causados por el pretensionamiento o las deformaciones generadas por cambios de temperatura.

7.4.1. Esfuerzos y deformaciones iniciales en un elemento triangular lineal

Reemplazando en la Ecuación (7.65) la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma, presentada en la Ecuación (6.43), se obtiene el vector de fuerzas nodales equivalentes a la acción de las deformaciones iniciales para un

elemento triangular lineal de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\varepsilon^{(e)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\varepsilon 1}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{\varepsilon 2}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{\varepsilon 3}^{(e)} \end{bmatrix} \\ \mathbf{f}_{\varepsilon i}^{(e)} &= \int_{A^{(e)}} \frac{t^{(e)}}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_i & 0 & c_i \\ 0 & c_i & b_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11}^{(e)} & D_{12}^{(e)} & 0 \\ D_{12}^{(e)} & D_{11}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{0(e)} \\ \varepsilon_{yy}^{0(e)} \\ \gamma_{xy}^{0(e)} \end{bmatrix} dA \quad (7.67) \\ \mathbf{f}_{\varepsilon i}^{(e)} &= \frac{t^{(e)}}{2} \begin{bmatrix} b_i(D_{11}^{(e)} \varepsilon_{xx}^{0(e)} + D_{12}^{(e)} \varepsilon_{yy}^{0(e)}) + c_i D_{33}^{(e)} \gamma_{xy}^{0(e)} \\ c_i(D_{12}^{(e)} \varepsilon_{xx}^{0(e)} + D_{22}^{(e)} \varepsilon_{yy}^{0(e)}) + b_i D_{33}^{(e)} \gamma_{xy}^{0(e)} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

Asimismo, reemplazando la expresión (6.43) en la Ecuación (7.66) se establece que el vector de fuerzas nodales equivalentes a la acción de los esfuerzos iniciales del elemento triangular lineal es igual a:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\sigma^{(e)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\sigma 1}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{\sigma 2}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{\sigma 3}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{\sigma i}^{(e)} = - \int_{A^{(e)}} \frac{t^{(e)}}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_i & 0 & c_i \\ 0 & c_i & b_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{0(e)} \\ \sigma_{yy}^{0(e)} \\ \sigma_{xy}^{0(e)} \end{bmatrix} dA \quad (i = 1, 2, 3) \quad (7.68) \\ \mathbf{f}_{\sigma i}^{(e)} &= -\frac{t^{(e)}}{2} \begin{bmatrix} b_i \sigma_{xx}^{0(e)} + c_i \sigma_{xy}^{0(e)} \\ c_i \sigma_{yy}^{0(e)} + b_i \sigma_{xy}^{0(e)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

7.4.2. Esfuerzos y deformaciones iniciales en un elemento rectangular bilineal

El vector de fuerzas nodales equivalentes a la acción de las deformaciones iniciales para un elemento rectangular bilineal se obtiene sustituyendo la matriz de operadores

diferenciales indicada en la expresión (6.77) en la Ecuación (7.65), así:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\varepsilon^{(e)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\varepsilon 1}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{\varepsilon 2}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{\varepsilon 3}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{\varepsilon 4}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad h_i(\eta) = \xi_i b (1 + \eta_i \eta), \quad g_i(\xi) = \eta_i a (1 + \xi_i \xi) \\ \mathbf{f}_{\varepsilon i}^{(e)} &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{t^{(e)}}{4} \begin{bmatrix} h_i(\eta) & 0 & g_i(\xi) \\ 0 & g_i(\xi) & h_i(\eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11}^{(e)} & D_{12}^{(e)} & 0 \\ D_{12}^{(e)} & D_{22}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{0(e)} \\ \varepsilon_{yy}^{0(e)} \\ \gamma_{xy}^{0(e)} \end{bmatrix} d\xi d\eta \quad (7.69) \\ \mathbf{f}_{\varepsilon i}^{(e)} &= 2t^{(e)} \begin{bmatrix} \xi_i b(D_{11}^{(e)} \varepsilon_{xx}^{0(e)} + D_{12}^{(e)} \varepsilon_{yy}^{0(e)}) + \eta_i a D_{33}^{(e)} \gamma_{xy}^{0(e)} \\ \eta_i a (D_{12}^{(e)} \varepsilon_{xx}^{0(e)} + D_{22}^{(e)} \varepsilon_{yy}^{0(e)}) + \xi_i b D_{33}^{(e)} \gamma_{xy}^{0(e)} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

En cambio, el vector de fuerzas nodales equivalentes a la acción de los esfuerzos iniciales en este tipo de elemento se obtiene reemplazando la Ecuación (6.77) en la Ecuación (7.66), de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\sigma^{(e)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\sigma 1}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{\sigma 2}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{\sigma 3}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{\sigma 4}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad h_i(\eta) = \xi_i b (1 + \eta_i \eta) \quad , \quad g_i(\xi) = \eta_i a (1 + \xi_i \xi) \\ \mathbf{f}_{\sigma i}^{(e)} &= - \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{t^{(e)}}{4} \begin{bmatrix} h_i(\eta) & 0 & g_i(\xi) \\ 0 & g_i(\xi) & h_i(\eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{0(e)} \\ \sigma_{yy}^{0(e)} \\ \sigma_{xy}^{0(e)} \end{bmatrix} d\xi d\eta \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (7.70) \\ \mathbf{f}_{\sigma i}^{(e)} &= -2t^{(e)} \begin{bmatrix} \xi_i b \sigma_{xx}^{0(e)} + \eta_i a \sigma_{xy}^{0(e)} \\ \eta_i a \sigma_{yy}^{0(e)} + \xi_i b \sigma_{xy}^{0(e)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

7.4.3. Esfuerzos y deformaciones iniciales en un elemento cuadrilátero bilineal isoparamétrico

El vector de fuerzas nodales equivalentes a la acción de las deformaciones iniciales para un elemento cuadrilátero bilineal isoparamétrico es el resultado de sustituir en la Ecuación (7.65) a la matriz de operadores diferenciales definida en la Expresión (7.39), así:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_\varepsilon^{(e)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\varepsilon 1}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{\varepsilon 2}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{\varepsilon 3}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{\varepsilon 4}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{\varepsilon r}^{(e)} = t^{(e)} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \tilde{\mathbf{B}}_r^{(e)T} \mathbf{G}_{(e)}^T \mathbf{D}_{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}_{(e)}^0 \det \mathbf{J}_{(e)} d\xi d\eta \\
 \mathbf{f}_{\varepsilon i}^{(e)} &= t^{(e)} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \tilde{\mathbf{B}}_i^{(e)T} \bar{\mathbf{G}}_{(e)}^T \mathbf{D}_{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}_{(e)}^0 d\xi d\eta \quad (i = 1, 2, 3, 4) \\
 \mathbf{f}_{\varepsilon i}^{(e)} &\cong t^{(e)} \sum_{p=1}^{np} \sum_{q=1}^{nq} W_p W_q \tilde{\mathbf{B}}_i^{(e)T}(\xi_p, \eta_q) \bar{\mathbf{G}}_{(e)}^T(\xi_p, \eta_q) \mathbf{D}_{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}_{(e)}^0(\xi_p, \eta_q) \\
 \bar{\mathbf{G}}_{(e)}(\xi_p, \eta_q) &= \begin{bmatrix} J_{22}^{(e)} & -J_{12}^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21}^{(e)} & J_{11}^{(e)} \\ -J_{21}^{(e)} & J_{11}^{(e)} & J_{22}^{(e)} & -J_{12}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (7.71) \\
 \tilde{\mathbf{B}}_i^{(e)}(\xi_p, \eta_q) &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \xi_i(1 + \eta_i \eta_q) & 0 \\ \eta_i(1 + \xi_i \xi_p) & 0 \\ 0 & \xi_i(1 + \eta_i \eta_q) \\ 0 & \eta_i(1 + \xi_i \xi_p) \end{bmatrix} \begin{array}{c} r & \xi_i & \eta_i \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ 2 & +1 & -1 \\ 3 & +1 & +1 \\ 4 & -1 & +1 \end{array}
 \end{aligned}$$

En cambio, el vector de fuerzas nodales equivalentes a la acción de los esfuerzos iniciales en este tipo de elemento se obtiene reemplazando las expresiones (7.37) a

(7.39) en la Ecuación (7.66), de la forma:

$$\mathbf{f}_\sigma^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\sigma 1}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{\sigma 2}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{\sigma 3}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{\sigma 4}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{\sigma i}^{(e)} = -t^{(e)} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \tilde{\mathbf{B}}_i^{(e)T} \mathbf{G}_{(e)}^T \boldsymbol{\sigma}_{(e)}^0 \det \mathbf{J}_{(e)} d\xi d\eta$$

$$\mathbf{f}_{\sigma i}^{(e)} = -t^{(e)} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \tilde{\mathbf{B}}_i^{(e)T} \bar{\mathbf{G}}_{(e)}^T \boldsymbol{\sigma}_{(e)}^0 d\xi d\eta \quad (r = 1, 2, 3, 4)$$

$$\mathbf{f}_{\sigma i}^{(e)} \cong -t^{(e)} \sum_{p=1}^{np} \sum_{q=1}^{nq} W_p W_q \tilde{\mathbf{B}}_i^{(e)T}(\xi_p, \eta_q) \bar{\mathbf{G}}_{(e)}^T(\xi_p, \eta_q) \boldsymbol{\sigma}_{(e)}^0(\xi_p, \eta_q)$$
(7.72)

Observación 7.4.1 Los vectores de fuerzas nodales equivalentes a la acción de los esfuerzos y las deformaciones iniciales se calculan mediante integración numérica, lo cual permite considerar valores diferentes del esfuerzo o la deformación inicial en los puntos de integración.

7.4.3.1. Deformaciones causadas por el cambio de la temperatura

Sea el punto material P de la configuración de referencia de un sólido, cuyo entorno diferencial muestra tres líneas materiales de longitud dx , dy y dz , paralelas a los ejes coordenados x , y y z , respectivamente, como lo indica la Figura 2.1(b). Después de aplicado un incremento de la temperatura ΔT en P , se observa que cada línea material se alarga, generando una deformación longitudinal uniforme en las tres direcciones igual a $\varepsilon_{xx}^0 = \varepsilon_{yy}^0 = \varepsilon_{zz}^0 = \alpha \Delta T$, siendo α el coeficiente de expansión térmica en el régimen elástico del material. Dado que la ortogonalidad entre las líneas materiales se conserva en la configuración actual, las componentes de deformación angular son nulas. Por lo tanto, la matriz columna de la deformación inicial causada por un cambio de la temperatura en problemas tridimensionales es igual a:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \begin{bmatrix} \alpha \Delta T & \alpha \Delta T & \alpha \Delta T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$
(7.73)

Si el problema se puede simplificar a condición plana de esfuerzos o a condición plana de deformaciones, la matriz columna de la deformación inicial causada por cambio de la temperatura estará dada por la Ecuación (7.74) y por la Ecuación

(7.75), respectivamente.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 & \varepsilon_{yy}^0 & \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \alpha\Delta T & \alpha\Delta T & 0 \end{bmatrix}^T \quad (7.74)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 & \varepsilon_{yy}^0 & \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix}^T = (1 + \nu) \begin{bmatrix} \alpha\Delta T & \alpha\Delta T & 0 \end{bmatrix}^T \quad (7.75)$$

7.5. Técnicas de representación suave de la deformación y el esfuerzo

En los elementos finitos bidimensionales presentados en este capítulo, las funciones de aproximación son las componentes del desplazamiento en dirección x y y . Asimismo, sus valores nodales son exclusivamente dichos desplazamientos y en consecuencia el valor de las primeras derivadas de las componentes del desplazamiento en un punto material será diferente para cada uno de los elementos que comparten ese mismo nudo. Lo anterior clasifica a estos elementos finitos como *elementos de continuidad C_0* .

Las componentes de deformación y de esfuerzo están asociadas con las primeras derivadas de las componentes del desplazamiento y por lo tanto no muestran continuidad de tales resultados en cada nudo común a varios elementos finitos. Sin embargo, este error se reduce con el refinamiento de la malla.

7.5.1. Resultados elementales de la deformación o del esfuerzo

Las tres componentes de deformación y las tres componentes de esfuerzo contenidas en el plano xy se pueden calcular en un punto del interior de cada elemento finito, como lo indican las ecuaciones (6.5) y (6.6), respectivamente. Tales valores se denominan *resultados elementales de la deformación y del esfuerzo*.

Cada resultado elemental varía de forma suave y continua en el interior del elemento en términos de las derivadas de las funciones de forma con respecto a las coordenadas globales x y y . Sin embargo, los resultados elementales de dos o más elementos que comparten el mismo nudo serán distintos.

Algunos autores (O. C. Zienkiewicz *et al.*, 2005), han demostrado que los esfuerzos y las deformaciones obtenidas mediante el método de los elementos finitos corresponden a un ajuste por mínimos cuadrados ponderados de la solución exacta de los esfuerzos y las deformaciones. Por otro lado, a partir del ajuste por mínimos cuadrados de un polinomio de orden n se obtiene un polinomio de orden $n-1$, el cual adopta el mismo valor del polinomio de orden n en los puntos de integración de una

cuadratura de Gauss del mismo orden (Oñate, 1995). De acuerdo a lo anterior, las deformaciones y los esfuerzos evaluados en los puntos de integración de la cuadratura de Gauss tienen mayor exactitud que en los nudos del elemento.

Los resultados elementales en la posición ocupada por un nudo i de un elemento bidimensional e se pueden calcular de dos formas:

- Mediante la aplicación de las Ecuación (6.5) para obtener la deformación y la Ecuación (6.6) para obtener el esfuerzo, evaluadas directamente en la coordenada global (x_i, y_i) o en la coordenada natural (ξ_i, η_i) del nudo.
- Mediante la extrapolación bilineal de la deformación o del esfuerzo en un seudo – elemento, cuyos nudos corresponden a los puntos de integración de Gauss del elemento finito, como lo indica la Figura (7.10) para 4 puntos de integración en un elemento cuadrilateral bilineal isoparamétrico. Los valores nodales del seudo – elemento se obtienen aplicando las ecuaciones (6.5) y (6.6) evaluadas en las coordenadas naturales correspondientes a los puntos de integración de Gauss (ξ_p, η_q) .

Particularmente en elementos triangulares y rectangulares el resultado con cualquiera de las dos técnicas es el mismo o muy parecido, por lo cual es común utilizar la primera por su sencillez.

7.5.2. Extrapolación bilineal de la deformación o del esfuerzo en un seudo elemento de cuatro nudos en el interior de un elemento cuadrilateral

En la Figura 7.10 se ilustra al seudo – elemento e' de forma cuadrilateral, con sistema coordenado natural ξ', η' y conformado por los nudos $1', 2', 3'$ y $4'$, ubicados en los puntos de integración del elemento finito e . El sistema coordenado ξ', η' se relaciona con el sistema coordenado del elemento finito así:

$$\xi' = \xi\sqrt{3}, \quad \eta' = \eta\sqrt{3} \quad (7.76)$$

Cualquier componente de deformación o de esfuerzo $\beta(\xi', \eta')$ evaluada en la coordenada (ξ', η') puede obtenerse de la suma de productos entre las funciones de forma del seudo – elemento $N_i^{(e')}(\xi', \eta')$ y los valores de la componente de deformación o de esfuerzo en los puntos de integración $\beta_i^{(e')}$, de la forma:

$$|\beta(\xi', \eta')| = N_1^{(e')} \beta_1^{(e')} + N_2^{(e')} \beta_2^{(e')} + N_3^{(e')} \beta_3^{(e')} + N_4^{(e')} \beta_4^{(e')} \quad (7.77)$$

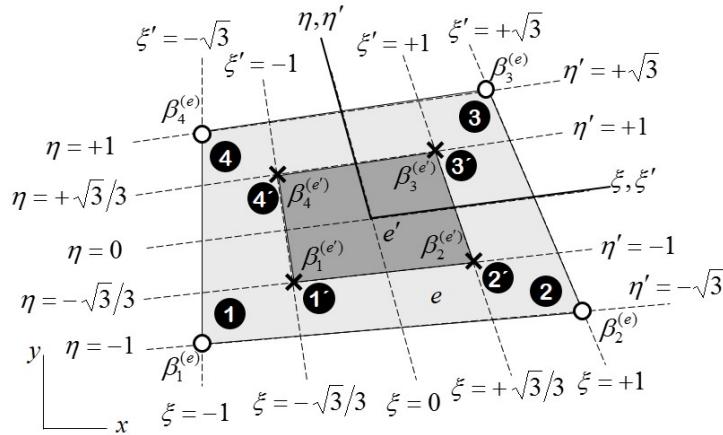


Figura 7.10: Seudo elemento de cuatro nudos en el interior de un elemento cuadrilátero bilineal isoparamétrico.

donde,

$$\begin{aligned} N_1^{(e')}(\xi', \eta') &= \frac{1}{4}(1 - \xi')(1 - \eta'), & N_2^{(e')}(\xi', \eta') &= \frac{1}{4}(1 + \xi')(1 - \eta') \\ N_3^{(e')}(\xi', \eta') &= \frac{1}{4}(1 + \xi')(1 + \eta'), & N_4^{(e')}(\xi', \eta') &= \frac{1}{4}(1 - \xi')(1 + \eta') \end{aligned} \quad (7.78)$$

Por ejemplo, una componente de deformación o de esfuerzo en el nudo 1 del elemento finito se obtiene de la extrapolación en $\xi' = \eta' = -\sqrt{3}$, así:

$$\beta_1^{(e)} = \beta(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = \frac{1}{4} \left((1 + \sqrt{3})^2 \beta_1^{(e')} - 2\beta_2^{(e')} + (1 - \sqrt{3})^2 \beta_3^{(e')} - 2\beta_4^{(e')} \right)$$

Repetiendo el procedimiento en los nudos 2, 3 y 4, se obtiene la siguiente expresión matricial que extrae a una componente de deformación o de esfuerzo en cada uno de los 4 nudos del elemento $\beta_i^{(e)}$, a partir de sus valores en los 4 puntos de integración $\beta_i^{(e')}$.

$$\begin{bmatrix} \beta_1^{(e)} \\ \beta_2^{(e)} \\ \beta_3^{(e)} \\ \beta_4^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1 + \sqrt{3})^2 & -2 & (1 - \sqrt{3})^2 & -2 \\ -2 & (1 + \sqrt{3})^2 & -2 & (1 - \sqrt{3})^2 \\ (1 - \sqrt{3})^2 & -2 & (1 + \sqrt{3})^2 & -2 \\ -2 & (1 - \sqrt{3})^2 & -2 & (1 + \sqrt{3})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1^{(e')} \\ \beta_2^{(e')} \\ \beta_3^{(e')} \\ \beta_4^{(e')} \end{bmatrix} \quad (7.79)$$

7.5.3. Resultados nodales promedio de la deformación o del esfuerzo

Una componente de la deformación o del esfuerzo evaluada en los nudos, mediante cualquiera de los métodos indicados en los apartados anteriores, exhibe un valor diferente al obtenido en sus elementos vecinos. Con el fin de representar de forma *continua aproximada* el valor de tales componentes se calcula un valor promedio en cada nudo y a partir de estos se interpola en el interior de cada elemento. Dicho valor se denomina *resultado nodal promedio* y el procedimiento para calcularlo es el siguiente:

- Identificar los elementos finitos que están asociados a un mismo nudo de la malla (y están definidos con el mismo material para el caso de evaluación de una componente de esfuerzo).
- Calcular una componente de la deformación o del esfuerzo en el nudo común n a varios elementos finitos $\beta_n^{(e)}$.
- Calcular el promedio β_n^{prom} entre los valores de $\beta_n^{(e)}$ en cada elemento (y que tienen el mismo material en el caso de componente de esfuerzo).
- Suponer que el promedio β_n^{prom} es un valor nodal y obtener a $\beta^{(e)}(\xi, \eta)$ en el interior de cada elemento mediante la interpolación dada por las funciones de forma.

Otras técnicas locales y globales que se describen en algunas referencias (K Bathe & Wilson, 1976; Oñate, 1995), están fuera del alcance de este libro.

7.6. Aproximación de los elementos bidimensionales lineales a flexión pura

Los elementos finitos triangular lineal y rectangular bilineal representan adecuadamente el comportamiento de sólidos sometidos a tracción o compresión uniforme. Sin embargo, en estructuras donde predomina la flexión, la precisión de tales elementos es baja, haciendo necesaria la utilización de mallas finas para representar el comportamiento.

De acuerdo con la teoría de vigas (Timoshenko & Goodier, 1970), las componentes del desplazamiento en una región rectangular de base $2a$ y altura $2b$ corresponden a:

$$u(\xi, \eta) = \frac{M}{EI} ab\xi\eta, \quad v(\xi, \eta) = \frac{Ma^2}{2EI} (1 - \xi^2) + \frac{Mb^2}{2EI} (1 - \eta^2) \quad (7.80)$$

siendo ξ y η las coordenadas en sistema coordenado natural cuyo origen corresponde con el centro del rectángulo. Como lo indica la Figura 7.11(a), el desplazamiento en dirección y varía de forma cuadrática con respecto a ξ y η . En cambio, un elemento finito rectangular de cuatro nudos conserva sus lados rectos cuando se deforma (Figura 7.11(b)), y por lo tanto las componentes de desplazamiento en flexión pura son:

$$u(r, s) = \bar{u}rs \quad , \quad v(r, s) = 0 \quad (7.81)$$

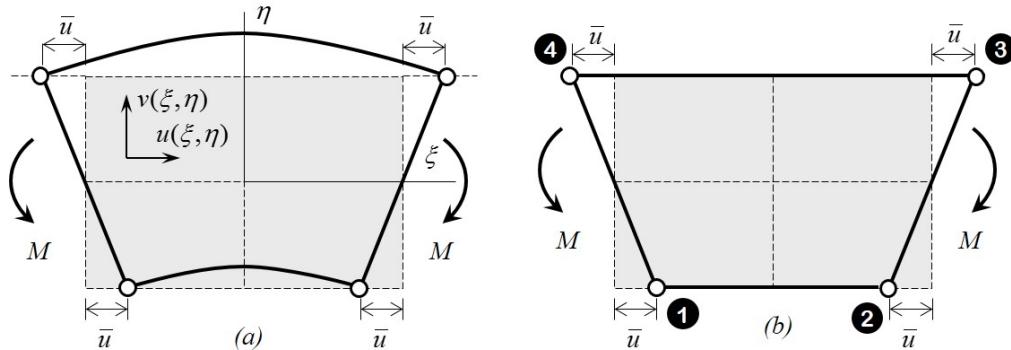


Figura 7.11: Región rectangular sometida a flexión pura: (a) deformada real, (b) deformada de un elemento finito rectangular bilineal.

Por otro lado, la deformación angular obtenida a partir de las derivadas del campo del desplazamiento exacto se obtiene de la forma:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \gamma_{xy} &= \frac{M}{EI} ab\xi \frac{1}{b} - \frac{Ma^2}{2EI} (2\xi) \frac{1}{a} = 0 \end{aligned} \quad (7.82)$$

El resultado anterior ratifica que el esfuerzo cortante $\sigma_{xy} = \gamma_{xy}E/2(1+\nu)$ en un estado de flexión pura es nulo. En cambio, la deformación angular calculada a partir de las componentes de desplazamiento en un elemento rectangular bilineal es igual a:

$$\gamma_{xy} = \frac{\bar{u}\xi}{a} \quad (7.83)$$

Lo anterior indica la existencia de una deformación angular ficticia en flexión pura, generando un aumento de la rigidez de la estructura. Sin embargo, los errores inducidos se reducen con mallas finas o con técnicas de adición de nudos intermedios e integración reducida (Oñate, 1995).

7.7. Problemas propuestos

Problema 7.7.1 *Propiedades de las funciones de forma del elemento triangular cuadrático.* Verificar las propiedades de las funciones de forma del elemento triangular cuadrático mostrado en la Figura 7.1(b) y expresadas en la Ecuación (7.3).

Problema 7.7.2 *Matriz de rigidez del elemento triangular cuadrático.* Las funciones de forma del elemento triangular cuadrático mostrado en la Figura 7.1(b) se indican en la Ecuación (7.3), en función de las coordenadas de área de un triángulo definidas en la Ecuación (6.49). Obtener los coeficientes de la matriz de rigidez del elemento triangular cuadrático, evaluando las integrales de las derivadas de las funciones de forma mediante la Ecuación (6.50).

Problema 7.7.3 *Matriz de rigidez de un elemento cuadrilátero bilineal.* Calcular la matriz de rigidez del elemento cuadrilátero bilineal mostrado en la Figura 7.12, integrando numéricamente con: uno, cuatro y nueve puntos de Gauss. Comparar los resultados obtenidos.

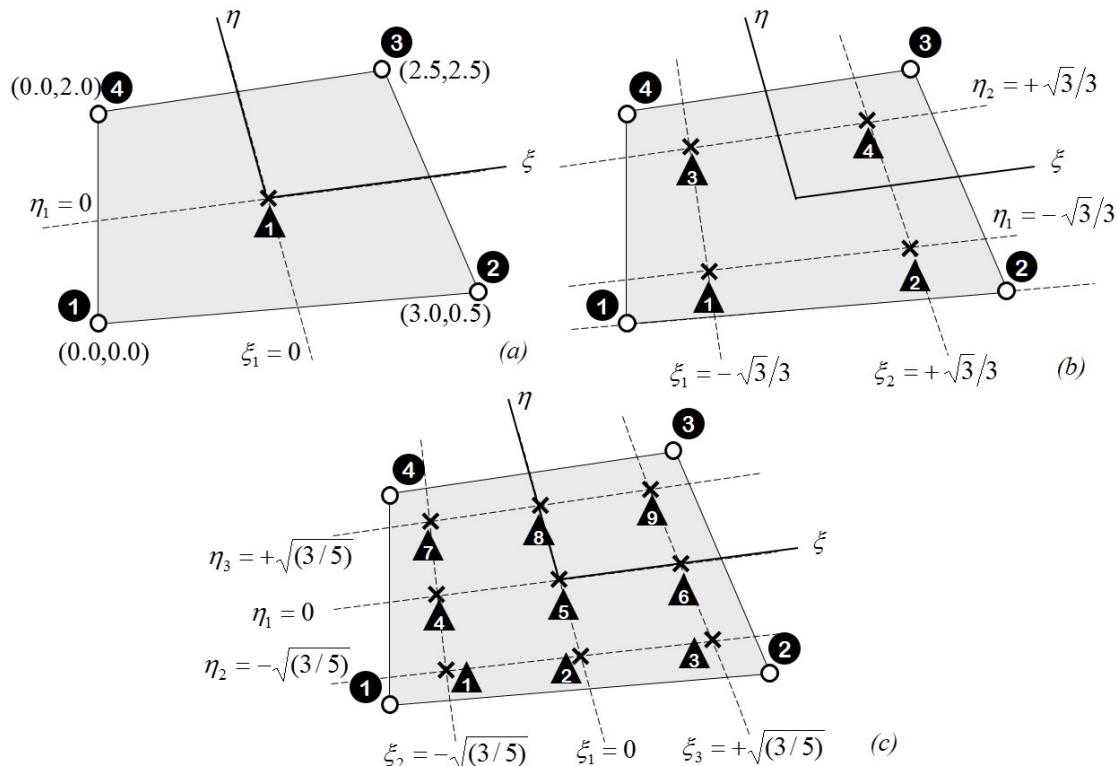


Figura 7.12: Elemento cuadrilateral bilineal: (a) un punto de Gauss, (b) cuatro puntos de Gauss, (c) nueve puntos de Gauss.

Capítulo 8

Ejemplos de aplicación del método de los elementos finitos a problemas bidimensionales de elasticidad

Este capítulo expone los resultados de la simulación numérica con el método de los elementos finitos de algunos problemas elásticos estáticos bidimensionales, basados en los conceptos presentados en los capítulos anteriores. Estas simulaciones se realizaron con el programa de elementos finitos a código abierto PEFiCA (Linero, 2009).

8.1. Lámina sometida a tracción

Una lámina de acero de sección transversal variable y espesor constante $t = 0.01\text{ m}$ está sometida a una presión uniforme $p = 1\,000\text{ kN/m}^2$ y a una carga puntual de 1 kN , como lo muestra la Figura 8.1(a). El material tiene un módulo de Young de $200 \times 10^6\text{ kN/m}^2$ y una relación de Poisson de 0.25.

Se establece una malla de 8 nudos, 4 elementos triangulares lineales y un elemento rectangular bilineal, como se indica en la Figura 8.1(b). La información de la malla se presenta en la tabla de coordenadas de los nudos Tabla 8.1(a) y la tabla de conectividades de los elementos (Tabla 8.2).

A partir de la identificación de los grados de libertad conocidos en los nudos 1 y 2, se establece la numeración de los grados de libertad por nudo o valores nodales mostrada en la Tabla 8.1(b) y en la Figura 8.1(c). Posteriormente, se construye la tabla de la numeración de los grados de libertad por elemento o tabla de incidencias (Tabla 8.3).

NUD	<i>x</i> (m)	<i>y</i> (m)	NUD	GLX	GLY
1	0.00	0.00	1	16	15
2	0.00	0.40	2	14	13
3	0.40	0.00	3	1	2
4	0.40	0.40	4	3	4
5	0.80	0.05	5	5	6
6	0.80	0.40	6	7	8
7	1.20	0.10	7	9	10
8	1.20	0.40	8	11	12

Tabla 8.1: Lámina sometida a tracción. (a) Columnas (1-3), Tabla de coordenadas de los nudos.(b)Columnas (4-6), Tabla de numeración de grados de libertad por nudo.

ELE	NEI	NEJ	NEK	NEL
1	001	003	004	002
2	003	006	004	000
3	003	005	006	000
4	005	008	006	000
5	005	007	008	000

Tabla 8.2: Lámina. Tabla de conectividades de los elementos.

ELE	XGI	YGI	XGJ	YGJ	XGK	YGK	XGL	YGL
1	016	015	001	002	003	004	014	013
2	001	002	007	008	003	004	000	000
3	001	002	005	006	007	008	000	000
4	005	006	011	012	007	008	000	000
5	005	006	009	010	011	012	000	000

Tabla 8.3: Lámina sometida a tracción. Tabla de incidencias.

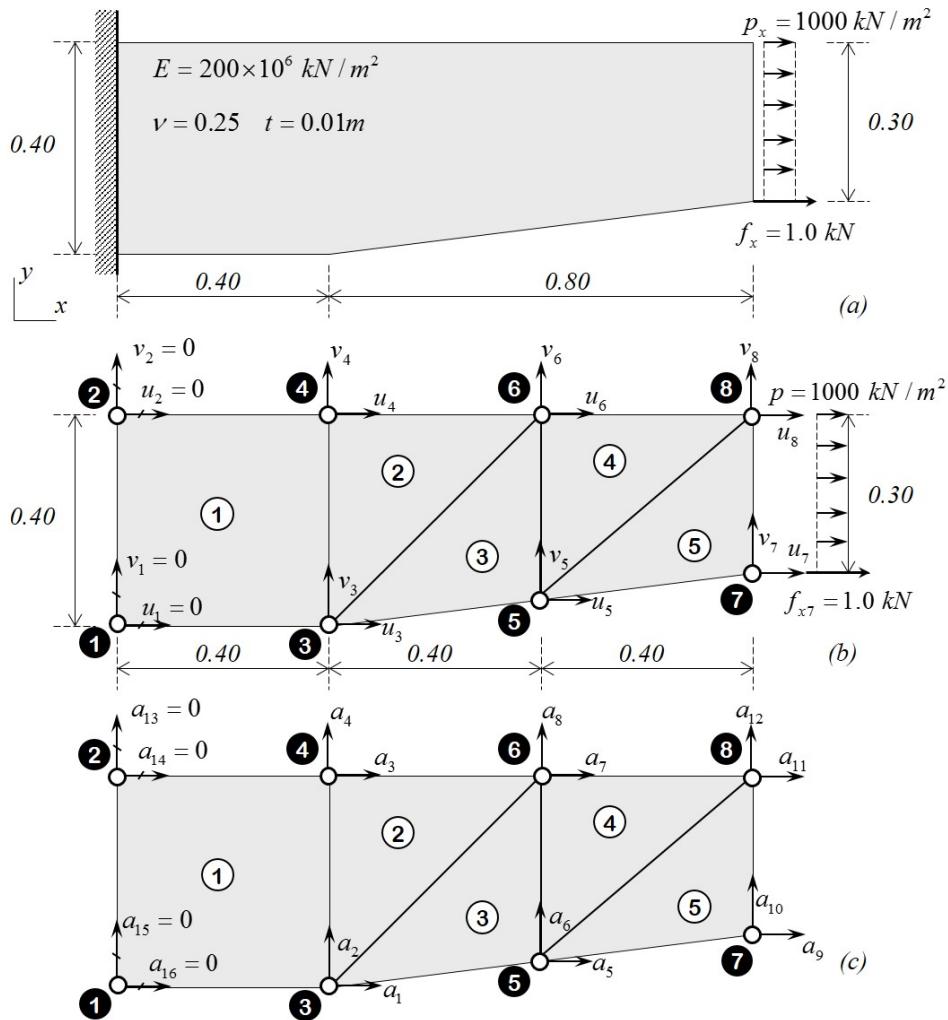


Figura 8.1: Lámina sometida a tracción: (a) geometría, cargas y condiciones de frontera, (b) malla de elementos finitos, (c) numeración de los valores nodales o grados de libertad en los nudos.

De acuerdo con la Ecuación (6.9) los coeficientes de la matriz constitutiva elástica para el problema en condición plana de esfuerzos son:

$$\begin{aligned} D_{11}^{(e)} &= D_{22}^{(e)} = \frac{E}{1 - \nu^2} = \frac{200 \times 10^6}{1 - 0.25^2} = 213.33 \times 10^6 \text{ kN/m}^2 \\ D_{12}^{(e)} &= \frac{\nu E}{1 - \nu^2} = \frac{0.25 \cdot 200 \times 10^6}{1 - 0.25^2} = 53.33 \times 10^6 \text{ kN/m}^2 \\ D_{33}^{(e)} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} = \frac{200 \times 10^6}{2(1 + 0.25)} = 80 \times 10^6 \text{ kN/m}^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz constitutiva elástica $\mathbf{D}^{(e)}$ en cualquiera de los elementos es igual a:

$$\mathbf{D}^{(e)} = \begin{bmatrix} 213.33 & 53.33 & 0.00 \\ 53.33 & 213.33 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 80.00 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{ kN/m}^2$$

La matriz de rigidez del elemento rectangular bilineal número 1 se puede calcular con la expresión (6.85) en kN/m, considerando que $a = b = 0.20 \text{ m}$, $t = 0.01 \text{ m}$, de la forma:

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} 977.78 & 333.33 & -577.78 & -66.67 & -488.89 & -333.33 & 88.89 & 66.67 \\ 333.33 & 977.78 & 66.67 & 88.89 & -333.33 & -488.89 & -66.67 & -577.78 \\ -577.78 & 66.67 & 977.78 & -333.33 & 88.89 & -66.67 & -488.89 & 333.33 \\ -66.67 & 88.89 & -333.33 & 977.78 & 66.67 & -577.78 & 333.33 & -488.89 \\ -488.89 & -333.33 & 88.89 & 66.67 & 977.78 & 333.33 & -577.78 & -66.67 \\ -333.33 & -488.89 & -66.67 & -577.78 & 333.33 & 977.78 & 66.67 & 88.89 \\ 88.89 & -66.67 & -488.89 & 333.33 & -577.78 & 66.67 & 977.78 & -333.33 \\ 66.67 & -577.78 & 333.33 & -488.89 & -66.67 & 88.89 & -333.33 & 977.78 \end{bmatrix} \times 10^3$$

Los parámetros geométricos del elemento triangular lineal número 2, el cual está definido por los nudos 3, 6 y 4, son los siguientes:

$$(x_3, y_3) = (0.40, 0.00) , \quad (x_6, y_6) = (0.80, 0.40) , \quad (x_4, y_4) = (0.40, 0.40)$$

$$b_1 = y_6 - y_4 = 0.00 \text{ m}, \quad c_1 = x_4 - x_6 = -0.40 \text{ m}$$

$$b_2 = y_4 - y_3 = 0.40 \text{ m}, \quad c_2 = x_3 - x_4 = 0.00 \text{ m}$$

$$b_3 = y_3 - y_6 = -0.40 \text{ m}, \quad c_3 = x_6 - x_3 = 0.40 \text{ m}$$

$$A^{(2)} = 0.080 \text{ m}^2$$

La matriz de rigidez para cada uno de los elementos triangulares lineales se obtiene de la Ecuación (6.7). En particular para el elemento 2 se tiene que la submatriz $\mathbf{K}_{11}^{(2)}$ es igual a:

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \frac{t}{4A^{(e)}} \begin{bmatrix} (b_i b_j D_{11}^{(e)} + c_i c_j D_{33}^{(e)}) & (b_i c_j D_{12}^{(e)} + c_i b_j D_{33}^{(e)}) \\ (c_i b_j D_{12}^{(e)} + b_i c_j D_{33}^{(e)}) & (b_i b_j D_{33}^{(e)} + c_i c_j D_{22}^{(e)}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{11}^{(e)} = \frac{0.01}{4 \cdot 0.080} \begin{bmatrix} (0 + 0.40^2 \cdot 80 \times 10^6) & 0 \\ 0 & (0 + 0.40^2 \cdot 213.33 \times 10^6) \end{bmatrix} \text{ kN/m}$$

De la misma forma se calculan las demás submatrices y se obtiene una matriz de rigidez del elemento 2 igual a:

$$\mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} 400 & 0 & 0 & -400 & -400 & 400 \\ 0 & 1067 & -267 & 0 & 267 & -1067 \\ 0 & -267 & 1067 & 0 & -1067 & 267 \\ -400 & 0 & 0 & 400 & 400 & -400 \\ -400 & 267 & -1067 & 400 & 1467 & -667 \\ 400 & -1067 & 267 & -400 & -667 & 1467 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ kN/m}$$

Asimismo, se obtienen las matrices de rigidez de los elementos 3, 4 y 5, presentadas a continuación:

$$\mathbf{K}^{(3)} = \begin{bmatrix} 933 & 0 & -1067 & 267 & 133 & -267 \\ 0 & 350 & 400 & -400 & -400 & 50 \\ -1067 & 400 & 1676 & -762 & -610 & 362 \\ 267 & -400 & -762 & 1676 & 495 & -1276 \\ 133 & -400 & -610 & 495 & 476 & -95 \\ -267 & 50 & 362 & -1276 & -95 & 1226 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ kN/m}$$

$$\mathbf{K}^{(4)} = \begin{bmatrix} 457 & 0 & 0 & -400 & -457 & 400 \\ 0 & 1219 & -267 & 0 & 267 & -1219 \\ 0 & -267 & 933 & 0 & -933 & 267 \\ -400 & 0 & 0 & 350 & 400 & -350 \\ -457 & 267 & -933 & 400 & 1390 & -667 \\ 400 & -1219 & 267 & -350 & -667 & 1569 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ kN/m}$$

$$\mathbf{K}^{(5)} = \begin{bmatrix} 800 & 0 & -933 & 267 & 133 & -267 \\ 0 & 300 & 400 & -350 & -400 & 50 \\ -933 & 400 & 1622 & -778 & -689 & 378 \\ 267 & -350 & -778 & 1831 & 511 & -1481 \\ 133 & -400 & -689 & 511 & 556 & -111 \\ -267 & 50 & 378 & -1481 & -111 & 1431 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ kN/m}$$

La matriz de rigidez del sólido es el resultado del ensamblaje de las matrices de rigidez de los 5 elementos finitos que conforman la malla, de acuerdo con la contribución a los grados de libertad indicados en cada fila de la tabla de incidencias, como se ilustra en la Ecuación (5.16). La Ecuación (8.1) indica la matriz de rigidez del sólido de 16 filas por 16 columnas.

De la matriz de rigidez se puede extraer la submatriz $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}$ de tamaño 12 por 12 desde la posición 1,1 de la matriz \mathbf{K} , como se muestra en la Ecuación (5.20), con el fin de resolver el sistema de ecuaciones simultáneas independiente planteado en la Expresión (5.22).

Por otro lado, la carga distribuida por unidad de área de $1\,000 \text{ kN/m}^2$, aplicada en el lado 7–8 del elemento 5, se transforma en un grupo de cargas equivalentes en los nudos 7 y 8, organizadas en el vector de fuerzas mostrado en la Ecuación (6.55) de la forma:

$$\mathbf{f}_s^{(5)} = [0.00 \ 0.00 \ 1.50 \ 0.00 \ 1.50 \ 0.00]^T \text{ kN}$$

Este vector se ensambla al vector de fuerzas equivalentes del sólido de acuerdo con las contribuciones del elemento 5, indicadas en la matriz de incidencias. El resultado es el vector $\tilde{\mathbf{f}}$ de 16 por 1, en el cual se observa la fuerza equivalente en los grados de libertad 9 y 11. En el problema hay una carga puntual de 1 kN en dirección x aplicada en el nudo 7, es decir en el grado de libertad 9. Las cargas puntuales se representan con otro vector de 16 por 1 indicado como $\mathbf{f}^{(n)}$, que se suma al vector de fuerzas equivalentes $\tilde{\mathbf{f}}$ y se obtiene:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2.31 & -0.33 & -0.31 & 0.33 & -1.07 & 0.27 & 0.13 & -0.67 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.33 & -0.49 & 0.07 & -0.58 \\ -0.33 & 2.39 & 0.33 & -1.64 & 0.40 & -0.40 & -0.67 & 0.05 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.49 & 0.33 & 0.09 & -0.07 \\ -0.31 & 0.33 & 2.44 & -0.33 & 0.00 & 0.00 & -1.07 & 0.40 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.07 & -0.58 & -0.33 & -0.49 \\ 0.33 & -1.64 & -0.33 & 2.44 & 0.00 & 0.00 & 0.27 & -0.40 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.09 & 0.07 & -0.49 & -0.33 \\ -1.07 & 0.40 & 0.00 & 0.00 & 2.93 & -0.76 & -1.07 & 0.76 & -0.93 & 0.27 & 0.13 & -0.67 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.27 & -0.40 & 0.00 & 0.00 & -0.76 & 3.20 & 0.76 & -2.50 & 0.40 & -0.35 & -0.67 & 0.05 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.13 & -0.67 & -1.07 & 0.27 & -1.07 & 0.76 & 2.93 & -0.76 & 0.00 & 0.00 & -0.93 & 0.40 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -0.67 & 0.05 & 0.40 & -0.40 & 0.76 & -2.50 & -0.76 & 3.20 & 0.00 & 0.00 & 0.27 & -0.35 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.93 & 0.40 & 0.00 & 0.00 & 1.62 & -0.78 & -0.69 & 0.38 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.27 & -0.35 & 0.00 & 0.00 & -0.78 & 1.83 & 0.51 & -1.48 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.13 & -0.67 & -0.93 & 0.27 & -0.69 & 0.51 & 1.49 & -0.11 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.67 & 0.05 & 0.40 & -0.35 & 0.38 & -1.48 & -0.11 & 1.78 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ \hline 0.33 & -0.49 & -0.07 & 0.09 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.98 & -0.33 & -0.58 & 0.07 \\ -0.49 & 0.33 & -0.58 & 0.07 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.33 & 0.98 & -0.07 & 0.09 \\ \hline 0.07 & 0.09 & -0.33 & -0.49 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.58 & -0.07 & 0.98 & 0.33 \\ -0.58 & -0.07 & -0.49 & -0.33 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.07 & 0.09 & 0.33 & 0.98 \end{bmatrix} \times 10^6 \quad (8.1)$$

$$\tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 1.50 \\ 0.00 \\ 1.50 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix} \text{ kN , } \quad \mathbf{f}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 1.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ f_{13}^{(n)} \\ f_{14}^{(n)} \\ f_{15}^{(n)} \\ f_{16}^{(n)} \end{bmatrix} \text{ kN , } \quad \tilde{\mathbf{f}} + \mathbf{f}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 2.50 \\ 0.00 \\ 1.50 \\ f_{13}^{(n)} \\ f_{14}^{(n)} \\ f_{15}^{(n)} \\ f_{16}^{(n)} \end{bmatrix} \text{ kN}$$

donde $f_{13}^{(n)}, f_{14}^{(n)}, f_{15}^{(n)}, f_{16}^{(n)}$ corresponden a las reacciones en el empotramiento sobre los nudos 1 y 2.

Se define el subvector \mathbf{f}_α de 12 por 1 desde la posición 1,1, de acuerdo con la Ecuación (5.20). Posteriormente, se resuelve el sistema de 12 ecuaciones simultáneas de la forma $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}\mathbf{a}_\alpha = (\mathbf{f}_\alpha - \mathbf{K}_{\alpha\beta}\mathbf{a}_\beta)$, recordando que los desplazamientos nodales conocidos de este problema son iguales a cero, es decir, $\mathbf{a}_\beta = \mathbf{0}$. El resultado es el siguiente vector de desplazamientos nodales desconocidos \mathbf{a}_α :

$$\mathbf{a}_\alpha = \begin{bmatrix} 1.6927 \times 10^{-6} \\ 3.7814 \times 10^{-8} \\ 2.2041 \times 10^{-6} \\ -5.4918 \times 10^{-7} \\ 3.8863 \times 10^{-6} \\ -5.8650 \times 10^{-7} \\ 4.3521 \times 10^{-6} \\ -1.0363 \times 10^{-6} \\ 6.6435 \times 10^{-6} \\ -7.9481 \times 10^{-7} \\ 6.5550 \times 10^{-6} \\ -1.3712 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \text{ m}$$

El vector de los desplazamientos nodales \mathbf{a} de 16 filas por una columna es el resultado de adjuntar el vector de desplazamientos desconocidos \mathbf{a}_α de 12 filas y el vector de desplazamientos conocidos \mathbf{a}_β de 4 filas, es decir $\mathbf{a} = [\mathbf{a}_\alpha^T \quad \mathbf{a}_\beta^T]^T$. Cada término a_{gl} del vector \mathbf{a} indica el valor del desplazamiento en un grado de libertad gl . La misma información se puede organizar en una tabla que muestre los desplazamientos u en dirección x y v en dirección y sobre cada uno de los nudos de la malla, como se ilustra en la Tabla 8.4.

NUD	$u(\text{ m})$	$v(\text{ m})$
1	0.0000×10^0	0.0000×10^0
2	0.0000×10^0	0.0000×10^0
3	1.6927×10^{-6}	3.7814×10^{-8}
4	2.2041×10^{-6}	-5.4918×10^{-7}
5	3.8863×10^{-6}	-5.8650×10^{-7}
6	4.3521×10^{-6}	-1.0363×10^{-6}
7	6.6435×10^{-6}	-7.9481×10^{-7}
8	6.5550×10^{-6}	-1.3712×10^{-6}

Tabla 8.4: Lámina sometida a tracción. Componentes del desplazamiento en m, evaluado en los nudos

En la Figura 7.2(a) se dibuja la configuración deformada de la malla de elementos finitos con líneas continuas y el contorno de la configuración no deformada con líneas discontinuas. Asimismo, se pueden interpolar los valores de cada componente de desplazamiento en los nudos de un elemento para representar gráficamente su distribución en la malla. La Figura 7.2(b) y la Figura 7.2(c) ilustran las componentes de desplazamiento en dirección x y en dirección y , respectivamente, mediante regiones llenas en escala de grises.

A partir del vector de desplazamientos nodales del sólido se puede extraer el vector de valores nodales de cada uno de los elementos, de acuerdo con las contribuciones indicadas en la tabla de incidencias. Por ejemplo, para el elemento 1 el vector de desplazamientos nodales $\mathbf{a}_{(1)}$ es igual:

$$\mathbf{a}_{(1)} = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 1692.7 \\ 37.814 \\ 2204.1 \\ -549.18 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix} \times 10^{-9} \text{ m}$$

Ahora se calcula la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma en el interior del elemento, específicamente en el nudo de posición $(\xi, \eta) = (-1, -1)$, como lo indican las ecuaciones (6.75), (6.76) y (6.77).

$$\mathbf{B}_{(1)}(-1, -1) = \begin{bmatrix} -2.50 & 0.00 & 2.50 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & -2.50 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 2.50 \\ -2.50 & -2.50 & 0.00 & 2.50 & 0.00 & 0.00 & 2.50 & 0.00 \end{bmatrix}$$

El vector que contiene las componentes de la deformación $\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}(-1, -1)$ en el punto $(\xi, \eta) = (-1, -1)$ del interior del elemento se obtiene de la Ecuación (6.5) y su resultado es:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}(-1, -1) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.2317 \times 10^{-6} \\ 0.0000 \times 10^0 \\ 9.4536 \times 10^{-8} \end{bmatrix}$$

Del producto entre la matriz constitutiva elástica y el vector anterior (Ecuación (6.7)), se obtienen las componentes de esfuerzo $\boldsymbol{\sigma}_{(e)}(-1, -1)$ en la posición $(\xi, \eta) = (-1, -1)$ del interior del elemento, así:

$$\boldsymbol{\sigma}_{(e)}(-1, -1) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{(1)} \\ \sigma_{yy}^{(1)} \\ \sigma_{xy}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.0277 \times 10^2 \\ 2.2569 \times 10^2 \\ 7.5629 \times 10^0 \end{bmatrix} \text{ kN/m}^2$$

El procedimiento anterior de extraer el vector de desplazamientos nodales, calcular la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma, calcular las deformaciones y los esfuerzos, se repite para cada elemento finito y en diferentes puntos de su interior. La Tabla 8.5 presenta el esfuerzo normal $\sigma_{xx}^{(e)}$ en dirección x , el esfuerzo normal $\sigma_{yy}^{(e)}$ en dirección y y el esfuerzo cortante $\sigma_{xy}^{(e)}$ en el plano xy , evaluado en cada nudo NUD del interior de cada elemento finito ELE.

En la Tabla 8.6 se extrae de la tabla anterior el valor de la componente en los nudos de cada elemento finito. En particular, los elementos triangulares lineales muestran el mismo esfuerzo en cualquiera de sus nudos.

La distribución del esfuerzo normal en dirección x en el interior de cada elemento o *resultado elemental* de $\sigma_{xx}^{(e)}$ se presenta en la Figura 8.3(a). Allí se verifica que $\sigma_{xx}^{(e)}$ cambia en el interior del elemento rectangular bilineal y se conserva constante en el interior de los elementos triangulares lineales. Asimismo, se observa la discontinuidad del esfuerzo en los nudos y en los lados comunes a varios elementos finitos.

ELE = 1			
NUD	σ_{xx} (kN/m ²)	σ_{yy} (kN/m ²)	σ_{xy} (kN/m ²)
1	9.0277×10^2	2.2569×10^2	7.5629×10^0
3	8.2450×10^2	-8.7370×10^1	1.0984×10^2
4	1.0972×10^3	-1.9189×10^1	-7.5629×10^0
2	1.1755×10^3	2.9387×10^2	-1.0984×10^2
ELE = 2			
NUD	σ_{xx} (kN/m ²)	σ_{yy} (kN/m ²)	σ_{xy} (kN/m ²)
3	1.0673×10^3	-2.6659×10^1	4.8495×10^0
6	1.0673×10^3	-2.6659×10^1	4.8495×10^0
4	1.0673×10^3	-2.6659×10^1	4.8495×10^0
ELE = 3			
NUD	σ_{xx} (kN/m ²)	σ_{yy} (kN/m ²)	σ_{xy} (kN/m ²)
3	1.0659×10^3	9.4441×10^0	-5.5423×10^0
5	1.0659×10^3	9.4441×10^0	-5.5423×10^0
6	1.0659×10^3	9.4441×10^0	-5.5423×10^0
ELE = 4			
NUD	σ_{xx} (kN/m ²)	σ_{yy} (kN/m ²)	σ_{xy} (kN/m ²)
5	1.1063×10^3	1.9559×10^1	3.9480×10^1
8	1.1063×10^3	1.9559×10^1	3.9480×10^1
6	1.1063×10^3	1.9559×10^1	3.9480×10^1
ELE = 5			
NUD	σ_{xx} (kN/m ²)	σ_{yy} (kN/m ²)	σ_{xy} (kN/m ²)
5	1.3759×10^3	-4.0303×10^1	-4.6060×10^1
7	1.3759×10^3	-4.0303×10^1	-4.6060×10^1
8	1.3759×10^3	-4.0303×10^1	-4.6060×10^1

Tabla 8.5: Lámina sometida a tracción. Componentes de esfuerzo en kN/m², evaluado en los nudos de cada elemento.

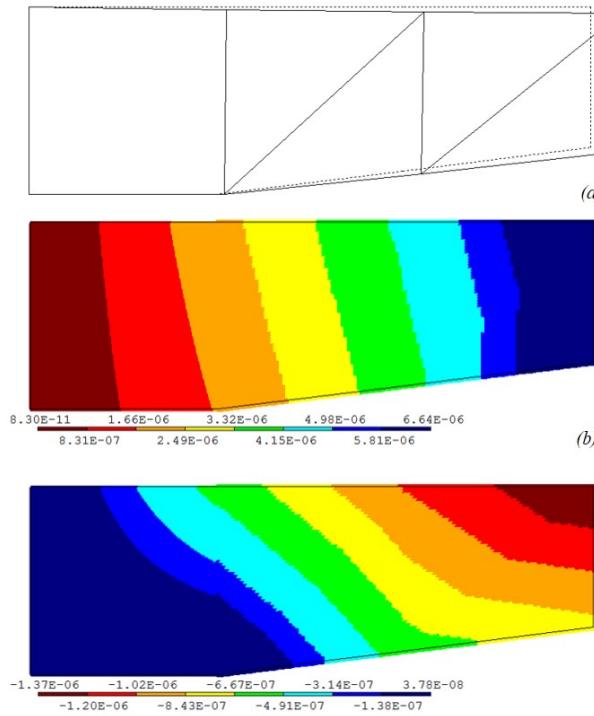


Figura 8.2: Lámina sometida a tracción: (a) geometría deformada, (b) distribución de la componente en dirección x del desplazamiento, (c) distribución de la componente en dirección y del desplazamiento.

ELE	NI	NJ	NK	NM
1	9.0277×10^2	8.2450×10^2	1.0972×10^3	1.1755×10^3
2	1.0673×10^3	1.0673×10^3	1.0673×10^3	—
3	1.0659×10^3	1.0659×10^3	1.0659×10^3	—
4	1.1063×10^3	1.1063×10^3	1.1063×10^3	—
5	1.3759×10^3	1.3759×10^3	$1.3759E + 03$	—

Tabla 8.6: Lámina sometida a tracción. Esfuerzo normal σ_{xx} en dirección x evaluado en los nudos de cada elemento finito, dado en kN/m^2 .

Para representar de forma suave y continua la distribución de los esfuerzos en la malla de elementos finitos, se calcula el promedio entre los valores obtenidos por los diferentes elementos en un mismo nudo y después se interpolan la cantidad de interés en el interior del elemento utilizando sus funciones de forma. Los resultados

presentados de esta manera se denominan *resultados nodales promedio*. A partir de la Tabla 8.2 se identifican los elementos que tienen un mismo nudo asociado, como lo indica la Tabla 8.7.

NUD	ELE
1	1
2	1
3	1 2 3
4	1 2
5	3 4 5
6	2 3 4
7	5
8	4 5

Tabla 8.7: Lámina sometida a tracción. Elementos asociados a un mismo nudo.

En consecuencia, la componente de esfuerzo promedio $\sigma_{xx(3)}^{prom}$ en el nudo 3 se obtiene de la forma:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx(3)}^{prom} &= \frac{1}{3}(\sigma_{xx(3)}^{(1)} + \sigma_{xx(3)}^{(2)} + \sigma_{xx(3)}^{(3)}) \\ \sigma_{xx(3)}^{prom} &= \frac{1}{3}(824.50 + 1067.3 + 1065.9) = 985.9 \text{ kN/m}^2\end{aligned}\quad (8.2)$$

De igual modo se evalúa la componente de esfuerzo normal en x promedio en los demás nudos $\sigma_{xx(n)}^{prom}$, los cuales se presentan en la Tabla 8.8 y se representan en la Figura 8.3(b). Se observa que la lámina está sometida completamente a tracción en dirección x , con un valor máximo de 1376 kN/m^2 y mínimo de 902.8 kN/m^2 .

NUD	$\sigma_{xx(n)}^{prom}$	NUD	$\sigma_{xx(n)}^{prom}$
1	9.0277×10^2	5	1.1827×10^3
2	1.1755×10^3	6	1.0799×10^3
3	9.8591×10^2	7	1.3759×10^3
4	1.0823×10^3	8	1.2411×10^3

Tabla 8.8: Lámina sometida a tracción. Esfuerzo normal en x promedio en los nudos en kN/m^2

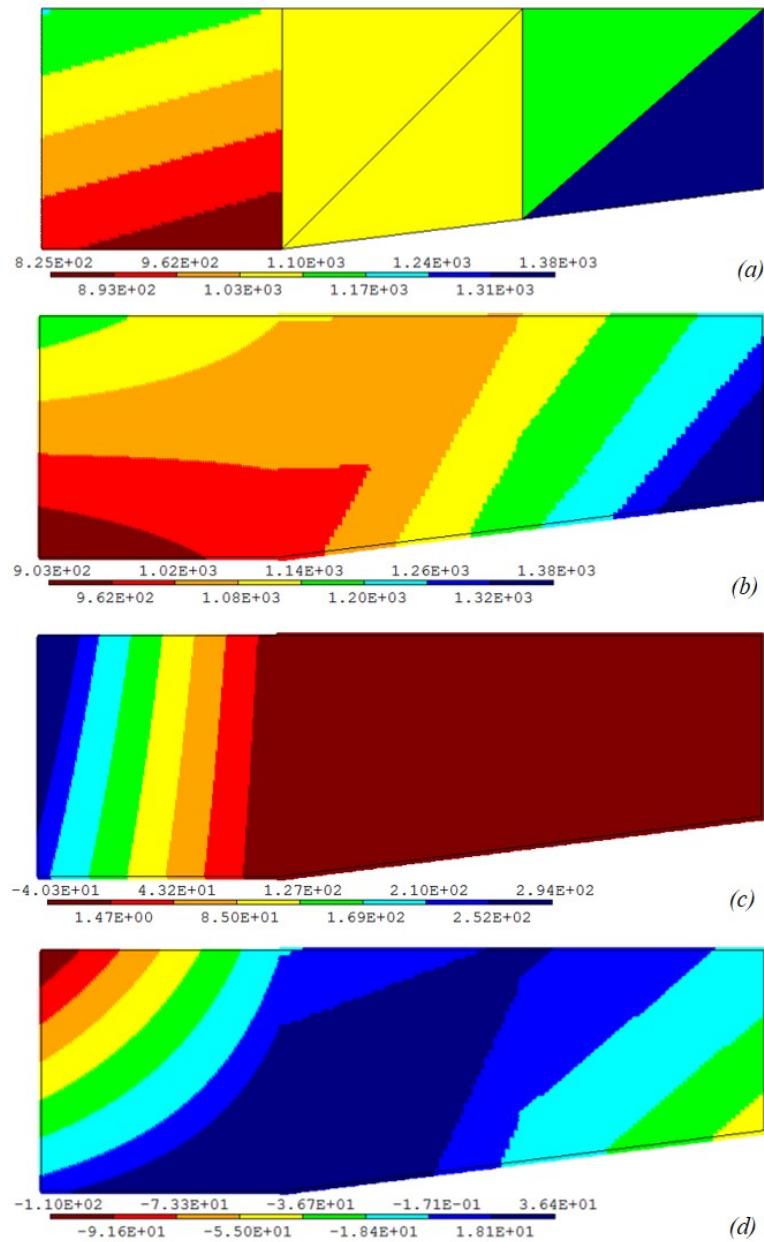


Figura 8.3: Lámina sometida a tracción. (a) resultado elemental del esfuerzo normal en dirección x . Resultado nodal promedio: (b) del esfuerzo normal en dirección x , (c) del esfuerzo normal en dirección y , (d) del esfuerzo cortante en el plano xy .

La Figura 8.3(c) y la Figura 8.3(d) muestran el resultado nodal promedio del

esfuerzo normal en dirección y y del esfuerzo cortante en el plano xy , respectivamente. La magnitud de estas componentes de esfuerzo es sustancialmente menor que la componente normal en dirección x , debido a las condiciones de carga impuestas sobre la lámina.

8.2. Ménsula de concreto sometida a una carga distribuida

La ménsula de una columna de concreto cuyas dimensiones se presentan en la Figura 8.4(a), soporta una reacción vertical de 100 kN dada por el extremo de una armadura como lo ilustra la Figura 8.4(b). La carga vertical se distribuye en una placa de apoyo de 0.10 m por 0.40 m ubicada a 0.20 m de la cara interior de la columna. El concreto tiene un módulo de Young de 20.0×10^6 kN/m² y una relación de Poisson de 0.25.

El dominio modelado incluye la ménsula y la parte de la columna a 0.20 m por encima y por debajo de la ménsula.

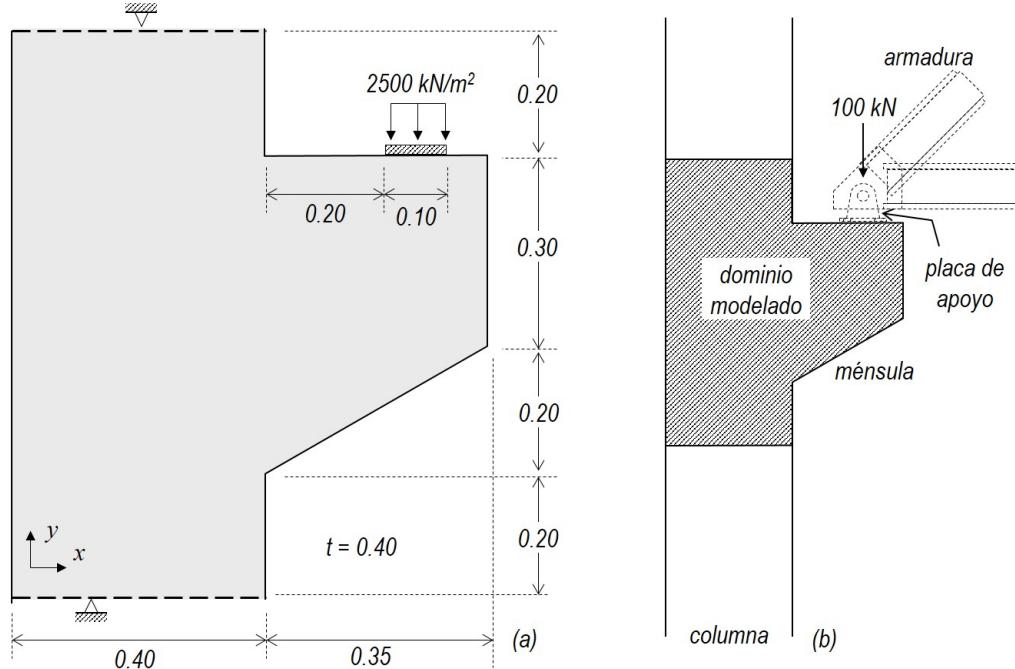


Figura 8.4: Ménsula sometida a una carga distribuida: (a) geometría, cargas y condiciones de frontera del dominio modelado, (b) esquema del sistema estructural.

El problema se simplifica a una condición plana de esfuerzos de dominio bidimensional en el plano xy con espesor de $t = 0.40$ m, el cual se subdivide en 303 elementos

triangulares lineales conectados entre sí por 179 nudos (Figura 8.5(a)). Las condiciones de frontera corresponden a desplazamientos restringidos en ambas direcciones sobre los extremos superior e inferior de la columna. La carga distribuida se aplica sobre uno de los lados de los elementos finitos 1 y 3.

El primero de los resultados del problema es el desplazamiento de cada uno de los nudos de la malla. La Figura 8.5(b) ilustra la geometría deformada exagerada de la ménsula y la Figura 8.6 muestra la distribución del desplazamiento en las direcciones x y y .

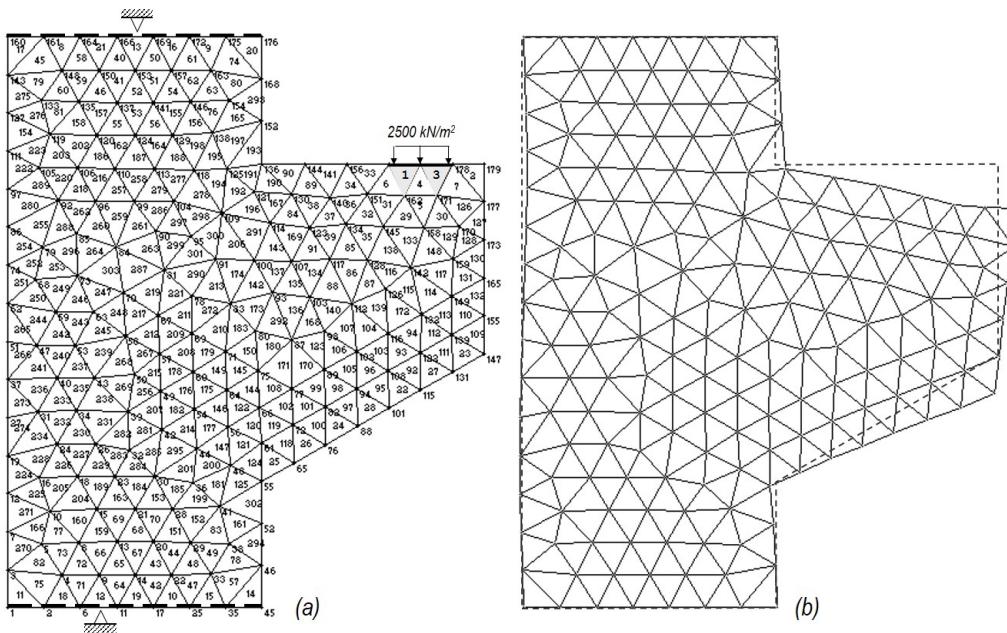


Figura 8.5: Ménsula sometida a una carga distribuida: (a) malla de elementos finitos, (b) geometría deformada.

A partir de los desplazamientos nodales se calculan las deformaciones en el interior de cada elemento de acuerdo con la Ecuación (5.6). Con esos resultados elementales se dibuja en la Figura 8.7(a) la distribución de la deformación longitudinal en dirección x . El valor promedio en los nudos de la deformación longitudinal en dirección x , mostrada en la Figura 8.7(b), establece que la deformación máxima de extensión es de 8.49×10^{-5} , ubicada cerca a la intersección entre la cara superior de la ménsula y la columna, y que la deformación máxima de contracción es igual a -4.83×10^{-5} en la intersección entre la cara inferior de la ménsula y la columna.

El esfuerzo en el interior de cada elemento se obtiene del producto entre la matriz constitutiva elástica y el vector de deformaciones. La Figura 8.8(a) muestra la dis-

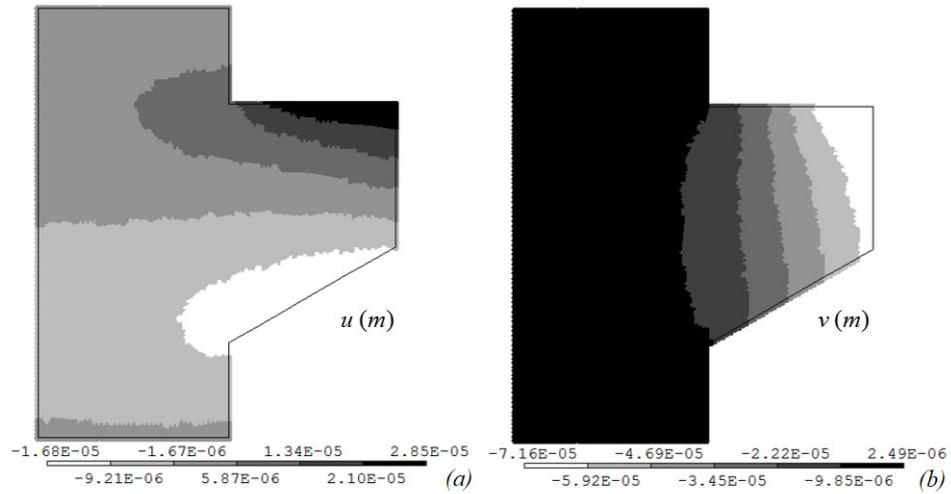


Figura 8.6: Ménsula sometida a una carga distribuida. Componentes del desplazamiento: (a) en dirección x , (b) en dirección y .

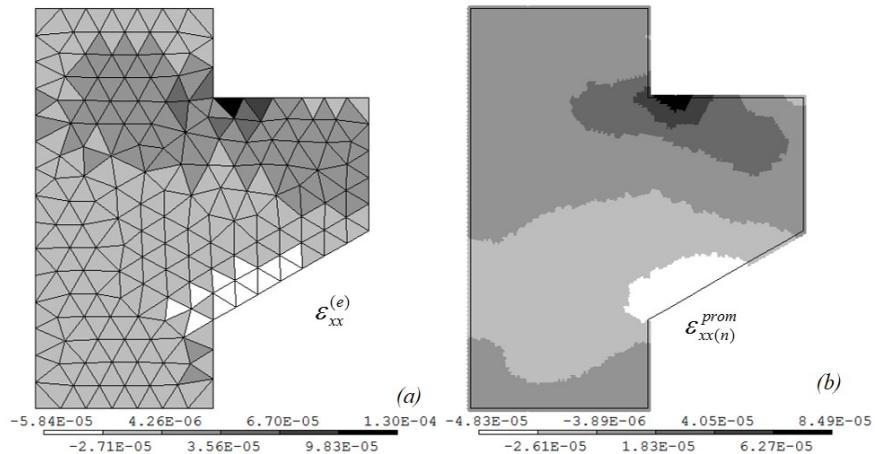


Figura 8.7: Ménsula sometida a una carga distribuida. Deformación longitudinal en dirección x : (a) resultado elemental, (b) resultado nodal promedio.

tribución de la componente de esfuerzo normal en dirección x , donde se observa que los valores máximos de tracción y compresión son de 1730 kN/m^2 y -1170 kN/m^2 , respectivamente.

De la misma forma se obtienen las distribuciones de las componentes de esfuerzo normal en la dirección y y cortante en el plano xy como lo indica la Figura 8.8(b)

y la Figura 8.8(c), respectivamente. Finalmente, se calculan los esfuerzos principales mayor σ_1 , intermedio σ_2 y menor σ_3 , los cuales se ilustran en la Figura 8.8(d), (e) y (f).

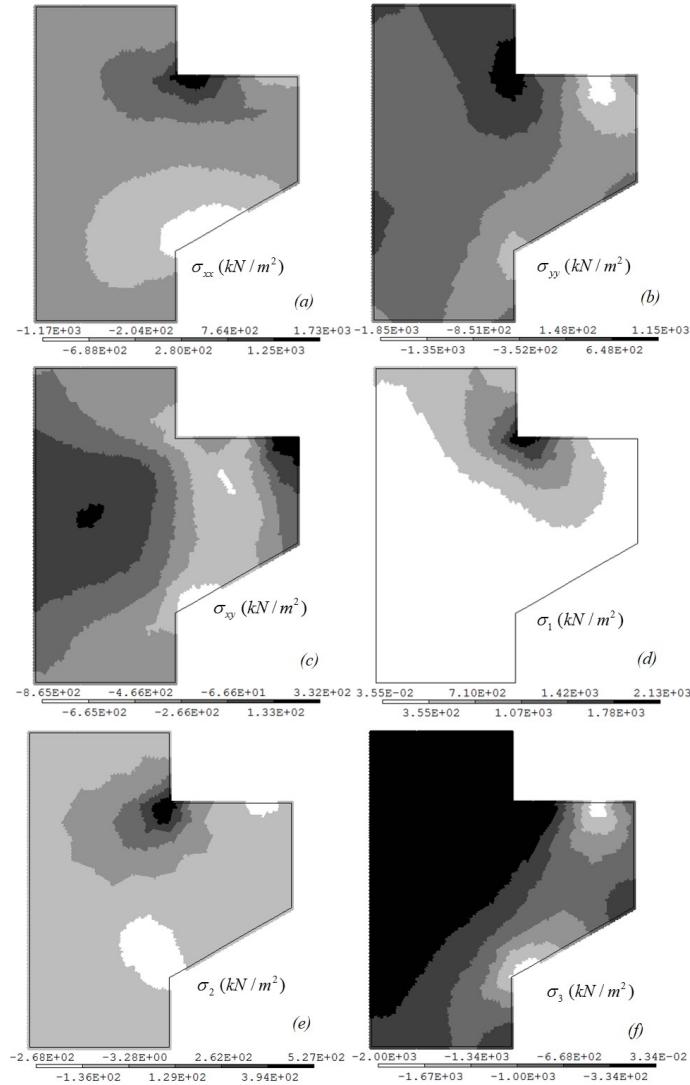


Figura 8.8: Ménsula sometida a una carga distribuida. Resultado nodal promedio del esfuerzo: (a) normal en dirección x , (b) normal en dirección y , (c) cortante en el plano xy , (d) principal mayor, (e) principal intermedio, (f) principal menor.

8.3. Principio de Saint Venant

Con el fin de demostrar el principio de concentración de esfuerzos de Saint Venant (Timoshenko & Goodier, 1970; Ortiz, 1998), se simuló una lámina de acero de base $b = 0.40\text{ m}$, altura $h = 2.5b = 1.00\text{ m}$ y espesor $t = 0.01\text{ m}$, la cual está sometida a la carga puntual $P = 2\text{ kN}$ en el extremo superior mostrada en la Figura 8.9(a). El acero tiene un módulo de Young de $200.0 \times 10^6\text{ kN/m}^2$ y una relación de Poisson de 0.25.

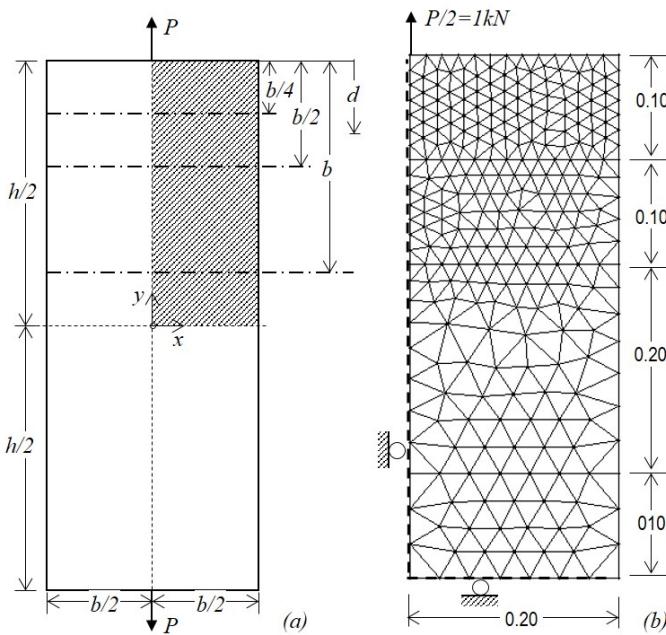


Figura 8.9: Principio de Saint Venant: (a) geometría de una lámina sometida a una carga puntual P , (b) malla de elementos finitos y condiciones de frontera.

Se desea obtener la distribución del esfuerzo normal en dirección y sobre tres cortes horizontales a las distancias de $b/4$, $b/2$ y b desde la cara superior como se indica en la Figura 8.9(a).

En virtud de la doble simetría del problema se modeló la cuarta parte superior derecha de la lámina. Los ejes de simetría establecen que el desplazamiento vertical sobre el eje horizontal y el desplazamiento horizontal sobre el eje vertical están restringidos, como se muestra en la Figura 8.9(b). El dominio modelado está dividido en 499 elementos triangulares lineales conectados entre sí por 284 nudos, dispuestos

de tal manera que los cortes donde se desea evaluar el esfuerzo normal correspondan con los nudos de la malla.

Después de obtenidos los desplazamientos en los nudos, en la Figura 8.10(a) se presenta la geometría deformada de la cuarta parte de la lámina y en la Figura 8.10(b) se indican las curvas de igual valor de la componente de desplazamiento en dirección y .

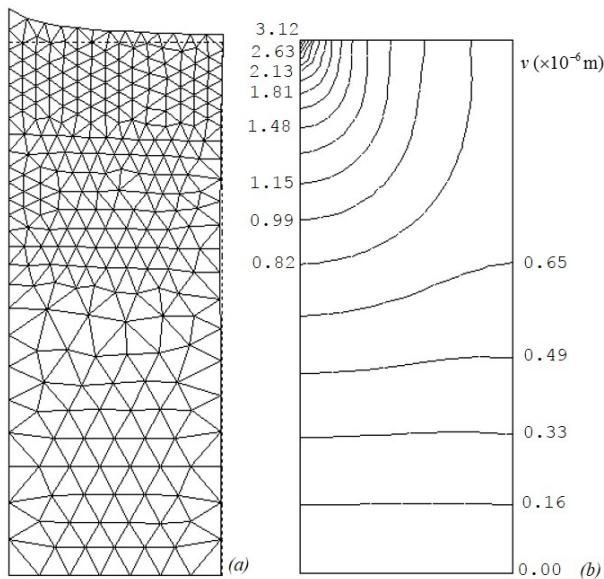


Figura 8.10: Principio de Saint Venant: (a) geometría deformada, (b) curvas de igual desplazamiento en dirección y .

La distribución del esfuerzo normal en dirección y calculado en el dominio, se dibuja mediante el gráfico isolíneas de esfuerzo presentado en la Figura 8.11(a). Allí se observa que las isolíneas de esfuerzo se acercan en la vecindad de la aplicación de la carga y que, a pesar que el esfuerzo bajo la carga puntual es teóricamente infinito, el resultado numérico obtenido con esta malla es de 8650 kN/m^2 .

De acuerdo con el principio de Saint Venant, se espera que el esfuerzo normal en la dirección de la carga sea uniforme e igual al esfuerzo medio a una distancia desde la cara superior de la lámina mayor que b . Tal esfuerzo medio será igual a:

$$\sigma_{med} = \frac{P}{bt} = \frac{2.0}{0.4 \cdot 0.01} = 500 \text{ kN/m}^2$$

Finalmente, se obtiene la distribución del esfuerzo normal en dirección y sobre tres cortes horizontales, los cuales se presentan gráficamente en la Figura 8.11(b). Se

observa que el esfuerzo σ_{yy} adopta un valor máximo sobre el eje de la carga aplicada igual a 2.59 veces el esfuerzo medio sobre el corte hecho a una distancia $b/4$ desde la cara superior, 1.44 veces mayor que el esfuerzo medio σ_{med} sobre el corte a $b/2$ y 1.03 más grande que el esfuerzo medio sobre el corte a b . Por lo tanto se demuestra que la distribución del esfuerzo normal es aproximadamente igual al esfuerzo medio para distancias superiores al ancho b con respecto al punto de aplicación de la carga.

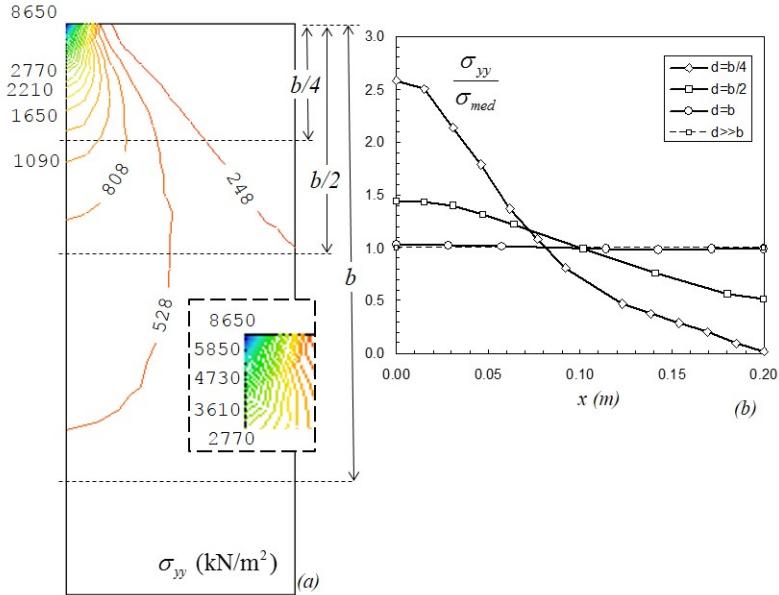


Figura 8.11: Principio de Saint Venant: (a) curvas de igual esfuerzo normal en dirección y , (b) distribución del esfuerzo normal en dirección y sobre tres cortes horizontales.

8.4. Estructura de drenaje

Una estructura de drenaje hecha de concreto soporta una fuerza distribuida uniforme de $w = 5\,000 \text{ kN/m}^2$ en su cara superior, como lo muestra la Figura 8.12. El material tiene un módulo de Young de $20.0 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ y una relación de Poisson de 0.3. Se desea obtener la distribución de esfuerzos principales en la estructura (Weaver & Johnson, 1984).

El problema se simplifica a una condición plana de deformaciones con un espesor unitario. Dada la simetría del problema, se modela la mitad del sólido y se establece que el desplazamiento horizontal en los nudos ubicados sobre el eje de simetría son nulos, como se indica en la Figura 8.13(a). Asimismo, la restricción al desplazamiento

en las direcciones x y y de los nudos que conforman la línea horizontal inferior derecha representa el empotramiento de la estructura. El dominio modelado se divide en 479 elementos triangulares lineales conectados entre sí por 281 nudos.

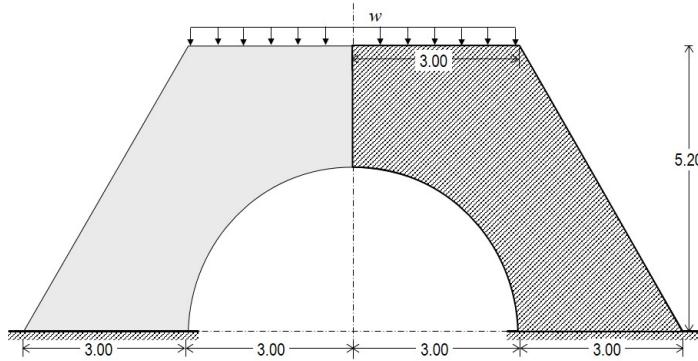


Figura 8.12: Estructura de drenaje. Esquema descriptivo de geometría y cargas aplicadas.

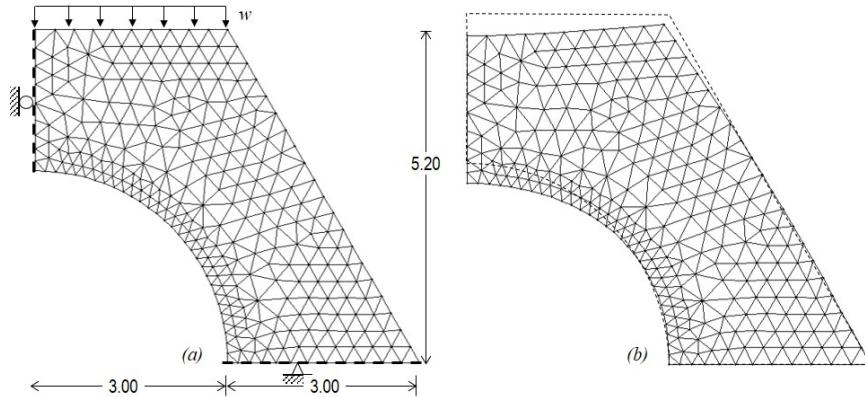


Figura 8.13: Estructura de drenaje: (a) malla de elementos finitos y condiciones de frontera, (b) geometría deformada.

A partir de los desplazamientos nodales calculados se dibuja la geometría deformada del modelo (Figura 8.13(b)) y el campo de las componentes de desplazamiento en las direcciones x y y (Figura 8.19). Se observa que el desplazamiento en dirección y es significativamente mayor que el desplazamiento en dirección x . Asimismo, se presenta un desplazamiento máximo en y igual a -3.17×10^{-3} m, el cual está ubicado aproximadamente en cualquier punto sobre el eje de simetría.

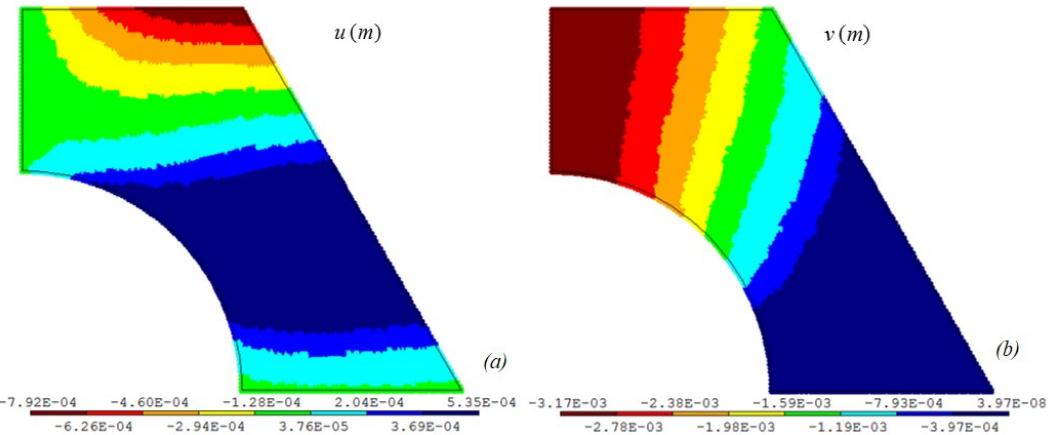


Figura 8.14: Estructura de drenaje. Configuración deformada y contornos de igual resultante de desplazamiento.

Después de obtenidas las componentes esfuerzo σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} del elemento, se calculan los esfuerzos principales σ_1 , σ_2 , σ_3 . La Figura 8.15 muestra la distribución del esfuerzo principal mínimo σ_3 obtenido en el interior de cada elemento y con el valor promedio en los nudos. La densidad de la malla hace que los resultados elementales en la Figura 8.15(a) y nodales promedio en la Figura 8.15(b) sean similares. El esfuerzo normal mínimo corresponde a un esfuerzo de compresión de $-16\,800 \text{ kN/m}^2$ ubicado aproximadamente a 30 grados del contorno circunferencial.

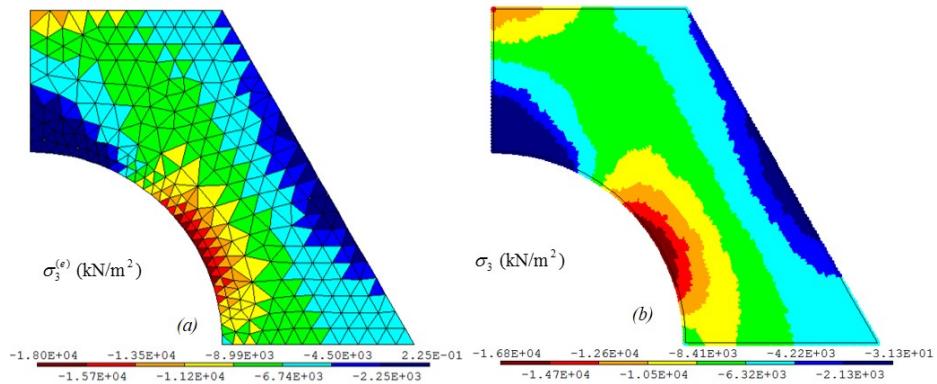


Figura 8.15: Estructura de drenaje. Distribución del esfuerzo principal mínimo: (a) resultado elemental, (b) resultado nodal promedio.

En cambio, el esfuerzo normal máximo σ_1 se presenta en el vértice entre el arco y el eje de simetría con un valor de $7.25 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$ a tracción, como lo ilustra

la Figura 8.16(a). El denominado esfuerzo principal intermedio σ_2 muestra valores menores que σ_1 y mayores que σ_3 en un mismo punto.

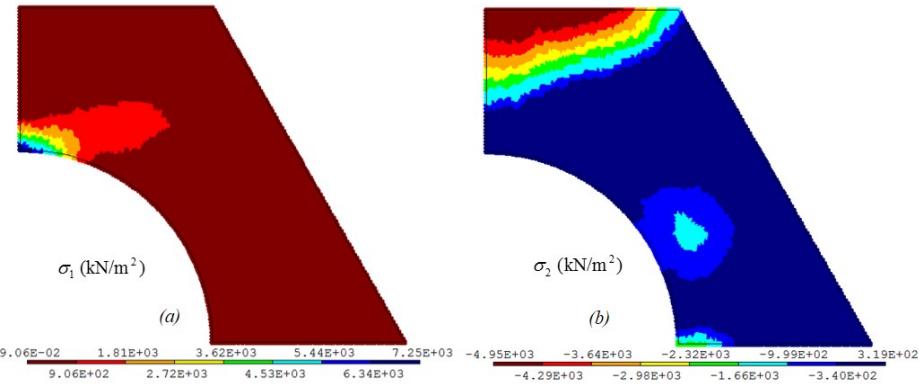


Figura 8.16: Estructura de drenaje. Resultado nodal promedio de los esfuerzos principales: (a) esfuerzo principal máximo, (b) esfuerzo principal intermedio.

8.5. Estructura de drenaje

Una estructura de drenaje hecha de concreto soporta una fuerza distribuida uniforme de $w = 5000 \text{ kN/m}^2$ en su cara superior, como lo muestra la Figura 8.17. El material tiene un módulo de Young de $20.0 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ y una relación de Poisson de 0.3. Se desea obtener la distribución de esfuerzos principales en la estructura (Weaver & Johnson, 1984). El problema se simplifica a una condición plana de deformaciones con un espesor unitario.

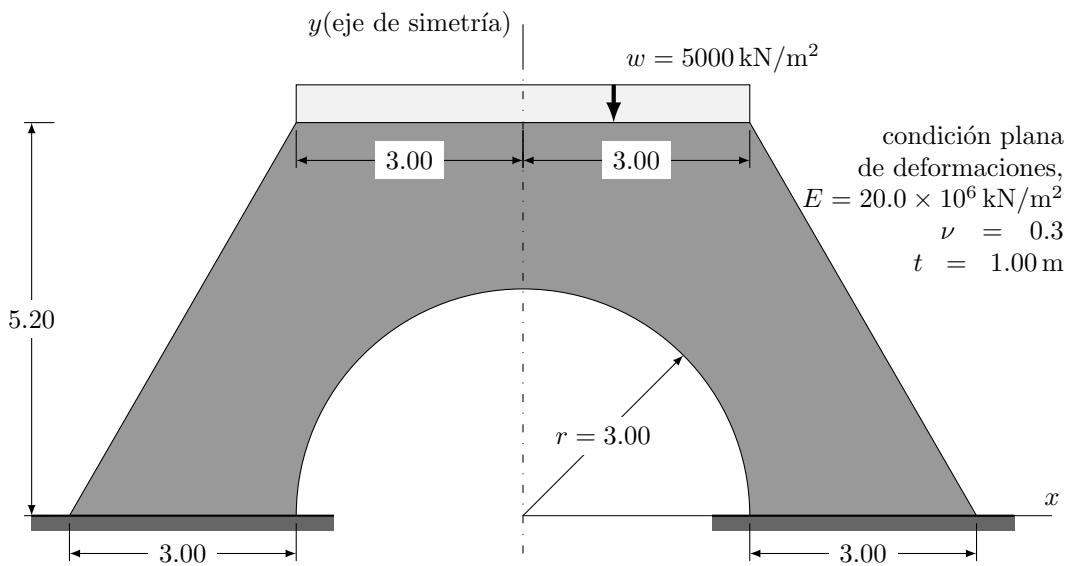


Figura 8.17: Estructura de drenaje: geometría, carga distribuida aplicada w y condiciones de apoyo.

Dada la simetría del problema, se modela la mitad del sólido y se establece que el desplazamiento horizontal en los nudos ubicados sobre el eje de simetría son nulos, como se indica en la Figura 8.18. Asimismo, la restricción al desplazamiento en las direcciones x y y de los nudos que conforman la línea horizontal inferior derecha representa el empotramiento de la estructura.

Malla estructurada con elementos cuadrilaterales lineales. Se desea construir una malla estructurada de elementos finitos cuadrilaterales lineales del mismo problema. El dominio se divide en tres regiones de cuatro lados definidas por los puntos AEFB, BFGC y CGHD, como se indica en la figura 8.18. Cada región debe contener una malla de 8 elementos cuadriláteros por cada lado.

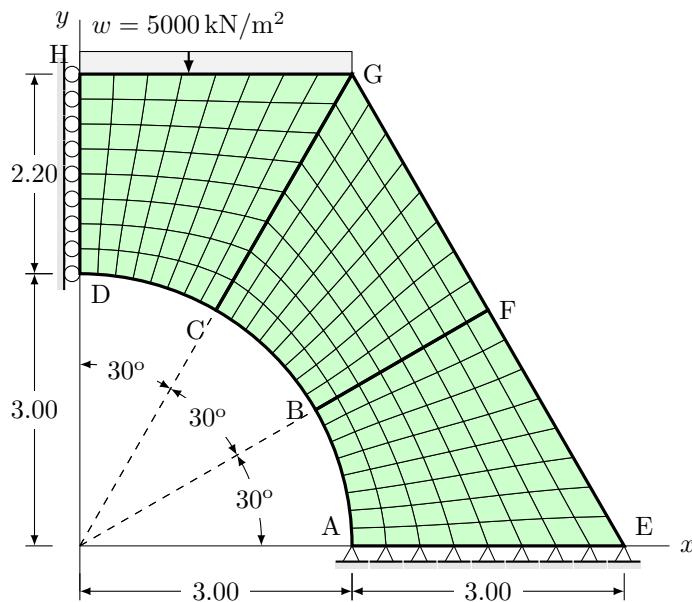


Figura 8.18: Estructura de drenaje: malla de elementos finitos de la mitad derecha de la estructura, carga distribuida w y condiciones de apoyo.

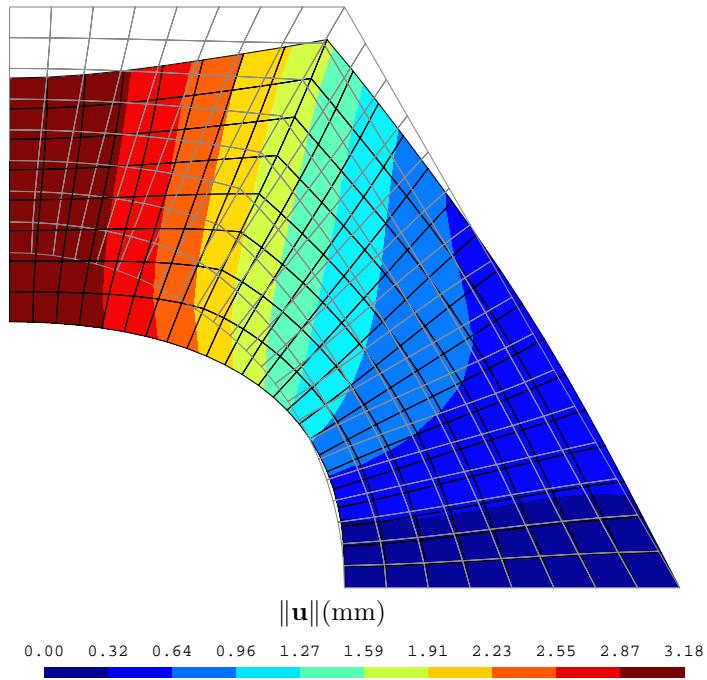


Figura 8.19: Estructura de drenaje. Configuración deformada y contornos de igual resultante de desplazamiento.

8.6. Problemas propuestos

Problema 8.6.1 El criterio de la parcela (en inglés *the patch test*) evalúa la capacidad que tiene un tipo de elemento finito, para representar el movimiento de cuerpo rígido y el estado de deformación constante, calificándolo para su uso en la solución de problemas mecánicos (Irons & Razzaque, 1972; Taylor, Zienkiewicz, Simó, & Chan, 1986).

El procedimiento de validación consiste en analizar un conjunto o parcela de elementos finitos sobre los cuales actúan desplazamientos conocidos que representan: primero, un estado de deformación constante, segundo, la traslación de un cuerpo rígido y tercero, una pequeña rotación de un cuerpo rígido.

Una parcela rectangular conformada por 4 elementos triangulares lineales, de dimensiones 0.80m por 0.40m y de espesor constante de 0.001m, está sometida a tres casos diferentes de desplazamiento impuesto. El material tiene un módulo de Young de 200×10^6 kN/m² y una relación de Poisson de 0.3. En el primer caso el desplazamiento en x del lado izquierdo y el desplazamiento en y del lado inferior son

iguales a cero, mientras el desplazamiento en x del lado derecho es igual a $\delta = 0.001$ m (Figura 8.20(a)). En el segundo caso se aplican desplazamientos en x sobre las caras laterales $\delta = 0.001$ m y se imponen restricciones al desplazamiento en y en el lado izquierdo (Figura 8.20(b)). Finalmente, en el tercer caso se aplican desplazamientos en los nudos extremos de la parcela en función de un pequeño ángulo $\theta = 0.005\text{rad}$ como lo indica la Figura 8.20(c). Demostrar que el primer caso corresponde a un estado de deformación constante y que el segundo y el tercero representan la translación y la rotación de un cuerpo rígido, respectivamente.

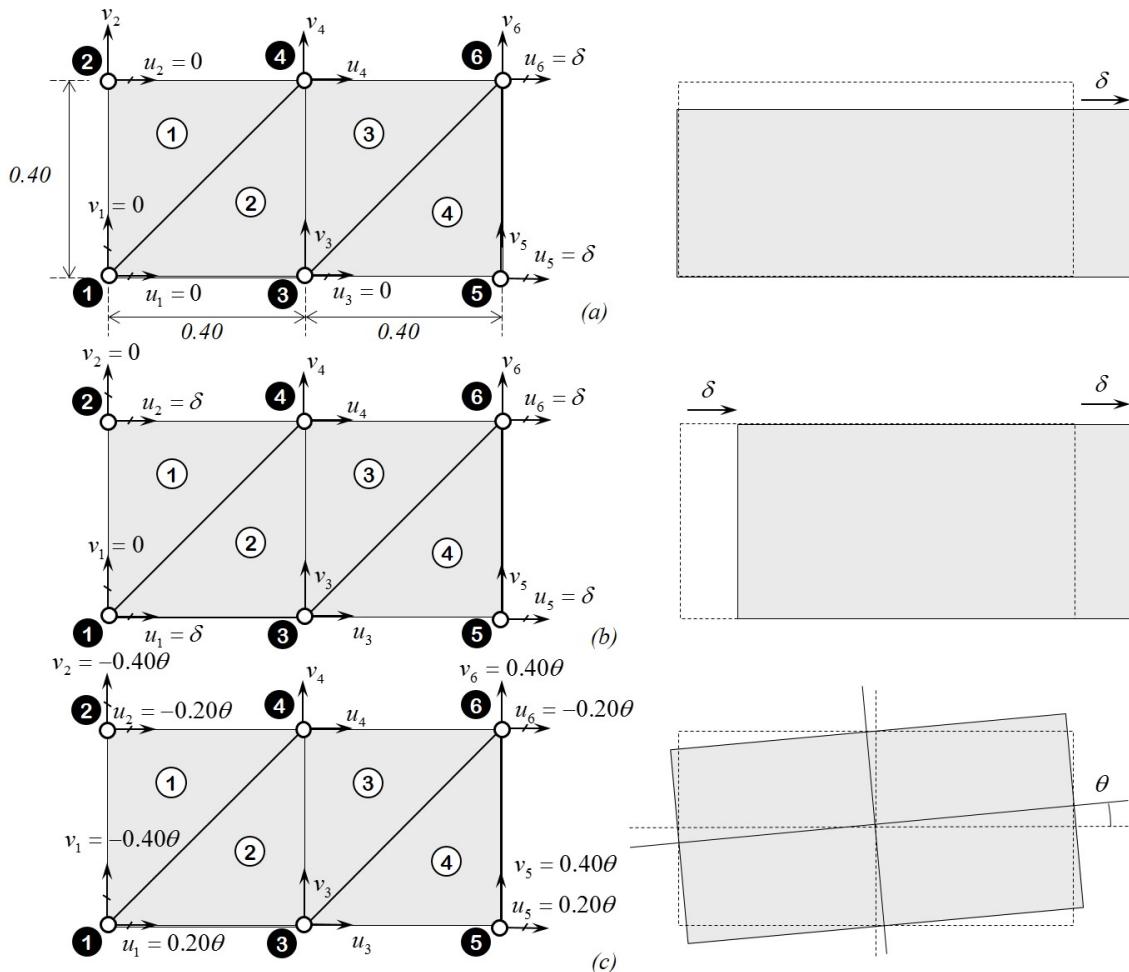


Figura 8.20: Criterio de la parcela aplicado a: (a) deformación constante, (b) traslación en cuerpo rígido y (c) pequeña rotación en cuerpo rígido.

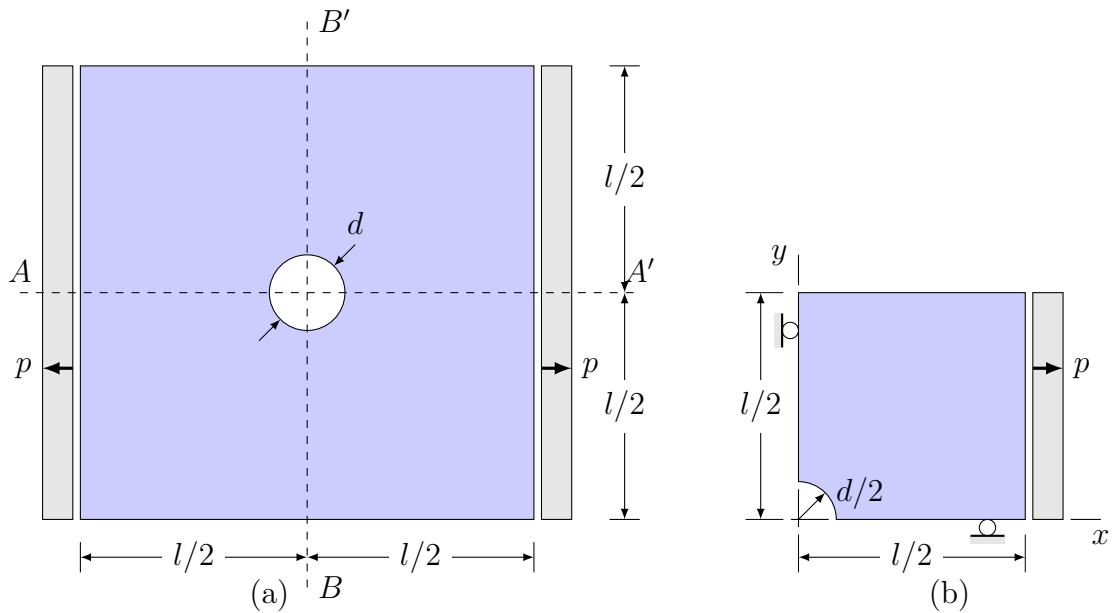


Figura 8.21: Lámina de acero con orificio sometida a tensión: (a) esquema general y (b) dominio de modelación correspondiente a una cuarta parte de la lámina.

Problema 8.6.2 Una lámina cuadrada de $L = 1.00\text{ m}$ de lado, $t = 0.025\text{ m}$ de espesor y un orificio en el centro de diámetro $d = 0.125\text{ m}$ está sometida a una carga distribuida por unidad de área $100 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$ en dirección x , como se indica en la Figura 8.21(a). La lámina está hecha de acero cuyo módulo de Young y relación de Poisson son iguales a $E = 200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ y $\nu = 0.3$, respectivamente.

El objetivo del problema es encontrar los desplazamientos, las deformaciones y los esfuerzos sobre la lámina. En particular, se desea calcular la distribución del esfuerzo normal σ_{xx} en la línea BB' .

De acuerdo con la geometría y las condiciones de carga se puede considerar este problema como doblemente simétrico y en consecuencia se puede analizar una cuarta parte de la lámina como lo indica la Figura 8.21(b).

8.7. Proyectos propuestos

A continuación se proponen varios proyectos que se pueden realizar a partir de los temas estudiados anteriormente y de otros conceptos consultados por cuenta propia. El desarrollo de tales proyectos requiere la programación de algunas formulaciones

adicionales y la simulación numérica de varios ejemplos de aplicación modificando un parámetro.

Proyecto 8.7.1 Una lámina rectangular de b por $2b$ y espesor constante t está sometida a una fuerza puntual P en los extremos a lo largo de su eje. Demostrar el Principio de Saint Venant, el cual establece el esfuerzo normal no es uniforme cerca a la carga P , mostrando un valor máximo $2.575\sigma_m$ a una distancia $b/4$ de la carga puntual, $1.378\sigma_m$ a una distancia $b/2$ y $1.027\sigma_m$ a una distancia b , siendo el esfuerzo medio $\sigma_m = P/(bt)$. Como referencia se puede consultar el libro Resistencia de Materiales de Gere y Goodno (2009).

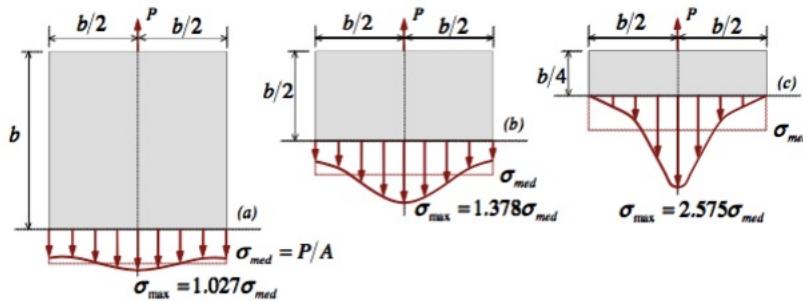


Figura 8.22: Principio de Saint Venant en una lámina sometida a carga puntual.

Proyecto 8.7.2 Una barra plana de espesor t está sometida a una fuerza distribuida uniforme por unidad de área p en sus extremos. La altura de la sección transversal de la barra se reduce de b en el primer y último tercio a c en su tramo central, como lo indica la figura. En el lugar donde cambia la sección transversal se utilizan filetes circulares de radio R para redondear las esquinas. Determine la variación del factor de concentración de esfuerzos K en función de R/c considerando $b/c = 1.1$, $b/c = 1.2$, $b/c = 1.3$, $b/c = 1.5$ y $b/c = 2.0$. Como referencia se puede consultar el libro Resistencia de Materiales de Gere y Goodno (2009). Se considera que en general $c + 2R \neq b$.

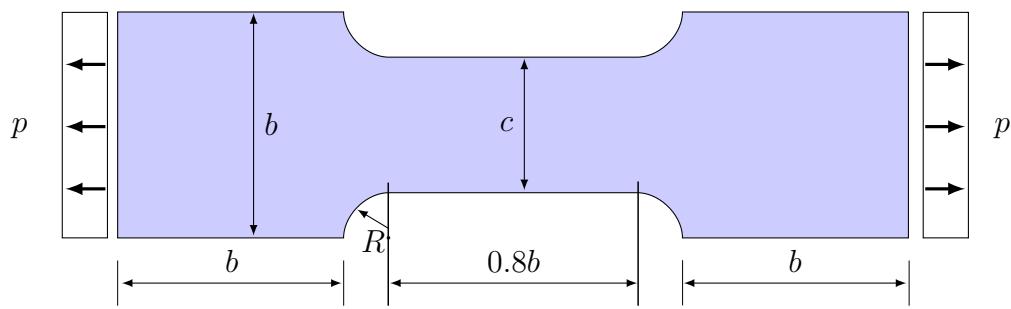
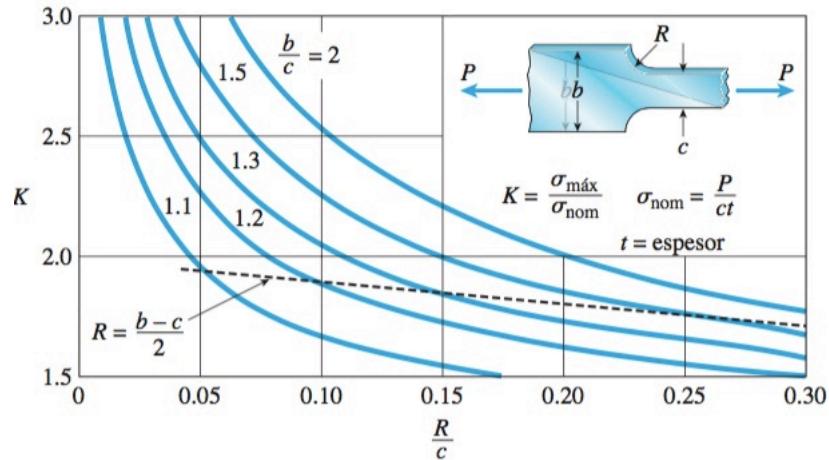


Figura 8.23: Esquema de barra con reducción de la sección transversal sometida a tensión.

Figura 8.24: Factor K de concentración de esfuerzos por cambio de sección transversal en láminas.

Proyecto 8.7.3 Una viga en voladizo de longitud L y sección transversal rectangular de altura h y ancho t , está sometida a una carga distribuida uniforme p a lo largo de su luz, como lo ilustra la Figura 8.25. Obtener la distribución de los esfuerzos normales y cortantes en la sección transversal ubicada en el apoyo ($x = 0$), mediante el método de los elementos finitos. Comparar los resultados anteriores con la solución analítica dada por la teoría de vigas de Euler–Bernoulli. Simular el problema con varias relaciones L/h , para las cuales el error de la solución analítica sea del 5 % al 25 % con respecto al resultado numérico. Calcular el error en la deflexión máxima y los esfuerzos normales y cortantes máximos. Como referencia se puede consultar el libro Resistencia de Materiales de Gere y Goodno (2009).

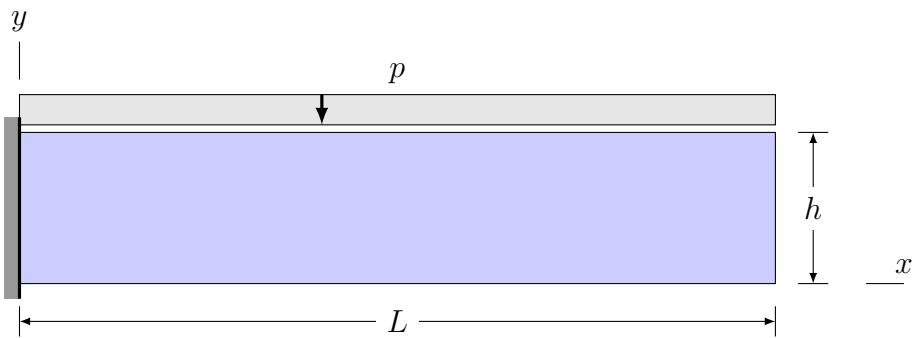


Figura 8.25: Esquema de una viga en voladizo sometida a carga distribuida uniforme.

Proyecto 8.7.4 Simular un puente en arco de dos luces empotrado en los extremos y sometido a carga distribuida uniforme p mediante: (a) un modelo unidimensional de barras sometidas a flexión y (b) un modelo bidimensional de elasticidad. Comparar los esfuerzos normales y cortantes en las secciones transversales de los extremos y en el apoyo intermedio para los dos modelos.

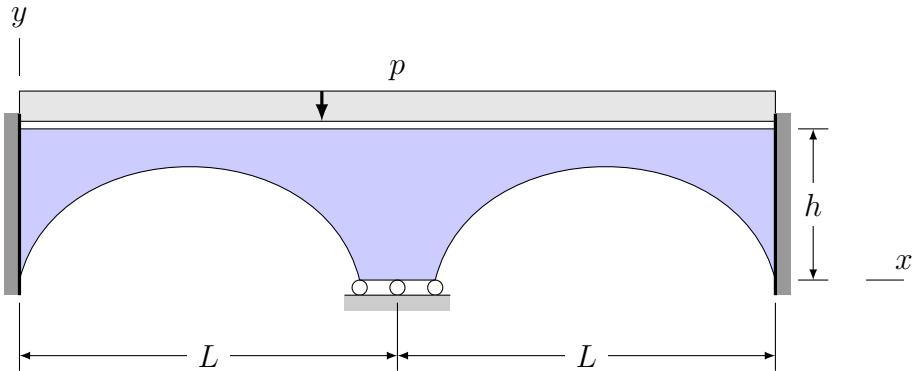


Figura 8.26: Esquema de barra con reducción de la sección transversal sometida a tensión.

Proyecto 8.7.5 Formular e implementar el análisis por elementos finitos de un problema elástico axisimétrico con elementos triangulares lineales. Como referencia se puede consultar el libro Structural Analysis with the Finite Element Method de Eugenio Oñate (2009). Resolver un ejemplo de aplicación.

Proyecto 8.7.6 Formular e implementar el análisis por elementos finitos de un problema elástico bidimensional considerando material ortotrópico con elementos finitos

triangulares lineales y cuadrilaterales bilineales. Como referencia se puede consultar el libro Structural Analysis with the Finite Element Method de Eugenio Oñate (2009). Resolver un ejemplo de aplicación.

Proyecto 8.7.7 Formular e implementar el análisis por elementos finitos de un problema elástico bidimensional con elementos triangulares lineales, considerando un material compuesto conformado por fibras orientadas en una dirección específica, embebidas en una matriz. Establecer como parámetros del material: el módulo de elasticidad y los coeficientes de participación volumétrica de la matriz y las fibras y la relación de Poisson de la matriz. Tal formulación se basa en la teoría de mezclas aplicada a materiales con fibras de diámetro despreciable, la cual se describe en el artículo Plasticity analysis of fibrous composites, en la revista Journal of Applied Mechanics de los autores Dvorak y Bahei-el-Din (1982).

Esta formulación establece que: (i) la deformación $\varepsilon^{(f)}$ en la dirección longitudinal del conjunto de fibras \mathbf{s} es igual a la componente de deformación de la matriz en la misma dirección $\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} \cdot \mathbf{s}$, (ii) la deformación de la matriz y del material compuesto es la misma, (iii) el esfuerzo del material compuesto $\boldsymbol{\sigma}$ es la suma ponderada del esfuerzo en la matriz y el esfuerzo en el conjunto de fibras, es decir,

$$\boldsymbol{\sigma} = k_m \boldsymbol{\sigma}^{(m)} + k_f (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) \boldsymbol{\sigma}^{(f)}$$

donde k_m y k_f son las fracciones volumétricas de la matriz y de las fibras respectivamente.

Resolver un ejemplo de aplicación de una estructura de concreto reforzado.

Proyecto 8.7.8 Formular e implementar el análisis bidimensional elástico que pueda incluir en la misma simulación elementos: triangulares lineales, cuadrilaterales bilineales y unidimensionales lineales de fuerza axial con cualquier orientación.

Resolver un ejemplo de aplicación de una estructura de concreto reforzado, en el cual cada barra de refuerzo se represente con elementos unidimensionales, conservando la compatibilidad en los nudos de la malla de elementos bidimensionales.

Proyecto 8.7.9 Formular e implementar el elemento finito triangular cuadrático de 6 nudos para problemas de elasticidad bidimensional. Simular y comparar un mismo problema con un malla de elementos triangulares lineales y con otra malla de elementos triangulares cuadráticos.

Proyecto 8.7.10 Formular e implementar el elemento finito triangular bi-cuadrático de 9 nudos para problemas de elasticidad bidimensional. Simular y comparar un mismo problema con un malla de elementos cuadrilaterales bi-lineales y con otra malla de elementos cuadrilaterales bi-cuadráticos.

Proyecto 8.7.11 Realizar un análisis de sensibilidad del esfuerzo normal máximo al tamaño de la malla de elementos finitos triangulares lineales y cuadrilaterales bilineales, en una lámina de acero con un orificio sometida a tensión. Considere tres diámetros diferentes del orificio.

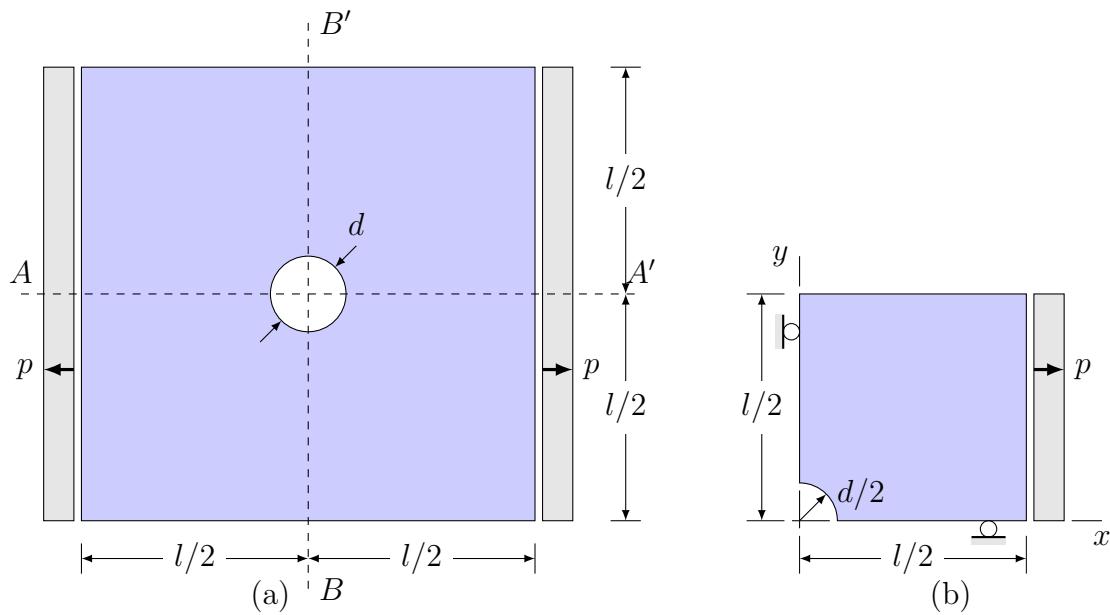


Figura 8.27: Lámina de acero con orificio sometida a tensión: (a) esquema general y (b) dominio de modelación correspondiente a una cuarta parte de la lámina.

Proyecto 8.7.12 Formular e implementar un esquema de análisis incremental de aplicación de la carga con respecto a un pseudo-tiempo, para problemas bidimensionales elásticos. En este proyecto, primero se implementan los vectores de fuerzas equivalentes a la acción de esfuerzos y deformaciones iniciales. Después se construye un ciclo por paso de pseudo-tiempo, dentro del cual se analiza el sólido bajo la acción: (i) del incremento de carga externa y (ii) de los esfuerzos y deformaciones iniciales obtenidos en el paso anterior. Realizar un ejemplo de aplicación.

Capítulo 9

Formulación del problema elástico lineal tridimensional mediante el método de los elementos finitos

El problema mecánico general se puede simplificar cuando se cumplen ciertas condiciones de geometría y de carga. En algunos casos se considera que los campos vectoriales del desplazamiento y de la fuerza están contenidos en el plano y se delimita el dominio de análisis a un espacio bidimensional, como se estudió en los tres capítulos anteriores. En cambio, si la geometría del sólido es irregular, como la presa mostrada en la 9.1(a) o si las cargas no están contenidas en un plano, como se ilustra en la 9.1(b) (Oñate, 2009), es necesario representar el estado tridimensional del esfuerzo, la deformación y el desplazamiento. Por lo tanto, se recurre a la construcción de mallas de elementos finitos tridimensionales cuyos grados de libertad en cada nudo corresponden a las componentes de desplazamiento en las tres direcciones cartesianas.

Retomando la formulación general del problema elástico lineal en el marco del método de los elementos finitos presentada en el Capítulo 5, a continuación se describe un elemento finito tridimensional de elasticidad lineal y se indican algunos ejemplos de aplicación.

9.1. Elemento tetraédrico lineal

El elemento tetraédrico lineal está definido en el espacio mediante cuatro nudos y cuatro caras triangulares como lo muestra la 9.2. Con el fin de asegurar un valor positivo del volumen del elemento, se establece el siguiente procedimiento de numeración de los nudos. Primero, se escoge cualquier nudo del elemento como el nudo 1. Despues se escoge cualquier cara del elemento que contenga a los primeros tres

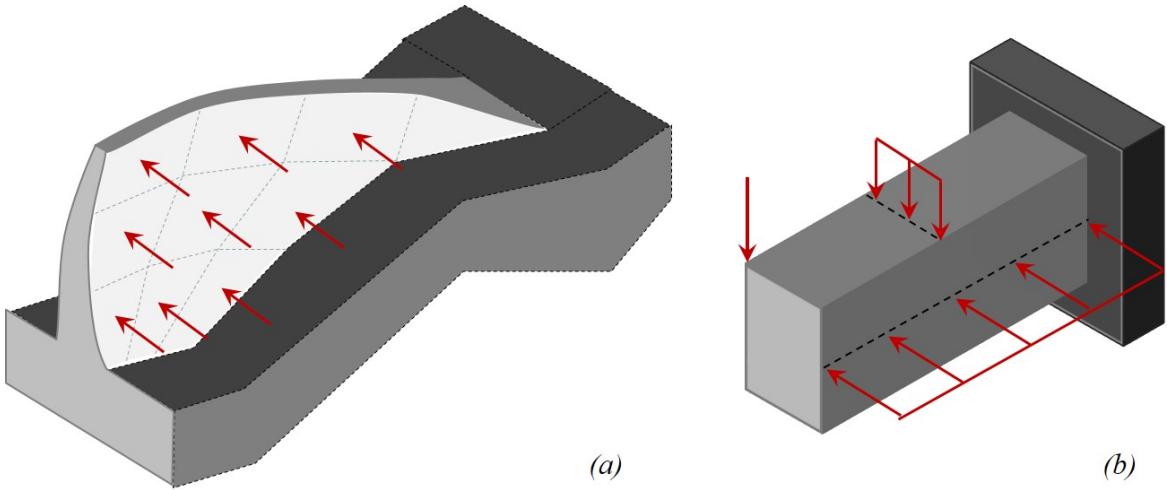


Figura 9.1: Problemas mecánicos analizados en el espacio tridimensional (Oñate, 2009)

nudos y en consecuencia el nudo que no está contenido en dicha cara será el nudo 4. Finalmente, se numeran los tres primeros nudos en sentido anti-horario desde la perspectiva del nudo 4.

En este elemento se considera que las componentes del campo vectorial del desplazamiento en su interior, se describen mediante funciones de aproximación lineales de la forma:

$$\begin{aligned} u^{(e)}(x, y, z) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \quad \forall(x, y, z) \in V^{(e)} \\ v^{(e)}(x, y, z) &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 z \quad \forall(x, y, z) \in V^{(e)} \\ w^{(e)}(x, y, z) &= \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z \quad \forall(x, y, z) \in V^{(e)} \end{aligned} \quad (9.1)$$

Recordando que un desplazamiento nodal se define como la componente de desplazamiento en un nudo del elemento en una dirección específica, los cuatro desplazamientos nodales del elemento tetraédrico en dirección x son iguales a:

$$\begin{aligned} u_1^{(e)} &= u^{(e)}(x_1, y_1, z_1) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 + \alpha_4 z_1 \\ u_2^{(e)} &= u^{(e)}(x_2, y_2, z_2) = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 + \alpha_4 z_2 \\ u_3^{(e)} &= u^{(e)}(x_3, y_3, z_3) = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 z_3 \\ u_4^{(e)} &= u^{(e)}(x_4, y_4, z_4) = \alpha_1 + \alpha_2 x_4 + \alpha_3 y_4 + \alpha_4 z_4 \end{aligned} \quad (9.2)$$

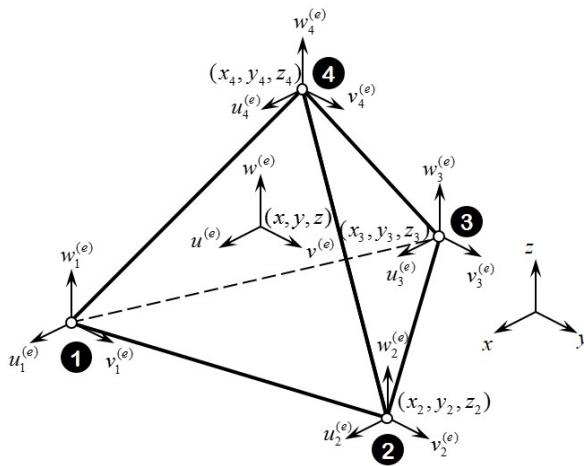


Figura 9.2: Elemento tetraédrico de cuatro nudos: esquema descriptivo.

El conjunto de cuatro ecuaciones escalares anteriores se puede escribir de forma matricial así:

$$\begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \\ u_3^{(e)} \\ u_4^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g} = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} \quad \text{donde} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \quad (9.3)$$

Aplicando la regla de Cramer se pueden obtener las coordenadas generalizadas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ en función de los desplazamientos nodales $u_1^{(e)}, u_2^{(e)}, u_3^{(e)}, u_4^{(e)}$, de la siguiente forma:

$$\alpha_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}} \quad (9.4)$$

Particularmente el determinante de \mathbf{A} corresponde a seis veces el volumen del

tetraedro $V^{(e)}$, es decir:

$$V^{(e)} = \frac{1}{6} \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \quad (9.5)$$

La matriz \mathbf{A}_i presentada en la ecuación (9.4), es aquella formada al remplazar la i -nésima columna de \mathbf{A} por el vector \mathbf{g} de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} u_1^{(e)} & x_1 & y_1 & z_1 \\ u_2^{(e)} & x_2 & y_2 & z_2 \\ u_3^{(e)} & x_3 & y_3 & z_3 \\ u_4^{(e)} & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & u_1^{(e)} & y_1 & z_1 \\ 1 & u_2^{(e)} & y_2 & z_2 \\ 1 & u_3^{(e)} & y_3 & z_3 \\ 1 & u_4^{(e)} & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_3 &= \begin{bmatrix} 1 & x_1 & u_1^{(e)} & z_1 \\ 1 & x_2 & u_2^{(e)} & z_2 \\ 1 & x_3 & u_3^{(e)} & z_3 \\ 1 & x_4 & u_4^{(e)} & z_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & u_1^{(e)} \\ 1 & x_2 & y_2 & u_2^{(e)} \\ 1 & x_3 & y_3 & u_3^{(e)} \\ 1 & x_4 & y_4 & u_4^{(e)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.6)$$

Por lo tanto, las coordenadas generalizadas serán iguales a:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (a_1 u_1^{(e)} + a_2 u_2^{(e)} + a_3 u_3^{(e)} + a_4 u_4^{(e)}) \\ \alpha_2 &= \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (b_1 u_1^{(e)} + b_2 u_2^{(e)} + b_3 u_3^{(e)} + b_4 u_4^{(e)}) \\ \alpha_3 &= \frac{\det \mathbf{A}_3}{\det \mathbf{A}} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (c_1 u_1^{(e)} + c_2 u_2^{(e)} + c_3 u_3^{(e)} + c_4 u_4^{(e)}) \\ \alpha_4 &= \frac{\det \mathbf{A}_4}{\det \mathbf{A}} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (d_1 u_1^{(e)} + d_2 u_2^{(e)} + d_3 u_3^{(e)} + d_4 u_4^{(e)}) \end{aligned} \quad (9.7)$$

En el cálculo del determinante de las matriz \mathbf{A}_1 de 4×4 , cada coeficiente a_i es el determinante de la matriz cuadrada reducida, conformada al eliminar la fila i y la columna i de la matriz \mathbf{A}_1 , multiplicada por $(-1)^{(i+1)}$. Asimismo, los coeficientes b_i , c_i y d_i son los determinantes del mismo tipo de matriz reducida, excluyendo la fila

$$\begin{aligned}
a_1 &= \det \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} & a_2 &= -\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} \\
a_3 &= \det \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ 1 & y_2 & z_2 \end{bmatrix} & a_4 &= -\det \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} \\
b_1 &= -\det \begin{bmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \\ 1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} & b_2 &= \det \begin{bmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \\ 1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} \\
b_3 &= -\det \begin{bmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_4 & z_4 \\ 1 & x_2 & z_2 \end{bmatrix} & b_4 &= \det \begin{bmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_1 & z_1 \end{bmatrix} \\
c_1 &= \det \begin{bmatrix} 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \\ 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \end{bmatrix} & c_2 &= -\det \begin{bmatrix} 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \\ 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \end{bmatrix} \\
c_3 &= \det \begin{bmatrix} 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_4 & z_4 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} & c_4 &= -\det \begin{bmatrix} 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \\
d_1 &= -\det \begin{bmatrix} 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{bmatrix} & d_2 &= \det \begin{bmatrix} 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{bmatrix} \\
d_3 &= -\det \begin{bmatrix} 1 & x_4 & y_4 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} & d_4 &= \det \begin{bmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Tabla 9.1: Coeficientes de las funciones de forma de un elemento tetraédrico lineal

y columna i de las matrices \mathbf{A}_2 , \mathbf{A}_3 y \mathbf{A}_4 , respectivamente. Tales determinantes se indican en la Tabla 9.1.

Sustituyendo las coordenadas generalizadas en la función de aproximación del desplazamiento en x dada en la Ecuación (9.1), se tiene:

$$u^{(e)}(\mathbf{x}) = N_1^{(e)}(\mathbf{x})u_1^{(e)} + N_2^{(e)}(\mathbf{x})u_2^{(e)} + N_3^{(e)}(\mathbf{x})u_3^{(e)} + N_4^{(e)}(\mathbf{x})u_4^{(e)} \quad (9.8)$$

donde la función de forma del nudo i en el elemento e indicada como $N_i^{(e)}$ es igual a:

$$N_i^{(e)}(x, y, z) = \frac{1}{6V^{(e)}}(a_i + b_i x + c_i y + d_i z) \quad \forall(x, y, z) \in V^{(e)} \quad (9.9)$$

Asimismo, las componentes de desplazamiento en dirección y y z se pueden expresar en función de los valores nodales de desplazamiento de la forma:

$$\begin{aligned} u^{(e)}(\mathbf{x}) &= N_1^{(e)}(\mathbf{x})u_1^{(e)} + N_2^{(e)}(\mathbf{x})u_2^{(e)} + N_3^{(e)}(\mathbf{x})u_3^{(e)} + N_4^{(e)}(\mathbf{x})u_4^{(e)} \\ v^{(e)}(\mathbf{x}) &= N_1^{(e)}(\mathbf{x})v_1^{(e)} + N_2^{(e)}(\mathbf{x})v_2^{(e)} + N_3^{(e)}(\mathbf{x})v_3^{(e)} + N_4^{(e)}(\mathbf{x})v_4^{(e)} \\ w^{(e)}(\mathbf{x}) &= N_1^{(e)}(\mathbf{x})w_1^{(e)} + N_2^{(e)}(\mathbf{x})w_2^{(e)} + N_3^{(e)}(\mathbf{x})w_3^{(e)} + N_4^{(e)}(\mathbf{x})w_4^{(e)} \end{aligned} \quad (9.10)$$

En problemas mecánicos tridimensionales, el vector de desplazamientos nodales del elemento finito e está conformado por las componentes de desplazamiento en cada uno de los nudos de la forma:

$$\mathbf{a}_{(e)} = \left[\mathbf{a}_1^{(e)T} \mid \mathbf{a}_2^{(e)T} \mid \mathbf{a}_3^{(e)T} \mid \mathbf{a}_4^{(e)T} \right]^T \quad (9.11)$$

siendo $\mathbf{a}_i^{(e)}$ el subvector de componentes de desplazamiento del nudo i , es decir:

$$\mathbf{a}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} u_i^{(e)} & v_i^{(e)} & w_i^{(e)} \end{bmatrix}^T \quad (9.12)$$

Por lo tanto, la matriz de funciones de forma de un elemento tetraédrico de cuatro nudos se expresa como:

$$\mathbf{N}_{(e)} = \left[\mathbf{N}_1^{(e)} \mid \mathbf{N}_2^{(e)} \mid \mathbf{N}_3^{(e)} \mid \mathbf{N}_4^{(e)} \right] \quad (9.13)$$

donde la submatriz de funciones de forma del nudo i es igual a:

$$\mathbf{N}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} N_i^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & N_i^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & N_i^{(e)} \end{bmatrix} \quad (9.14)$$

De acuerdo con las expresiones anteriores, el campo vectorial de los desplazamientos en el interior del elemento $\mathbf{u}^{(e)} = [u^{(e)} \ v^{(e)} \ w^{(e)}]^T$, cuyas componentes están expresadas en la Ecuación (9.10), se puede escribir de forma matricial como $\mathbf{u}_{(e)} = \mathbf{N}_{(e)}\mathbf{a}_{(e)}$.

El operador diferencial para problemas mecánicos tridimensionales actuando sobre la matriz de funciones de forma es igual a:

$$\mathbf{B}_{(e)} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{B}_1^{(e)} & \mathbf{B}_2^{(e)} & \mathbf{B}_3^{(e)} & \mathbf{B}_4^{(e)} \end{array} \right] \quad (9.15)$$

donde la submatriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma del nudo i es igual a:

$$\mathbf{B}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_y & \partial_x & 0 \\ \partial_z & 0 & \partial_x \\ 0 & \partial_z & \partial_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & N_i^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & N_i^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x N_i^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y N_i^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z N_i^{(e)} \\ \partial_y N_i^{(e)} & \partial_x N_i^{(e)} & 0 \\ \partial_z N_i^{(e)} & 0 & \partial_x N_i^{(e)} \\ 0 & \partial_z N_i^{(e)} & \partial_y N_i^{(e)} \end{bmatrix} \quad (9.16)$$

Sustituyendo la expresión de las funciones de forma de un elemento tetraédrico dada en la Ecuación (9.9) se obtiene:

$$\mathbf{B}_i^{(e)} = \frac{1}{6V^{(e)}} \begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \\ c_i & b_i & 0 \\ d_i & 0 & b_i \\ 0 & d_i & c_i \end{bmatrix} \quad (9.17)$$

Los términos de la matriz anterior son constantes con respecto a la posición en el interior del elemento. Por lo tanto, la matriz columna de las componentes de deformación en el interior del elemento tetraédrico de cuatro nudos , obtenidas como

$\boldsymbol{\varepsilon}_{(e)} = \mathbf{B}_{(e)} \mathbf{a}_{(e)}$, también son constantes. Tal matriz columna es de la forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(e)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zz} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{bmatrix}^T$$

Conocido el campo de las deformaciones, la matriz columna de las componentes de esfuerzo en el interior del elemento está definida como $\boldsymbol{\sigma}_{(e)} = \mathbf{D}_{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}_{(e)}$, siendo $\mathbf{D}_{(e)}$ la matriz constitutiva de un material elástico, lineal e isótropo dada en la Ecuación (2.23). Tal matriz columna es de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma}_{(e)}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{zz} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} & \sigma_{yz} \end{bmatrix}^T$$

La matriz de rigidez de un elemento tetraédrico de cuatro nudos se obtiene a partir de la Ecuación (5.12), definida para elementos finitos tridimensionales, como se indica a continuación:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(e)} & \mathbf{K}_{12}^{(e)} & \mathbf{K}_{13}^{(e)} & \mathbf{K}_{14}^{(e)} \\ \vdots & \mathbf{K}_{22}^{(e)} & \mathbf{K}_{23}^{(e)} & \mathbf{K}_{24}^{(e)} \\ \vdots & \vdots & \mathbf{K}_{33}^{(e)} & \mathbf{K}_{34}^{(e)} \\ sim & \vdots & \vdots & \mathbf{K}_{44}^{(e)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}_i^{(e)T} \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_j^{(e)} dV \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \quad (9.18)$$

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \frac{1}{36V^{(e)}} \begin{bmatrix} (D_{11}b_i b_j + D_{44}c_i c_j + D_{55}d_i d_j) & (D_{12}b_i c_j + D_{44}c_i b_j) \\ (D_{12}c_i b_j + D_{44}b_i c_j) & (D_{22}c_i c_j + D_{44}b_i b_j + D_{66}d_i d_j) \\ (D_{13}d_i b_j + D_{55}b_i d_j) & (D_{23}d_i c_j + D_{66}c_i d_j) \\ (D_{13}b_i d_j + D_{55}d_i b_j) & (D_{23}c_i d_j + D_{66}d_i c_j) \\ (D_{33}d_i d_j + D_{55}b_i b_j + D_{66}c_i c_j) & \end{bmatrix} \quad (9.19)$$

$$D_{11} = D_{22} = D_{33} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad D_{12} = D_{13} = D_{23} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$D_{44} = D_{55} = D_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

El vector de fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas de cuerpo o distribuidas por unidad de volumen $\mathbf{f}_b^{(e)}$ del elemento tetraédrico de cuatro nudos se obtiene a partir de la Ecuación (5.13) así:

$$\mathbf{f}_b^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{b1}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{b2}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{b3}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{b4}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{bi}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{N}_i^{(e)T} \mathbf{b}_{(e)} dV = \frac{V^{(e)}}{4} \begin{bmatrix} b_x^{(e)} \\ b_y^{(e)} \\ b_z^{(e)} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (9.20)$$

El vector de fuerzas nodales equivalentes a las cargas distribuidas por unidad de superficie $\mathbf{f}_s^{(e)}$ actuantes sobre las nc caras del elemento es igual a:

$$\mathbf{f}_s^{(e)} = \sum_{c=1}^{nc} \mathbf{f}_{sc}^{(e)}, \quad \mathbf{f}_{sc}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{sc1}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{sc2}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{sc3}^{(e)} \\ \mathbf{f}_{sc4}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_c^{(e)} = \begin{bmatrix} p_{xc}^{(e)} \\ p_{yc}^{(e)} \\ p_{zc}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (9.21)$$

$$\mathbf{f}_{sci}^{(e)} = \int_{A_c^{(e)}} \mathbf{N}_i^{(e)T} \mathbf{p}_c^{(e)} dA = \frac{A_c^{(e)}}{3} \begin{bmatrix} p_{xc}^{(e)} \\ p_{yc}^{(e)} \\ p_{zc}^{(e)} \end{bmatrix} \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3, 4 \\ c = (123), (124), (234), (134) \end{cases}$$

donde para cada cara se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{s123}^{(e)} &= \frac{A_{123}^{(e)}}{3} \left[\begin{array}{cccc|cccc|ccc} p_{x123}^{(e)} & p_{y123}^{(e)} & p_{z123}^{(e)} & p_{x123}^{(e)} & p_{y123}^{(e)} & p_{z123}^{(e)} & p_{x123}^{(e)} & p_{y123}^{(e)} & p_{z123}^{(e)} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]^T \\ \mathbf{f}_{s124}^{(e)} &= \frac{A_{124}^{(e)}}{3} \left[\begin{array}{cccc|cccc|ccc} p_{x124}^{(e)} & p_{y124}^{(e)} & p_{z124}^{(e)} & p_{x124}^{(e)} & p_{y124}^{(e)} & p_{z124}^{(e)} & 0 & 0 & 0 & p_{x124}^{(e)} & p_{y124}^{(e)} & p_{z124}^{(e)} \end{array} \right]^T \\ \mathbf{f}_{s234}^{(e)} &= \frac{A_{234}^{(e)}}{3} \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & p_{x234}^{(e)} & p_{y234}^{(e)} & p_{z234}^{(e)} & p_{x234}^{(e)} & p_{y234}^{(e)} & p_{z234}^{(e)} & p_{x234}^{(e)} & p_{y234}^{(e)} & p_{z234}^{(e)} \end{array} \right]^T \\ \mathbf{f}_{s134}^{(e)} &= \frac{A_{134}^{(e)}}{3} \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} p_{x134}^{(e)} & p_{y134}^{(e)} & p_{z134}^{(e)} & 0 & 0 & 0 & p_{x134}^{(e)} & p_{y134}^{(e)} & p_{z134}^{(e)} & p_{x134}^{(e)} & p_{y134}^{(e)} & p_{z134}^{(e)} \end{array} \right]^T \end{aligned} \quad (9.22)$$

Por ejemplo, la presión $p_{x124}^{(e)}$ aplicada en dirección x sobre la cara 124 es equivalente a fuerzas puntuales en los nudos 1, 2 y 4 de $\frac{1}{3}A_{124}^{(e)}p_{x124}^{(e)}$, como lo ilustra la Figura 9.3.

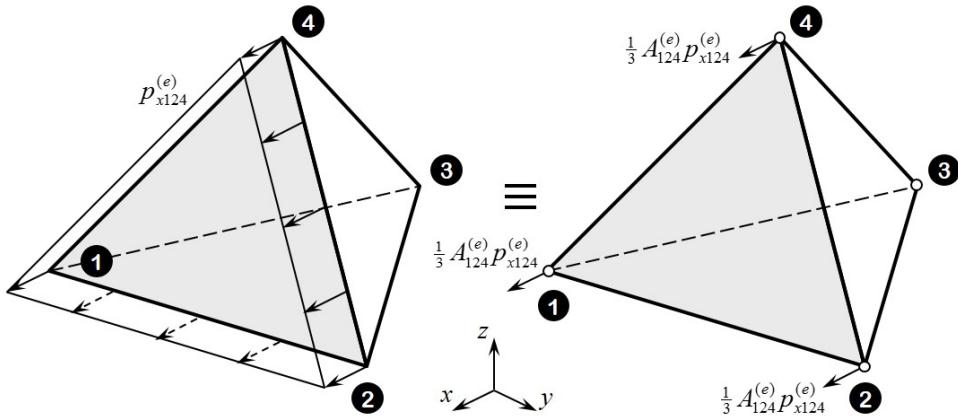


Figura 9.3: Elemento tetraédrico de cuatro nudos: presión en dirección x sobre la cara 124.

9.2. Otros elementos finitos tridimensionales

En un espacio tridimensional se definen elementos finitos hexaédricos, cuyas funciones de forma son obtenidas del producto entre polinomios de Lagrange (Oñate, 2009). Dos ejemplos son los elementos hexaédricos lineales regular e isoparamétrico de 8 nudos presentados en la Figura 9.4(a) y Figura 9.4(b), respectivamente. Asimismo, en la Figura 9.4(c) y Figura 9.4(d) se muestra el elemento hexaédrico cuadrático de 20 nudos de geometría regular e isoparamétrica.

9.3. Ejemplos de aplicación

A continuación se ilustran dos simulaciones numéricas de ensayos experimentales de concreto y acero mostrados en la Figura 9.12(g) y Figura 9.13(d).

9.3.1. Ensayo de resistencia al arrancamiento del concreto

Este ensayo experimental busca determinar la resistencia a la compresión del concreto, mediante la evaluación de la fuerza necesaria para desprender la cabeza de una barra de acero embebida en su interior. Este ensayo ha sido estandarizado en la norma ASTM C-900 (ASTM, 2007). En particular la Figura 9.5 describe el ensayo de arrancamiento de una barra y cabezal de acero con 10 mm y 30 mm de diámetro, respectivamente, embebidos en una región cilíndrica de concreto de 60 mm de altura y 120 mm de diámetro. Se considera que el concreto tiene un módulo de Young $E_c = 20$ GPa,

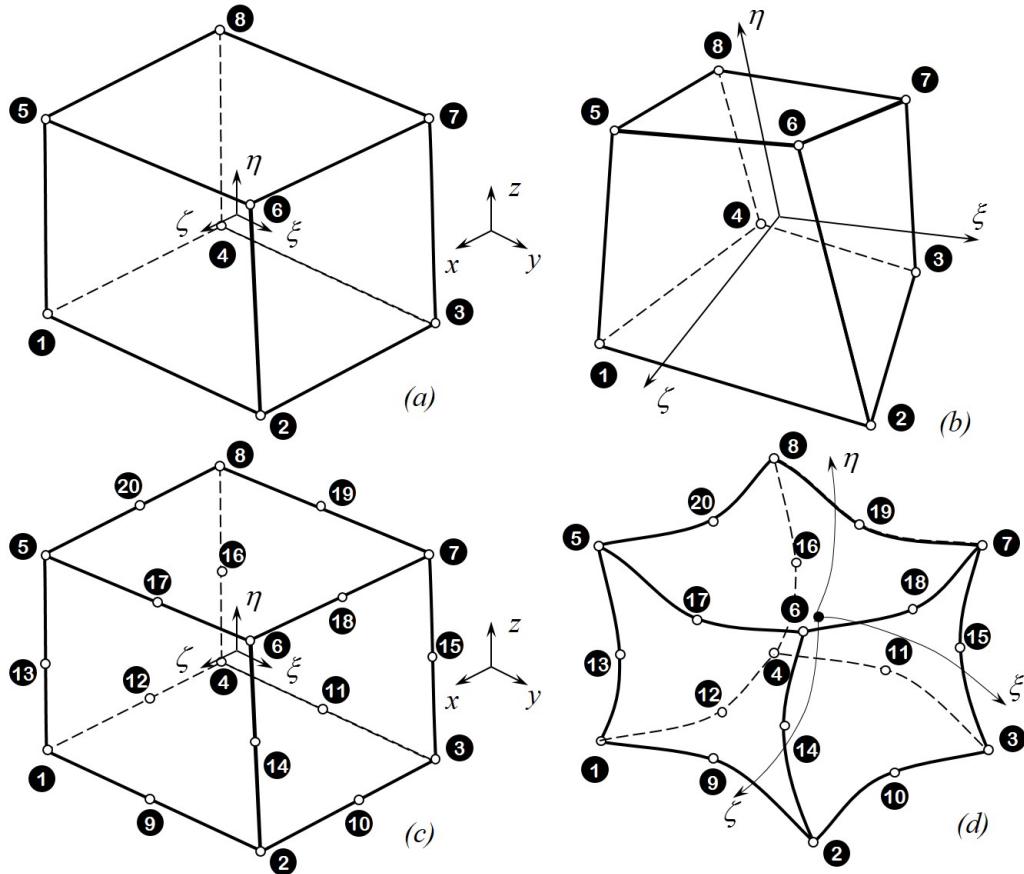


Figura 9.4: Algunos elementos tridimensionales hexaédricos: (a) regular de 8 nudos, (b) isoparamétrico de 8 nudos, (c) regular de 20 nudos y (d) isoparamétrico de 20 nudos.

una relación de Poisson $\nu_c = 0.25$ y resistencia a la compresión $\sigma_{cu} = 26.3$ MPa, mientras que el acero cuenta con un módulo de elasticidad $E_a = 200$ GPa, una relación de Poisson $\nu_a = 0.20$ y esfuerzo de fluencia $\sigma_{ay} = 250$ MPa. La región de concreto se apoya en un anillo circular y se aplica una carga puntual P en el extremo de la barra de acero. Los dos materiales solamente están en contacto en la cara superior del cabezal.

El objetivo de este ejemplo es determinar: (i) la carga puntual P_{cl} , para la cual el esfuerzo principal menor del concreto alcanza el esfuerzo límite de proporcionalidad en compresión dado como el 40 % de la resistencia la compresión $\sigma_{cl} = 0.40\sigma_{cu}$, (ii) la carga puntual P_{tl} , para la cual el esfuerzo principal mayor del concreto alcanza el esfuerzo límite de proporcionalidad en tensión dado como el 10 % de la resistencia la

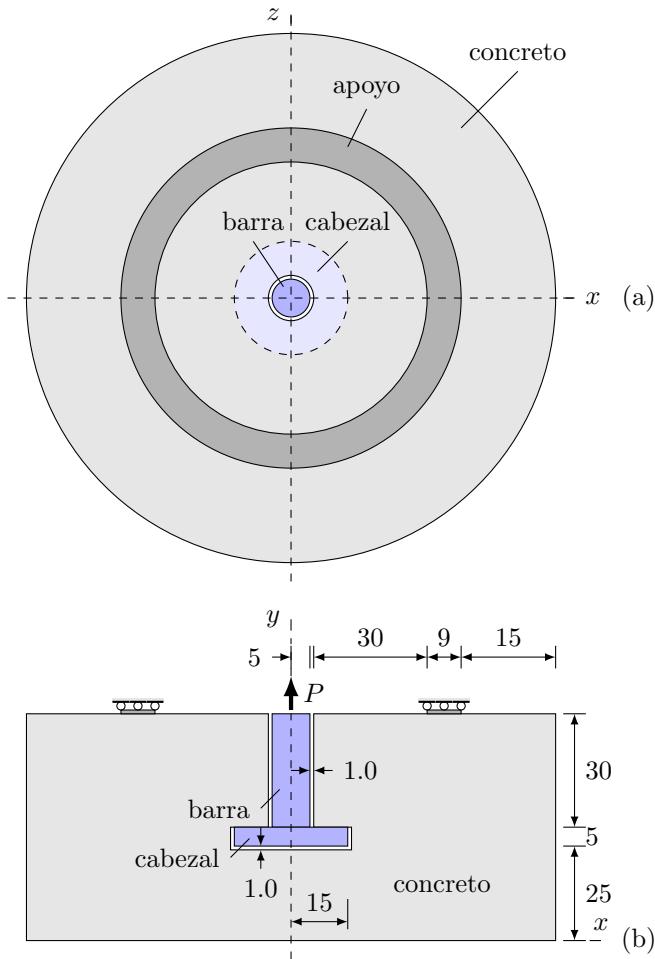


Figura 9.5: Esquema del ensayo resistencia al arrancamiento del concreto: (a) plano xz , (b) plano xy .

compresión $\sigma_{tl} = 0.10\sigma_{cu}$ y (iii) la carga puntual P_{ay} , para la cual el esfuerzo de Von Mises del acero alcanza su fluencia σ_{ay} .

El problema exhibe una simetría que permite simplificar su dominio a una cuarta parte, incluyendo condiciones de borde sobre los dos ejes de simetría, como se muestra en la Figura 9.6. En la simulación se aplica una presión uniforme sobre la cara superior de la barra $w_y = P/A$, asumiendo un valor de $P = 1 \text{ N}$ y recordando que el área de la sección transversal de la barra es $A = \pi \cdot (10 \text{ mm})^2 / 4 = 78.54 \text{ mm}^2$. En consecuencia, la carga $w_y = 12.73 \times 10^{-3} \text{ N/mm}^2$.

Se construyeron 3 mallas de elementos finitos tetraédricos lineales de mayor den-

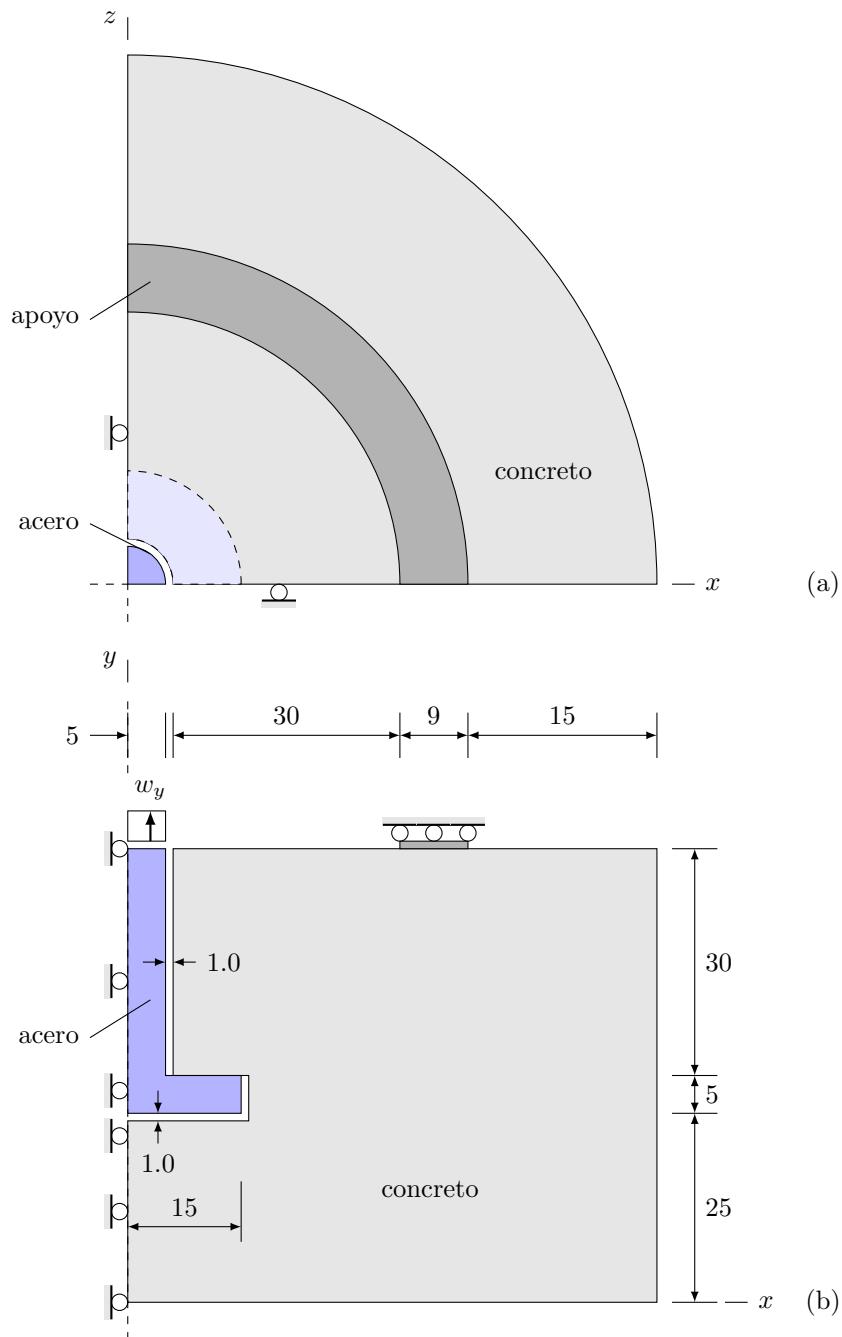


Figura 9.6: Dominio simulado correspondiente a una cuarta parte del ensayo resistencia al arrancamiento del concreto:
 (a) plano xz , (b) plano xy .

malla	n.nudos	n.elems	tmzi(mm)	$\sigma_{c,1}^{\text{máx}}(\text{Pa})$	$ \sigma_{c,3}^{\text{máx}} (\text{Pa})$	$\sigma_{a,vm}^{\text{máx}}(\text{Pa})$
pullout1	3124	13959	2.0	1130	2680	11800
pullout2	6113	28927	1.5	1310	3840	16300
pullout3	15205	77089	1.0	1690	4300	16700

Tabla 9.2: Características y resultados representativos de las mallas de elementos finitos utilizadas en el ensayo de resistencia al arrancamiento del concreto.

sidad en la zona de interés, cercana al contacto entre el cabezal de acero y el concreto. Tales mallas se generaron con el programa GMSH y se analizó el problema con el programa PEFICA 2.0 (Linero, Estrada, & Garzón, 2020). Las características de las mallas y los resultados representativos obtenidos se ilustran en la Tabla 9.2, donde las columnas $\sigma_{c,1}^{\text{máx}}$, $|\sigma_{c,3}^{\text{máx}}|$ y $\sigma_{a,vm}^{\text{máx}}$, corresponden al valor máximo en la malla del esfuerzo principal mayor del concreto, del esfuerzo principal menor en valor absoluto sobre el concreto y del esfuerzo de Von Mises en el acero, respectivamente. La columna tmzi indica el tamaño promedio del lado de los elementos finitos en la zona de interés.

La Figura 9.7(a), (b) y (c) presentan las 3 mallas de elementos finitos tetraédricos lineales utilizadas para simular este problema. Se diferencia en colores los elementos de concreto y de acero.

Después del análisis se obtuvo el campo del desplazamiento, el esfuerzo y la deformación sobre el concreto y el acero. Los desplazamientos nodales y la configuración deformada del sólido bajo el efecto del arrancamiento se puede observar en la Figura 9.7(d).

La Figura 9.8(a) muestra la distribución del esfuerzo principal mayor σ_1 sobre el concreto, obtenida en la malla de mayor cantidad de elementos. Tal esfuerzo adquiere un valor máximo de $\sigma_1^{\text{máx}} = 1690 \times 10^{-6}$ MPa en el contorno del orificio cerca del cabezal.

El esfuerzo de Von Mises máximo en el acero se presenta en la unión entre la barra y el cabezal con un valor de 0.016700 MPa, como lo indica la Figura 9.8(b).

La Figura 9.8(c) muestra la distribución del esfuerzo principal menor σ_3 sobre el concreto. Tal esfuerzo adquiere un valor máximo absoluto de $|\sigma_3^{\text{máx}}| = 0.004300$ MPa en la zona de contacto con el cabezal de acero y se reduce progresivamente hasta el apoyo formando un tronco de cono. Asimismo, la deformación principal menor ε_3 exhibe una distribución similar como lo indica la Figura 9.8(d), cuyo valor máximo es $|\varepsilon_3^{\text{máx}}| = 2.31 \times 10^{-7}$.

De acuerdo a lo anterior, la relación entre el esfuerzo permisible a compresión y el

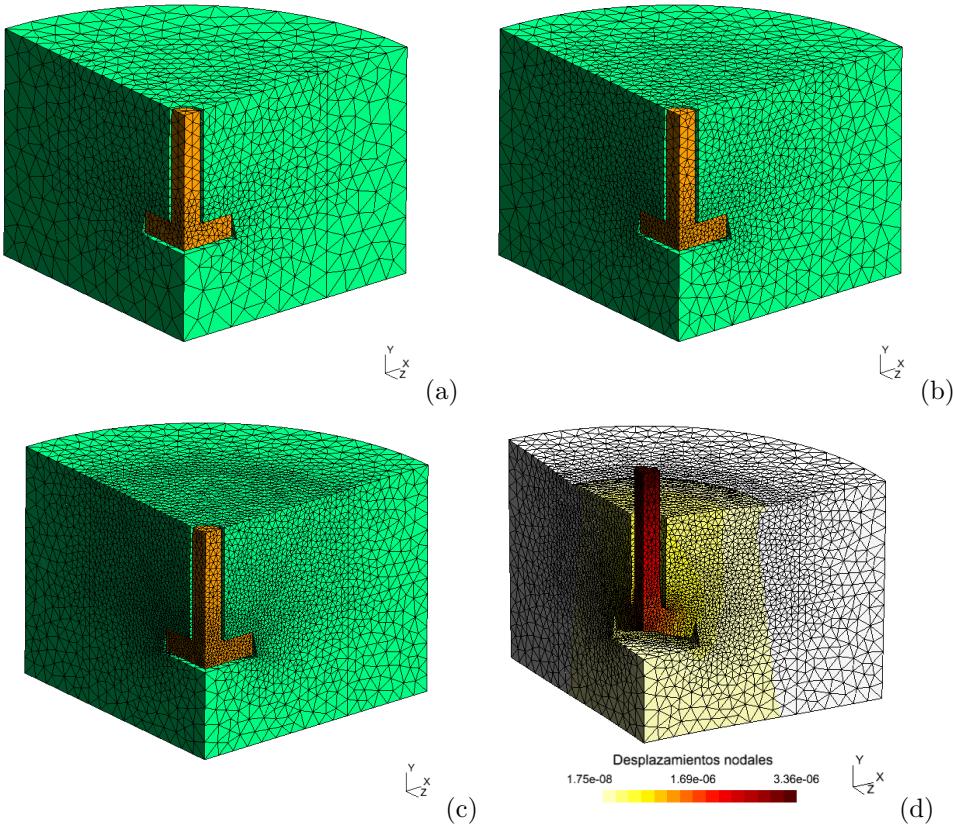


Figura 9.7: Simulación del ensayo de resistencia al arrancamiento del concreto: (a) malla de 3124 nudos, (b) malla de 6113, (c) malla de 15205 y (d) desplazamientos nodales en mm y configuración deformada.

esfuerzo principal menor actuante en el concreto es $n_{cl} = 0.40 \cdot 26.3 / 0.004300 = 2\,446$ y en consecuencia la carga puntual que alcanza el esfuerzo límite de proporcionalidad del concreto en compresión es $P_{cl} = 2.45$ kN.

Por otro lado, el cociente entre el esfuerzo permisible de tensión y el esfuerzo principal mayor actuante en el concreto es $n_{tl} = 0.10 \cdot 26.3 / 0.0001690 = 15\,562$, esto indica que la carga puntual que alcanza el esfuerzo límite de proporcionalidad del concreto en tensión es $P_{tl} = 15.57$ kN.

La relación entre el esfuerzo de fluencia y el esfuerzo de Von Mises actuante en el acero es $n_{ay} = 250 / 0.016700 = 14\,970$ y en consecuencia la carga puntual que alcanza el esfuerzo de fluencia en el acero es $P_{ay} = 14.97$ kN.

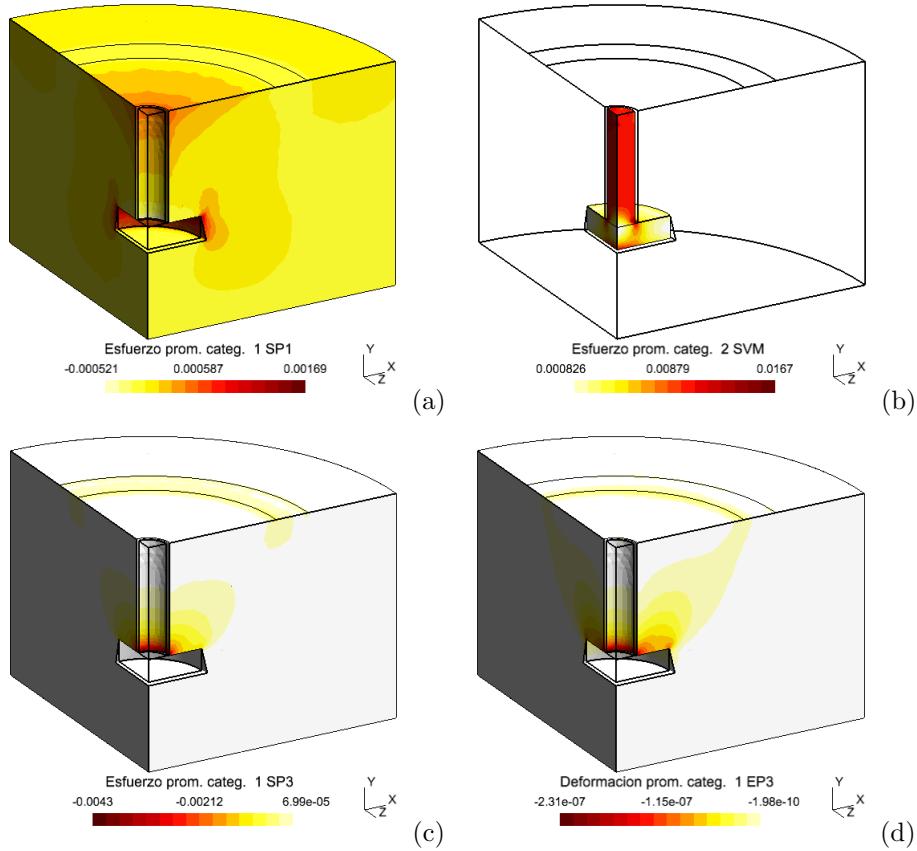


Figura 9.8: Simulación del ensayo de resistencia al arrancamiento del concreto: (a) esfuerzo principal mayor promedio en los nudos sobre el concreto dado en MPa, (b) esfuerzo de Von Mises promedio en los nudos sobre el acero dado en MPa, (c) esfuerzo principal menor promedio en los nudos sobre el concreto dado en MPa y (d) deformación principal menor promedio en los nudos sobre el concreto.

9.3.2. Ensayo de compresión de un cilindro de concreto como material formado por agregados y mortero

Se simuló un ensayo experimental de compresión uniforme de un cilindro de concreto, representado como un material compuesto conformado por un 20 % en volumen de partículas esféricas de agregado embebidas en un 80 % de matriz de mortero. Se estableció una granulometría específica del concreto y una ubicación aleatoria de 72 partículas (Linero & Amaya, 2018). El cilindro tiene un diámetro de $d = 3'' = 0.0762\text{ m}$ y una altura de $h = 6'' = 0.1524\text{ m}$, está apoyado en sentido longitudinal en su cara inferior y está sometido a un desplazamiento vertical uniforme en su cara superior de $\delta = -1\text{ mm}$, que genera una reacción distribuida p (Figura 9.9).

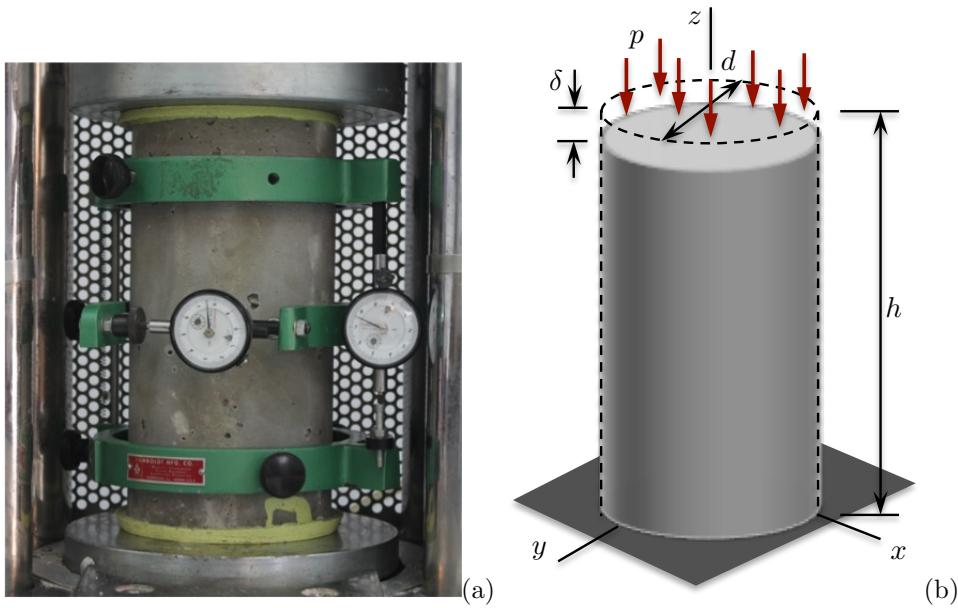


Figura 9.9: Ensayo de compresión de un cilindro de concreto como material formado por agregados y mortero: (a) fotografía, (b) esquema.

Se considera que el mortero tiene un módulo de Young $E_m = 25 \text{ GPa}$, una relación de Poisson $\nu_m = 0.2$, mientras que el agregado cuenta con un módulo de elasticidad $E_a = 70 \text{ GPa}$ y una relación de Poisson $\nu_a = 0.2$.

El objetivo de este ejemplo es determinar: (i) el módulo de elasticidad del concreto $E_c = p/\bar{\varepsilon}_{zz}$ a partir del presión de reacción en la cara superior $p = \sum R_z/A$ y la deformación longitudinal media $\bar{\varepsilon}_{zz} = \delta/h = -0.001 \text{ m}/0.1524 \text{ m} = -6.561 \times 10^{-3}$, y (ii) determinar la distribución del esfuerzo principal menor σ_3 sobre el agregado y sobre el mortero.

Con el programa GMSH se genera una malla de 15104 nudos y 77082 elementos tetraédricos lineales, asociados a parámetros mecánicos diferentes para el mortero y los agregados, como lo muestra la Figura 9.10(a) y (b).

Se analizó el problema con el programa PEFiCA 2.0 (Linero *et al.*, 2020), obteniendo el campo del desplazamiento y la configuración deformada mostrada en la Figura 9.10(c). La sumatoria de las fuerzas de reacción en la cara superior del cilindro son iguales a $\sum R_z = -907.87 \text{ kN}$, y por lo tanto la presión reactiva es $p = \sum R_z/A = -907.87 \text{ kN}/(\pi \cdot (0.0381 \text{ m})^2) = -199\,078 \text{ kN/m}^2$. El módulo de elasticidad del concreto se obtiene como $E_c = -199\,078 \text{ GPa}/-6.561 \times 10^{-3} = 30.34 \text{ GPa}$.

Por otro lado, se obtuvo la distribución del esfuerzo principal menor σ_3 en cada

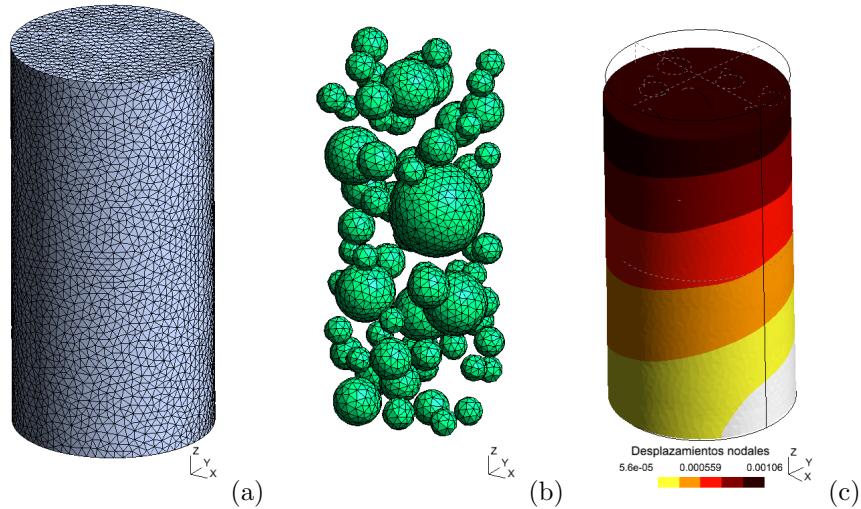


Figura 9.10: Ensayo de compresión de un cilindro de concreto como material formado por agregados y mortero: (a) malla de elementos finitos de la matriz de mortero, (b) malla de elementos finitos de las esferas de agregado, y (c) desplazamiento y configuración deformada.

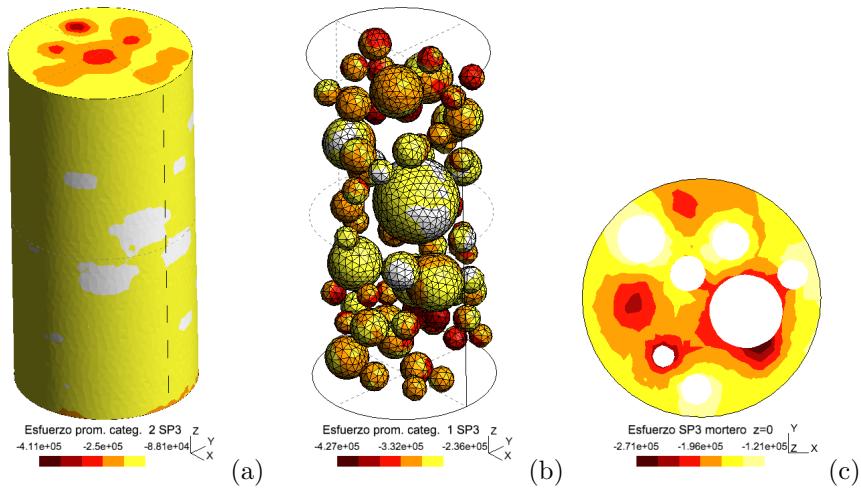


Figura 9.11: Esfuerzo principal menor en la simulación del ensayo de compresión de un cilindro de concreto, medido en kN/m^2 : (a) vista tridimensional en el mortero, (b) vista tridimensional en el agregado, y (c) vista de un corte para $z = 0$ en el mortero.

material como se indica en la Figura 9.11. Allí se observa que el valor mínimo de σ_3 es $-411,000 \text{ kN/m}^2$ en el mortero y $-427,000 \text{ kN/m}^2$ en el agregado, lo cual corresponde a 2.06 y 2.14 veces la presión sobre la cara superior p , respectivamente.

9.3.3. Comportamiento de los conectores de cortante en una sección compuesta

El objetivo de la primera simulación es conocer el comportamiento a cortante de un sistema de sección compuesta por dos placas de concreto conectadas por tornillos a un perfil I de acero (Hurtado, 2007). Este problema fue simulado utilizando el programa comercial ANSYS (ANSYS, 2006). Dada la simetría del modelo físico con respecto al eje z , se modeló la mitad de la estructura, representando medio perfil I (Figura 9.12(a)), dos tornillos conectores de cortante (Figura 9.12(b)) y una placa de concreto (Figura 9.12(c)). Una carga distribuida se aplicó en el extremo anterior sobre la sección transversal del perfil, mientras que se restringieron los desplazamientos en el extremo posterior de la sección trasversal de la placa de concreto. Las Figura 9.12(c) y Figura 9.12(d) muestran las distribuciones de la componente de desplazamiento en dirección z sobre la placa de concreto y la componente de esfuerzo normal en z sobre el perfil y los conectores de acero, respectivamente.

9.3.4. Comportamiento de una conexión en acero de una viga I y una columna tubular rellena de concreto

La segunda simulación busca representar el comportamiento de la conexión de una viga I y una columna tubular rellena de concreto bajo la acción de un momento flector (Uribe, 2008). Este problema fue simulado utilizando el programa comercial ANSYS (ANSYS, 2006). Esta simulación reproduce el ensayo experimental mostrado en la 9.13(d), en el cual crearon mallas de elementos finitos diferenciando los perfiles de acero, los pernos y el núcleo de concreto (9.13(a), (b), (c)). Se establece el *criterio de la energía máxima de distorsión o criterio de von Mises* para identificar el inicio de la fluencia de los elementos en acero (Popov, 1998; Oliver & Agelet, 2002; Linero & Garzón, 2010). En consecuencia, se obtiene la distribución del esfuerzo equivalente de von Mises en el contorno de la conexión, en la placa extendida y en los pernos, mostrado en las Figura 9.14(a), (b), y En cambio, el inicio de la fractura del concreto se representa con el criterio del esfuerzo normal máximo y se indica con la distribución del esfuerzo principal máximo sobre el núcleo de la columna, respectivamente. En cambio, el inicio de la fractura del concreto se representa con el *criterio del esfuerzo normal máximo* y se indica con la distribución del esfuerzo principal máximo sobre el núcleo de la columna (**Figura 9.14(d)**).

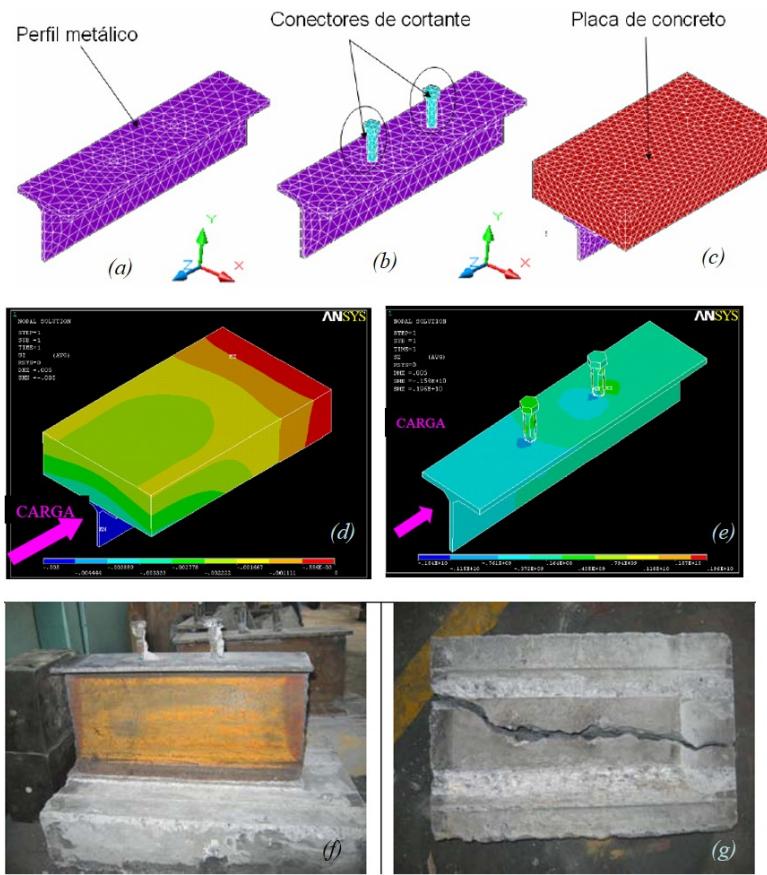


Figura 9.12: Simulación numérica de una sección compuesta sometida a cortante: (a), (b) y (c) malla de elementos finitos del perfil metálico, los conectores y la placa de concreto, (d) distribución del desplazamiento en z sobre la placa de concreto, (e) distribución del esfuerzo normal en z sobre el perfil y lo conectores de acero, (f) ensayo experimental del perfil y conectores y (g) ensayo experimental de la placa de concreto (Hurtado, 2007).

9.4. Problemas propuestos

Un bloque en forma de hexaedro regular de 0.40 m por 0.30 m por 0.30 m es representado mediante una malla de cinco elementos finitos tetraédricos lineales, cuya tabla de conectividades se indica en la Tabla 9.3.

El material del bloque cuenta con un módulo de Young de 20×10^6 kN/m² y una relación de Poisson de 0.3.

Problema 9.4.1 El bloque está empotrado en la cara conformada por los nudos 1, 3, 5 y 7, y está sometido a una carga puntual $P = 1000$ kN en el nudo 8, como lo indica la Figura 9.15(a). Calcular los desplazamientos en los nudos de la malla.

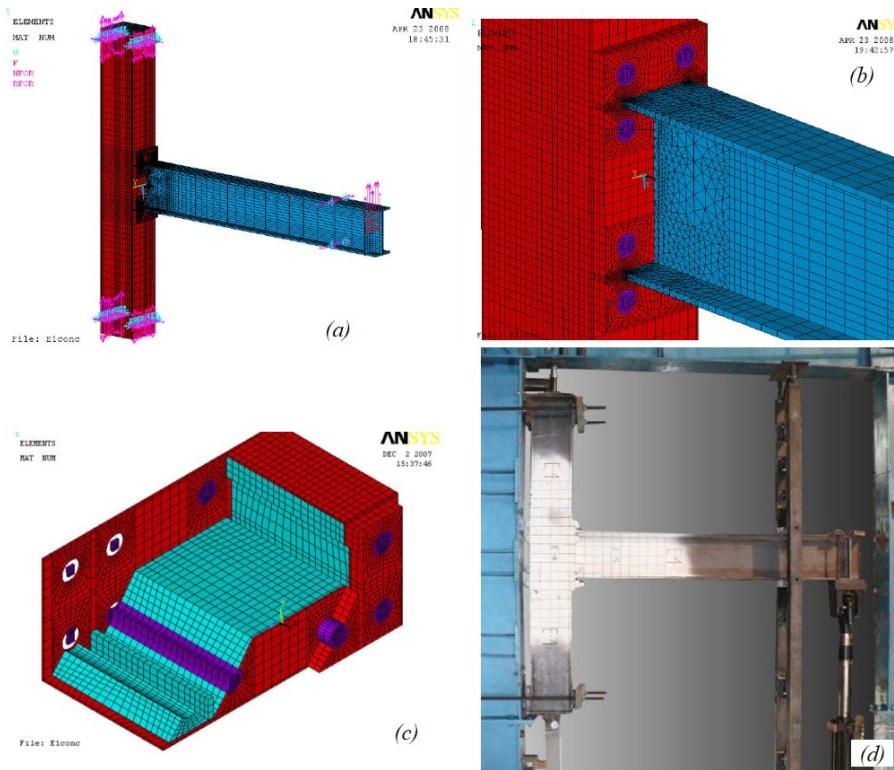


Figura 9.13: Simulación numérica de una conexión entre una viga I de acero y una columna tubular de acero rellena de concreto, sometido a momento fletor: (a) vista general de la malla de elementos finitos y condiciones de frontera, (b) detalle de la malla cerca de la conexión, (c) detalle de la malla interior del concreto, los pernos pasantes, las paredes de la columna y la placa extendida, (d) modelo físico de la viga y la columna (Uribe, 2008).

Elemento	Nudo <i>i</i>	Nudo <i>j</i>	Nudo <i>k</i>	Nudo <i>l</i>
1	1	2	3	5
2	2	4	3	8
3	2	8	5	6
4	3	8	7	5
5	2	8	3	5

Tabla 9.3: Bloque hexaédrico representado con una malla de elementos tetraédricos lineales. Tabla de conectividades.

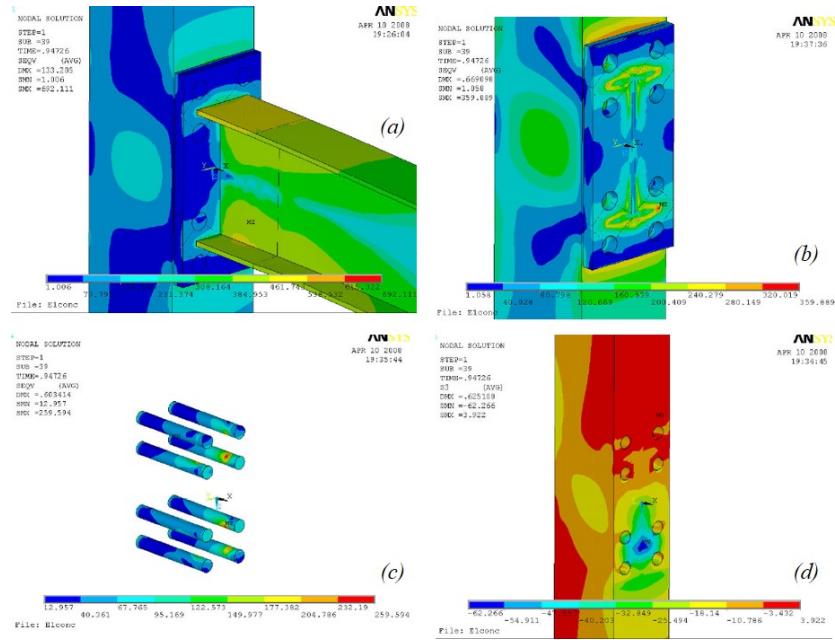


Figura 9.14: Simulación numérica de una conexión entre una viga I de acero y una columna tubular de acero rellena de concreto, bajo la acción de cargas dinámicas: (a) esfuerzos de von Mises en el contorno de la conexión, (b) esfuerzos de von Mises en el interior de la placa extendida, (c) esfuerzos de von Mises en los pasadores, (d) esfuerzo principal máximo en el núcleo de concreto de la columna (Uribe, 2008).

Problema 9.4.2 El bloque está sometido a un desplazamiento uniforme $\delta = 0.001\text{m}$ en dirección x sobre los nudos 2,4, 6 y 8, como lo indica la Figura ??(b). Se considera que las componentes de desplazamiento en x , y y z son iguales a cero en los nudos 1 y 3, mientras que en los nudos 5 y 7 solamente está restringido el desplazamiento en dirección x . Demostrar que el problema corresponde a un estado de deformación constante.

9.5. Proyectos propuestos

A continuación se proponen varios proyectos que se pueden realizar a partir de los temas estudiados anteriormente y de otros conceptos consultados por cuenta propia. El desarrollo de algunos proyectos requiere la programación de algunas formulaciones adicionales y la simulación numérica de varios ejemplos de aplicación utilizando el programa de elementos finitos a código abierto PEFiCA y en algunos casos con programas comerciales de elementos finitos.

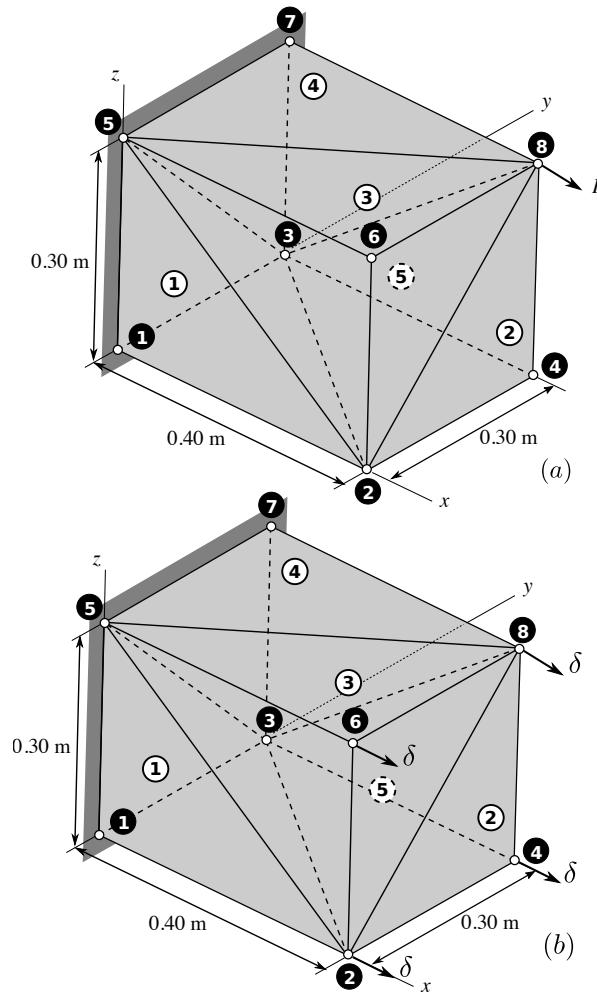


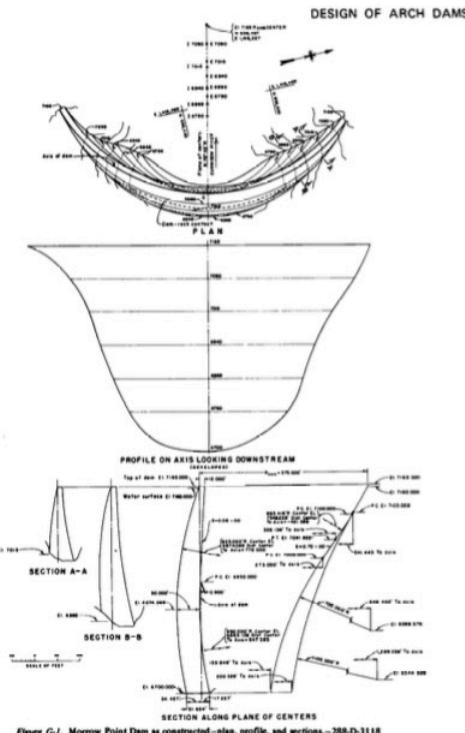
Figura 9.15: Bloque tetraédrico representado con una malla de elementos tetraédricos lineales: (a) sometido a una carga puntual, (b) sometido a un desplazamiento uniforme en una cara.

Proyecto 9.5.1 Formular e implementar el elemento finito hexaédrico irregular bi-lineal para problemas de elasticidad tridimensional. Simular y comparar un mismo problema con un malla de elementos tetraédricos lineales y con otra malla de elementos hexaédricos bi-lineales.

Proyecto 9.5.2 Consultar y determinar la geometría y las condiciones de apoyo de una presa de arco en concreto real. Estudiar su comportamiento mecánico ante la acción de la presión hidroestática y el peso propio, mediante varias simulaciones con el método de los elementos finitos. Utilizar el programa GMSH para construir

la malla de elementos tetraédricos lineales y el programa PEFICA para analizar el problema. Obtener la distribución de los esfuerzos y de las deformaciones principales en el sólido. La siguientes figuras son del *Design of arch, United States Department of the Interior Bureau of Reclamation (1977)* y *Engineering and Design: Arch dam design, Department of the Army U.S. Army Corps of Engineers, Washington (1994)*.

622



(a)

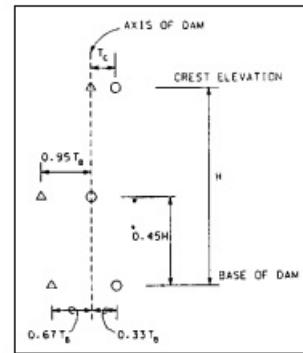


Figure 5-3. Empirically derived projections of the crown cantilever

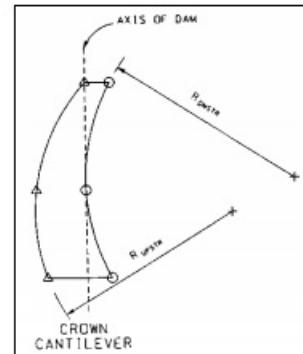


Figure 5-4. Definition of upstream and downstream faces

(b)

Figura 9.16: Presa en arco.

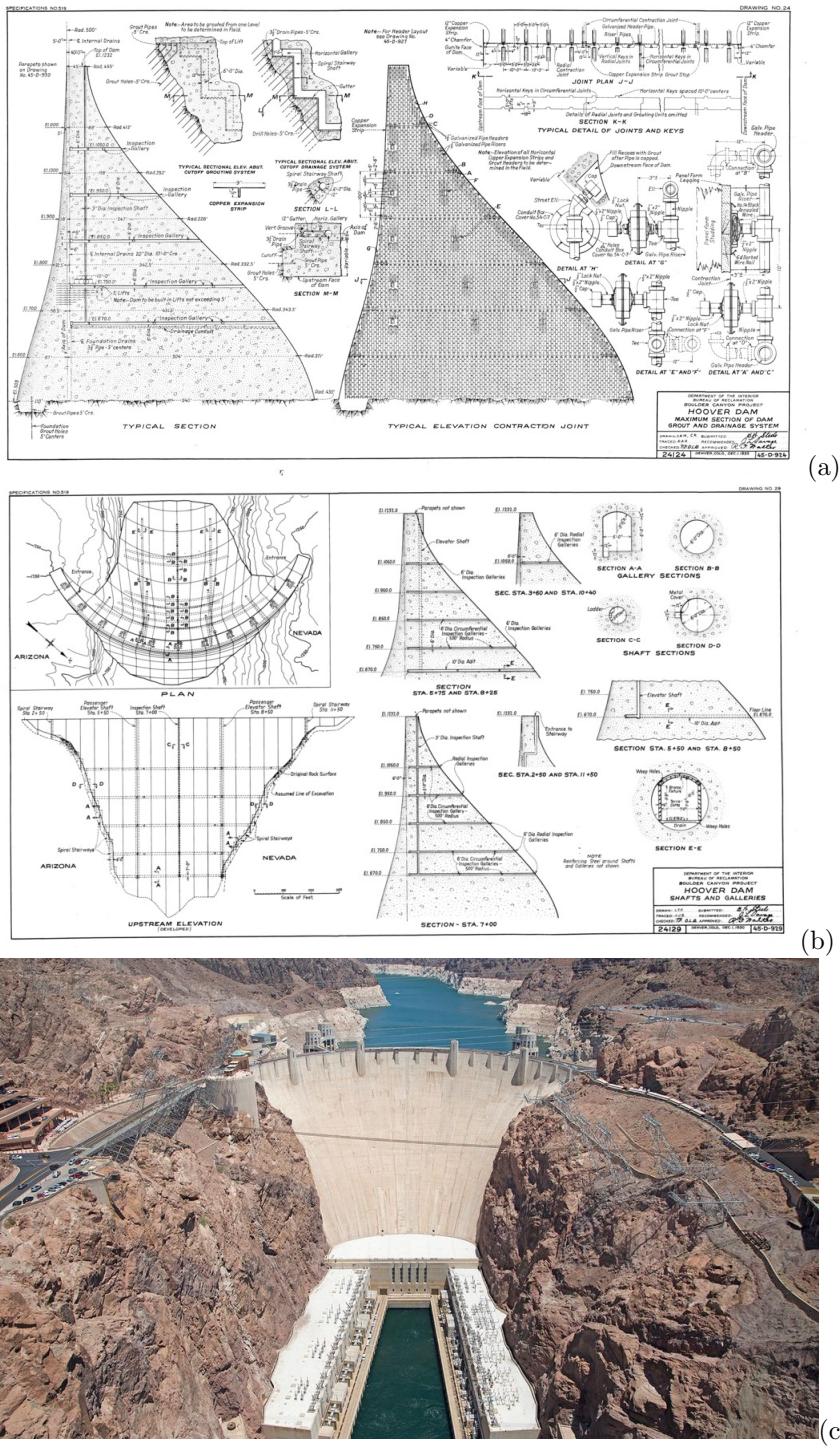


Figura 9.17: Presa Hoover.

Proyecto 9.5.3 Estudiar la distribución del esfuerzo principal mayor en el concreto que rodea al gancho del refuerzo longitudinal, en una viga de concreto reforzado. Asimismo, evaluar el esfuerzo axial de la barra de acero. Alcanzar este objetivo mediante varias simulaciones con el método de los elementos finitos, utilizando el programa GMSH para construir la malla de elementos tetraédricos lineales y el programa PE-FiCA para analizar el problema. Comparar con algunas distribuciones de esfuerzo encontradas en libros de diseño de estructuras en concreto reforzado.

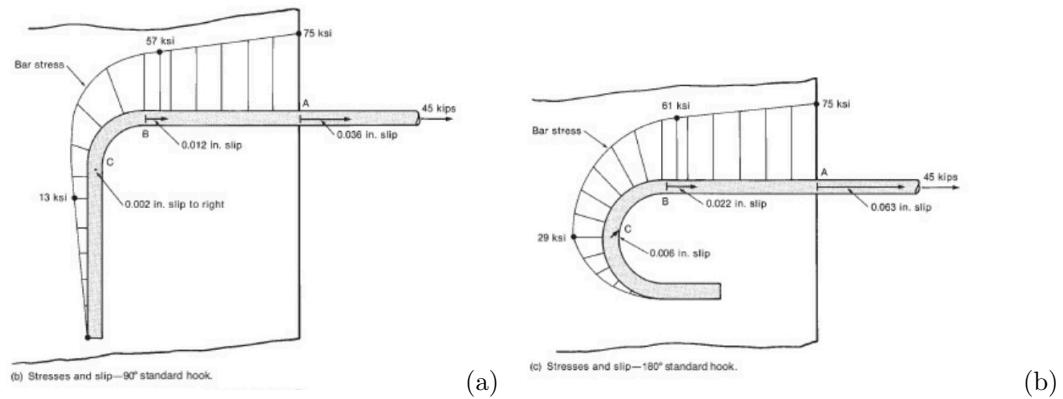


Figura 9.18: Distribución del esfuerzo axial en el gancho formado por una barra de refuerzo embebida en el concreto: (a) gancho estándar a 90° y (b) gancho estándar a 180° .

Proyecto 9.5.4 Simular numéricamente el comportamiento mecánico elástico lineal del puente romano de Pont Saint Martín (Italia), tomando como referencia el trabajo *3D FEM analysis of a roman arch bridge*, realizado por Frunzio, Monaco y Gesualdo (2001), en *Historical Constructions 2001. Possibilities of numerical and experimental techniques. Proceedings of the 3rd International Seminar. Guimarães, Portugal, University of Minho. 7-8-9 November 2001*. Este trabajo se puede descargar en <https://www.dropbox.com/s/cx42mwmpuyh806j/2001-portogallo-ponte.pdf?dl=0>. Construir la malla de tetraedros lineales con el programa GMSH y analizar el problema con el programa PEFiCA.

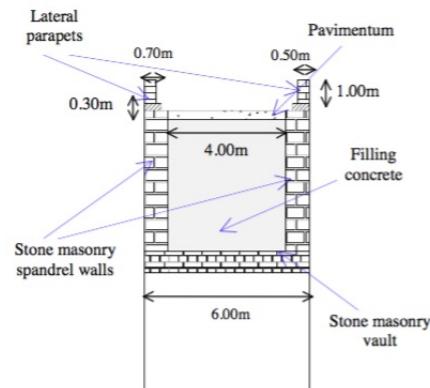


Figure 2: Bridge cross section

Figura 9.19: Puente romano en Pont Saint Martín (Italia): (a) fotografía con dimensiones generales y (b) detalle de la sección transversal.

Proyecto 9.5.5 Implementar en el código de PEFICA, el cálculo y la presentación gráfica de las direcciones principales de los esfuerzos mayor y menor. Simular varios problemas donde se ilustren tales direcciones como: el ensayo de arrancamiento en el concreto presentado anteriormente, vigas altas o suelos bajo una cimentación aislada, entre otros.

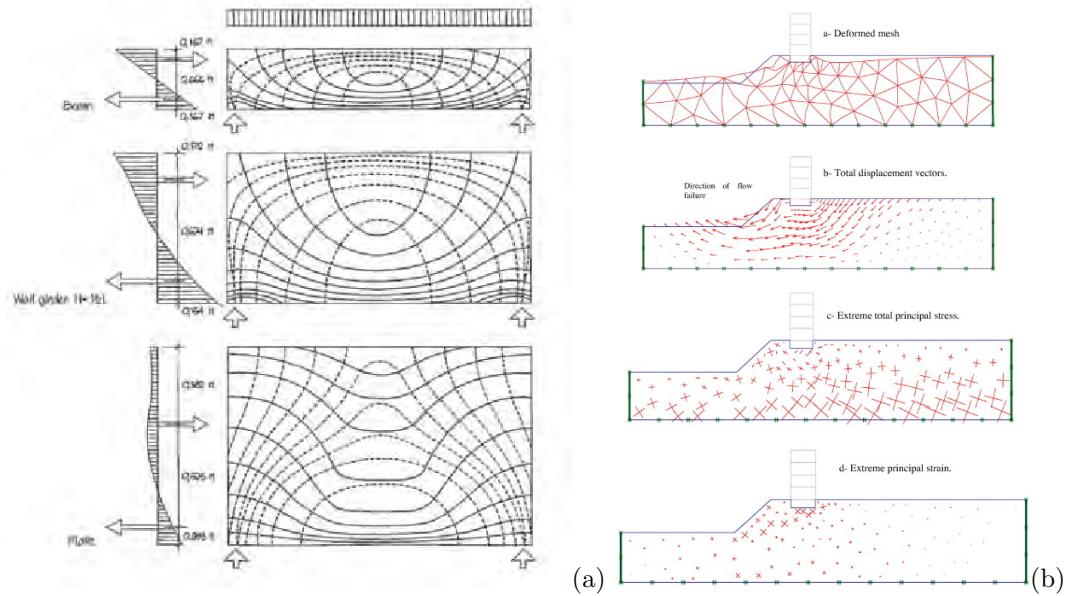


Figura 9.20: Direcciones principales de esfuerzos: (a) vigas altas y (b) suelo bajo una cimentación aislada.

Capítulo 10

Formulación de placas estructurales delgadas mediante el método de los elementos finitos

Las estructuras laminares son sólidos que tienen dos dimensiones sustancialmente mayores que la tercera denominada espesor, las cuales están sometidas principalmente a cargas perpendiculares al plano generado por las dos dimensiones mayores. La relación de aspecto permite representar geométricamente estas estructuras mediante una superficie establecida a la mitad de su espesor, llamada *superficie media* o *plano medio*, como lo muestra la Figura 10.1. Tales estructuras se pueden clasificar en los siguientes tres tipos:

- Las *placas* son aquellas cuya superficie media es plana y las acciones externas aplicadas corresponden cargas perpendiculares al plano medio y momentos paralelos a él, las cuales producen flexión y torsión. La Figura 10.2(a) muestra como ejemplo una placa de entrepiso de un edificio hecha de concreto reforzado.
- Las *membranas* son estructuras laminares delgadas de superficie media curva, capaces de soportar fuerzas axiales de tensión exclusivamente. En la Figura 10.2(b) se muestra una membrana de cubierta de un estadio hecha en plástico politetrafluoroetileno.
- Los *cascarones* son estructuras laminares sometidas a acciones internas como momentos flectores y torsionales, y a fuerzas axiales de tensión o compresión. Es habitual que la superficie media de los cascarones no sea plana. La Figura 10.2(c) muestra el cascarón en concreto de la estructura de la Ópera de Sidney.

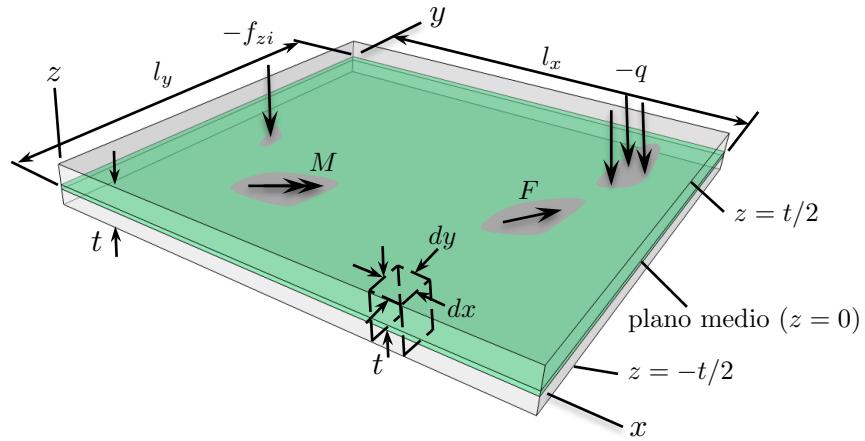


Figura 10.1: Esquema general de una estructura laminar



Figura 10.2: Ejemplos de estructuras laminares: (a) placa de entrepiso en concreto reforzado de un edificio, (b) membrana de cubierta en PTFE (politetrafluoroetileno y coloquialmente como Teflon®) de un estadio y (c) cascarón en concreto de la estructura de la Ópera de Sidney

Es posible analizar las estructuras laminares con elementos finitos sólidos, con los conceptos indicados en el capítulo anterior. Sin embargo, esto conlleva un costo computacional elevado y en algunos casos incluso un mal condicionamiento de las ecuaciones (O.C. Zienkiewicz & Taylor, 2005).

10.1. Hipótesis básicas y clasificación de las placas estructurales

La teoría de placas es una simplificación de la elasticidad tridimensional, obtenida de forma análoga a la presentada en la teoría de vigas, donde los esfuerzos y las deformaciones en el espesor de la estructura se expresan mediante cantidades equivalentes sobre el plano medio. Sin embargo, la teoría de vigas solo describe la flexión en una dirección; en cambio, la teoría de placas incluye torsión y flexión en dos direcciones. Sea una placa de espesor constante t , cuya superficie media coincide con el plano xy , sometida a cargas perpendiculares al plano medio y a momentos contenidos en dicho plano, como lo indica la Figura 10.1. La teoría general de placas considera las siguientes hipótesis:

- *Hipótesis 1:* Las componentes del desplazamiento de los puntos materiales del plano medio paralelas a este son iguales a cero. Por lo tanto, los puntos materiales del plano medio solo se desplazan en dirección z . El punto P sobre el plano medio mostrado en la Figura 10.3(a), se desplaza a la posición P' en la configuración deformada, donde la componente $u(x, y, 0) = 0$ y $v(x, y, 0) = 0$.
- *Hipótesis 2:* El esfuerzo normal en dirección z se considera despreciable, como se muestra en un elemento diferencial de placa de la Figura 10.3(b).
- *Hipótesis 3:* Los puntos materiales que hacen parte de una misma línea recta normal al plano medio tienen el mismo desplazamiento en dirección z . Los puntos c y d contenidos en la línea recta BA normal al plano medio de la placa en la configuración no deformada, se trasladan a los puntos c' y d' en la configuración deformada, como lo ilustra la Figura 10.3(c). La componente de desplazamiento en z de los dos puntos es la misma, es decir $w_c = w_d = w$, siendo w el desplazamiento común de cualquier punto sobre la línea BA .
- *Hipótesis 4:* Los puntos materiales que conforman una línea recta normal al plano medio antes de la aplicación de las cargas, permanecen sobre la misma línea recta después de aplicadas las cargas. Los puntos $c(0)$ y $d(0)$ sobre la línea BA normal al plano medio en la configuración no deformada, es decir cuando

no se han aplicado las cargas y en un instante $t = 0$, cambian a las posiciones $c(t)$ y $d(t)$ en un instante t después de aplicadas las cargas externas, como se muestra en la Figura 10.3(d). Tales puntos pertenecen a la misma línea recta $B'A'$ en la configuración deformada.

De acuerdo con la relación entre el espesor t y el ancho menor de la placa $l_{\min} = \min[l_x, l_y]$, puede o no considerarse que las líneas normales al plano medio en la configuración no deformada, permanezcan ortogonales en la configuración deformada. De lo anterior se derivan las siguientes dos modalidades de la teoría de placas (Oñate, 2013):

- La *teoría de placas de Kirchhoff – Love* se aplica exclusivamente a placas denominadas delgadas, es decir, cuya relación t/l_{\min} es menor 0.10. Como hipótesis adicional o *hipótesis 5*, se considera que las líneas normales al plano medio en la configuración no deformada permanecen ortogonales en a configuración deformada. En consecuencia, las deformaciones por cortante transversal se desprecian. Los elementos finitos basados en esta teoría tienen continuidad C^1 , debido a la presencia de derivadas segundas de la deflexión en la expresión del Principio de los trabajos virtuales, siendo análoga a la teoría de vigas de Euler–Bernoulli.
- La *teoría de placas de Reissner – Mindlin* se aplica principalmente a placas denominadas gruesas, es decir, aquellas cuya relación t/l_{\min} es mayor de 0.10. Adicionalmente, se considera como *hipótesis 5*, que las líneas normales al plano medio en la configuración no deformada no son necesariamente ortogonales en la configuración deformada. Esta teoría puede aplicarse a placas delgadas utilizando técnicas de integración reducida o de imposición de campos de deformación por cortante que eliminen la influencia excesiva del cortante transversal en la rigidez de la placa. Los elementos finitos basados en esta teoría tienen continuidad C^0 y son análogos a la teoría de vigas de Timoshenko.

La Figura 10.4(a) y Figura 10.4(b) muestran una línea recta AB normal al plano medio en la configuración no deformada, cuyos puntos materiales se ubican en la línea A'B' en la configuración deformada, de acuerdo con la teoría de placas de Kirchhoff – Love y de Reissner – Mindlin, respectivamente.

Después de indicar las generalidades de las estructuras laminares, este capítulo describe particularmente la formulación de elementos finitos de placas delgadas definida por la teoría de placas de Kirchhoff – Love.

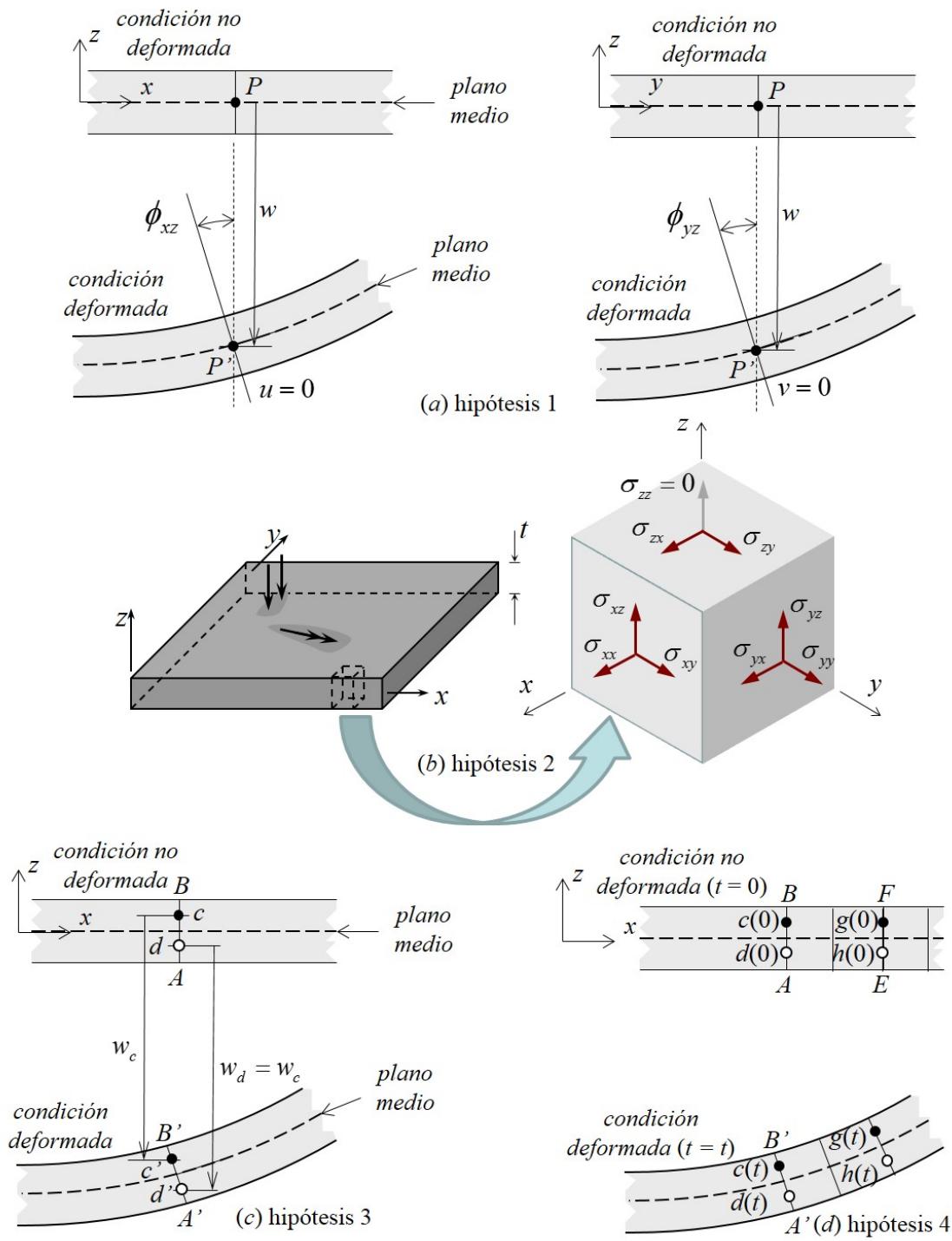


Figura 10.3: Hipótesis básicas de la teoría general de placas: (a) hipótesis 1, (b) hipótesis 2, (c) hipótesis 3 y (d) hipótesis 4.

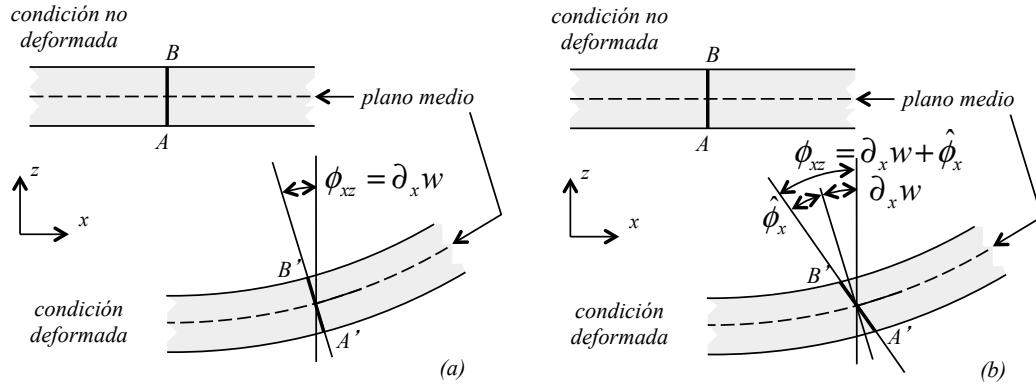


Figura 10.4: Línea recta AB normal al plano medio en la configuración no deformada, cuyos puntos materiales se ubican en la línea A'B' en la configuración deformada de acuerdo con: (a) la teoría de placas de Kirchhoff – Love, (b) la teoría de placas de Reissner – Mindlin

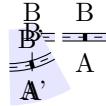


Figura 10.5: FIGURA PENDIENTE !

10.2. Teoría de placas de Kirchhoff – Love

A partir de las hipótesis 4 y 5 indicadas anteriormente, la teoría de placas de Kirchhoff – Love define a ϕ_{xz} como el ángulo en el plano xz , formado entre una línea recta normal al plano medio en la configuración no deformada y la línea recta formada por los mismos puntos materiales en la configuración deformada, como lo muestra la Figura 10.6(a). Este desplazamiento angular o giro se considera positivo en la dirección $-y$.

Asimismo, ϕ_{yz} es el ángulo en el plano yz , formado entre una línea recta normal al plano medio en la configuración no deformada y la línea recta formada por los mismos puntos materiales en la configuración deformada, como lo ilustra la Figura 10.6(b). Este desplazamiento angular o giro es positivo en la dirección $+x$.

10.2.1. Componentes del desplazamiento

Considerando las hipótesis 1 y 5, y recordando que el plano medio está ubicado en $z = 0$, las componentes del desplazamiento en dirección x y y se pueden expresar de

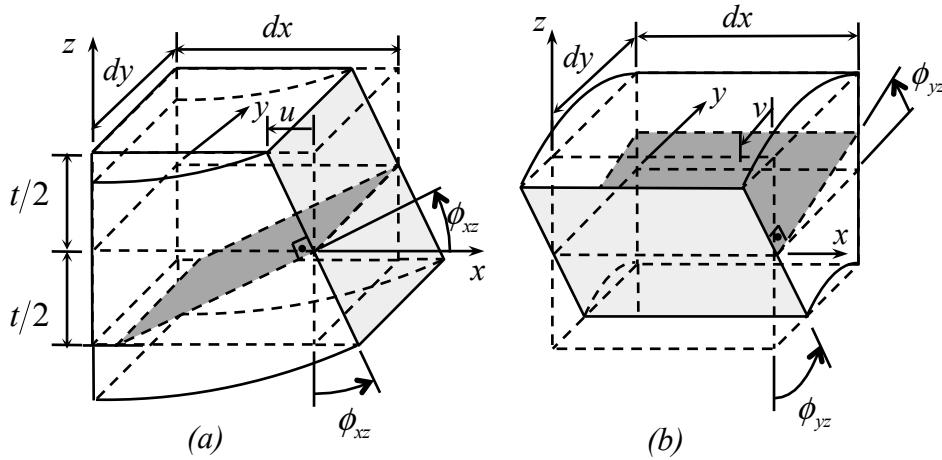


Figura 10.6: Elemento diferencial de placa delgada: (a)deformada en el plano xz , (b) deformada en el planoyz

la forma (Oñate, 2013):

$$u(x, y, z) = -z\phi_{xz}(x, y) \quad (10.1a)$$

$$v(x, y, z) = -z\phi_{yz}(x, y) \quad (10.1b)$$

De la hipótesis 3 se deduce que la componente del desplazamiento en dirección z es independiente de la componente de la posición en la misma dirección, es decir:

$$w(x, y, z) = w(x, y) \quad (10.2)$$

Se observa que la componente del desplazamiento lineales en dirección z y los desplazamientos angulares o giros ϕ_{xz} y ϕ_{yz} , son constantes con respecto a z , es decir, son característicos de cualquier superficie paralela al plano medio de la placa.

La hipótesis 5 define la relación entre los desplazamientos angulares o giros y las primeras derivadas del desplazamiento en dirección z , de la forma:

$$\phi_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \phi_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (10.3)$$

En otras palabras, el desplazamiento angular de una línea inicialmente normal al plano medio coincide con la pendiente de dicho plano.

Es importante tener en cuenta que la primera derivada de la deflexión con respecto a x coincide con el giro alrededor del eje y en su sentido negativo.

Sustituyendo la ecuación anterior en la expresión (10.1) se obtiene el campo del desplazamiento sobre la placa como:

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \quad (10.4a)$$

$$v(x, y, z) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \quad (10.4b)$$

10.2.2. Componentes de deformación y deformaciones generalizadas

Las componentes de la deformación se determinan a partir de su relación con las componentes del desplazamiento, presentada en la ecuación (2.6), así:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (10.5a)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (10.5b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (10.5c)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (10.5d)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (10.5e)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (10.5f)$$

Las componentes de la deformación diferentes de cero se pueden organizar en una matriz columna de la forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{xy} \end{bmatrix}^T = -z \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}^T \quad (10.6)$$

Se observa que la matriz columna de las deformaciones depende de la posición en la dirección z de forma lineal y de una matriz columna constante para cualquier superficie paralela al plano medio que represente a las curvaturas de la placa. Esta última se denomina matriz columna de *deformaciones generalizadas* o de *curvaturas* y se expresa como (Weaver & Johnson, 1984):

$$\bar{\Phi}(x, y) = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{xx} & \bar{\Phi}_{yy} & \bar{\Phi}_{xy} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}^T \quad (10.7)$$

y, por lo tanto,

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z) = z \bar{\Phi}(x, y) \quad (10.8)$$

Se define el operador diferencial para el problema mecánico de placas delgadas con respecto al sistema coordenado xy de la forma:

$$\tilde{\nabla} = \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad -2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right]^T \quad (10.9)$$

Por lo tanto, la matriz de deformaciones generalizadas también se puede escribir como el operador diferencial anterior actuando sobre la deflexión de la placa, es decir:

$$\bar{\Phi}(x, y) = \tilde{\nabla} w(x, y) \quad (10.10)$$

10.2.3. Esfuerzo normal y cortante

Las relaciones entre las deformaciones angulares y los esfuerzos cortantes para un material elástico lineal isótropo presentadas en la ecuación (2.21) y los valores de las deformaciones angulares dados en las expresiones (10.5e) y (10.5f), determinan que las componentes de esfuerzo cortante transversal son nulas, es decir, $\sigma_{xz} = 0$ y $\sigma_{yz} = 0$.

Recordando además, que la hipótesis 2 considera despreciable el esfuerzo normal en dirección z , es decir, $\sigma_{zz} = 0$, se puede establecer una condición plana de esfuerzos en cada una de las superficies paralelas al plano medio de la placa. Por lo tanto, la relación entre las componentes de esfuerzo y deformación es:

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y, z) = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z) \quad (10.11a)$$

siendo,

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \nu) \end{bmatrix} \quad (10.11b)$$

10.2.4. Momentos flectores y momento torsor

La acción interna de un momento flector alrededor del eje y de la placa produce un esfuerzo normal σ_{xx} , en dirección x actuando sobre la cara positiva x , como se ilustra en la Figura 10.7. Tal relación corresponde a:

$$M_x = \int z \sigma_{xx} dA \quad (10.12)$$

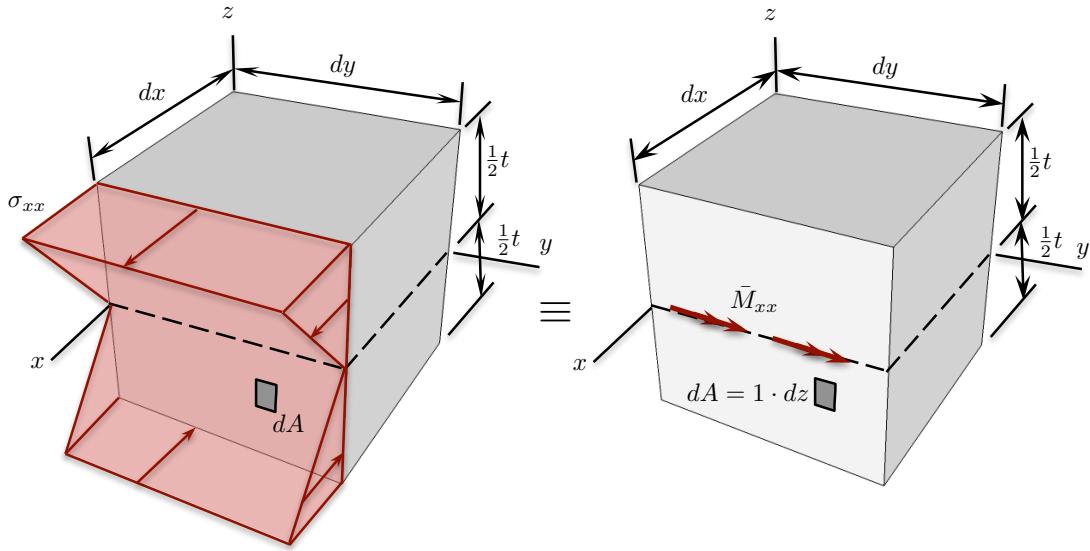


Figura 10.7: Acciones internas en un elemento diferencial de placa delgada. Esfuerzo normal σ_{xx} en dirección x y momento flector por unidad de longitud equivalente \bar{M}_{xx}

Considerando un diferencial de área en un ancho unitario de la forma $dA = 1 \cdot dz$, el momento flector alrededor del eje y por unidad de longitud en el plano de la placa \bar{M}_{xx} , es igual a:

$$\bar{M}_{xx} = \int_{-t/2}^{+t/2} z\sigma_{xx} dz \quad (10.13)$$

Asimismo, el momento flector alrededor del eje x por unidad de longitud en el plano de la placa \bar{M}_{yy} , produce un esfuerzo normal σ_{yy} , en dirección y actuando sobre la cara positiva y , como se muestra en la Figura 10.8. La relación entre momento y esfuerzo se expresa como:

$$\bar{M}_{yy} = \int_{-t/2}^{+t/2} z\sigma_{yy} dz \quad (10.14)$$

El momento torsor alrededor del eje y por unidad de longitud en el plano de la placa \bar{M}_{xy} , genera una distribución del esfuerzo cortante σ_{xy} , que para placas delgadas puede considerarse lineal en z , como se observa en la Figura 10.9. De la misma forma, el momento torsor alrededor del eje x por unidad de longitud \bar{M}_{yx} , produce un esfuerzo cortante σ_{yx} . A partir de lo anterior y recordando que $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$,

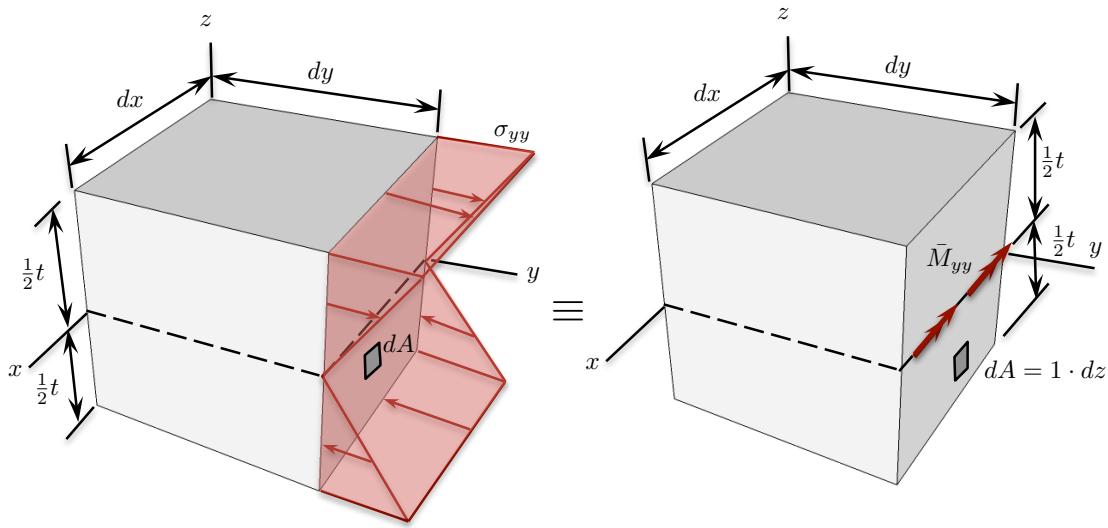


Figura 10.8: Acciones internas en un elemento diferencial de placa delgada. Esfuerzo normal σ_{yy} en dirección y y momento flector por unidad de longitud equivalente \bar{M}_{yy}

se establece que:

$$\bar{M}_{xy} = \bar{M}_{yx} = \int_{-t/2}^{+t/2} z \sigma_{xy} dz \quad (10.15)$$

Se observa que el sentido de cada uno de los momentos por unidad de longitud \bar{M}_{xx} , \bar{M}_{yy} y \bar{M}_{xy} , ha sido establecido para que la respectiva componente de esfuerzo σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} , sea positiva cuando z es positivo.

Se define la matriz columna de *esfuerzos generalizados de placa*, cuyos términos corresponden a los momentos por unidad de longitud, así:

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \bar{M}_{xx} \\ \bar{M}_{yy} \\ \bar{M}_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} z \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz, \quad \bar{\mathbf{M}} = \int_{-t/2}^{t/2} z \boldsymbol{\sigma} dz \quad (10.16)$$

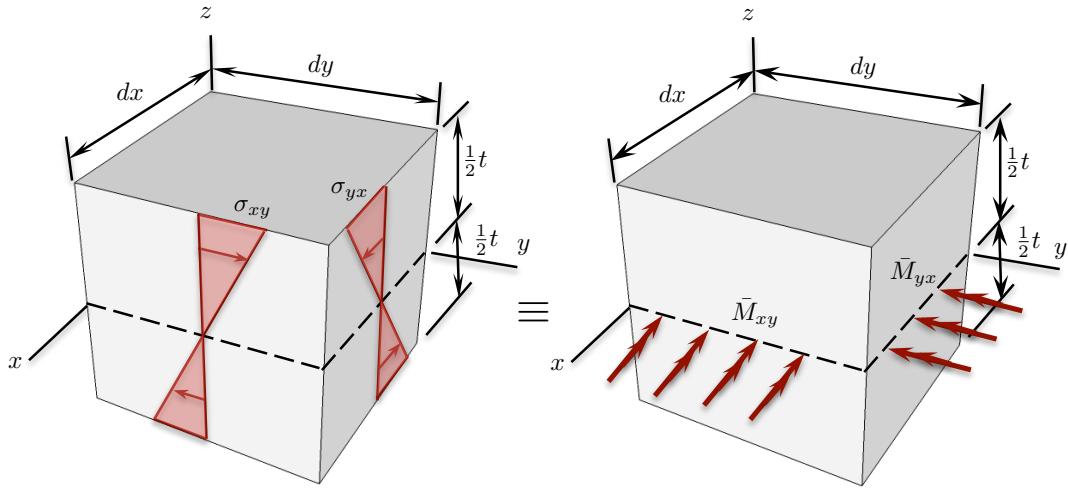


Figura 10.9: Acciones internas en un elemento diferencial de placa delgada. Esfuerzo cortante σ_{xy} en el plano xy y momento torsor por unidad de longitud equivalente \bar{M}_{xy}

10.2.5. Relación entre esfuerzos y deformaciones generalizadas

Sustituyendo las ecuaciones (10.7) y (10.11) en la expresión anterior se obtiene una relación entre el esfuerzos y deformaciones generalizados, así:

$$\bar{\mathbf{M}} = \int_{-t/2}^{+t/2} z\boldsymbol{\sigma} dz = \int_{-t/2}^{+t/2} z\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} dz = \int_{-t/2}^{+t/2} z^2\mathbf{D}\bar{\Phi} dz = \bar{\mathbf{D}}\bar{\Phi} \quad (10.17)$$

donde $\bar{\mathbf{D}}$ es la *matriz constitutiva elástica generalizada*, la cual corresponde a:

$$\bar{\mathbf{D}} = \int_{-t/2}^{+t/2} z^2\mathbf{D} dz = \frac{t^3}{12}\mathbf{D} = \frac{t^3 E}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (10.18)$$

Por lo tanto, la ecuación Ecuación 10.17 se puede expresar de la forma:

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_{xx} \\ \bar{M}_{yy} \\ \bar{M}_{xy} \end{bmatrix} = \frac{t^3 E}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{xx} \\ \bar{\Phi}_{yy} \\ \bar{\Phi}_{xy} \end{bmatrix} \quad (10.19)$$

10.2.6. Fuerzas cortantes

Después de sustituir las ecuaciones (10.7) y (10.11) en la expresión matricial anterior se pueden obtener las componentes del momento por unidad de longitud, como:

$$\bar{M}_{xx} = \frac{t^3 E}{12(1-\nu^2)} \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (10.20a)$$

$$\bar{M}_{yy} = \frac{t^3 E}{12(1-\nu^2)} \left[-\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (10.20b)$$

$$\bar{M}_{xy} = \frac{t^3 E}{12(1-\nu^2)} \left[-(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad (10.20c)$$

...

10.2.7. Aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales

De acuerdo con el Principio de los Trabajos Virtuales aplicado a placas, el trabajo virtual externo generado por una carga distribuida por unidad de superficie q y por r cargas puntuales f_{zi} actuantes en dirección z , siendo $i = 1, \dots, r$, es igual a (Oñate, 2013):

$$\delta W_E = \int_A \delta w q dA + \sum_1^r \delta w_i f_{zi} \quad (10.21)$$

para la cual, δw y δw_i son los desplazamientos virtuales en dirección z o deflexiones, para todo punto (x, y) sobre el área del plano medio de la placa A y para un punto específico i , respectivamente.

La matriz columna de deformación virtual se define como $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T = [\delta \varepsilon_{xx} \delta \varepsilon_{yy} \delta \gamma_{xy}]$, mientras que, la matriz columna del esfuerzo real es de la forma $\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{xy}]$. Se establece que el trabajo virtual interno en el volumen V de la placa es igual a:

$$\delta W_I = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (10.22)$$

Sustituyendo las ecuaciones que relacionan a los esfuerzos y a las deformaciones con los esfuerzos y las deformaciones generalizadas, se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta W_I &= \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_A \int_{-t/2}^{+t/2} \delta \bar{\boldsymbol{\Phi}}^T z \boldsymbol{\sigma} dz dA \\ &= \int_A \delta \bar{\boldsymbol{\Phi}}^T \left[\int_{-t/2}^{+t/2} z \boldsymbol{\sigma} dz \right] dA = \int_A \delta \bar{\boldsymbol{\Phi}}^T \bar{\mathbf{M}} dA = \int_A \delta \bar{\boldsymbol{\Phi}}^T \bar{\mathbf{D}} \bar{\boldsymbol{\Phi}} dA \end{aligned} \quad (10.23)$$

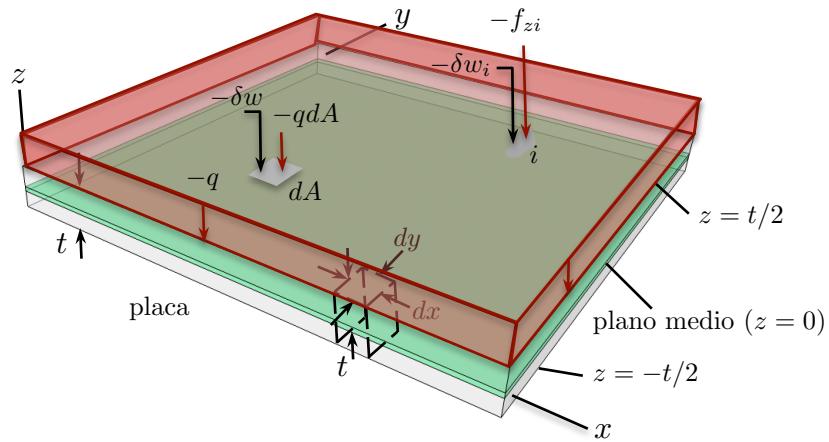


Figura 10.10: Esquema general de una placa delgada sometida a una carga distribuida uniforme real $-q$ y a una carga puntual real $-f_{zi}$. Tales cargas están asociadas una deflexión virtual $-\delta w$ para todo punto (x, y) y una deflexión virtual $-\delta w_i$ en el punto i , respectivamente

En las expresiones de trabajo virtual externo e interno (10.21) y (10.23), se observa que la integración del campo del desplazamiento y del esfuerzo en el espesor de la placa, reduce el dominio del problema al espacio bidimensional xy sobre su plano medio.

El Principio de los Trabajos Virtuales permite determinar el campo del desplazamiento en dirección z o deflexión w para todo punto (x, y) que pertenece al plano medio de la placa, cuando los trabajos virtuales externo e interno son iguales, es decir:

$$\delta W_E = \delta W_I \rightarrow \int_A \delta w q dA + \sum_1^r \delta w_i f_{zi} = \int_A \delta \bar{\Phi}^T \bar{\mathbf{D}} \bar{\Phi} dA \quad (10.24)$$

Asimismo, se deben cumplir las condiciones de frontera naturales y esenciales, dadas por los valores conocidos de la deflexión y de sus derivadas en contornos específicos del dominio.

A partir de las derivadas de la deflexión $w(x, y)$, se obtienen las matrices de deformación generalizada $\bar{\Phi}$, deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$, esfuerzo $\boldsymbol{\sigma}$ y esfuerzo generalizado $\bar{\mathbf{M}}$, utilizando las ecuaciones (10.7), (10.8), (10.11) y (10.16), respectivamente.

10.3. Función de aproximación de un elemento finito no conforme

Dado que el campo de la deflexión en el plano medio de la placa $w(x, y)$ es la variable obtenida como solución inmediata del problema, la función de aproximación $w^{(e)}(x, y)$ en el área del plano medio $A^{(e)}$ de cada elemento finito e , corresponde a dicha función $\forall(x, y) \in A^{(e)}$. En general, dicha función es un polinomio de la forma:

$$w^{(e)} = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4xy + \alpha_5x^2 + \alpha_6y^2 + \dots \quad (10.25)$$

Los términos de la ecuación anterior se escogen del triángulo de Pascal multiplicados por las coordenadas generalizadas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \dots$.

Las primeras derivadas de la función anterior con respecto a las direcciones x y y del sistema coordenado global, para todo (x, y) en el dominio del elemento finito, son las siguientes:

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x, y) = \alpha_2 + \alpha_4y + 2\alpha_5x + \dots \quad (10.26a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(x, y) = \alpha_3 + \alpha_4x + 2\alpha_6y + \dots \quad (10.26b)$$

Con el fin de satisfacer los requisitos de continuidad C^1 del elemento finito de placa, los valores nodales corresponden a la deflexión $w_i^{(e)}$ y a sus primeras derivadas con respecto a la posición $(\partial_x w^{(e)})_i$ y $(\partial_y w^{(e)})_i$, evaluadas en cada nudo i , ubicado en la coordenada (x_i, y_i) , así:

$$w_i^{(e)} = w(x_i, y_i) = \alpha_1 + \alpha_2x_i + \alpha_3y_i + \alpha_4x_iy_i + \alpha_5x_i^2 + \alpha_6y_i^2 + \dots \quad (10.27a)$$

$$(\partial_x w^{(e)})_i = \frac{\partial w}{\partial x}(x_i, y_i) = \alpha_2 + \alpha_4y_i + 2\alpha_5x_i + \dots \quad (10.27b)$$

$$(\partial_y w^{(e)})_i = \frac{\partial w}{\partial y}(x_i, y_i) = \alpha_3 + \alpha_4x_i + 2\alpha_6y_i + \dots \quad (10.27c)$$

Las expresión anterior constituye un sistema de $3n$ ecuaciones simultáneas, siendo n el número de nudos del elemento finito, cuya solución corresponde a las $3n$ coordenadas generalizadas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \dots$, en términos de los valores nodales.

Sustituyendo las coordenadas generalizadas en la ecuación (10.25), se obtiene la función de aproximación como la suma de productos entre las funciones de forma

$N_{wi}^{(e)}$, $N_{\partial xi}^{(e)}$ y $N_{\partial yi}^{(e)}$ y los valores nodales $w_i^{(e)}$, $(\partial_x w)_i^{(e)}$ y $(\partial_y w)_i^{(e)}$, en cada nudo i , así:

$$\begin{aligned} w^{(e)} = & N_{w1}^{(e)} w_1^{(e)} + N_{\partial x1}^{(e)} (\partial_x w)_1^{(e)} + N_{\partial y1}^{(e)} (\partial_y w)_1^{(e)} + \\ & + N_{w2}^{(e)} w_2^{(e)} + N_{\partial x2}^{(e)} (\partial_x w)_2^{(e)} + N_{\partial y2}^{(e)} (\partial_y w)_2^{(e)} + \dots + \\ & + N_{wn}^{(e)} w_n^{(e)} + N_{\partial xn}^{(e)} (\partial_x w)_n^{(e)} + N_{\partial yn}^{(e)} (\partial_y w)_n^{(e)} \end{aligned} \quad (10.28)$$

A pesar que las primeras derivadas de la deflexión sean valores nodales del elemento finito, este tipo de aproximación no asegura la compatibilidad a lo largo de sus lados. Los elementos con esta característica se denominan *no conformes*.

10.4. Elemento de placa rectangular de cuatro nudos no conforme MZC

Se define un elemento de placa cuyo plano medio tiene forma rectangular, con un nudo en cada vértice y tres grados de libertad por nudo, para un total de doce valores nodales. Por lo tanto, la función de aproximación de la deflexión corresponde a un polinomio incompleto de cuarto orden conformado por doce términos. Uno de los elementos finitos con dicha función de aproximación es el elemento no conforme MZC, el cual fue creado por Melosh, Zienkiewicz y Cheung (O Zienkiewicz & Cheung, 1964; O. C. Zienkiewicz *et al.*, 2005; Oñate, 2009).

El elemento MZC se ilustra en la Figura 10.11, donde se observa que su geometría puede expresarse en un sistema coordenado global xy o en un sistema coordenado natural $\xi\eta$ con origen en el centro del elemento. Las coordenadas de cada nudo i del elemento están definidas como (x_i, y_i) en sistema global y (ξ_i, η_i) en sistema natural, de tal forma que:

i	x_i	y_i	ξ_i	η_i
1	x_1	y_1	-1	-1
2	x_2	y_2	+1	-1
3	x_3	y_3	+1	+1
4	x_4	y_4	-1	+1

(10.29)

Si el elemento tiene dimensiones $2a$ en dirección x o ξ y $2b$ en dirección y o η , la relación entre los dos sistemas coordenados es de la forma:

$$\xi = \frac{x}{a} - \frac{x_1 + x_2}{2a}, \quad \eta = \frac{y}{b} - \frac{y_1 + y_4}{2b} \quad (10.30)$$

AQUI VOY !!!!!!

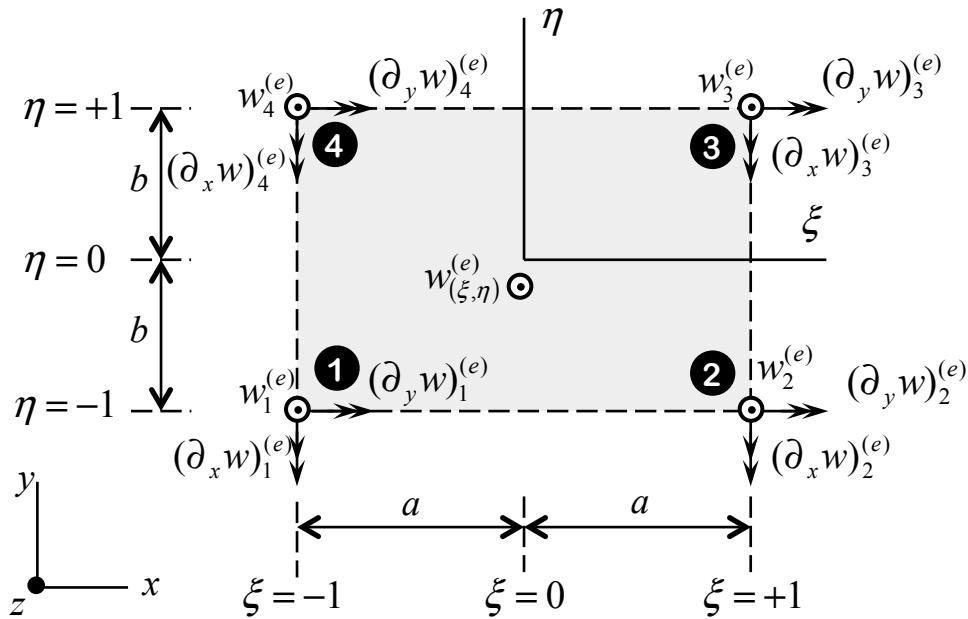


Figura 10.11: Elemento finito de placa delgada rectangular no conforme MZC. Geometría, sistemas coordenados y grados de libertad

10.5. Elemento de placa rectangular de cuatro nudos conforme BFS

10.6. Elemento finito de placa triangular no conforme CKZ

A continuación se describe el elemento de placa triangular no conforme CKZ, el cual fue desarrollado inicialmente por Bazeley y colaboradores, y después fue mejorado y difundido por Cheung, King y Zienkiewicz (Cheung, King, & Zienkiewicz, 1968; Oñate, 2013). Este tipo de elemento tiene forma triangular definida en el plano xy con un nudo en cada vértice. El elemento cuenta con tres grados de libertad en cada nudo i , correspondientes a los valores nodales de deflexión y de giros alrededor de los ejes x y y , respectivamente, como lo ilustra la Figura 10.12(a).

10.6.1. Función de aproximación

La posición de un punto en el interior de este elemento está dada en términos de las coordenadas de área del triángulo L_1 , L_2 y L_3 , las cuales fueron definidas en la Subsección 6.2.4. A continuación se reescribe la Ecuación 6.48, donde se relaciona

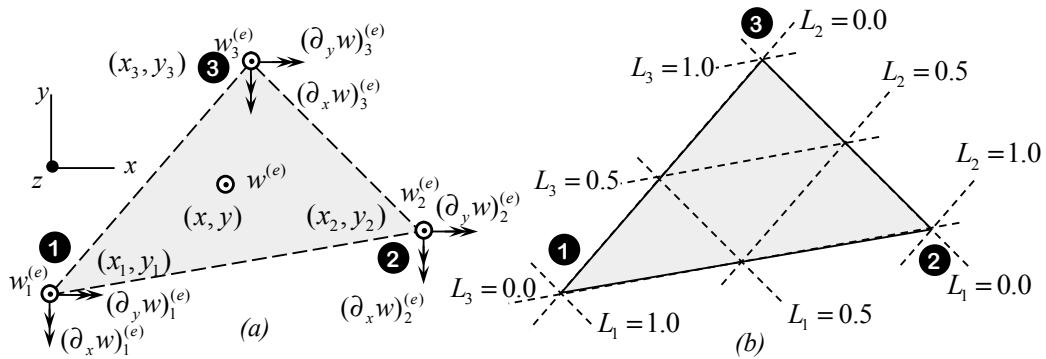


Figura 10.12: Elemento finito de placa delgada triangular no conforme CKZ: (a) valores nodales o grados de libertad, (b) coordenadas de área.

la coordenada de área del nudo i con las coordenadas globales (x, y) del punto en el interior del triángulo y con las coordenadas globales en los nudos (x_i, y_i) , (x_j, y_j) y (x_k, y_k) , así:

$$L_i(x, y) = \frac{1}{2A^{(e)}}(a_i + b_i x + c_i y) \quad (10.31a)$$

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j, \quad b_i = y_j - y_k, \quad c_i = x_k - x_j \quad (10.31b)$$

En la expresión anterior, si el nudo $i = 1$ los subíndices q y r son 2 y 3, si el nudo es $i = 2$, $q = 3$ y $r = 1$, y si el nudo $i = 3$, $q = 1$ y $r = 2$. Además se cumple que:

$$\sum_{i=1}^3 L_i = L_1 + L_2 + L_3 = 1 \quad (10.32)$$

La función de aproximación de la deflexión del elemento CKZ es un polinomio incompleto de tercer orden de la forma:

$$w(L_1, L_2, L_3) = \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 + \alpha_4(L_1^2 L_2 + \tilde{L}) + \alpha_5(L_2^2 L_1 + \tilde{L}) + \alpha_6(L_3^2 L_1 + \tilde{L}) + \alpha_7(L_3^2 L_2 + \tilde{L}) + \alpha_8(L_3^2 L_1 + \tilde{L}) + \alpha_9(L_1^2 L_3 + \tilde{L}) \quad (10.33)$$

donde $\tilde{L} = \frac{1}{2}L_1 L_2 L_3$.

Los términos que multiplican a las coordenadas generalizadas $\alpha_1, \dots, \alpha_9$ de la ecuación anterior garantizan curvaturas arbitrarias de la deflexión, incluso cuando el valor nodal de dicha función es igual a cero.

Las primeras y segundas derivadas de las coordenadas de área indicadas en la Ecuación 10.31, con respecto a las coordenadas globales x y a y , son iguales a:

$$\frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{1}{2A^{(e)}} b_i \quad , \quad \frac{\partial L_i}{\partial y} = \frac{1}{2A^{(e)}} c_i \quad (10.34a)$$

$$\frac{\partial^2 L_i}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 L_i}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 L_i}{\partial x \partial y} = 0 \quad (10.34b)$$

Sea una función $f(L_1, L_2, L_3)$ en términos de las coordenadas de área, sus primeras derivadas con respecto a x y a y , obtenidas aplicando la regla de la cadena, son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial x} = \frac{1}{2A^{(e)}} \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial f}{\partial L_i} \quad (10.35a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial y} = \frac{1}{2A^{(e)}} \sum_{i=1}^3 c_i \frac{\partial f}{\partial L_i} \quad (10.35b)$$

Utilizando nuevamente la regla de la cadena se calcula la segunda derivada de una función f con respecto a x , así:

$$\begin{aligned} 4A_{(e)}^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= b_1 \left(b_1 \frac{\partial^2 f}{\partial L_1^2} + b_2 \frac{\partial^2 f}{\partial L_1 \partial L_2} + b_3 \frac{\partial^2 f}{\partial L_1 \partial L_3} \right) + \\ &\quad b_2 \left(b_1 \frac{\partial^2 f}{\partial L_2 \partial L_1} + b_2 \frac{\partial^2 f}{\partial L_2^2} + b_3 \frac{\partial^2 f}{\partial L_2 \partial L_3} \right) + \\ &\quad b_3 \left(b_1 \frac{\partial^2 f}{\partial L_3 \partial L_1} + b_2 \frac{\partial^2 f}{\partial L_3 \partial L_2} + b_3 \frac{\partial^2 f}{\partial L_3^2} \right) = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 b_k b_l \frac{\partial^2 f}{\partial L_k \partial L_l} \end{aligned}$$

De la misma forma se calcula la segunda derivada de f con respecto a y , y la derivada cruzada con respecto a x y a y . En resumen tales derivadas son las siguientes:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{4A_{(e)}^2} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 b_k b_l \frac{\partial^2 f}{\partial L_k \partial L_l} \quad (10.36a)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{4A_{(e)}^2} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 c_k c_l \frac{\partial^2 f}{\partial L_k \partial L_l} \quad (10.36b)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4A_{(e)}^2} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 b_k c_l \frac{\partial^2 f}{\partial L_k \partial L_l} \quad (10.36c)$$

Como se indica en la Figura 10.12, cada nudo i del elemento tiene tres valores nodales, correspondientes a la deflexión $w_i^{(e)}$, y a sus primeras derivadas $(\partial_x w)_i^{(e)}$ y $(\partial_y w)_i^{(e)}$, con respecto a x y a y . Se observa que un valor positivo de $(\partial_x w)_i^{(e)}$ coincide con el giro alrededor del eje y en su sentido negativo. En cambio, un valor positivo de $(\partial_y w)_i^{(e)}$ es igual al giro alrededor del eje x . De acuerdo a lo anterior, los valores nodales del elemento finito son:

$$w_1^{(e)} = w(1, 0, 0) \quad , \quad (\partial_x w)_1^{(e)} = \frac{\partial w}{\partial x}(1, 0, 0) \quad , \quad (\partial_y w)_1^{(e)} = \frac{\partial w}{\partial y}(1, 0, 0) \quad (10.37a)$$

$$w_2^{(e)} = w(0, 1, 0) \quad , \quad (\partial_x w)_2^{(e)} = \frac{\partial w}{\partial x}(0, 1, 0) \quad , \quad (\partial_y w)_2^{(e)} = \frac{\partial w}{\partial y}(0, 1, 0) \quad (10.37b)$$

$$w_3^{(e)} = w(0, 0, 1) \quad , \quad (\partial_x w)_3^{(e)} = \frac{\partial w}{\partial x}(0, 0, 1) \quad , \quad (\partial_y w)_3^{(e)} = \frac{\partial w}{\partial y}(0, 0, 1) \quad (10.37c)$$

10.6.2. Funciones de forma y matriz de funciones de forma

Despejando las nueve coordenadas generalizadas de las ecuaciones de los desplazamientos nodales, se obtiene la función de aproximación en términos de los valores nodales y las funciones de forma, así:

$$\begin{aligned} w^{(e)} = & N_{w1}^{(e)} w_1^{(e)} + N_{\partial x 1}^{(e)} (\partial_x w)_1^{(e)} + N_{\partial y 1}^{(e)} (\partial_y w)_1^{(e)} + \\ & N_{w2}^{(e)} w_2^{(e)} + N_{\partial x 2}^{(e)} (\partial_x w)_2^{(e)} + N_{\partial y 2}^{(e)} (\partial_y w)_2^{(e)} + \\ & N_{w3}^{(e)} w_3^{(e)} + N_{\partial x 3}^{(e)} (\partial_x w)_3^{(e)} + N_{\partial y 3}^{(e)} (\partial_y w)_3^{(e)} \end{aligned} \quad (10.38)$$

Tales funciones de forma evaluadas en las coordenadas de área de cada nudo son iguales a:

$$N_{w1}^{(e)}(L_1, L_2, L_3) = L_1 + L_1^2 L_2 + L_1^2 L_3 - L_1 L_2^2 - L_1 L_3^2 \quad (10.39a)$$

$$N_{\partial x 1}^{(e)}(L_1, L_2, L_3) = c_3(L_1^2 L_2 + \tilde{L}) - c_2(L_1^2 L_3 + \tilde{L}) \quad (10.39b)$$

$$N_{\partial y 1}^{(e)}(L_1, L_2, L_3) = b_3(L_1^2 L_2 + \tilde{L}) - b_2(L_1^2 L_3 + \tilde{L}) \quad (10.39c)$$

$$N_{w2}^{(e)}(L_1, L_2, L_3) = L_2 + L_2^2 L_3 + L_2^2 L_1 - L_2 L_3^2 - L_2 L_1^2 \quad (10.39d)$$

$$N_{\partial x 2}^{(e)}(L_1, L_2, L_3) = c_1(L_2^2 L_3 + \tilde{L}) - c_3(L_2^2 L_1 + \tilde{L}) \quad (10.39e)$$

$$N_{\partial y 2}^{(e)}(L_1, L_2, L_3) = b_1(L_2^2 L_3 + \tilde{L}) - b_3(L_2^2 L_1 + \tilde{L}) \quad (10.39f)$$

$$N_{w3}^{(e)}(L_1, L_2, L_3) = L_3 + L_3^2 L_1 + L_3^2 L_2 - L_3 L_1^2 - L_3 L_2^2 \quad (10.39g)$$

$$N_{\partial x 3}^{(e)}(L_1, L_2, L_3) = c_2(L_3^2 L_1 + \tilde{L}) - c_1(L_3^2 L_2 + \tilde{L}) \quad (10.39h)$$

$$N_{\partial y 3}^{(e)}(L_1, L_2, L_3) = b_2(L_3^2 L_1 + \tilde{L}) - b_1(L_3^2 L_2 + \tilde{L}) \quad (10.39i)$$

donde,

$$b_1 = y_2 - y_3, \quad b_2 = y_3 - y_1, \quad b_3 = y_1 - y_2$$

$$c_1 = x_3 - x_2, \quad c_2 = x_1 - x_3, \quad c_3 = x_2 - x_1$$

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}L_1L_2L_3$$

Las expresiones anteriores de las funciones de forma se pueden escribir para un nudo i , cuando los otros nudos son q y r , así:

$$N_{wi}^{(e)}(L_i, L_q, L_r) = L_i + L_i^2L_q + L_i^2L_r - L_iL_q^2 - L_iL_r^2 \quad (10.40a)$$

$$N_{\partial xi}^{(e)}(L_i, L_q, L_r) = c_r(L_i^2L_q + \tilde{L}) - c_q(L_i^2L_r + \tilde{L}) \quad (10.40b)$$

$$N_{\partial yi}^{(e)}(L_i, L_q, L_r) = b_r(L_i^2L_q + \tilde{L}) - b_q(L_i^2L_r + \tilde{L}) \quad (10.40c)$$

donde,

$$c_r = x_q - x_i, \quad c_q = x_i - x_r, \quad b_r = y_i - y_q, \quad b_q = y_r - y_i, \quad \tilde{L} = \frac{1}{2}L_iL_qL_r \quad (10.41)$$

En la expresión anterior, cuando el nudo $i = 1$ los nudos q y r son 2 y 3; si el nudo $i = 2$, el nudo $q = 3$ y el nudo $r = 1$; y si el nudo $i = 3$, entonces $q = 1$ y $r = 2$.

La función de aproximación de la deflexión, dada en la Ecuación 10.38, también se puede expresar de forma matricial como:

$$w^{(e)}(L_1, L_2, L_3) = \mathbf{N}^{(e)}(L_1, L_2, L_3) \mathbf{a}_{(e)} \quad (10.42)$$

donde la matriz de funciones de forma es igual a:

$$\mathbf{N}^{(e)} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{N}_1^{(e)} & \mathbf{N}_2^{(e)} & \mathbf{N}_3^{(e)} \end{array} \right], \quad \mathbf{N}_i^{(e)} = \left[\begin{array}{ccc} N_{wi}^{(e)} & N_{\partial xi}^{(e)} & N_{\partial yi}^{(e)} \end{array} \right] \quad (10.43)$$

y el vector de valores nodales de desplazamiento corresponde a:

$$\mathbf{a}_{(e)} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{a}_1^{(e)} & \mathbf{a}_2^{(e)} & \mathbf{a}_3^{(e)} \end{array} \right]^T, \quad \mathbf{a}_i^{(e)} = \left[\begin{array}{ccc} w_i^{(e)} & (\partial_x w)_i^{(e)} & (\partial_y w)_i^{(e)} \end{array} \right]^T \quad (10.44)$$

10.6.3. Matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma

Los coeficientes de la matriz columna de la deformación generalizada $\bar{\Phi}^{(e)}$ en el interior de un elemento finito corresponden a las segundas derivadas de la deflexión como se indicó en la ecuación (10.10), de la forma:

$$\bar{\Phi}^{(e)} = \tilde{\nabla} w^{(e)} \quad (10.45)$$

donde el operador $\tilde{\nabla}$ está definido en la ecuación (10.9).

Remplazando las ecuaciones (10.42) y (10.43) en la expresión anterior se tiene que:

$$\bar{\Phi}^{(e)} = \tilde{\nabla} \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{a}_{(e)} = \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{a}_{(e)} \quad (10.46a)$$

donde $\mathbf{B}^{(e)}$ es la matriz de operadores diferenciales actuando sobre las funciones de forma, la cual corresponde a:

$$\mathbf{B}^{(e)} = \tilde{\nabla} \mathbf{N}^{(e)} \quad (10.46b)$$

En particular, la matriz $\mathbf{B}^{(e)}$ de un elemento triangular CKZ se puede escribir de la forma:

$$\mathbf{B}^{(e)} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{B}_1^{(e)} & \mathbf{B}_2^{(e)} & \mathbf{B}_3^{(e)} \end{array} \right] \quad (10.47a)$$

donde cada submatriz $\mathbf{B}_i^{(e)} = \tilde{\nabla} \mathbf{N}_i^{(e)}$, y sus términos corresponden a:

$$\mathbf{B}_i^{(e)} = \left[\begin{array}{ccc} B_{11(i)}^{(e)} & B_{12(i)}^{(e)} & B_{13(i)}^{(e)} \\ B_{21(i)}^{(e)} & B_{22(i)}^{(e)} & B_{23(i)}^{(e)} \\ B_{31(i)}^{(e)} & B_{32(i)}^{(e)} & B_{33(i)}^{(e)} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} -\frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 N_{\partial xi}^{(e)}}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 N_{\partial yi}^{(e)}}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 N_{\partial xi}^{(e)}}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 N_{\partial yi}^{(e)}}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial x \partial y} & -2\frac{\partial^2 N_{\partial xi}^{(e)}}{\partial x \partial y} & -2\frac{\partial^2 N_{\partial yi}^{(e)}}{\partial x \partial y} \end{array} \right] \quad (10.47b)$$

El coeficiente $\frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial x^2}$ de la submatriz anterior se obtiene aplicando dos veces la regla de la cadena como se indicó en la Ecuación 10.36, con los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} 4A_{(e)}^2 \cdot \frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial x^2} &= b_1^2 \frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial L_1^2} + b_2^2 \frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial L_2^2} + b_3^2 \frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial L_3^2} + \\ &+ 2b_1 b_2 \frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial L_1 \partial L_2} + 2b_1 b_3 \frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial L_1 \partial L_3} + 2b_2 b_3 \frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial L_2 \partial L_3} \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_{wi}^{(e)}}{\partial L_i} &= 2L_i L_q + 2L_i L_r - L_q^2 - L_r^2 \\
 \frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial L_i^2} &= 2(L_q + L_r) \quad , \quad \frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial L_i \partial L_q} = 2(L_i - L_q) \quad , \quad \frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial L_i \partial L_r} = 2(L_i - L_r) \\
 \frac{\partial N_{wi}^{(e)}}{\partial L_q} &= L_i^2 - 2L_i L_q \\
 \frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial L_q^2} &= -2L_i \quad , \quad \frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial L_q \partial L_i} = 2(L_i - L_q) \quad , \quad \frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial L_q \partial L_r} = 0 \\
 \frac{\partial N_{wi}^{(e)}}{\partial L_r} &= L_i^2 - 2L_i L_r \\
 \frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial L_r^2} &= -2L_i \quad , \quad \frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial L_r \partial L_i} = 2(L_i - L_r) \quad , \quad \frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial L_r \partial L_q} = 0
 \end{aligned}$$

en consecuencia,

$$\begin{aligned}
 B_{11(i)}^{(e)} &= \frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial x^2} = \\
 &= \frac{1}{2A_{(e)}^2} [b_i^2(L_q + L_r) - b_q^2 L_i - b_r^2 L_i + 2b_i b_q(L_i - L_q) + 2b_i b_r(L_i - L_q)]
 \end{aligned} \tag{10.48}$$

De la misma forma se calcula la segunda derivada de la función de forma con respecto a y , con el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
 B_{21(i)}^{(e)} &= \frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial y^2} = \\
 &= \frac{1}{2A_{(e)}^2} [c_i^2(L_q + L_r) - c_q^2 L_i - c_r^2 L_i + 2c_i c_q(L_i - L_q) + 2c_i c_r(L_i - L_q)]
 \end{aligned} \tag{10.49}$$

De acuerdo con la Ecuación 10.36, la derivada cruzada de la función de forma $N_{wi}^{(e)}$ se define de la forma:

$$\begin{aligned}
 4A_{(e)}^2 \cdot \frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial x \partial y} &= b_1 c_1 \frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial L_1^2} + b_1 c_2 \frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial L_1 \partial L_2} + b_1 c_3 \frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial L_1 \partial L_3} + \\
 &\quad + b_2 c_1 \frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial L_2 \partial L_1} + b_2 c_2 \frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial L_2^2} + b_2 c_3 \frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial L_2 \partial L_3} + \\
 &\quad + b_3 c_1 \frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial L_3 \partial L_1} + b_3 c_2 \frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial L_3 \partial L_2} + b_3 c_3 \frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial L_3^2}
 \end{aligned}$$

Después de reemplazar las segundas derivadas de la función de aproximación con respecto a las coordenadas de área se concluye que:

$$\begin{aligned} B_{31(i)}^{(e)} &= \frac{\partial^2 N_{wi}^{(e)}}{\partial x \partial y} = \\ &= \frac{1}{2A_{(e)}^2} [b_i c_i (L_q + L_r) + b_i c_q (L_i - L_q) + b_i c_r (L_i - L_r) + \\ &\quad + b_q c_i (L_i - L_q) - b_q c_q L_i + b_r c_i (L_i - L_r) - b_r c_r L_i] \end{aligned} \quad (10.50)$$

Por otro lado, la primera y las segundas derivadas de la función de forma $N_{\partial xi}^{(e)}$ con respecto a las coordenadas de área L_i , L_q y L_r , son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{\partial xi}^{(e)}}{\partial L_i} &= c_r (2L_i L_q + 0.5L_q L_r) - c_q (2L_i L_r + 0.5L_q L_r) , \quad \frac{\partial^2 N_{\partial xi}^{(e)}}{\partial L_i^2} = c_r (2L_q) - c_q (2L_r) \\ \frac{\partial^2 N_{\partial xi}^{(e)}}{\partial L_i \partial L_q} &= c_r (2L_i + 0.5L_r) - c_q (0.5L_r) , \quad \frac{\partial^2 N_{\partial xi}^{(e)}}{\partial L_i \partial L_r} = c_r (0.5L_q) - c_q (2L_i + 0.5L_q) \\ \frac{\partial N_{\partial xi}^{(e)}}{\partial L_q} &= c_r (L_i^2 + 0.5L_i L_r) - c_q (0.5L_i L_r) , \quad \frac{\partial^2 N_{\partial xi}^{(e)}}{\partial L_q \partial L_i} = c_r (2L_i + 0.5L_r) - c_q (0.5L_r) \\ \frac{\partial^2 N_{\partial xi}^{(e)}}{\partial L_q^2} &= 0 , \quad \frac{\partial^2 N_{\partial xi}^{(e)}}{\partial L_q \partial L_r} = c_r (0.5L_i) - c_q (0.5L_i) \\ \frac{\partial N_{\partial xi}^{(e)}}{\partial L_r} &= c_r (0.5L_i L_q) - c_q (L_i^2 + 0.5L_i L_q) , \quad \frac{\partial^2 N_{\partial xi}^{(e)}}{\partial L_r \partial L_i} = c_r (0.5L_q) - c_q (2L_i + 0.5L_q) \\ \frac{\partial^2 N_{\partial xi}^{(e)}}{\partial L_r \partial L_q} &= c_r (0.5L_i) - c_q (0.5L_i) , \quad \frac{\partial^2 N_{\partial xi}^{(e)}}{\partial L_r^2} = 0 \end{aligned}$$

Siguiendo el mismo procedimiento se obtienen las segundas derivadas de la función de forma $N_{\partial xi}^{(e)}$, con respecto a las direcciones x y y . Los resultados son los siguientes:

$$\begin{aligned} B_{12(i)}^{(e)} &= \frac{\partial^2 N_{\partial xi}^{(e)}}{\partial x^2} = \\ &= \frac{1}{4A_{(e)}^2} [b_i^2 (2c_r L_q - 2c_q L_r) + 2b_i b_q (c_r (2L_i + 0.5L_r) - 0.5c_q L_r) + \\ &\quad + 2b_i b_r (0.5c_r L_q - c_q (2L_i + 0.5L_q)) + 2b_q b_r (0.5c_r L_i - 0.5c_q L_i)] \end{aligned} \quad (10.51)$$

$$\begin{aligned}
B_{22(i)}^{(e)} &= \frac{\partial^2 N_{\partial xi}^{(e)}}{\partial y^2} = \\
&= \frac{1}{4A_{(e)}^2} [c_i^2(2c_rL_q - 2c_qL_r) + 2c_ic_q(c_r(2L_i + 0.5L_r) - 0.5c_qL_r) + \\
&\quad + 2c_ic_r(0.5c_rL_q - c_q(2L_i + 0.5L_q)) + 2c_qc_r(0.5c_rL_i - 0.5c_qL_i)] \tag{10.52}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{32(i)}^{(e)} &= \frac{\partial^2 N_{\partial xi}^{(e)}}{\partial x \partial y} = \\
&= \frac{1}{4A_{(e)}^2} [b_ic_i(2c_rL_q) - 2c_qL_r) + \\
&\quad + b_ic_q(c_r(2L_i + 0.5L_r) - 0.5c_qL_r) + b_ic_r(0.5c_rL_q - c_q(2L_i + 0.5L_q)) + \\
&\quad + b_qc_i(c_r(2L_i + 0.5L_r) - 0.5c_qL_r) + b_qc_r(0.5c_rL_i - 0.5c_qL_i) + \\
&\quad + b_rc_i(0.5c_rL_q - c_q(2L_i + 0.5L_q)) + b_rc_q(0.5c_rL_i - 0.5c_qL_i)] \tag{10.53}
\end{aligned}$$

Asimismo, las segundas derivadas de la función de forma $N_{\partial yi}^{(e)}$, son iguales a:

$$\begin{aligned}
B_{13(i)}^{(e)} &= \frac{\partial^2 N_{\partial yi}^{(e)}}{\partial x^2} = \\
&= \frac{1}{4A_{(e)}^2} [b_i^2(2b_rL_q - 2b_qL_r) + 2b_ib_q(b_r(2L_i + 0.5L_r) - 0.5b_qL_r) + \\
&\quad + 2b_ib_r(0.5b_rL_q - b_q(2L_i + 0.5L_q)) + 2b_qb_r(0.5b_rL_i - 0.5b_qL_i)] \tag{10.54}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{32(i)}^{(e)} &= \frac{\partial^2 N_{\partial yi}^{(e)}}{\partial y^2} = \\
&= \frac{1}{4A_{(e)}^2} [c_i^2(2b_rL_q - 2b_qL_r) + 2c_ic_q(b_r(2L_i + 0.5L_r) - 0.5b_qL_r) + \\
&\quad + 2c_ic_r(0.5b_rL_q - c_q(2L_i + 0.5L_q)) + 2c_qc_r(0.5b_rL_i - 0.5b_qL_i)] \tag{10.55}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{33(i)}^{(e)} &= \frac{\partial^2 N_{\partial y i}^{(e)}}{\partial x \partial y} = \\
&= \frac{1}{4A_{(e)}^2} [b_i c_i (2b_r L_q) - 2b_q L_r] + \\
&+ b_i c_q (b_r (2L_i + 0.5L_r) - 0.5b_q L_r) + b_i c_r (0.5b_r L_q - b_q (2L_i + 0.5L_q)) + \\
&+ b_q c_i (b_r (2L_i + 0.5L_r) - 0.5b_q L_r) + b_q c_r (0.5b_r L_i - 0.5b_q L_i) + \\
&+ b_r c_i (0.5b_r L_q - b_q (2L_i + 0.5L_q)) + b_r c_q (0.5b_r L_i - 0.5b_q L_i)] \quad (10.56)
\end{aligned}$$

En conclusión, las ecuaciones (10.48) a (10.56) indican los coeficientes de la matriz operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma $\mathbf{B}_i^{(e)}$, asociada al nudo i de la Ecuación 10.47b.

10.6.4. Aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales

A partir del Principio de los Trabajos Virtuales en el medio continuo, se puede definir, en el interior de un elemento finito e , el desplazamiento en dirección z o deflexión virtual $\delta w^{(e)}$ y la matriz columna de la deformación generalizada virtual $\delta \bar{\Phi}_{(e)}$, como:

$$\delta w^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \delta \mathbf{a}_{(e)} = \delta \mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{N}_{(e)}^T \quad (10.57a)$$

$$\delta \bar{\Phi}_{(e)} = \mathbf{B}^{(e)} \delta \mathbf{a}_{(e)}, \quad \delta \bar{\Phi}_{(e)}^T = \delta \mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{B}_{(e)}^T \quad (10.57b)$$

Sustituyendo en la ecuación (10.24), las integrales en el área del plano medio de la placa, por la sumatoria de integrales definidas en el dominio de cada elemento finito $e = 1, \dots, ne$, se tiene que:

$$\sum_{e=1}^{ne} \left[\int_{A^{(e)}} \delta w^{(e)} q^{(e)} dA \right] + \sum_{i=1}^r \delta w_i f_{zi} = \sum_{e=1}^{ne} \left[\int_{A^{(e)}} \delta \bar{\Phi}_{(e)}^T \bar{\mathbf{D}}^{(e)} \bar{\Phi}_{(e)} dA \right]$$

siendo $q^{(e)}$ la carga distribuida uniforme por unidad de superficie en dirección z sobre el elemento e .

Remplazando las ecuaciones (10.57) en la expresión anterior se obtiene lo siguiente:

$$\sum_{e=1}^{ne} \left[\delta \mathbf{a}_{(e)}^T \int_{A^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T q^{(e)} dA \right] + \sum_{i=1}^r \delta w_i f_{zi} = \sum_{e=1}^{ne} \left[\delta \mathbf{a}_{(e)}^T \left[\int_{A^{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T \bar{\mathbf{D}}^{(e)} \mathbf{B}_{(e)} dA \right] \mathbf{a}_{(e)} \right]$$

La integral a la izquierda de la igualdad anterior se define como el vector de fuerzas equivalente a la acción de la carga distribuida uniforme por unidad de superficie del elemento, de la forma:

$$\mathbf{f}_{(e)}^{(q)} = \int_{A^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T q^{(e)} dA \quad (10.58)$$

Asimismo, la integral a la derecha de la igualdad es denominada matriz de rigidez del elemento finito y se escribe como:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T \bar{\mathbf{D}}^{(e)} \mathbf{B}_{(e)} dA \quad (10.59)$$

En consecuencia,

$$\sum_{e=1}^{ne} \left[\delta \mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{f}_{(e)}^{(q)} \right] + \sum_{i=1}^r \delta w_i f_{zi} = \sum_{e=1}^{ne} \left[\delta \mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}_{(e)} \right] \quad (10.60)$$

Ahora se define el vector de acciones externas $\mathbf{f}^{(n)}$, aplicadas directamente en los nudos de la malla de elementos finitos, el cual incluye las cargas puntuales en dirección z . Asimismo, se define el vector de desplazamientos virtuales $\delta \mathbf{a}$ en los nudos de la malla. Esto permite que en la expresión anterior se reemplace la sumatoria en $i = 1, \dots, r$ por el producto matricial así:

$$\sum_{i=1}^r \delta w_i f_{zi} = \delta \mathbf{a}^T \mathbf{f}^{(n)} \quad (10.61)$$

De la misma forma como se presentó en la formulación del método de los elementos finitos para problemas bi y tridimensionales en capítulos anteriores, la sumatoria del trabajo virtual externo realizado por la carga distribuida en cada elemento se puede remplazar por:

$$\sum_{e=1}^{ne} \left[\delta \mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{f}_{(e)}^{(q)} \right] = \delta \mathbf{a}^T \mathbf{f}^{(q)} \quad (10.62)$$

siendo, $\mathbf{f}^{(q)}$ el vector de fuerzas equivalentes a la acción de carga distribuida en los nudos de la malla. Esta última se obtiene del proceso de ensamblaje de la forma:

$$\mathbf{f}^{(q)} = \sum_{e=1}^{ne} \mathbb{A}_{(e)} \mathbf{f}_{(e)}^{(q)} \quad (10.63)$$

La suma de las fuerzas que actúan directamente sobre los nudos y las equivalentes a la acción de cargas distribuidas se define el vector de fuerzas totales \mathbf{f} , así:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(n)} + \mathbf{f}^{(q)} \quad (10.64)$$

La sumatoria del trabajo virtual interno realizado por cada elemento finito se puede remplazar por:

$$\sum_{e=1}^{ne} \left[\delta \mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}_{(e)} \right] = \delta \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} \quad (10.65)$$

siendo, \mathbf{a} el vector de desplazamientos nodales y \mathbf{K} la matriz de rigidez de la malla. Esta última se obtiene del proceso de ensamblaje, así:

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{ne} \mathbf{K}^{(e)} \quad (10.66)$$

Remplazando las ecuaciones (10.61) a la (10.66) en la expresión (10.60), y cancelando $\delta \mathbf{a}$, se concluye que:

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (10.67)$$

10.6.5. Matriz de rigidez del elemento

La subdivisión de la matriz $\mathbf{B}^{(e)}$ presentada en la ecuación (10.47), permite expresar a la matriz de rigidez del elemento finito $\mathbf{K}^{(e)}$, definida en la ecuación (10.59), como un conjunto de submatrices asociadas a cada nudo, así:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(e)} & \mathbf{K}_{12}^{(e)} & \mathbf{K}_{13}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{12}^{(e)} & \mathbf{K}_{22}^{(e)} & \mathbf{K}_{23}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{13}^{(e)} & \mathbf{K}_{23}^{(e)} & \mathbf{K}_{33}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (10.68a)$$

donde cada submatriz es de la forma:

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}_i^{(e)T} \bar{\mathbf{D}}^{(e)} \mathbf{B}_j^{(e)} dA \quad (10.68b)$$

siendo i y j índices asociados a cada nudo de 1 a 3.

Remplazando las ecuaciones (10.47) y (10.18), la operación matricial expresada en la ecuación anterior es igual a:

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \begin{bmatrix} K_{11(ij)}^{(e)} & K_{12(ij)}^{(e)} & K_{13(ij)}^{(e)} \\ K_{12(ij)}^{(e)} & K_{22(ij)}^{(e)} & K_{(ij)23}^{(e)} \\ K_{13(ij)}^{(e)} & K_{23(ij)}^{(e)} & K_{33(ij)}^{(e)} \end{bmatrix} = \int_{A^{(e)}} \begin{bmatrix} B_{11(i)}^{(e)} & B_{21(i)}^{(e)} & B_{31(i)}^{(e)} \\ B_{12(i)}^{(e)} & B_{22(i)}^{(e)} & B_{32(i)}^{(e)} \\ B_{13(i)}^{(e)} & B_{23(i)}^{(e)} & B_{33(i)}^{(e)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{D}_{11}^{(e)} & \bar{D}_{12}^{(e)} & 0 \\ \bar{D}_{12}^{(e)} & \bar{D}_{11}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{D}_{33}^{(e)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11(j)}^{(e)} & B_{12(j)}^{(e)} & B_{13(j)}^{(e)} \\ B_{21(j)}^{(e)} & B_{22(j)}^{(e)} & B_{23(j)}^{(e)} \\ B_{31(j)}^{(e)} & B_{32(j)}^{(e)} & B_{33(j)}^{(e)} \end{bmatrix} dA \quad (10.69a)$$

donde,

$$\bar{D}_{11}^{(e)} = \frac{t^3}{12} \cdot \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad \bar{D}_{12}^{(e)} = \frac{t^3}{12} \cdot \frac{\nu E}{1 - \nu^2}, \quad \bar{D}_{33}^{(e)} = \frac{t^3}{12} \cdot \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (10.69b)$$

Después de realizar el triple producto matricial, los coeficientes de la submatriz $\mathbf{K}_{ij}^{(e)}$ son los siguientes:

$$K_{11(ij)}^{(e)} = \int_{A^{(e)}} (B_{11(i)}^{(e)} B_{11(j)}^{(e)} \bar{D}_{11}^{(e)} + B_{21(i)}^{(e)} B_{11(j)}^{(e)} \bar{D}_{12}^{(e)} + B_{11(i)}^{(e)} B_{21(j)}^{(e)} \bar{D}_{12}^{(e)} + B_{21(i)}^{(e)} B_{21(j)}^{(e)} \bar{D}_{11}^{(e)} + B_{31(i)}^{(e)} B_{31(j)}^{(e)} \bar{D}_{33}^{(e)}) dA \quad (10.70a)$$

$$K_{12(ij)}^{(e)} = \int_{A^{(e)}} (B_{11(i)}^{(e)} B_{12(j)}^{(e)} \bar{D}_{11}^{(e)} + B_{21(i)}^{(e)} B_{12(j)}^{(e)} \bar{D}_{12}^{(e)} + B_{11(i)}^{(e)} B_{22(j)}^{(e)} \bar{D}_{12}^{(e)} + B_{21(i)}^{(e)} B_{22(j)}^{(e)} \bar{D}_{11}^{(e)} + B_{31(i)}^{(e)} B_{32(j)}^{(e)} \bar{D}_{33}^{(e)}) dA \quad (10.70b)$$

$$K_{13(ij)}^{(e)} = \int_{A^{(e)}} (B_{11(i)}^{(e)} B_{13(j)}^{(e)} \bar{D}_{11}^{(e)} + B_{21(i)}^{(e)} B_{13(j)}^{(e)} \bar{D}_{12}^{(e)} + B_{11(i)}^{(e)} B_{23(j)}^{(e)} \bar{D}_{12}^{(e)} + B_{21(i)}^{(e)} B_{23(j)}^{(e)} \bar{D}_{11}^{(e)} + B_{31(i)}^{(e)} B_{33(j)}^{(e)} \bar{D}_{33}^{(e)}) dA \quad (10.70c)$$

$$K_{22(ij)}^{(e)} = \int_{A^{(e)}} (B_{12(i)}^{(e)} B_{12(j)}^{(e)} \bar{D}_{11}^{(e)} + B_{22(i)}^{(e)} B_{12(j)}^{(e)} \bar{D}_{12}^{(e)} + B_{12(i)}^{(e)} B_{22(j)}^{(e)} \bar{D}_{12}^{(e)} + B_{22(i)}^{(e)} B_{22(j)}^{(e)} \bar{D}_{11}^{(e)} + B_{32(i)}^{(e)} B_{32(j)}^{(e)} \bar{D}_{33}^{(e)}) dA \quad (10.70d)$$

$$K_{23(ij)}^{(e)} = \int_{A^{(e)}} (B_{12(i)}^{(e)} B_{13(j)}^{(e)} \bar{D}_{11}^{(e)} + B_{22(i)}^{(e)} B_{13(j)}^{(e)} \bar{D}_{12}^{(e)} + B_{12(i)}^{(e)} B_{23(j)}^{(e)} \bar{D}_{12}^{(e)} + B_{22(i)}^{(e)} B_{23(j)}^{(e)} \bar{D}_{11}^{(e)} + B_{32(i)}^{(e)} B_{33(j)}^{(e)} \bar{D}_{33}^{(e)}) dA \quad (10.70e)$$

$$K_{33(ij)}^{(e)} = \int_{A^{(e)}} (B_{13(i)}^{(e)} B_{13(j)}^{(e)} \bar{D}_{11}^{(e)} + B_{23(i)}^{(e)} B_{13(j)}^{(e)} \bar{D}_{12}^{(e)} + B_{13(i)}^{(e)} B_{23(j)}^{(e)} \bar{D}_{12}^{(e)} + \\ + B_{23(i)}^{(e)} B_{23(j)}^{(e)} \bar{D}_{11}^{(e)} + B_{33(i)}^{(e)} B_{33(j)}^{(e)} \bar{D}_{33}^{(e)}) dA \quad (10.70f)$$

Se observa que los coeficientes de la matriz de rigidez dependen de las integrales de los productos entre las componentes de la matriz de operadores diferenciales actuando sobre las funciones de forma. Los términos de la matriz $\mathbf{B}_i^{(e)}$ están expresados en términos de las coordenadas de área para un nudo i en las ecuaciones (10.48) a (10.56). Asimismo, los coeficientes de la matriz $\mathbf{B}_j^{(e)}$ corresponden a los términos expresados en las mismas ecuaciones, sustituyendo los subíndices i, q y r por j, s y t . Cuando $j = 1$, los subíndices $s = 2$ y $t = 3$, en cambio si $j = 2$, los subíndices $s = 3$ y $t = 1$, y si $j = 3$, los subíndices $s = 1$ y $t = 2$.

Aplicando la ecuación (6.50), se obtiene la integral del cuadrado de una coordenada de área o del producto entre dos coordenadas de área, así:

$$\int L_i^2 dA = \int L_q^2 dA = \int L_r^2 dA = \frac{A^{(e)}}{6} \quad (10.71a)$$

$$\int L_j^2 dA = \int L_s^2 dA = \int L_t^2 dA = \frac{A^{(e)}}{6} \quad (10.71b)$$

$$\int L_i L_q dA = \int L_q L_r dA = \int L_i L_r dA = \frac{A^{(e)}}{12} \quad (10.71c)$$

$$\int L_j L_s dA = \int L_s L_t dA = \int L_j L_t dA = \frac{A^{(e)}}{12} \quad (10.71d)$$

en general,

$$\int L_g L_h dA = \begin{cases} A^{(e)}/6 & \text{si } g = h \\ A^{(e)}/12 & \text{si } g \neq h \end{cases} \quad (10.71e)$$

Siguiendo este procedimiento se pueden obtener los términos de la matriz de rigidez del elemento de placa CKZ. En algunas referencias se indican tales coeficientes (Cheung *et al.*, 1968).

10.6.6. Vector de fuerzas equivalentes a una carga distribuida en el elemento

La subdivisión de la matriz $\mathbf{N}^{(e)}$ presentada en la ecuación (10.43), permite expresar al vector de fuerzas equivalentes a la acción de una carga distribuida en el elemento

finito $\mathbf{f}_{(e)}^{(q)}$, definida en la ecuación (10.58), como un conjunto de submatrices asociadas a cada nudo, así:

$$\mathbf{f}_{(e)}^{(q)} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^{(q)(e)} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_2^{(q)(e)} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_3^{(q)(e)} \end{bmatrix} dA \quad (10.72a)$$

siendo $q^{(e)}$ una presión constante en el interior del elemento en dirección z . Cada submatriz $\mathbf{f}_i^{(q)(e)}$ es de la forma:

$$\mathbf{f}_i^{(q)(e)} = \int_{A^{(e)}} \mathbf{N}_i^{(e)T} q^{(e)} dA = \int_{A^{(e)}} \begin{bmatrix} N_{wi}^{(e)} \\ N_{\partial xi}^{(e)} \\ N_{\partial yi}^{(e)} \end{bmatrix} q^{(e)} dA = \begin{bmatrix} f_{1(i)}^{(q)(e)} \\ f_{2(i)}^{(q)(e)} \\ f_{3(i)}^{(q)(e)} \end{bmatrix} \quad (10.72b)$$

Cada término del vector anterior se obtiene integrando a las funciones de forma del elemento dadas en la ecuación (10.40), las cuales están en términos de las coordenadas de área. Aplicando la ecuación (6.50), se obtienen otras integrales de productos entre coordenadas de área, como los siguientes:

$$\int L_i dA = \int L_q dA = \int L_r dA = \frac{A^{(e)}}{3} \quad (10.73a)$$

$$\int L_i^2 L_q dA = \int L_i^2 L_r dA = \frac{A^{(e)}}{30} \quad (10.73b)$$

$$\int L_i L_q^2 dA = \int L_i L_r^2 dA = \frac{A^{(e)}}{30} \quad (10.73c)$$

$$\int \tilde{L} dA = \frac{1}{2} \int L_i L_q L_r dA = \frac{A^{(e)}}{120} \quad (10.73d)$$

Los términos del subvector de fuerzas equivalentes a la acción de una carga distribuida del nudo i de un elemento de placa CKZ, indicado en la ecuación (10.72b), son los siguientes:

$$f_{1(i)}^{(q)(e)} = \int_{A^{(e)}} N_{wi}^{(e)} q^{(e)} dA = \frac{1}{3} q^{(e)} A^{(e)} \quad (10.74a)$$

$$f_{2(i)}^{(q)(e)} = \int_{A^{(e)}} N_{\partial xi}^{(e)} q^{(e)} dA = \frac{1}{24} q^{(e)} A^{(e)} (c_r - c_q) \quad (10.74b)$$

$$f_{3(i)}^{(q)(e)} = \int_{A^{(e)}} N_{\partial yi}^{(e)} q^{(e)} dA = \frac{1}{24} q^{(e)} A^{(e)} (b_r - b_q) \quad (10.74c)$$

donde los parámetros c_r , c_q , b_r y b_q , están indicados en la ecuación (10.41).

10.7. Ejemplo de validación: Deflexión de una placa cuadrada empotrada en su contorno

10.8. Problemas propuestos

Problema 10.8.1 Una placa delgada rectangular está empotrada en sus bordes y soporta una carga puntual en el centro, como lo ilustra la xxx. ...

Problema 10.8.2 Una placa delgada rectangular está simplemente apoyada en sus bordes y soporta una carga distribuida uniforme normal a su plano, como lo ilustra la xxx. ...

Capítulo 11

Formulación de cascarones estructurales mediante el método de los elementos finitos

Corrección a la ecuación 10.16

$$\bar{\mathbf{S}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}^{(e)} \\ \bar{\mathbf{M}}^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^{(e)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t\mathbf{B}_1^{(em)} & \mathbf{0} & t\mathbf{B}_2^{(em)} & \mathbf{0} & t\mathbf{B}_3^{(em)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{t^3}{12}\mathbf{B}_1^{(ep)} & \mathbf{0} & \frac{t^3}{12}\mathbf{B}_2^{(ep)} & \mathbf{0} & \frac{t^3}{12}\mathbf{B}_3^{(ep)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{(em)} \\ \mathbf{a}_1^{(em)} \\ \mathbf{a}_2^{(em)} \\ \mathbf{a}_2^{(ep)} \\ \mathbf{a}_3^{(em)} \\ \mathbf{a}_3^{(ep)} \end{bmatrix} \quad (11.1)$$

Capítulo 12

Formulación del método de los elementos finitos en mecánica no lineal de sólidos

Este capítulo presenta la formulación del método de los elementos finitos aplicada a la solución de un problema no lineal de mecánica de sólidos, considerando acciones externas cuasi estáticas, deformaciones infinitesimales y modelos constitutivos que representan un comportamiento no lineal del material. Particularmente, se plantea un esquema incremental de aplicación de la carga sobre el sólido y se describen las principales técnicas de solución numérica no lineal necesarias para conservar su equilibrio (Oliver, 2002a).

El carácter no lineal del problema está determinado por un modelo constitutivo del material, donde el estado de esfuerzos en el instante actual $\boldsymbol{\sigma}_{l+1}$ es función de la deformación en ese momento $\boldsymbol{\varepsilon}_{l+1}$ y de su historia. Esta última está representada por las variables internas en el instante anterior $\boldsymbol{\alpha}_l$. En consecuencia esta formulación introduce una función constitutiva incremental, obtenida de la integración del modelo de material en el pseudo tiempo, de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma}_{l+1} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_{l+1}, \boldsymbol{\alpha}_l) \quad (12.1)$$

cuyo resultado $\boldsymbol{\sigma}_{l+1}$, se espera más cercano a la solución real cuando el incremento de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}_{l+1}$ es menor.

12.1. Principio de los Trabajos Virtuales

La posición de todas las partículas de un cuerpo material en un instante se denomina configuración. Se definen como configuraciones admisibles al conjunto de configuraciones que satisfacen las condiciones de frontera cinemáticas de un cuerpo. De todas

las configuraciones admisibles, solo una de ellas, denominada configuración verdadera, responde a la condición de equilibrio de un cuerpo sometido a fuerzas reales (Oñate, 1995; Oliver, 2002b).

Las configuraciones admisibles están restringidas a la vecindad de la configuración verdadera, por lo tanto se obtienen de variaciones infinitesimales o simplemente variaciones de dicha configuración. Las variaciones dadas por las configuraciones admisibles que además cumplen con las condiciones de equilibrio en un cuerpo material se denominan desplazamientos virtuales. Tales desplazamientos corresponden a valores arbitrarios mientras actúan valores fijos de las fuerzas reales en el cuerpo.

En cuerpos deformables, el trabajo virtual producido por las fuerzas reales se puede dividir en dos partes: el trabajo virtual realizado por las fuerzas internas denominado trabajo virtual interno y el trabajo virtual realizado por las fuerzas externas llamado trabajo virtual externo, como lo indica Oñate (1995).

Sea un sólido de volumen V y de superficie de contorno Γ , sujeto a fuerzas de cuerpo por unidad de volumen \mathbf{b} , a fuerzas de superficie por unidad de área \mathbf{p} y a fuerzas puntuales $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ aplicadas sobre el contorno ($\Gamma_p \cup \Gamma_f \subset \Gamma$), como lo indica la Figura 12.1. Las condiciones de frontera sobre el cuerpo corresponden a valores conocidos del desplazamiento real $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$ en los puntos materiales que hacen parte de un contorno definido $\Gamma_u \subset \Gamma$.

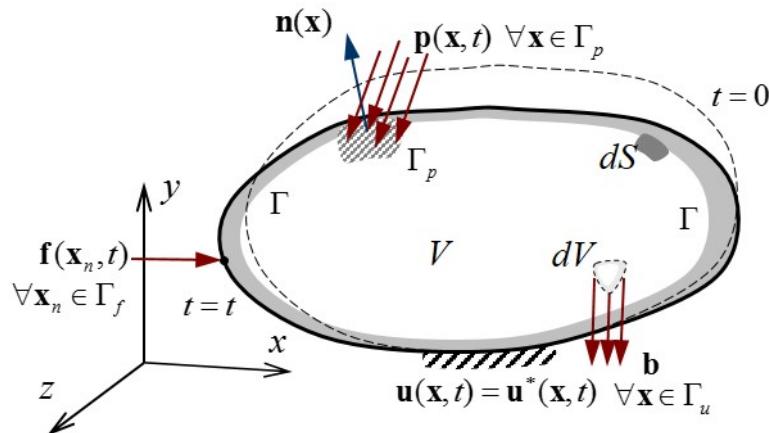


Figura 12.1: Sólido sometido a acciones externas.

El campo del desplazamiento virtual $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) = [\delta u, \delta v, \delta w]^T$, definido como una variación del desplazamiento, corresponde a una función cualquiera que cumple con

la condición de borde de la forma:

$$\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (12.2)$$

El trabajo virtual externo es realizado por las fuerzas reales externas \mathbf{b} , \mathbf{p} y $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ mientras se presenta un desplazamiento virtual $\delta\mathbf{u}$. Los vectores de fuerzas puntuales $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$, de fuerzas de superficie \mathbf{p} y de fuerzas de cuerpo \mathbf{b} son de la forma:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_p) = \begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z \end{bmatrix}^T \quad (12.3a)$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix}^T \quad (12.3b)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}^T \quad (12.3c)$$

En cambio, el trabajo virtual interno es la sumatoria de los trabajos producidos, en el volumen del sólido, por cada componente de esfuerzo mientras ocurre la respectiva componente de deformación generada por los desplazamientos virtuales. Lo anterior se puede expresar como la integral en el volumen del producto entre la matriz columna transpuesta de la deformación generada por los desplazamientos virtuales o simplemente deformación virtual $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T$ y la matriz columna del esfuerzo $\boldsymbol{\sigma}$, siendo:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{zz} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} & \sigma_{yz} \end{bmatrix}^T \quad (12.4a)$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T = \begin{bmatrix} \delta\varepsilon_{xx} & \delta\varepsilon_{yy} & \delta\varepsilon_{zz} & \delta\varepsilon_{xy} & \delta\varepsilon_{xz} & \delta\varepsilon_{yz} \end{bmatrix}^T \quad (12.4b)$$

El *Principio de los Trabajos Virtuales (PTV)* establece que un cuerpo está en equilibrio si y solo si el trabajo virtual realizado por todas las acciones internas y externas es nulo, es decir:

$$\int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{\Gamma_p} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{p} dS - \int_V \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} dV - \sum_{p=1}^{np} \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_p)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}_p) = \mathbf{0} \quad (12.5)$$

donde $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_p)$ y $\mathbf{f}(\mathbf{x}_p)$ son los vectores de desplazamiento virtual y de fuerza puntual de una partícula ubicada en la posición \mathbf{x}_p , respectivamente. El parámetro np indica el total de puntos materiales donde se aplican fuerzas puntuales. La ecuación anterior es válida para todo campo de desplazamientos virtuales que cumpla con las condiciones de frontera cinemáticas dadas en la expresión (12.2).

En el marco del método de los elementos finitos, un sólido de volumen V es aproximadamente igual a suma de los subdominios de cada elemento finito $V^{(e)}$,

como lo indica la Figura 1.2. Al dividir el dominio del sólido en una malla de ne elementos finitos, el Principio de los Trabajos Virtuales (PTV) establece el equilibrio de la forma:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{ne} \int_{V(e)} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{(e)}^T \boldsymbol{\sigma}_{(e)} dV - \sum_{e=1}^{ne} \int_{\Gamma_p^{(e)}} \delta \mathbf{u}_{(e)}^T \mathbf{p}_{(e)} dS - \\ - \sum_{e=1}^{ne} \int_{V(e)} \delta \mathbf{u}_{(e)}^T \mathbf{b}_{(e)} dV - \delta \mathbf{a}^T \mathbf{f}_{(n)} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (12.6)$$

Los vectores $\mathbf{p}_{(e)}$, $\mathbf{b}_{(e)}$, $\boldsymbol{\sigma}_{(e)}$, $\delta \boldsymbol{\varepsilon}_{(e)}$ y $\delta \mathbf{u}_{(e)}$ corresponden a las matrices columna de las fuerzas de superficie, las fuerzas de cuerpo, los esfuerzos, las deformaciones virtuales y los desplazamientos virtuales, respectivamente, en el elemento finito e . Las fuerzas de superficie $\mathbf{p}_{(e)}$ actúan sobre los contornos $\Gamma_p^{(e)}$ de los elementos finitos que pertenecen al contorno Γ_p del sólido indicado en la Figura 12.1. Las matrices columna $\delta \mathbf{a}$ y $\mathbf{f}_{(n)}$ contienen los desplazamientos virtuales y las fuerzas reales en los nudos de la malla de elementos finitos. Por lo tanto, el último término a la derecha en la ecuación anterior indica el trabajo virtual generado por las fuerzas nodales.

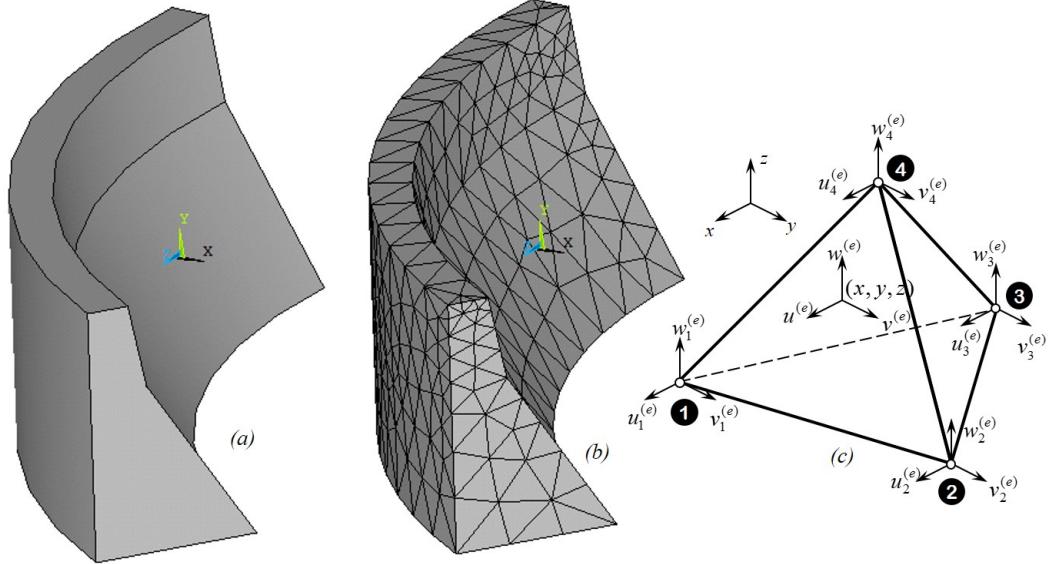


Figura 12.2: Sólido sometido a acciones externas.

Recordando que la matriz columna transpuesta del desplazamiento virtual $\delta \mathbf{u}_{(e)}^T$

y de la deformación virtual $\delta\boldsymbol{\varepsilon}_{(e)}^T$ en un elemento finito e se pueden expresar así:

$$\delta\mathbf{u}_{(e)}^T = \delta\mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{N}_{(e)}^T \quad (12.7a)$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}_{(e)}^T = \delta\mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{B}_{(e)}^T \quad (12.7b)$$

Siendo $\mathbf{N}_{(e)}$ y $\mathbf{B}_{(e)}$ la matriz de funciones de forma y la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma. La matriz columna $\delta\mathbf{a}_{(e)}$ contiene los desplazamientos virtuales en los nudos del elemento finito. Sustituyendo la expresión anterior en la ecuación (12.6) y recordando que los valores nodales $\delta\mathbf{a}_{(e)}$ son independientes del dominio del elemento, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{ne} \delta\mathbf{a}_{(e)}^T \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T \boldsymbol{\sigma}_{(e)} dV - \sum_{e=1}^{ne} \delta\mathbf{a}_{(e)}^T \int_{\Gamma_p^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{p}_{(e)} dS - \\ & - \sum_{e=1}^{ne} \delta\mathbf{a}_{(e)}^T \int_{V^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{b}_{(e)} dV - \delta\mathbf{a}^T \mathbf{f}_{(n)} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (12.8)$$

12.2. Vectores de fuerzas internas, externas y residuales

Se definen los vectores que contienen la fuerza interna $\mathbf{f}_{(e)}^{int}$ y la fuerza externa equivalentes $\tilde{\mathbf{f}}_{(e)}^{ext}$ en los nudos de un elemento e , así:

$$\mathbf{f}_{(e)}^{int} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T \boldsymbol{\sigma}_{(e)} dV \quad (12.9a)$$

$$\mathbf{f}_{(e)}^{ext} = \int_{\Gamma_p^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{p}_{(e)} dS + \int_{V^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{b}_{(e)} dV \quad (12.9b)$$

Sustituyendo los vectores de fuerzas internas y externas en la ecuación (12.8) se tiene que:

$$\sum_{e=1}^{ne} \delta\mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{f}_{(e)}^{int} - \sum_{e=1}^{ne} \delta\mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{f}_{(e)}^{ext} - \delta\mathbf{a}^T \mathbf{f}_{(n)} = \mathbf{0} \quad (12.10)$$

La sumatoria de los productos entre el vector de desplazamientos nodales y el vector de la fuerza interna de los elementos finitos, mostrada en el primer término de la ecuación (12.8), es equivalente a multiplicar el vector del desplazamiento virtual nodal de la malla transpuesto $\delta\mathbf{a}^T$ y el vector de fuerzas internas de los nudos de

la malla \mathbf{f}^{int} , obtenido del ensamblaje de los vectores de fuerzas internas de los elementos.

Los demás términos a la derecha de la ecuación (12.8) son iguales al producto entre el vector del desplazamiento virtual nodal de la malla transpuesto $\delta\mathbf{a}^T$ y el vector de fuerzas externas nodales de la malla \mathbf{f}^{ext} , obtenido del ensamblaje de los vectores de fuerzas externas equivalentes de los elementos más el vector de fuerzas aplicadas directamente sobre los nudos de la malla, es decir,

$$\delta\mathbf{a}^T \underset{e=1}{\overset{ne}{\mathbb{A}}} \mathbf{f}_{(e)}^{int} - \delta\mathbf{a}^T \underset{e=1}{\overset{ne}{\mathbb{A}}} \mathbf{f}_{(e)}^{ext} - \delta\mathbf{a}^T \mathbf{f}_{(n)} = \delta\mathbf{a}^T \mathbf{f}^{int} - \delta\mathbf{a}^T \mathbf{f}^{ext} = \mathbf{f}^{int} - \mathbf{f}^{ext} = \mathbf{0} \quad (12.11)$$

siendo,

$$\mathbf{f}^{int} = \underset{e=1}{\overset{ne}{\mathbb{A}}} \mathbf{f}_{(e)}^{int} \quad (12.12a)$$

$$\mathbf{f}^{ext} = \underset{e=1}{\overset{ne}{\mathbb{A}}} \mathbf{f}_{(e)}^{ext} + \mathbf{f}_{(n)} \quad (12.12b)$$

12.3. Formulación incremental no lineal del MEF

La formulación incremental no lineal del método de los elementos finitos permite obtener el vector de desplazamientos nodales de la malla \mathbf{a}_{l+1} , en un pseudo tiempo t_{l+1} . Específicamente se calcula el subvector de desplazamientos nodales desconocidos $\mathbf{a}_{\alpha(l+1)}$. El subíndice l es el contador de pasos de pseudo tiempo o también denominados pasos de carga.

La condición de equilibrio del sólido establece que la diferencia entre los vectores de fuerzas internas y externas de la malla en cada instante t_{l+1} , denominada vector de fuerzas residuales $\Psi(\mathbf{a}_{l+1})$, es igual a cero. Lo anterior indica que:

$$\mathbf{f}^{int}(\mathbf{a}_{l+1}) - \mathbf{f}^{ext}_{l+1} = \Psi(\mathbf{a}_{l+1}) = \mathbf{0} \quad (12.13a)$$

$$\mathbf{f}^{int}(\mathbf{a}_{l+1}) = \underset{e=1}{\overset{ne}{\mathbb{A}}} \mathbf{f}_{(e)}^{int}(\mathbf{a}_{l+1}^{(e)}) = \underset{e=1}{\overset{ne}{\mathbb{A}}} \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T \boldsymbol{\sigma}_{(e)}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}_{l+1}^{(e)}), \boldsymbol{\alpha}_l^{(e)}) dV \quad (12.13b)$$

El vector de desplazamientos nodales del elemento finito $\mathbf{a}_{l+1}^{(e)}$ se extrae de los coeficientes del vector \mathbf{a}_{l+1} , indicados por la numeración de los grados de libertad del elemento e . Esta operación se indica como:

$$\mathbf{a}_{l+1}^{(e)} = \mathbb{E}(\mathbf{a}_{l+1}, e) \quad (12.14)$$

Particularmente la cargas externas: puntuales, de cuerpo y de superficie, se podrían aplicar de forma proporcional como el producto entre un factor de carga λ_{l+1} en el

instante t_{l+1} y un vector de referencia: de la fuerza puntual en la malla $\hat{\mathbf{f}}_{(n)}$, de la fuerza de cuerpo en cada elemento $\hat{\mathbf{b}}_{(e)}$ y de la fuerza de superficie en cada elemento $\hat{\mathbf{p}}_{(e)}$, respectivamente. En consecuencia:

$$\mathbf{f}_{(n)} = \lambda_{l+1} \hat{\mathbf{f}}_{(n)}, \quad \mathbf{b}_{(e)} = \lambda_{l+1} \hat{\mathbf{b}}_{(e)}, \quad \mathbf{p}_{(e)} = \lambda_{l+1} \hat{\mathbf{p}}_{(e)}, \quad (12.15)$$

Se define el vector de fuerza externa de referencia en cada elemento $\tilde{\mathbf{f}}_{(e)}^{ext}$, de forma similar a la indicada en la (12.9b), así:

$$\hat{\mathbf{f}}_{(e)}^{ext} = \int_{\Gamma_p^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \hat{\mathbf{p}}_{(e)} dS + \int_{V^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \hat{\mathbf{b}}_{(e)} dV \quad (12.16)$$

De la misma forma como lo establece la ecuación (12.12b), el vector de fuerza externa de referencia de la malla $\hat{\mathbf{f}}^{ext}$ es igual:

$$\hat{\mathbf{f}}^{ext} = \bigcup_{e=1}^{ne} \hat{\mathbf{f}}_{(e)}^{ext} + \hat{\mathbf{f}}_{(n)} \quad (12.17)$$

De acuerdo a lo anterior, el vector de la fuerza externa en la malla en un instante t_{l+1} , se puede expresar de la forma:

$$\mathbf{f}_{l+1}^{ext} = \lambda_{l+1} \hat{\mathbf{f}}^{ext} \quad (12.18)$$

12.4. Planteamiento del problema no lineal mediante el método de Newton-Raphson

Los métodos numéricos, entre ellos el método de Newton-Raphson, permiten resolver un sistema de ecuaciones mediante un proceso iterativo. Este último consiste en repetir un conjunto de instrucciones, modificando una variable de prueba, hasta conseguir que el error calculado de una condición específica sea menor a un parámetro de tolerancia.

El método de Newton-Raphson se utiliza frecuentemente en la solución de la ecuación incremental no lineal obtenida por el método de los elementos finitos. Lo anterior se debe al orden cuadrático de su tasa de convergencia, y a la robustez y eficiencia que proporciona.

La ecuación no lineal (12.13) se puede resolver en un pseudo tiempo t_{l+1} , mediante el método numérico de Newton-Raphson, el cual tiene como objetivo obtener el vector de desplazamientos nodales de la malla \mathbf{a}_{l+1} , tal que $\Psi(\mathbf{a}_{l+1})$ sea cercano a cero.

Para alcanzar tal objetivo se requiere un proceso iterativo en el cual el vector de desplazamientos nodales en la malla para una etapa de prueba $\tilde{\mathbf{a}}^{(i)}$, se suma a un incremento $\Delta\tilde{\mathbf{a}}^{(i)}$ en cada iteración, hasta alcanzar un valor de $\Psi(\tilde{\mathbf{a}}^{(i)})$ cercano a cero. El superíndice i en las matrices y vectores corresponde al número de la iteración en un estado de prueba.

En la Figura 12.4 se representa de forma esquemática la obtención del vector de desplazamientos nodales de la malla en un pseudo tiempo específico \mathbf{a}_{l+1} . Haciendo una analogía con un problema de un solo grado de libertad, la abscisa de la gráfica mostrada representa el vector de desplazamientos de prueba en los nudos de la malla, mientras que la ordenada indica el vector de fuerzas residuales. Se observa como después de tres iteraciones el valor de $\Psi(\tilde{\mathbf{a}}^{(3)})$ es muy cercano a cero, obteniendo como solución el vector de desplazamientos en el pseudo tiempo $\mathbf{a}_{l+1} \cong \tilde{\mathbf{a}}^{(3)}$

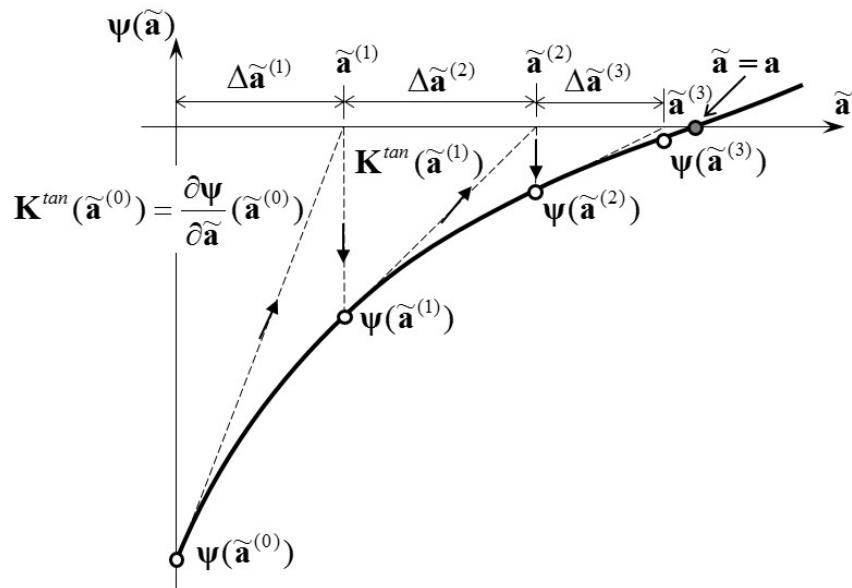


Figura 12.3: Relación esquemática entre el vector de fuerzas residuales y el vector de desplazamientos de prueba en los nudos de una malla, durante tres iteraciones en el método de Newton-Raphson y en un pseudo tiempo específico t_{l+1} .

En general, el vector de fuerzas residuales $\Psi(\tilde{\mathbf{a}} + \Delta\tilde{\mathbf{a}})$ en función de un vector de desplazamientos de prueba $\tilde{\mathbf{a}}$ más su incremento $\Delta\tilde{\mathbf{a}}$ se puede expresar como una serie de Taylor de la forma:

$$\Psi(\tilde{\mathbf{a}} + \Delta\tilde{\mathbf{a}}) = \Psi(\tilde{\mathbf{a}}) + \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{\mathbf{a}}} \right|_{\tilde{\mathbf{a}}} \Delta\tilde{\mathbf{a}} + \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tilde{\mathbf{a}}^2} \right|_{\tilde{\mathbf{a}}} (\Delta\tilde{\mathbf{a}})^2 + \left. \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \tilde{\mathbf{a}}^3} \right|_{\tilde{\mathbf{a}}} (\Delta\tilde{\mathbf{a}})^3 + \dots \quad (12.19)$$

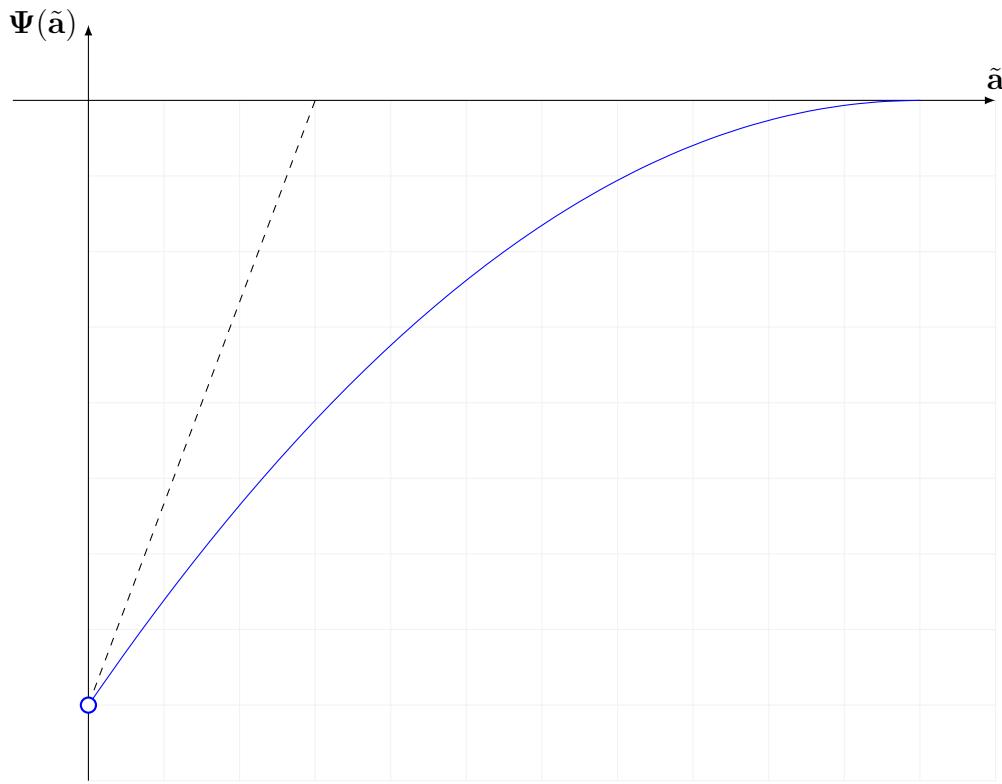


Figura 12.4: Relación esquemática entre el vector de fuerzas residuales y el vector de desplazamientos de prueba en los nudos de una malla, durante tres iteraciones en el método de Newton-Raphson y en un pseudo tiempo específico t_{i+1} .

Un valor aproximado del vector de fuerzas residuales se obtiene truncando la serie infinita presentada en la ecuación anterior a los dos primeros sumandos, es decir,

$$\Psi(\tilde{\mathbf{a}} + \Delta\tilde{\mathbf{a}}) \cong \Psi(\tilde{\mathbf{a}}) + \left. \frac{\partial\Psi}{\partial\tilde{\mathbf{a}}} \right|_{\tilde{\mathbf{a}}} \Delta\tilde{\mathbf{a}} \quad (12.20)$$

La derivada del vector de fuerzas residuales con respecto al vector de desplazamientos de prueba es igual a una matriz cuadrada, que se obtiene sustituyendo en

las ecuaciones (12.9a), (12.12a) y (12.13), así:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{\mathbf{a}}} \Big|_{\tilde{\mathbf{a}}} \Delta \tilde{\mathbf{a}} &= \Psi(\tilde{\mathbf{a}} + \Delta \tilde{\mathbf{a}}) - \Psi(\tilde{\mathbf{a}}) = \\ &= \sum_{e=1}^{ne} \int_{V^{(e)}} (\mathbf{B}_{(e)}^T(\tilde{\mathbf{a}} + \Delta \tilde{\mathbf{a}}) \boldsymbol{\sigma}_{(e)}(\tilde{\mathbf{a}} + \Delta \tilde{\mathbf{a}}) - \mathbf{B}_{(e)}^T(\tilde{\mathbf{a}}) \boldsymbol{\sigma}_{(e)}(\tilde{\mathbf{a}})) dV \\ &\quad - (\mathbf{f}^{ext}(\tilde{\mathbf{a}} + \Delta \tilde{\mathbf{a}}) - \mathbf{f}^{ext}(\tilde{\mathbf{a}})) \end{aligned} \quad (12.21)$$

En la ecuación anterior, la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma del elemento $\mathbf{B}_{(e)}$ y la matriz columna de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}_{(e)}$, se evalúan con respecto al vector de desplazamientos nodales de prueba del elemento finito e y su incremento $\tilde{\mathbf{a}}_{(e)}$ y $\Delta \tilde{\mathbf{a}}_{(e)}$. Estos vectores se obtienen de extraer los coeficientes del vector de desplazamientos de prueba de la malla y de su incremento $\tilde{\mathbf{a}}$ y $\Delta \tilde{\mathbf{a}}$, asociados a los grados de libertad del elemento, es decir:

$$\tilde{\mathbf{a}}_{(e)} = \mathbb{E}(\tilde{\mathbf{a}}, e), \quad \Delta \tilde{\mathbf{a}}_{(e)} = \mathbb{E}(\Delta \tilde{\mathbf{a}}, e) \quad (12.22)$$

Con el fin de simplificar la forma de presentar las matrices $\mathbf{B}_{(e)}$ y $\boldsymbol{\sigma}_{(e)}$ evaluadas en un elemento finito e , en las ecuaciones se considera que:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{(e)}(\tilde{\mathbf{a}} + \Delta \tilde{\mathbf{a}}) &= \mathbf{B}_{(e)}(\tilde{\mathbf{a}}_{(e)} + \Delta \tilde{\mathbf{a}}_{(e)}), & \mathbf{B}_{(e)}(\tilde{\mathbf{a}}) &= \mathbf{B}_{(e)}(\tilde{\mathbf{a}}_{(e)}) \\ \boldsymbol{\sigma}_{(e)}(\tilde{\mathbf{a}} + \Delta \tilde{\mathbf{a}}) &= \boldsymbol{\sigma}_{(e)}(\tilde{\mathbf{a}}_{(e)} + \Delta \tilde{\mathbf{a}}_{(e)}), & \boldsymbol{\sigma}_{(e)}(\tilde{\mathbf{a}}) &= \boldsymbol{\sigma}_{(e)}(\tilde{\mathbf{a}}_{(e)}) \end{aligned}$$

En general, la ecuación (12.21) exhibe los tipos de no linealidad del problema, de acuerdo con la variación de algunos de sus términos con respecto al vector de desplazamientos nodales de prueba. Las fuentes de no linealidad son las siguientes:

- *No linealidad por grandes deformaciones.* La relación no lineal entre la deformación y el desplazamiento está definida por la variación de la matriz de operadores diferenciales actuando sobre las funciones de forma de cada elemento, es decir, $\mathbf{B}_{(e)}(\tilde{\mathbf{a}} + \Delta \tilde{\mathbf{a}}) \neq \mathbf{B}_{(e)}(\tilde{\mathbf{a}})$.
- *No linealidad del material.* La relación no lineal entre el esfuerzo y la deformación está definida por la variación de la matriz columna de esfuerzos de cada elemento, es decir, $\boldsymbol{\sigma}_{(e)}(\tilde{\mathbf{a}} + \Delta \tilde{\mathbf{a}}) \neq \boldsymbol{\sigma}_{(e)}(\tilde{\mathbf{a}})$.
- *No linealidad por fuerzas no conservativas.* Existe variación del vector de fuerzas externas con respecto a los desplazamientos nodales de prueba, es decir, $\mathbf{f}^{ext}(\tilde{\mathbf{a}} + \Delta \tilde{\mathbf{a}}) \neq \mathbf{f}^{ext}(\tilde{\mathbf{a}})$.

A continuación se supone que las fuerzas son conservativas y que las deformaciones son infinitesimales, por lo tanto la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma y el vector de fuerzas externas se consideran constantes, es decir, $\mathbf{B}_{(e)}^T(\tilde{\mathbf{a}} + \Delta\tilde{\mathbf{a}}) = \mathbf{B}_{(e)}^T(\tilde{\mathbf{a}}) = \mathbf{B}_{(e)}^T$ y $\mathbf{f}^{ext}(\tilde{\mathbf{a}} + \Delta\tilde{\mathbf{a}}) = \mathbf{f}^{ext}(\tilde{\mathbf{a}}) = \mathbf{f}^{ext}$. En consecuencia, la fuente de no linealidad del problema se reduce a la variación del esfuerzo y la ecuación (12.21) se simplifica así:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\tilde{\mathbf{a}}}\Bigg|_{\tilde{\mathbf{a}}} \Delta\tilde{\mathbf{a}} = \sum_{e=1}^{ne} \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T (\boldsymbol{\sigma}_{(e)}(\tilde{\mathbf{a}}_{(e)}) + \Delta\tilde{\mathbf{a}}_{(e)}) - \boldsymbol{\sigma}_{(e)}(\tilde{\mathbf{a}}_{(e)}) dV \quad (12.23)$$

El vector de desplazamientos nodales de prueba en cada elemento finito $\tilde{\mathbf{a}}_{(e)}$ es la extracción de los términos del vector de desplazamientos nodales del prueba en la malla $\tilde{\mathbf{a}}$ asociados a los grados de libertad del elemento específico e , como se indicó en la ecuación (12.22).

La ecuación constitutiva no lineal de un material está definida como la matriz columna de las componentes del esfuerzo $\boldsymbol{\sigma}_{(e)}$ en función de la matriz columna de las componentes de la deformación de prueba $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(e)}$ y de las variables internas, las cuales indican la evolución de la degradación y la historia de carga y descarga del material. Asimismo, las componentes de $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(e)}$ dependen del vector de desplazamientos nodales de prueba del elemento $\tilde{\mathbf{a}}_{(e)}$. El esfuerzo evaluado para $\tilde{\mathbf{a}}_{(e)} + \Delta\tilde{\mathbf{a}}_{(e)}$ es aproximadamente igual a:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{(e)}(\tilde{\mathbf{a}}_{(e)} + \Delta\tilde{\mathbf{a}}_{(e)}) &\cong \boldsymbol{\sigma}_{(e)}(\tilde{\mathbf{a}}_{(e)}) + \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_{(e)}}{\partial\tilde{\mathbf{a}}_{(e)}}\Bigg|_{\tilde{\mathbf{a}}_{(e)}} \Delta\tilde{\mathbf{a}}_{(e)} \\ &= \boldsymbol{\sigma}_{(e)}(\tilde{\mathbf{a}}_{(e)}) + \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_{(e)}}{\partial\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(e)}} \frac{\partial\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(e)}}{\partial\tilde{\mathbf{a}}_{(e)}}\Bigg|_{\tilde{\mathbf{a}}_{(e)}} \Delta\tilde{\mathbf{a}}_{(e)} \end{aligned} \quad (12.24)$$

La figura 12.5 ilustra la relación esquemática no lineal entre $\boldsymbol{\sigma}_{(e)}$ y $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(e)}$, donde se define a la matriz constitutiva tangente $\mathbf{D}_{(e)}^{tan}(\tilde{\mathbf{a}}_{(e)})$ como la derivada del estado de esfuerzos con respecto a las deformaciones, es decir,

$$\mathbf{D}_{(e)}^{tan}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(e)}(\tilde{\mathbf{a}}_{(e)})) = \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_{(e)}}{\partial\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(e)}}\Bigg|_{\tilde{\mathbf{a}}_{(e)}} \quad (12.25)$$

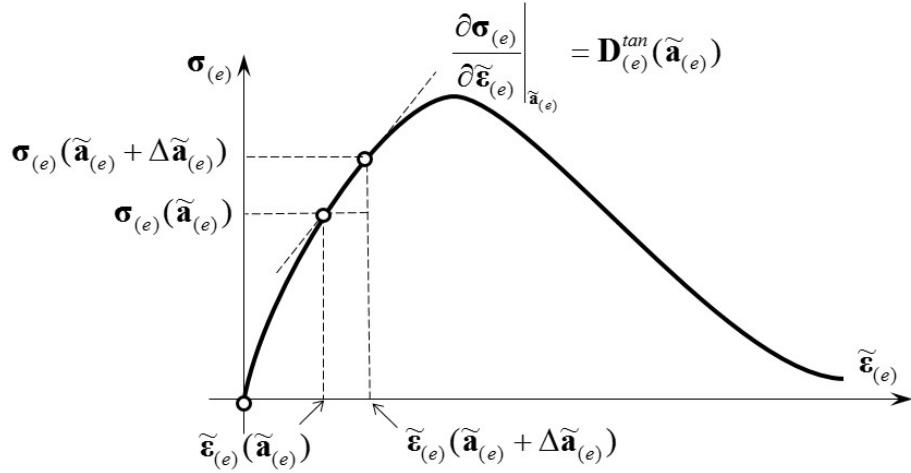


Figura 12.5: Relación esquemática entre la matriz columna del esfuerzo y de la deformación de prueba del modelo constitutivo del material en el interior de un elemento finito.

La matriz columna de las deformaciones de prueba es igual a $\tilde{\epsilon}_{(e)} = \mathbf{B}_{(e)}\tilde{\mathbf{a}}_{(e)}$. Considerando éstas como deformaciones infinitesimales, su derivada con respecto a $\tilde{\mathbf{a}}_{(e)}$ es igual a la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma, es decir,

$$\mathbf{B}_{(e)} = \frac{\partial \tilde{\epsilon}_{(e)}}{\partial \tilde{\mathbf{a}}_{(e)}} \quad (12.26)$$

Sustituyendo las dos ecuaciones anteriores en la ecuación (12.23) se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{\mathbf{a}}} \Big|_{\tilde{\mathbf{a}}} \Delta \tilde{\mathbf{a}} &= \sum_{e=1}^{ne} \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T \mathbf{D}_{(e)}^{tan} \mathbf{B}_{(e)} \Delta \tilde{\mathbf{a}}_{(e)} dV \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{\mathbf{a}}} \Big|_{\tilde{\mathbf{a}}} &= \sum_{e=1}^{ne} \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T \mathbf{D}_{(e)}^{tan} \mathbf{B}_{(e)} dV = \sum_{e=1}^{ne} \mathbb{A}_{(e)} \mathbf{K}_{(e)}^{tan} = \mathbf{K}^{tan} \end{aligned} \quad (12.27)$$

Esta derivada es equivalente a la pendiente de la curva esquemática ilustrada en la figura 12.4.

Siendo \mathbf{K}^{tan} la matriz de rigidez tangente de la malla obtenida del ensamblaje de las matrices de rigidez tangente de cada uno de los elementos $\mathbf{K}_{(e)}^{tan}$, es decir,

$$\mathbf{K}^{tan} = \sum_{e=1}^{ne} \mathbb{A}_{(e)} \mathbf{K}_{(e)}^{tan} \quad (12.28)$$

Esta última matriz se define de la forma:

$$\mathbf{K}_{(e)}^{tan} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T \mathbf{D}_{(e)}^{tan} \mathbf{B}_{(e)} dV \quad (12.29)$$

La matriz $\mathbf{K}_{(e)}^{tan}$ no es constante, porque depende de la matriz constitutiva tangente $\mathbf{D}_{(e)}^{tan}$, la cual cambia con respecto a la matriz columna de la deformación $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{(e)}$, que a su vez depende del vector del desplazamiento de prueba del elemento $\tilde{\mathbf{a}}_{(e)}$. De acuerdo a lo anterior, la matriz de rigidez de la malla varía en función de $\tilde{\mathbf{a}}$, es decir, $\mathbf{K}^{tan}(\tilde{\mathbf{a}})$.

En la ecuación (12.27) se observa que la derivada del vector de fuerzas residuales con respecto al vector de desplazamientos de prueba es igual a la matriz de rigidez tangente de la malla.

El método de Newton-Raphson busca el vector del desplazamiento nodal de prueba $\tilde{\mathbf{a}} + \Delta\tilde{\mathbf{a}}$, para el cual el vector de fuerzas residuales es nulo. Sustituyendo el resultado de la ecuación (12.27) y la premisa anterior se tiene que:

$$\Psi(\tilde{\mathbf{a}} + \Delta\tilde{\mathbf{a}}) = \Psi(\tilde{\mathbf{a}}) + \mathbf{K}^{tan}(\tilde{\mathbf{a}})\Delta\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{0} \quad (12.30)$$

El vector del incremento de desplazamientos nodales de prueba de la malla está conformado por el subvector del incremento de desplazamientos nodales desconocidos $\Delta\tilde{\mathbf{a}}_\alpha$ y el subvector del incremento de desplazamientos nodales conocidos $\Delta\tilde{\mathbf{a}}_\beta$, es decir, $\Delta\tilde{\mathbf{a}}^T = [\Delta\tilde{\mathbf{a}}_\alpha \ \Delta\tilde{\mathbf{a}}_\beta]$.

La división del vector $\Delta\tilde{\mathbf{a}}$ genera la partición de la matriz de rigidez tangente en cuatro submatrices y del vector de fuerzas residuales de la malla en dos subvectores. Además, transforma a la ecuación anterior en dos expresiones matriciales, así:

$$\begin{bmatrix} \Psi_\alpha \\ \Psi_\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{tan} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{tan} \\ \mathbf{K}_{\beta\alpha}^{tan} & \mathbf{K}_{\beta\beta}^{tan} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\tilde{\mathbf{a}}_\alpha \\ \Delta\tilde{\mathbf{a}}_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (12.31a)$$

$$\Psi_\alpha + \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{tan} \Delta\tilde{\mathbf{a}}_\alpha + \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{tan} \Delta\tilde{\mathbf{a}}_\beta = \mathbf{0} \quad (12.31b)$$

$$\Psi_\beta + \mathbf{K}_{\beta\alpha}^{tan} \Delta\tilde{\mathbf{a}}_\alpha + \mathbf{K}_{\beta\beta}^{tan} \Delta\tilde{\mathbf{a}}_\beta = \mathbf{0} \quad (12.31c)$$

Las condiciones de borde establecen que el subvector de desplazamientos nodales de prueba conocidos es constante en el proceso iterativo y corresponde al valor impuesto del subvector de desplazamientos nodales conocidos en el pseudo tiempo anterior t_l , es decir $\tilde{\mathbf{a}}_\beta = \mathbf{a}_{(n)\beta}$. En consecuencia, el incremento del desplazamiento de prueba $\Delta\tilde{\mathbf{a}}_\beta = \mathbf{0}$. Sustituyendo tal incremento, la ecuación (12.31b) se reduce a:

$$\Psi_\alpha(\tilde{\mathbf{a}}) + \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{tan}(\tilde{\mathbf{a}})\Delta\tilde{\mathbf{a}}_\alpha = \mathbf{0} \rightarrow \Delta\tilde{\mathbf{a}}_\alpha = -(\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{tan}(\tilde{\mathbf{a}}))^{-1}\Psi_\alpha(\tilde{\mathbf{a}}) \quad (12.32)$$

12.5. Solución numérica del problema no lineal mediante el método de Newton-Raphson

La solución numérica de este conjunto de ecuaciones simultáneas no lineales requiere un proceso iterativo, en el cual se incrementa el vector de desplazamiento de prueba $\tilde{\mathbf{a}}$ hasta obtener un vector de fuerzas residuales cercano a cero, como lo ilustra la Figura 12.4.

Inicialmente se establece que el subvector de desplazamiento nodal desconocido para la etapa inicial de prueba ($i = 0$) es igual al correspondiente subvector para el pseudo tiempo anterior t_l , es decir, $\tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(0)} = \mathbf{a}_{(l)\alpha}$. Asimismo, se reconstruye el vector de desplazamientos nodales de prueba $\tilde{\mathbf{a}}^{(0)} = [\tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(0)}, \mathbf{a}_{(l)\beta}]^T$, recordando que el subvector $\tilde{\mathbf{a}}_\beta = \mathbf{a}_{(l)\beta}$ y constante para cualquier iteración.

En la primera iteración se calcula el subvector de fuerzas residuales $\Psi_\alpha(\tilde{\mathbf{a}}^{(0)})$ y la submatriz de rigidez tangente $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{tan}(\tilde{\mathbf{a}}^{(0)})$ correspondientes, después se calcula el subvector incremento del desplazamiento nodal de prueba, mediante la ecuación (12.32), así $\Delta\tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(1)} = -(\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{tan}(\tilde{\mathbf{a}}^{(0)}))^{-1}\Psi_\alpha(\tilde{\mathbf{a}}^{(0)})$. Éste resultado se suma al subvector del desplazamiento anterior para obtener el subvector actualizado $\tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(1)} = \tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(0)} + \Delta\tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(1)}$ y se reconstruye $\tilde{\mathbf{a}}^{(1)} = [\tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(1)}, \mathbf{a}_{(l)\beta}]^T$. En la segunda iteración se calcula $\Psi_\alpha(\tilde{\mathbf{a}}^{(1)})$ y $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{tan}(\tilde{\mathbf{a}}^{(1)})$, y se obtiene $\Delta\tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(2)} = -(\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{tan}(\tilde{\mathbf{a}}^{(1)}))^{-1}\Psi_\alpha(\tilde{\mathbf{a}}^{(1)})$. Asimismo, se actualiza $\tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(2)} = \tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(1)} + \Delta\tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(2)}$ y se reconstruye $\tilde{\mathbf{a}}^{(2)} = [\tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(2)}, \mathbf{a}_{(l)\beta}]^T$.

Este procedimiento se repite hasta que el vector de fuerzas residuales se acerca a cero, de acuerdo con un criterio de convergencia, que será explicado más adelante. El Algoritmo 1 describe el procedimiento anterior para un paso de tiempo t_l .

Datos:	valores iniciales $\tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(0)} = \mathbf{a}_{(l-1)\alpha}$, $\mathbf{a}_\beta = \mathbf{a}_{(l)\beta}$
Resultado:	subvector de desplazamientos nodales $\mathbf{a}_{(l)\alpha} = \tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(nc)}$
repetir	
2	Reconstruir $\tilde{\mathbf{a}}^{(i-1)} = [\tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(i-1)}, \mathbf{a}_\beta]^T$;
3	Calcular $\Psi_\alpha(\tilde{\mathbf{a}}^{(i-1)})$ mediante el Algoritmo 2 ;
4	Calcular $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{tan}(\tilde{\mathbf{a}}^{(i-1)})$ mediante el Algoritmo 3 ;
5	Calcular $\Delta\tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(i)} = -(\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{tan}(\tilde{\mathbf{a}}^{(i-1)}))^{-1}\Psi_\alpha(\tilde{\mathbf{a}}^{(i-1)})$;
6	Actualizar $\tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(i)} = \tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(i-1)} + \Delta\tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(i)}$;
7	Actualizar $i = i + 1$;
8	hasta que se cumpla el criterio de convergencia o se alcance el máximo de iteraciones ($i = nm$) ;
9	si cumplió el criterio de convergencia entonces
10	Asignar $\mathbf{a}_{(l)\alpha} = \tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(nc)}$, siendo nc la iteración cuando se alcanza la convergencia ;
11	en otro caso
12	Parar, porque no se logró convergencia antes del número máximo de iteraciones ;
13	fin

Algoritmo 1: Procedimiento para calcular el subvector de desplazamientos nodales desconocidos mediante el método de Newton-Raphson, para un paso de tiempo t_l .

El Algoritmo 2 calcula el subvector de fuerzas residuales de la malla asociado a

los desplazamientos nodales desconocidos y el Algoritmo 3 ilustra el procedimiento para obtener la submatriz constitutiva tangente de la malla asociado a los desplazamientos nodales desconocidos. En ambas tablas, \mathbf{x}_g es la posición en coordenadas naturales del punto de Gauss g , $W_{(e)}(\mathbf{x}_g)$ es el producto entre los factores de ponderación de la integración numérica en el punto de Gauss g del interior del elemento e , $\det \mathbf{J}_{(e)}(\mathbf{x}_g)$ es el determinante de la matriz Jacobiano en g y en el elemento e .

```

1 para  $e = 1$  a  $n_e$  (sobre elementos) hacer
2   Extraer  $\tilde{\mathbf{a}}_{(e)}$  a partir del vector  $\tilde{\mathbf{a}}$  ;
3   para  $g = 1$  a  $n_g$  (sobre puntos de integración) hacer
4     Calcular  $\mathbf{B}_{(e)}(\mathbf{x}_g)$  ;
5     Calcular  $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{(e)}(\mathbf{x}_g) = \mathbf{B}_{(e)}(\mathbf{x}_g) \tilde{\mathbf{a}}_{(e)}$  ;
6     Evaluar  $\boldsymbol{\sigma}_{(e)}(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{(e)}(\mathbf{x}_g))$  mediante el modelo constitutivo del material ;
7     Calcular  $\mathbf{f}_{(e)}^{int} = \mathbf{f}_{(e)}^{ext} + W_{(e)}(\mathbf{x}_g) \mathbf{B}_{(e)}^T(\mathbf{x}_g) \boldsymbol{\sigma}_{(e)}(\mathbf{x}_g) \det \mathbf{J}_{(e)}(\mathbf{x}_g)$  ;
8   fin
9 fin
10 Ensamblar vector  $\mathbf{f}^{int} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{f}_{(e)}^{int}$  ;
11 Obtener subvectores  $\mathbf{f}_\alpha^{int}, \mathbf{f}_\alpha^{ext}$  ;
12 Calcular  $\Psi_\alpha(\tilde{\mathbf{a}}) = \mathbf{f}_\alpha^{int} - \mathbf{f}_\alpha^{ext}$  ;

```

Algoritmo 2: Procedimiento para calcular el subvector de fuerzas residuales asociado a desplazamientos desconocidos mediante integración numérica.

```

1 para  $e = 1$  a  $n_e$  (sobre elementos) hacer
2   Extraer  $\tilde{\mathbf{a}}_{(e)}$  a partir del vector  $\tilde{\mathbf{a}}$  ;
3   para  $g = 1$  a  $n_g$  (sobre puntos de integración) hacer
4     Calcular  $\mathbf{B}_{(e)}(\mathbf{x}_g)$  ;
5     Calcular  $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{(e)}(\mathbf{x}_g) = \mathbf{B}_{(e)}(\mathbf{x}_g) \tilde{\mathbf{a}}_{(e)}$  ;
6     Evaluar  $\mathbf{D}_{(e)}^{tan}(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{(e)}(\mathbf{x}_g))$  mediante el modelo constitutivo del material ;
7     Calcular  $\mathbf{K}_{(e)}^{tan} = \mathbf{K}_{(e)}^{tan} + W_{(e)}(\mathbf{x}_g) \mathbf{B}_{(e)}^T(\mathbf{x}_g) \mathbf{D}_{(e)}^{tan}(\mathbf{x}_g) \mathbf{B}_{(e)}(\mathbf{x}_g) \det \mathbf{J}_{(e)}(\mathbf{x}_g)$  ;
8   fin
9 fin
10 Ensamblar matriz  $\mathbf{K}^{tan} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{K}_{(e)}^{tan}$  ;
11 Obtener submatriz  $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{tan}$  ;

```

Algoritmo 3: Procedimiento para calcular la submatriz de rigidez tangente asociada a desplazamientos desconocidos mediante integración numérica.

El planteamiento presentado hasta ahora permite obtener los desplazamientos nodales de un sólido cuyo material genera un comportamiento no lineal y bajo un estado de carga constante preestablecido.

12.6. Aplicación de incrementos de carga prescrita

A continuación se aplica el esquema de solución numérica anterior a un problema mecánico no lineal, en el cual el sólido está sometido a una carga variable que se incrementa progresivamente.

La fuerza externa de referencia de la malla \mathbf{f}^{ext} se aplica en nl pasos o incrementos. En cada paso de carga l se define un factor λ_l que multiplica el vector de fuerzas externas de referencia de la malla, es decir $\mathbf{f}_{(l)}^{ext} = \lambda_l \mathbf{f}^{ext}$. Se plantea y resuelve el sistema de ecuaciones simultáneas no lineales mediante el método presentado anteriormente en cada paso de carga, donde el vector de desplazamientos nodales de la malla al comienzo del proceso iterativo en $i = 0$ y para un paso de carga l , corresponde al valor obtenido de dicho desplazamiento en el paso de carga $l - 1$, es decir, $\tilde{\mathbf{a}}_{(l)}^{(0)} = \mathbf{a}_{(l-1)}$. En la Figura 12.6 se representa esquemáticamente el cálculo del vector de desplazamientos nodales de prueba $\tilde{\mathbf{a}}_{(l)}^{(i)}$ en cada iteración i y el vector de desplazamientos nodales $\mathbf{a}_{(l)}$ obtenidos los pasos de carga $l = I, II, (nl = III)$.

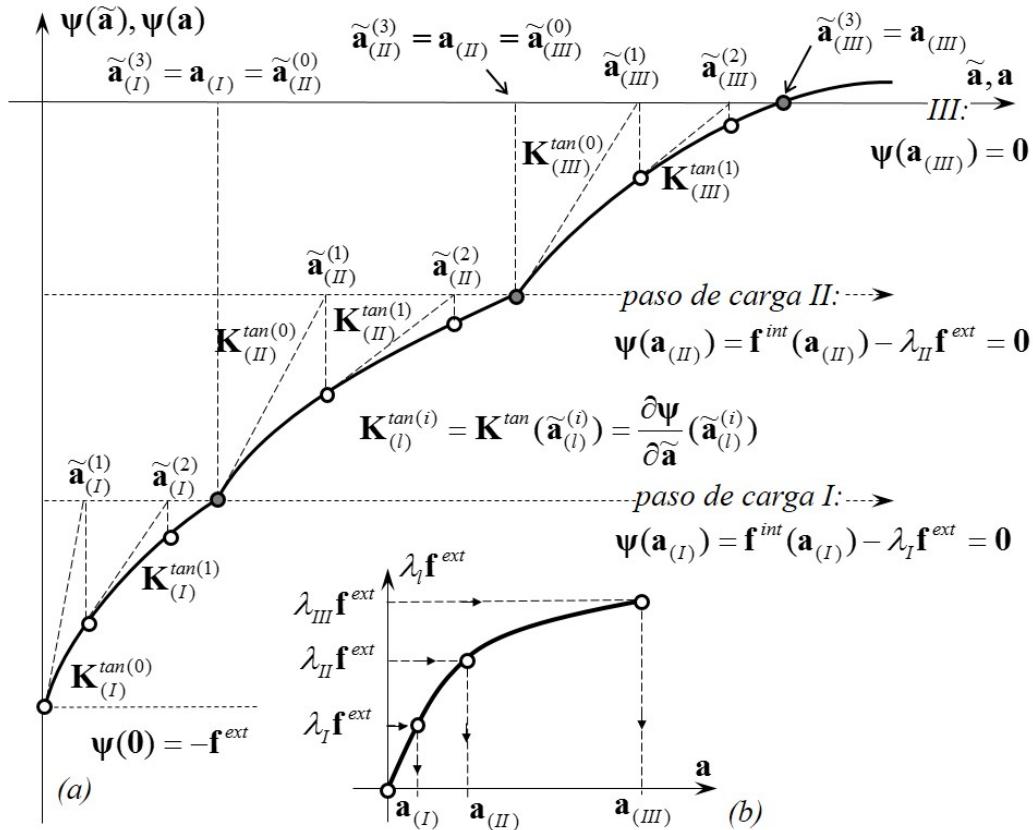


Figura 12.6: Método de Newton-Raphson para tres pasos de carga aplicada: (a) relación esquemática entre el vector de fuerzas residuales y el vector de desplazamientos nodales de prueba en los nudos de una malla, (b) relación esquemática entre el vector de la fuerza externa y el vector de los desplazamientos nodales.

El Algoritmo 4 indica el procedimiento de cálculo del subvector de desplazamientos nodales desconocidos para diferentes pasos de carga, mediante el método de Newton-Raphson estándar.

```

1 para  $l = 1$  a  $nl$  (sobre pasos de carga) hacer
2   Establecer  $\mathbf{f}_{\alpha(l)}^{ext} = \lambda_l \hat{\mathbf{f}}_{\alpha}^{ext}$  ;
3   Establecer valores iniciales  $\tilde{\mathbf{a}}_{(l)\alpha}^{(0)} = \mathbf{a}_{(l-1)\alpha}$  ;
4   Establecer primera iteración  $i = 1$  ;
5   repetir
6     Reconstruir  $\tilde{\mathbf{a}}_{(l)}^{(i-1)} = [\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha}^{(i-1)}, \mathbf{a}_{\beta}]^T$  ;
7     Calcular  $\Psi_{\alpha}(\tilde{\mathbf{a}}_{(l)}^{(i-1)}) = \mathbf{f}_{\alpha}^{int}(\tilde{\mathbf{a}}_{(l)}^{(i-1)}) - \mathbf{f}_{\alpha(l)}^{ext}$  mediante Algoritmo 2 ;
8     Calcular  $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{tan}(\tilde{\mathbf{a}}_{(l)}^{(i-1)})$  mediante Algoritmo 3 ;
9     Calcular  $\Delta\tilde{\mathbf{a}}_{(l)\alpha}^{(i)} = -(\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{tan}(\tilde{\mathbf{a}}_{(l)}^{(i-1)}))^{-1}\Psi_{\alpha}(\tilde{\mathbf{a}}_{(l)}^{(i-1)})$  ;
10    Actualizar  $\tilde{\mathbf{a}}_{(l)\alpha}^{(i)} = \tilde{\mathbf{a}}_{(l)\alpha}^{(i-1)} + \Delta\tilde{\mathbf{a}}_{(l)\alpha}^{(i)}$  ;
11    Actualizar número de iteración  $i = i + 1$  ;
12  hasta que se cumpla el criterio de convergencia o se alcance el máximo de iteraciones ( $i = nm$ );
13  si cumplió el criterio de convergencia entonces
14    | Asignar  $\mathbf{a}_{(l)\alpha} = \tilde{\mathbf{a}}_{\alpha}^{(nc)}$ , siendo  $nc$  la iteración cuando se alcanza la convergencia ;
15  en otro caso
16    | Parar, porque no se logró convergencia antes del número máximo de iteraciones ;
17  fin
18 fin
```

Algoritmo 4: Procedimiento para calcular el subvector de desplazamientos nodales desconocidos bajo incrementos de carga prescrita, mediante el método de Newton-Raphson estandar.

12.7. Aplicación de incrementos de desplazamiento preestablecido

En el problema mecánico presentado anteriormente, se obtiene el campo de los desplazamientos de un sólido sometido a varios niveles de carga prestablecidos, a través de un análisis no lineal asociado al comportamiento del material. En cambio, a continuación se describe la aplicación de un conjunto de desplazamientos preestablecidos sobre el sólido, los cuales se incrementan en cada paso l .

Inicialmente se define el vector de desplazamientos nodales conocidos de referencia $\hat{\mathbf{a}}_{\beta}$, el cual es constante entre pasos de carga y representa los desplazamientos iguales y diferentes de cero, que proporcionalmente se imponen sobre el sólido. Además se considera que tales desplazamientos son la única acción externa actuante, es decir que el vector de fuerzas externas $\mathbf{f}_{\alpha}^{ext} = \mathbf{0}$.

En cada paso l se impone un vector de desplazamientos nodales conocidos $\mathbf{a}_{\beta(l)}$ correspondiente a una fracción del vector $\hat{\mathbf{a}}_{\beta}$, es decir, $\mathbf{a}_{\beta(l)} = \lambda_l \hat{\mathbf{a}}_{\beta}$, siendo λ_l el factor de amplificación del desplazamiento definido para cada paso l .

Es importante recordar que en cada grado de libertad donde el desplazamiento es

conocido con valor cero o diferente de cero, existe una fuerza de reacción desconocida que también hace parte de los resultados aquí obtenidos.

El procedimiento de cálculo correspondiente se indica en el Algoritmo 5.

```

1 para  $l = 1$  a  $nl$  (sobre pasos de carga) hacer
2   Establecer  $\mathbf{a}_{\beta(l)} = \lambda_l \hat{\mathbf{a}}_\beta$  ;
3   Establecer valores iniciales  $\tilde{\mathbf{a}}_{(l)\alpha}^{(0)} = \mathbf{a}_{(l-1)\alpha}$  ;
4   Establecer primera iteración  $i = 1$  ;
5   repetir
6     Reconstruir  $\tilde{\mathbf{a}}_{(l)}^{(i-1)} = [\tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(i-1)}, \mathbf{a}_{\beta(l)}]^T$  ;
7     Calcular  $\Psi_\alpha(\tilde{\mathbf{a}}_{(l)}^{(i-1)}) = \mathbf{f}_\alpha^{int}(\tilde{\mathbf{a}}_{(l)}^{(i-1)})$  mediante Algoritmo 2 ;
8     Calcular  $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{tan}(\tilde{\mathbf{a}}_{(l)}^{(i-1)})$  mediante Algoritmo 3 ;
9     Calcular  $\Delta\tilde{\mathbf{a}}_{(l)\alpha}^{(i)} = -(\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{tan}(\tilde{\mathbf{a}}_{(l)}^{(i-1)}))^{-1}\Psi_\alpha(\tilde{\mathbf{a}}_{(l)}^{(i-1)})$  ;
10    Actualizar  $\tilde{\mathbf{a}}_{(l)\alpha}^{(i)} = \tilde{\mathbf{a}}_{(l)\alpha}^{(i-1)} + \Delta\tilde{\mathbf{a}}_{(l)\alpha}^{(i)}$  ;
11    Actualizar número de iteración  $i = i + 1$  ;
12  hasta que se cumpla el criterio de convergencia o se alcance el máximo de iteraciones ( $i = nm$ );
13  si cumplió el criterio de convergencia entonces
14    | Asignar  $\mathbf{a}_{(l)\alpha} = \tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(nc)}$ , siendo  $nc$  la iteración cuando se alcanza la convergencia ;
15  en otro caso
16    | Parar, porque no se logró convergencia antes del número máximo de iteraciones ;
17  fin
18 fin
```

Algoritmo 5: Procedimiento para calcular el subvector de desplazamientos nodales desconocidos bajo incrementos de desplazamiento prescrito, mediante el método de Newton-Raphson estandar.

El método indicado hasta el momento, también denominado método de Newton-Raphson estandar, ofrece buena velocidad de convergencia a la solución del problema; sin embargo, su costo computacional podría ser alto porque requiere el calculo de la matriz de rigidez tangente en cada iteración.

12.8. Solución numérica del problema no lineal mediante el método de Newton-Raphson Modificado

En algunos problemas mecánicos, se busca asegurar la estabilidad numérica y reducir el costo computacional, mediante la modificación del método de Newton-Raphson estandar. Dos de estas variantes se indican a continuación.

El *método de Newton-Raphson modificado KT1* establece que la matriz de rigidez tangente de la malla solo se calcula en la primera iteración de cada paso de carga y se supone igual para las demás iteraciones, es decir, $\mathbf{K}_{(l)}^{tan(i)} = \mathbf{K}_{(l)}^{tan(0)}$, como se ilustra en la Figura 12.7.

En cambio, en el *método de Newton-Raphson modificado KT0* se conserva durante todo el procedimiento la misma matriz de rigidez tangente de la primera iteración y del primer paso de carga, es decir, $\mathbf{K}_{(l)}^{tan(i)} = \mathbf{K}_{(I)}^{tan(0)}$, como se muestra en la Figura

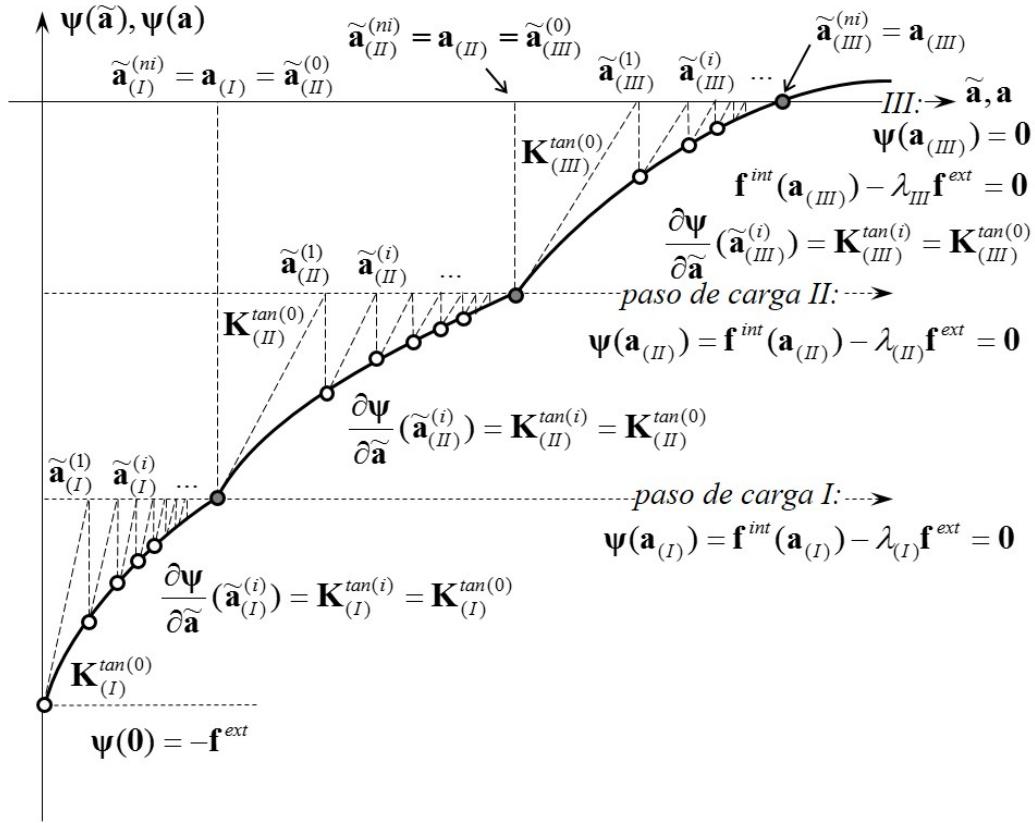


Figura 12.7: Relación esquemática entre el vector de fuerzas residuales y el vector de desplazamientos en los nudos de una malla, durante tres pasos de carga, en el método de Newton-Raphson modificado KT1.

12.8. En estas figuras se observa que el número de iteraciones en cada paso es mayor y de menor costo computacional en comparación con el método estándar.

En algunos problemas mecánicos donde el método estándar no alcanza convergencia a la solución, los métodos modificados KT1 o KT0, podrían lograr lentamente un resultado convergente.

12.9. Acelerador de Aitken en los métodos de Newton - Raphson

En el método de Newton-Raphson el subvector de los desplazamientos nodales desconocidos de prueba de la iteración i es el resultado de sumar el vector de desplazamientos desconocidos de la iteración anterior más el subvector de sus incrementos,

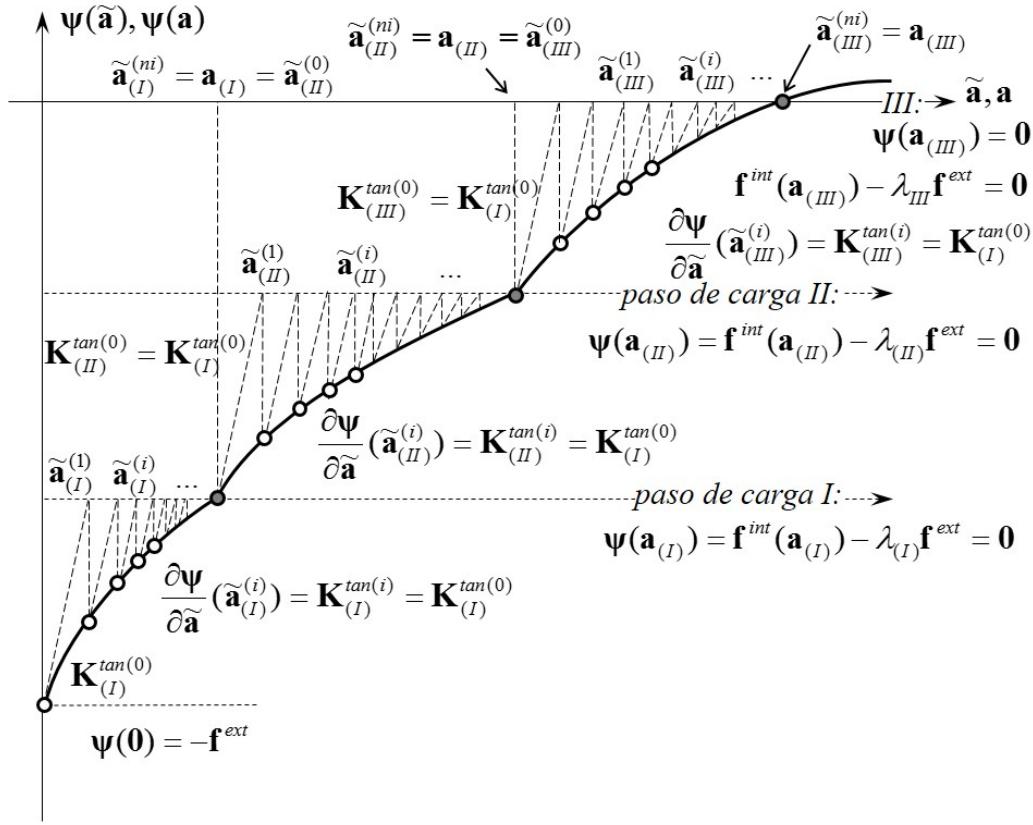


Figura 12.8: Relación esquemática entre el vector de fuerzas residuales y el vector de desplazamientos en los nudos de una malla, durante tres pasos de carga, en el método de Newton-Raphson modificado modalidad KT0.

es decir, $\tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(i)} = \tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(i-1)} + \Delta \tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(i)}$. Con el fin de acercarse con mayor eficiencia a la solución, se pueden utilizar escalares o matrices denominados aceleradores $\mathbf{A}^{(i)}$, que multipliquen al subvector de los incrementos de desplazamiento desconocido, de la forma:

$$\tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(i)} = \tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(i-1)} + \mathbf{A}^{(i)} \Delta \tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(i)} \quad (12.33)$$

En particular, el acelerador de Aitken es una matriz diagonal que depende de los subvectores del incremento del desplazamiento en la iteración actual y en la anterior,

así:

$$\mathbf{A}^{(i)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(i)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{jj}^{(i)} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{nd,nd}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (12.34a)$$

$$A_{jj}^{(i)} = \frac{\Delta \tilde{a}_j^{(i-1)}}{\Delta \tilde{a}_j^{(i-1)} - \Delta \tilde{a}_j^{(i)}} \quad (12.34b)$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(i-1)} = \left[\Delta \tilde{a}_1^{(i-1)} \quad \Delta \tilde{a}_j^{(i-1)} \quad \dots \quad \Delta \tilde{a}_{nd}^{(i-1)} \right]^T \quad (12.34c)$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(i)} = \left[\Delta \tilde{a}_1^{(i)} \quad \Delta \tilde{a}_j^{(i)} \quad \dots \quad \Delta \tilde{a}_{nd}^{(i)} \right]^T \quad (12.34d)$$

Siendo nd el número de grados de libertad desconocidos que definen el tamaño del subvector $\Delta \tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(i)}$.

12.10. Opción de búsqueda lineal en los métodos de Newton-Raphson: *line search option*

La opción de búsqueda lineal (en inglés *line search option*) es un procedimiento que optimiza el vector del incremento del desplazamiento nodal mediante la minimización de un funcional asociado al vector de fuerzas residuales, de la forma $\partial_{\tilde{\mathbf{a}}} \Pi = \Psi^T(\tilde{\mathbf{a}}) = \mathbf{0}$.

Se redefine el subvector de los desplazamientos nodales desconocidos de prueba en la iteración i como:

$$\tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(i)} = \tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(i-1)} + \xi^{(i)} \Delta \tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(i)} \quad (12.35)$$

El escalar $\xi^{(i)}$ indica la dirección de búsqueda del valor óptimo de $\Delta \tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(i)}$. El funcional se minimiza con respecto a la dirección de búsqueda $\xi^{(i)}$, por lo tanto debe cumplirse que:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{\mathbf{a}}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}}{\partial \xi} = \Psi^T(\tilde{\mathbf{a}}) \cdot \Delta \tilde{\mathbf{a}} = 0 \quad (12.36)$$

Sustituyendo la Ecuación (12.35) en la expresión anterior se obtiene para la iteración i lo siguiente:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} (\tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(i-1)} + \xi^{(i)} \Delta \tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(i)}) = \Psi^T(\tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(i-1)} + \xi^{(i)} \Delta \tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(i)}) \cdot \Delta \tilde{\mathbf{a}}_\alpha^{(i)} = G(\xi^{(i)}) = 0 \quad (12.37)$$

La dirección de búsqueda en la iteración i se obtiene de la solución numérica de la expresión escalar $G(\xi^{(i)}) = 0$, preferiblemente mediante métodos especiales para ecuaciones no lineales escalares, que aseguren una respuesta rápida y precisa.

Esta técnica acelera el proceso iterativo y puede lograr convergencia en casos donde previamente no existía.

12.11. Método de seguimiento de la trayectoria del equilibrio o *path – following method*

Los métodos presentados anteriormente buscan el subvector de desplazamientos nodales desconocidos de la malla en cada paso de carga preestablecido, mediante la solución de un sistema de nd ecuaciones no lineales asociadas a los nd grados de libertad desconocidos. Cada problema no lineal se resuelve de forma iterativa, incrementando el subvector de desplazamientos nodales desconocidos de prueba hasta su convergencia.

Los denominados métodos de seguimiento de la trayectoria del equilibrio o simplemente métodos de seguimiento de la trayectoria (de Borst, Crisfield, Remmers, & Verhoosel, 2012), establecen que el factor de carga λ_l no está determinado *a priori* y en cambio corresponde a una incógnita adicional del problema, la cual se define en el proceso iterativo como factor de carga de prueba $\tilde{\lambda}_l$. Tales métodos recurren a las técnicas de continuación numérica, para obtener un vector y un parámetro escalar de un sistema de ecuaciones simultáneas no lineales.

Este procedimiento requiere una ecuación escalar nueva que establezca una restricción entre los desplazamientos nodales de prueba desconocidos $\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}$ y el factor de carga de prueba $\tilde{\lambda}_l$, de la forma $c(\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}, \tilde{\lambda}_l) = 0$.

Cuando se aplican fuerzas externas sobre el sólido representadas por un subvector $\mathbf{f}_{\alpha(l)}^{ext} = \lambda_l \hat{\mathbf{f}}_{\alpha}^{ext}$ y se prescriben desplazamientos nodales conocidos constantes con el subvector \mathbf{a}_{β} , la solución del problema consiste en encontrar $nd + 1$ incógnitas de un sistema de $nd + 1$ ecuaciones simultáneas no lineales, así:

$$\Psi_{\alpha}(\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}, \mathbf{a}_{\beta}, \tilde{\lambda}_l) = \Psi_{\alpha}(\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}, \tilde{\lambda}_l) = \mathbf{0}_{nd \times 1} \quad (12.38a)$$

$$c(\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}, \mathbf{a}_{\beta}, \tilde{\lambda}_l) = c(\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}, \tilde{\lambda}_l) = 0 \quad (12.38b)$$

El subvector de fuerzas residuales evaluado en un desplazamiento nodal de prueba incrementado $\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)} + \Delta \tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}$ y para un factor de carga de prueba incrementado $\tilde{\lambda}_l + \Delta \tilde{\lambda}_l$,

es aproximadamente igual a la serie truncada de Taylor de la forma:

$$\Psi_\alpha(\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)} + \Delta\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}, \tilde{\lambda}_l + \Delta\tilde{\lambda}_l) = \mathbf{0} \quad (12.39a)$$

$$\Psi_\alpha(\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}, \tilde{\lambda}_l) + \frac{\partial\Psi_\alpha(\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)})}{\partial\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}}\Delta\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)} + \frac{\partial\Psi_\alpha(\tilde{\lambda}_l)}{\partial\tilde{\lambda}_l}\Delta\tilde{\lambda}_l = \mathbf{0} \quad (12.39b)$$

En esta ecuación se incluye como variable adicional en el proceso iterativo, el incremento de prueba del factor de carga $\Delta\tilde{\lambda}_l$.

Las derivadas del subvector de fuerza residual con respecto al subvector de desplazamientos nodales de prueba y con respecto al factor de carga corresponde a:

$$\frac{\partial\Psi_\alpha(\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)})}{\partial\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}} = \mathbf{K}_{\alpha\alpha(l)}^{tan}(\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}) \quad (12.40a)$$

$$\frac{\partial\Psi_\alpha(\tilde{\lambda}_l)}{\partial\tilde{\lambda}_l} = \frac{\partial}{\partial\tilde{\lambda}_l} \left[\mathbf{f}_{\alpha(l)}^{int} - \tilde{\lambda}_l \hat{\mathbf{f}}_\alpha^{ext} \right] = -\hat{\mathbf{f}}_\alpha^{ext} \quad (12.40b)$$

En consecuencia, el incremento del subvector de desplazamientos nodales de prueba $\Delta\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}$ se puede expresar de la forma:

$$\Delta\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)} = -(\mathbf{K}_{\alpha\alpha(l)}^{tan}(\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}))^{-1} \cdot \left(\Psi_\alpha(\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}, \tilde{\lambda}_l) - \Delta\tilde{\lambda}_l \hat{\mathbf{f}}_\alpha^{ext} \right) \quad (12.41)$$

Por otro lado, la restricción se reescribe de la forma:

$$c(\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)} + \Delta\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}, \tilde{\lambda}_l + \Delta\tilde{\lambda}_l) = 0 \quad (12.42)$$

El subvector de incremento del desplazamiento nodal de prueba se puede expresar de la forma:

$$\Delta\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)} = \Delta\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(a)} + \Delta\tilde{\lambda}_l \cdot \Delta\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(b)} \quad (12.43)$$

donde el primer sumando $\Delta\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(a)}$ es igual al incremento del desplazamiento nodal de prueba obtenido en la metodología anterior, mientras que el segundo sumando es el producto entre $\Delta\tilde{\lambda}_l$ y una parte adicional del incremento del desplazamiento nodal de prueba $\Delta\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(b)}$. Tales subvectores corresponden a:

$$\Delta\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(a)} = -(\mathbf{K}_{\alpha\alpha(l)}^{tan}(\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}))^{-1}\Psi_\alpha(\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}, \tilde{\lambda}_l) \quad (12.44a)$$

$$\Delta\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(b)} = (\mathbf{K}_{\alpha\alpha(l)}^{tan}(\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}))^{-1}\hat{\mathbf{f}}_\alpha^{ext} \quad (12.44b)$$

El procedimiento de cálculo definido por el método de seguimiento de la trayectoria para un paso de carga l , se presenta en el Algoritmo 6.

```

1 Establecer valores iniciales  $\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(0)}^{(0)} = \mathbf{0}$  ,  $\tilde{\lambda}_0^{(0)} = 0$  ;
2 para  $l = 1$  a  $nl$  (sobre pasos de carga) hacer
3   Establecer valores iniciales dentro del ciclo  $\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(0)} = \mathbf{a}_{\alpha(l-1)}$  ,  $\tilde{\lambda}_l^{(0)} = \lambda_{l-1}$  ;
4   Definir primera iteración  $i = 1$  ;
5   repetir
6     Reconstruir  $\tilde{\mathbf{a}}_{(l)}^{(i-1)} = [\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha}^{(i-1)}, \mathbf{a}_{\beta}]^T$  ;
7     Calcular  $\Psi_{\alpha}(\tilde{\mathbf{a}}_{(l)}^{(i-1)}) = \mathbf{f}_{\alpha}^{int}(\tilde{\mathbf{a}}_{(l)}^{(i-1)}) - \tilde{\lambda}_{(l)}^{(i-1)} \hat{\mathbf{f}}_{\alpha}^{ext}$  mediante Algoritmo 2 ;
8     Calcular  $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{tan}(\tilde{\mathbf{a}}_{(l)}^{(i-1)})$  mediante Algoritmo 3 ;
9     Calcular  $\Delta\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(a)(i)} = -(\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{tan}(\tilde{\mathbf{a}}_{(l)}^{(i-1)}))^{-1} \Psi_{\alpha}(\tilde{\mathbf{a}}_{(l)}^{(i-1)}, \tilde{\lambda}_{(l)}^{(i-1)})$  ;
10    Calcular  $\Delta\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(b)(i)} = (\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{tan}(\tilde{\mathbf{a}}_{(l)}^{(i-1)}))^{-1} \mathbf{f}_{\alpha}^{ext}$  ;
11    Resolver  $c(\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(i-1)} + \Delta\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(i)}, \tilde{\lambda}_l^{(i-1)} + \Delta\tilde{\lambda}_l^{(i)}) = 0$  para  $\Delta\tilde{\lambda}_l^{(i)}$  ;
12    Calcular  $\Delta\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(i)} = \Delta\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(a)(i)} + \Delta\tilde{\lambda}_l^{(i)} \cdot \Delta\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(b)(i)}$  ;
13    Actualizar  $\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(i)} = \tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(i-1)} + \Delta\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(i)}$  ,  $\tilde{\lambda}_l^{(i)} = \tilde{\lambda}_l^{(i-1)} + \Delta\tilde{\lambda}_l^{(i)}$  ;
14    Actualizar número de iteración  $i = i + 1$  ;
15   hasta que se cumpla el criterio de convergencia;
16   Obtener  $\mathbf{a}_{\alpha(l)} = \tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(nc)}$  ,  $\lambda_l = \tilde{\lambda}_l^{(nc)}$  ;
17 fin
```

Algoritmo 6: Procedimiento para calcular el subvector de desplazamientos nodales desconocidos y el factor de carga, mediante métodos del seguimiento de la trayectoria.

Las modalidades del método de seguimiento de la trayectoria de equilibrio se definen de acuerdo con la forma de la función de la restricción $c(\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(i-1)} + \Delta\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(i)}, \tilde{\lambda}_l^{(i-1)} + \Delta\tilde{\lambda}_l^{(i)}) = 0$. Dos de las modalidades más utilizadas son el método de control de un desplazamiento específico y el método de la longitud de arco cilíndrica, las cuales se describen a continuación.

12.12. Método de control de un desplazamiento específico

El método de control de un desplazamiento específico es una modalidad del método de seguimiento de la trayectoria, en el cual se establece un valor constante en el proceso iterativo de una componente de desplazamiento en un nudo específico. Tal desplazamiento δ_l debe ser representativo de la evolución de las acciones externas sobre el sólido y por lo tanto cambiará progresivamente con el incremento de la carga. Si el desplazamiento nodal específico corresponde al grado de libertad k , la función de restricción estará definida como:

$$c(\tilde{a}_{k(l)}^{(i)} + \Delta\tilde{a}_{k(l)}^{(i)}, \tilde{\lambda}_l^{(i)} + \Delta\tilde{\lambda}_l^{(i)}) = \tilde{a}_{k(l)}^{(i)} - \delta_l = 0 \quad (12.45)$$

donde $\tilde{a}_{k(l)}^{(i)}$ es el desplazamiento nodal de prueba en el grado de libertad k de la iteración i y $\Delta\tilde{a}_{k(l)}^{(i)}$ es su respectivo incremento. Siendo el desplazamiento específico constante en el proceso iterativo, tal incremento del desplazamiento de prueba es $\Delta\tilde{a}_{k(l)}^{(i)} = 0$.

Expresando la ecuación (12.43) para el grado de libertad k , el incremento del factor de carga de prueba $\Delta\tilde{\lambda}_l^{(i)}$ se puede calcular de la forma:

$$\Delta\tilde{a}_{k(l)}^{(i)} = \Delta\tilde{a}_{k(l)}^{(a)(i)} + \Delta\tilde{\lambda}_l^{(i)} \cdot \Delta\tilde{a}_{k(l)}^{(b)(i)} = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta\tilde{\lambda}_l^{(i)} = -\frac{\Delta\tilde{a}_{k(l)}^{(a)(i)}}{\Delta\tilde{a}_{k(l)}^{(b)(i)}} \quad (12.46)$$

donde $a_{k(l)}^{(a)(i)}$ y $a_{k(l)}^{(b)(i)}$ corresponden a los coeficientes en la posición k de los vectores $\mathbf{a}_{\alpha(l)}^{(a)(i)}$ y $\mathbf{a}_{\alpha(l)}^{(b)(i)}$ calculados con las ecuaciones (12.44a) y (12.44a), respectivamente.

El procedimiento de cálculo del método de control de un desplazamiento específico se presenta en el Algoritmo 6, donde particularmente se define la restricción $c(\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(i-1)} + \Delta\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(i)}, \tilde{\lambda}_l^{(i-1)} + \Delta\tilde{\lambda}_l^{(i)}) = 0$ con la ecuación (12.46).

12.13. Método de longitud de arco cilíndrico o *cylindrical arc-length method*

El método de longitud de arco cilíndrico es una de las modalidades de los métodos de seguimiento de trayectoria más utilizadas en la simulación numérica de sólidos (de Borst *et al.*, 2012). La función de restricción de este método establece que la norma del vector del incremento del desplazamientos no prescritos de la malla $\Delta\mathbf{a}_{\alpha(l)}$ está limitada por un valor constante determinado ρ_l , es decir:

$$\Delta\mathbf{a}_{\alpha(l)}^T \Delta\mathbf{a}_{\alpha(l)} = \rho_l^2 \quad (12.47)$$

La solución numérica de un problema particular con 2 desplazamientos no prescritos, se puede representar mediante un gráfico, cuyos ejes correspondan al factor de carga λ y a los desplazamientos desconocidos a_1 y a_2 , como lo ilustra Figura 12.9. Se observa que la solución en un paso de carga l corresponde a la intersección entre la trayectoria de equilibrio y el interior de un cilindro de radio ρ_l y longitud infinita.

La implementación de este método en el proceso iterativo de solución no lineal de Newton-Raphson, conduce a una función de restricción de la forma:

$$c(\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(i)} + \Delta\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(i)}, \tilde{\lambda}_l^{(i)} + \Delta\tilde{\lambda}_l^{(i)}) = \mathbf{d}_{\alpha(l)}^{(i+1)T} \mathbf{d}_{\alpha(l)}^{(i+1)} = \rho_l^2 \quad (12.48)$$

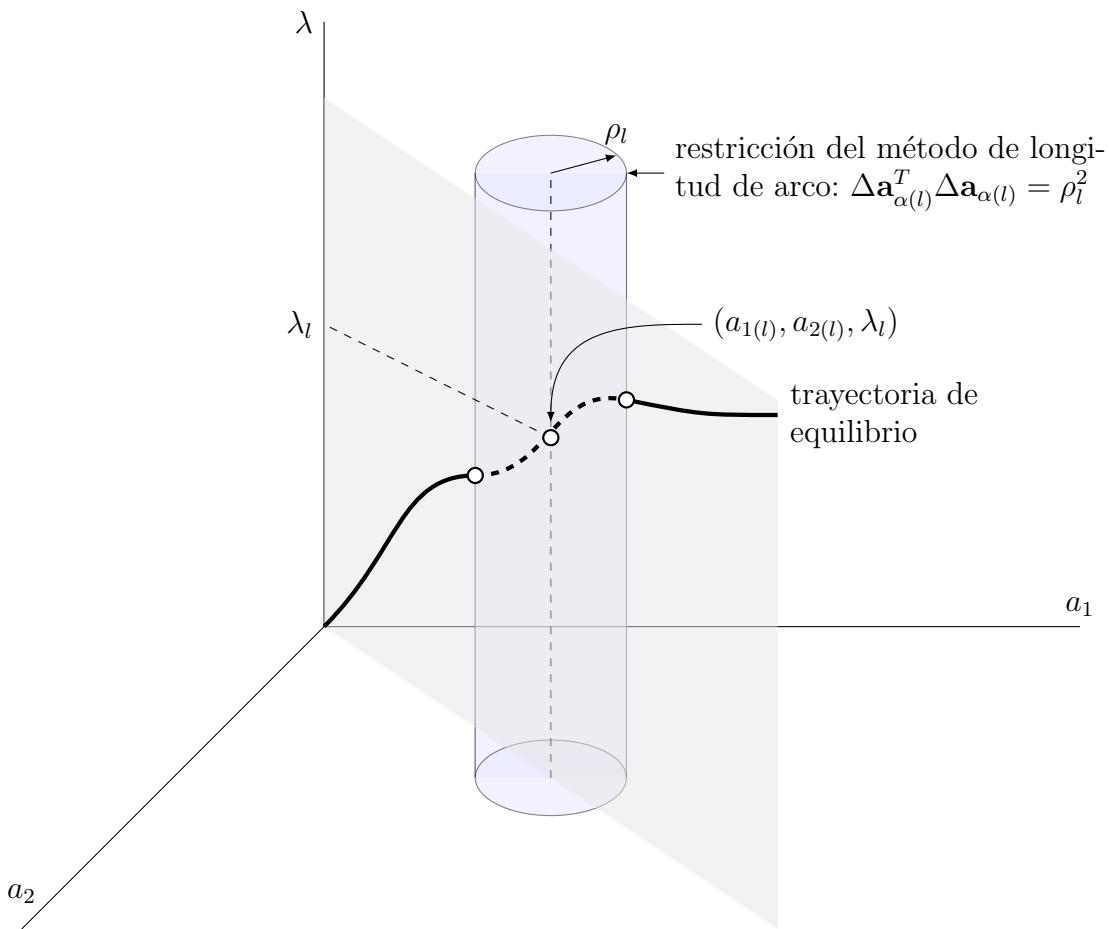


Figura 12.9: Trayectoria de equilibrio y restricción del método de longitud de arco cilíndrica para un problema con dos desplazamientos nodales desconocidos.

donde,

$$\mathbf{d}_{\alpha(l)}^{(i+1)} = \mathbf{d}_{\alpha(l)}^{(i)} + \Delta\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(i)} \quad (12.49a)$$

$$\mathbf{d}_{\alpha(l)}^{(i)} = \tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(i)} - \tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(0)} \quad (12.49b)$$

El valor escalar definido como *longitud de arco* ρ_l permite controlar el tamaño del incremento del desplazamiento de prueba en el paso de carga l .

Sustituyendo las ecuaciones (12.43) y (12.49a) en la expresión (12.48), se tiene

que:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{d}_{\alpha(l)}^{(i+1)T} \mathbf{d}_{\alpha(l)}^{(i+1)} = \\
 & = (\mathbf{d}_{\alpha(l)}^{(i)} + \Delta \tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{a(i)} + \Delta \tilde{\lambda}_l^{(i)} \Delta \tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{b(i)})^T (\mathbf{d}_{\alpha(l)}^{(i)} + \Delta \tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{a(i)} + \Delta \tilde{\lambda}_l^{(i)} \Delta \tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{b(i)}) = \rho_l^2 \\
 & \rightarrow (\mathbf{d}_{\alpha(l)}^{(i)} + \Delta \tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{a(i)})^T (\mathbf{d}_{\alpha(l)}^{(i)} + \Delta \tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{a(i)}) + 2(\mathbf{d}_{\alpha(l)}^{(i)} + \Delta \tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{a(i)})^T \Delta \tilde{\lambda}_l^{(i)} \Delta \tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{b(i)} + \\
 & \quad + (\Delta \tilde{\lambda}_l^{(i)})^2 \Delta \tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{b(i)T} \Delta \tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{b(i)T} - \rho_l^2 = 0
 \end{aligned} \tag{12.50}$$

Lo cual corresponde a una función polinómica de segundo orden con respecto al incremento del factor de carga de prueba $\Delta \tilde{\lambda}_l^{(i)}$ de la forma:

$$c_1(\Delta \tilde{\lambda}_l^{(i)})^2 + c_2 \Delta \tilde{\lambda}_l^{(i)} + c_3 = 0 \tag{12.51a}$$

$$c_1 = \Delta \tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{b(i)T} \Delta \tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{b(i)} \tag{12.51b}$$

$$c_2 = 2(\mathbf{d}_{\alpha(l)}^{(i)} + \Delta \tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{a(i)}) \Delta \tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{b(i)} \tag{12.51c}$$

$$c_3 = (\mathbf{d}_{\alpha(l)}^{(i)} + \Delta \tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{a(i)})^T (\mathbf{d}_{\alpha(l)}^{(i)} + \Delta \tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{a(i)}) - \rho_l^2 \tag{12.51d}$$

De las dos respuestas de $\Delta \tilde{\lambda}_l^{(i)}$ se escoge aquella para la cual el ángulo entre los vectores $\mathbf{d}_{\alpha(l)}^{(i+1)}$ y $\mathbf{d}_{\alpha(l)}^{(i)}$ es menor. Esto ofrece una solución hacia adelante que acelera la convergencia.

El procedimiento de cálculo del método de longitud de arco cilíndrico se presenta en el Algoritmo 6, cuando la función de la restricción $c(\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(i-1)} + \Delta \tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(i)}, \tilde{\lambda}_l^{(i-1)} + \Delta \tilde{\lambda}_l^{(i)}) = 0$ corresponde a la Ecuación (12.51), donde $\mathbf{d}_{\alpha(l)}^{(i)}$ está definido por la Ecuación (12.49b).

12.14. Otras modalidades del método de longitud de arco o *arc-length methods*

Otras métodos de longitud de arco o *arc length methods*, establecen diferentes funciones de restricción. Algunas de estas modalidades son llamados en inglés: *normal plane*, *update normal plane and spherical arc length method*.

12.15. Métodos Cuasi-Newton o métodos secantes

Los métodos cuasi-Newton pueden ser útiles cuando es difícil obtener la matriz constitutiva tangente, lo cual podría ocurrir para modelos de material con algoritmos de integración complejos (de Souza *et al.*, 2008).

La relación secante entre las fuerzas residuales y los desplazamientos de prueba en la iteración i de un paso de carga l se puede expresar como:

$$\mathbf{K}_l^{(i)} \Delta \tilde{\mathbf{a}}_l^{(i-1)} = \boldsymbol{\Psi}_l^{(i)} - \boldsymbol{\Psi}_l^{(i-1)} \quad (12.52)$$

donde $\mathbf{K}_l^{(i)}$ es la matriz de rigidez secante de la iteración i , mientras que $\boldsymbol{\Psi}_l^{(i)}$ y $\boldsymbol{\Psi}_l^{(i-1)}$ son los vectores de fuerzas residuales en las iteraciones i y $i - 1$. Asimismo, $\Delta \tilde{\mathbf{a}}_l^{(i-1)}$ corresponde al incremento del desplazamiento de prueba entre $\tilde{\mathbf{a}}_l^{(i)}$ y $\tilde{\mathbf{a}}_l^{(i-1)}$. La Figura 12.10 muestra de forma esquemática el método secante, en el cual la relación entre la fuerza residual y el desplazamiento de prueba se representa mediante una curva y la rigidez secante se describe como la pendiente de una línea recta entre los puntos de las iteraciones $(i - 1)$ y (i) .

Después de calculada la matriz de rigidez secante y evaluado el vector de fuerzas residuales, el vector del incremento de los desplazamientos nodales de prueba se obtiene de la forma:

$$\Delta \tilde{\mathbf{a}}_l^{(i)} = -(\mathbf{K}_l^{(i)})^{-1} \boldsymbol{\Psi}_l^{(i)} \quad (12.53)$$

La inversa de la matriz de rigidez secante en la iteración i se puede obtener como la suma entre dicha matriz en la iteración anterior $i - 1$ y una matriz de su incremento, es decir:

$$(\mathbf{K}_l^{(i)})^{-1} = (\mathbf{K}_l^{(i-1)})^{-1} + (\Delta \mathbf{K}_l^{(i-1)})^{-1} \quad (12.54)$$

Las formas de calcular a $(\Delta \mathbf{K}_l^{(i-1)})^{-1}$ o a $(\mathbf{K}_l^{(i)})^{-1}$ da lugar a diferentes modalidades del método secante, entre las cuales están el método de primer orden y el método Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno (BFGS).

La experiencia de algunos investigadores indica que estos métodos exhiben un mayor número de iteraciones por paso con un costo computacional menor, en comparación con el método de Newton-Raphson estándar (de Borst *et al.*, 2012). Sin embargo, también reportan un comportamiento errático de la convergencia donde el error no se reduce progresivamente. Aparentemente, la inestabilidad numérica mostrada por estos métodos ha reducido su popularidad en los últimos años.

12.16. Criterios de convergencia

Los criterios de convergencia establecen una medida escalar adimensional del error en las condiciones de equilibrio del problema mecánico, que se produce en cada iteración del procedimiento numérico. Asimismo, compara tal error con una tolerancia previamente definida y decide si continuar o no con una nueva iteración, es decir, si el resultado está suficientemente cerca o no de la solución.

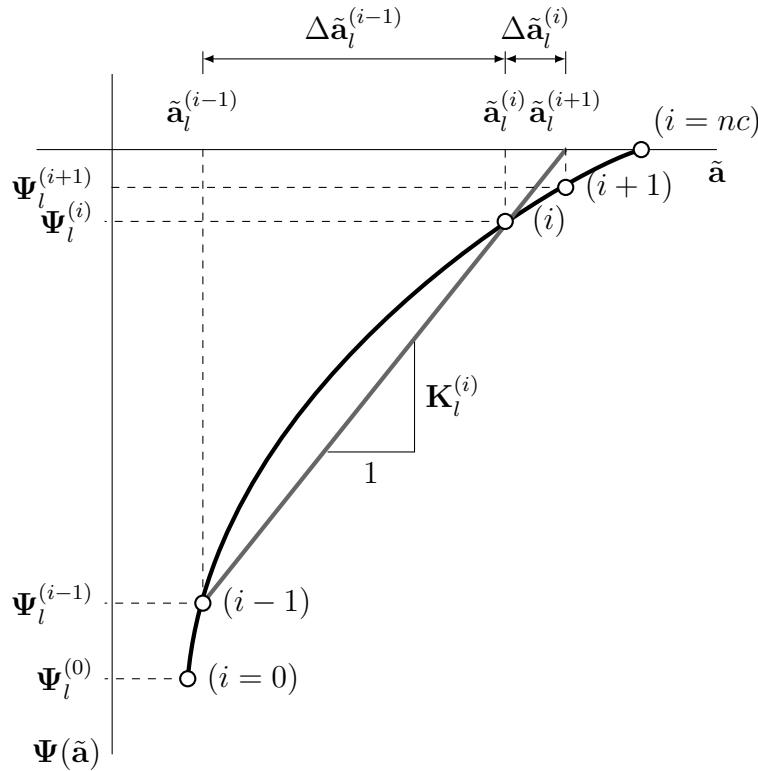


Figura 12.10: Relación esquemática entre el vector de fuerzas residuales y el vector de desplazamientos nodales de prueba en la malla para un paso de carga, con el método secante.

El *criterio de convergencia estándar en desplazamientos* establece que la solución exacta en un paso de carga del problema se alcanza, si incremento del desplazamiento nodal de prueba tiende a cero, es decir, el subvector $\Delta\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)} \rightarrow 0$. Para ello tal criterio establece que la solución aproximada en una iteración i de un paso de carga l se logra cuando:

$$\frac{\|\Delta\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(i)}\|}{\|\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(i)}\|} \leq \varpi \quad (12.55)$$

donde ϖ es una tolerancia definida y $\|\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(i)}\|$ y $\|\Delta\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(i)}\|$ son las normas de los subvectores de desplazamiento nodal de prueba y de su respectivo incremento, asociados a los grados de libertad desconocidos del sistema.

En cambio, *criterio de convergencia estándar en fuerzas* considera que la solución exacta de un paso de carga se alcanza cuando el vector de fuerzas residuales tiende

a cero, es decir, $\Psi_{\alpha(l)} \rightarrow 0$. La solución aproximada se logra en una iteración i de un paso de carga l , cuando:

$$\frac{\|\Psi_{\alpha(l)}^{(i)}\|}{\|\mathbf{r}\|} \leq \varpi \quad (12.56)$$

donde $\|\Psi_{\alpha(l)}^{(i)}\|$ es la norma del subvector de fuerzas residuales asociado a los grados de libertad desconocidos y $\|\mathbf{r}\|$ es la norma de un vector de referencia que tenga el mismo orden de magnitud de $\|\Psi_{\alpha(l)}^{(i)}\|$.

Algunos de las normas de vectores referencia utilizadas en el criterio de convergencia estándar en fuerzas son los siguientes:

- Norma del subvector de fuerza interna asociado a los grados de libertad desconocidos en la iteración y paso de carga actual $\|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{f}_{\alpha(l)}^{int(i)}\|$ (Oliver, 2002a).
- Norma del subvector de fuerza externa asociado a los grados de libertad desconocidos del paso de carga actual $\|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{f}_{\alpha(l)}^{ext}\|$ (de Souza *et al.*, 2008; Krabbenhoft, 2002).
- Norma del subvector de fuerza residual asociado a los grados de libertad desconocidos en la primera iteración del paso de carga actual $\|\mathbf{r}\| = \|\Psi_{\alpha(l)}^{int(1)}\|$ (de Borst *et al.*, 2012).

El *criterio de convergencia en energía* establece que el trabajo realizado por las fuerzas residuales tiende a cero cuando se acerca a la solución del problema, es decir, $\Psi_{\alpha(l)}^T \Delta \tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)} \rightarrow 0$. Para ello este criterio establece que la solución aproximada en una iteración i de un paso de carga l se logra cuando:

$$\left| \frac{\Psi_{\alpha(l)}^{(i)T} \Delta \tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(i)}}{\Psi_{\alpha(l)}^{(1)T} \Delta \tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(1)}} \right| \leq \varpi \quad (12.57)$$

donde $\Psi_{\alpha(l)}^{(1)T}$ y $\Delta \tilde{\mathbf{a}}_{\alpha(l)}^{(1)}$ corresponden a los subvectores de la fuerza residual y del incremento del desplazamiento nodal de prueba en la primera iteración.

La experiencia de algunos autores indica que se obtiene una buena aproximación con un costo computacional razonable (de Borst *et al.*, 2012; Oliver, 2002a), considerando una tolerancia ϖ del orden de: 1×10^{-6} cuando se utiliza el criterio de convergencia de desplazamientos, 1×10^{-4} cuando se utiliza el criterio de convergencia de energía, y 1×10^{-3} cuando se utiliza el criterio de convergencia de fuerzas.

El error en cada iteración i corresponde al término a la izquierda de las desigualdades mostradas en las ecuaciones (12.55), (12.56) y (12.57). Se define *convergencia*

lineal al proceso iterativo donde el error decrece entre la iteración i y la iteración $i+1$, de la forma 1×10^{-q} a $1 \times 10^{-(q+1)}$. En cambio, se define *convergencia cuadrática* cuando el error decrece entre dos iteraciones, de la forma 1×10^{-q} a 1×10^{-2q} .

El proceso iterativo dentro del método numérico de solución de ecuaciones simultáneas no lineales presentado en los algoritmos 1, 4, 5 y 6, termina cuando se cumple el criterio de convergencia o cuando se alcanza un número máximo de iteraciones establecido. Las ecuaciones presentadas en esta sección indican algunos de estos criterios.

12.17. Selección de la estrategia de solución del problema no lineal

En conclusión de lo anterior, la estrategia de solución del problema mecánico no lineal depende de los siguientes aspectos:

- Definición del tipo de acción externa prescrita. Por ejemplo, la aplicación de cargas o la imposición de desplazamientos sobre el sólido.
- La modalidad dentro del método de Newton - Raphson para resolver el sistema de ecuaciones simultáneas no lineales. Por ejemplo, el método de Newton - Raphson tangente estándar, tangente modificado, secante estándar o secante modificado.
- La estrategia de aceleración del incremento del desplazamiento de prueba. Por ejemplo, la búsqueda lineal o la inclusión de aceleradores de Aitken.
- La modalidad dentro del método de seguimiento de la trayectoria de equilibrio. Por ejemplo, el método de control de desplazamiento específico o el método de longitud de arco.
- El criterio de convergencia establecido, el cual se puede definir en términos del desplazamiento, la fuerza residual o la energía.
- El valor de la tolerancia del error de la solución de acuerdo al criterio de convergencia.

Referencias

- ANSYS. (2006). *ANSYS® Academic Research, Release 10.0, Help System, Reference Manual*.
- Antia, H. M. (2002). *Numerical Methods for Scientists and Engineers*. Berlin: Birkhäuser Verlag.
- Argyris, J. (1955). Energy theorems ans structural analysis. *Aircraft Engineering*, 27, 42-58, 80-94, 125-134, 145-158.
- ASTM. (2007). Standard test method for pullout strength of hardened concrete. Standard. ASTM.
- Barbero, E. (2008). *Finite element analysis of composite materials*. Boca Raton: CRC Press.
- Bathe, K. [K] & Wilson, E. (1976). *Numerical methods in finite element analysis*. New Jersey: Prentice Hall.
- Bathe, K. [K.J.]. (1996, abril). Finite Element Procedures.
- Belytschko, T. (2000). *Nonlinear Finite Elements For Continua And Structures*. Wiley.
- Bonet, J. & Wood, R. (1997). *Nonlinear continuum mechanics for finite elements analysis*. Cambridge University Press.
- Cheung, Y. K., King, I. P., & Zienkiewicz, O. (1968). Slab bridges with arbitrary shape and support condition - A general method of analysis based on finite elements. *Proceeding - Institution of Civil Engineers*, 40, 9-36.
- Clough, R. W. (1960). The finite element method in plane stress analysis. En *Proceedings of 2nd ASCE Conference On Electronic Computation*.
- Cook, R., Malkus, D., & Plesha, M. (1989). *Concepts and applications of finite elements analysis*. New York: John Wiley & Son.
- Cook, R., Malkus, D., Plesha, M., & Witt, R. (2001). *Concepts and applications of finite elements analysis* (4th). New York: John Wiley & Sons.
- Crisfield, M. A. (1991). *Non-linear finite elements analysis of solid and structures* (Tesis doctoral).

- de Borst, R., Crisfield, M. A., Remmers, J. C., & Verhoosel, C. V. (2012). *Non-linear finite elements analysis of solid and structures* (Second edition). New York: John Wiley y Sons.
- de Souza, E., Peric, D., & Owen, D. (2008). Computational methods for plasticity.
- Eisenberg, M. A. & Malvern, L. E. (1973). On finite element integration in natural coordinates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 7(4), 574-575.
- Grossman, S. (1996). *Algebra Lineal*. México D.F.: Mc Graw Hill.
- Holzapfel, G. (2000). *Nonlinear solid mechanics*. John Wiley y Sons.
- Hrennikoff, A. (1941). Solution of Problems in Elasticity by the Framework Method. *Journal of Applied Mechanics*, 8, 169-175.
- Hughes, T. J. R. (2000). *The finite element method*. New York: Dover.
- Hurtado, X. (2007). *Comportamiento de conectores de cortante tipo tornillo de resistencia grado 2 (dos) para un sistema de sección compuesta con concreto de 21 mpa ante solicitación de corte directo* (Tesis doctoral, Bogotá).
- Hutton, D. (2004). *Fundamentals of finite element analysis*. New York: Mc Graw Hill.
- Irons, B. M. & Razzaque, A. (1972). Experience with the patch test for convergence of finite element method. En A. R. Aziz (Ed.), *Mathematical foundations of the finite element method* (pp. 557-587). New York: Academic Press.
- Jirásek, M. & Banzat, Z. P. (2002). *Inelastic analysis of structures*. Jhon Wiley y Son.
- Kojic, M. & Bathe, K. J. (2005). *Inelastic Analysis of Solids and Structures*. Berlin: Springer-Verlag.
- Krabbenhoft, K. (2002). *Basic computational plasticity*. Department of Civil Engineering. Technical University of Denmark.
- Kreyzig, E. (1983). *Advanced engineering mathematics* (5th). New York: John Wiley y Sons.
- Lai, W. & Saibel, E. (1965). *Elements of Mechanics of Elastic Solids*. Addison-Wesley Publishing Company.
- Lay, D. (2011). *Linear algebra and its applications* (4th edition). Sydney: Pearson.
- Lemaitre, J. & Chaboche, J. L. (2002). *Mechanics of solid materials*. Cambridge university press.
- Linero, D. (2009). PEFiCA - Programa de elementos finitos a código abierto. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Linero, D. & Amaya, M. (2018). Determination of the concrete elastic modulus by means of a mesoscopic approach with the finite elements methods. En J. Use-

- che (Ed.), *Mecánica de Materiales V. Experimentación, modelado numérico y teórico. SMEC-2018*. Universidad Tecnológica de Bolívar.
- Linero, D., Estrada, M., & Garzón, D. (2020). *Programación del método de los elementos finitos aplicado al análisis mecánico estático de sólidos*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Linero, D. & Garzón, D. A. (2010). *Elementos de la mecánica del medio continuo para cuerpos sólidos. Volumen 1: Temas Básicos*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Malvern, L. E. (1969). *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. New Jersey: Prentice-Hall.
- Mase, G. T. & Mase, G. E. (1999). *Continuum mechanics for engineers*. London: CRC Press.
- McHenry, D. (1943). A Lattice Analogy for the Solution of Plane Stress Problems. *Journal of Institution of Civil Engineering*, 21(2).
- Oliver, X. (2002a). *Apuntes de clase sobre técnicas avanzadas de solución de ecuaciones no lineales por el MEF*. Universidad Politécnica de Catalunya.
- Oliver, X. (2002b, enero). From continuum mechanics to fracture mechanics: the strong discontinuity approach. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(2), 113-136. doi:10.1016/S0013-7944(01)00060-1
- Oliver, X. & Agelet, C. (2002). *Mecánica de medios continuos para ingenieros*. Barcelona: Edicions UPC.
- Oñate, E. (1995). *Cálculo de estructuras por el método de los elementos finitos*. Barcelona: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería.
- Oñate, E. (2009). *Structural Analysis with the Finite Element Method*. CIMNE - Springer.
- Oñate, E. (2013). *Structural Analysis with the Finite Element Method*. CIMNE - Springer.
- Oñate, E. & Zárate, F. (2000). *Introducción al método de los elementos finitos*. Barcelona: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería.
- Ortiz, L. (1998). *Elasticidad*. Madrid: Mc Graw Hill.
- Popov, E. (1998). *Engineering mechanics of solids*. Prentice-Hall.
- Reddy, J. N. (2004). *An introduction to nonlinear finite element analysis*. Oxford University Press.
- Reddy, J. N. (2005). *An introduction to the finite element method* (third edition). New York: McGraw-Hill.
- Reddy, J. N. (2008). *An introduction to continuum mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press.

- Runesson, K. (1999). *Constitutive Theory and Computational Technique for Dissipative Materials with emphasis on Plasticity, Viscoplasticity and Damage*. Göteborg.
- Seegerlind, L. (1984). *Applied Finite Element Analysis*. Wiley.
- Spencer, A. J. M. (1990). *Continuum mechanics*. London: Longman Scientific & Technical.
- Taylor, R. [R], Zienkiewicz, O., Simó, J., & Chan, A. H. C. (1986). The patch test - A condition for assesing FEM convergence. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22, 32-62.
- Timoshenko, S. P. & Goodier, J. (1970). *Theory of Elasticity*. Mc Graw Hill.
- Turner, M., Clough, R. W., Martin, H., & Topp, L. (1956). Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. *Journal of Aeronautical Science*, 23(9), 805-823.
- Uribe, M. (2008). *Calificación de una conexión rígida de una viga I y una columna tubular rellena de concreto bajo la acción de cargas dinámicas* (Tesis doctoral, Bogotá).
- Weaver, J. & Johnson, C. (1984). *Finite elements for structural analysis*. New Jersey: Prentice Hall.
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R., & Zhu, J. (2005). *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals* (Sixth edit). Elsevier.
- Zienkiewicz, O. [O] & Cheung, Y. K. (1964). The finite element method for analysis of elastic isotropic and orthotropic slabs. *Proceedings - Institution of Civil Engineers*, 28, 471-488.
- Zienkiewicz, O. [O.C.] & Taylor, R. [R.L.]. (2005). *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics* (Sixth edit). Elsevier.