Herramientas matemáticas para modelar sistemas dinámicos

Ing. Jesús Barrera

9 de abril de 2022

Índice

1. Herramientas para el modelado de Sistemas Dinámicos

Para poder modelar un sistema dinámico se necesita de:

✓ La relación de señales para cada elemento.

✓ Las leyes de interconexión.

1.1. Obtención de la función de transferencia a partir de la E.D.O.

Un sistema dinámico L.T.I. puede ser modelado por una E.D.O. de la forma:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + ... + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0\, y(t) = b_0 u(t) + b_1 \frac{du}{dt} + ... + b_m \frac{d^m u}{dt^m} \tag{1}$$
$$a_l \in \mathfrak{R}\ \forall\ l = 0(1)n; \qquad b_i \in \mathfrak{R}\ \forall\ i = 0(1)m$$

$y(t)$ es la señal de salida del sistema y $u(t)$ es la señal de entrada al sistema.

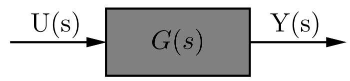
Si se consideran Condiciones iniciales (C.I.) nulas, es decir, que el sistema parte del reposo, al aplicar la transformada de Laplace se logra

$$\begin{aligned}
(a_n s^n + \cdots + a_1 s^1 + a_o)Y(s) &= (b_o + b_1 s + \cdots + b_m s^m)U(s)\\
Y(s) =& \frac{(b_o + b_1 s + \cdots + b_m s^m)}{(a_0 + a_1\, s + \cdots + a_n s^n)}U(s) = \frac{N(s)}{D(s)}U(s) = G(s)U(s)\\
G(s) =& \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{(b_o + b_1 s + ... + b_m s^m)}{(a_0 + a_1\, s + \cdots + a_n s^n)} = \frac{Y(s)}{U(s)}
\end{aligned}$$

$Y(s)$ y $U(s)$ son las transformadas de Laplace de $y(t)$ y $u(t)$ respectivamente.

El orden del sistema lo indica el orden del polinomio denominador de $G(s)$ y corresponde al orden de la E.D.O.

Figura 1. Diagrama de bloque que indica la relación entre $G(s)$, $U(s)$ y $Y(s)$.



$G(s)$ se denomina la función de transferencia del sistema, e indica la manera como la señal de entrada se transforma en la señal de salida, gráficamente se indica la relación entre $U(s)$ y $Y(s)$ se indica conforme lo mostrado en la Figura 1. Ahora, si m es el orden del polinomio $N(s)$ y n el orden del polinomio $D(s)$, la relación entre m y n establece:

- ✓ Si $m > n$ el sistema se dice impropio y no es completamente realizable.
- ✓ Si $m = n$ el sistema se dice bipropio.
- ✓ Si $m < n$ el sistema se dice estrictamente propio.

Un sistema LTI es invertible si:

- ∗ Es bipropio.
- ∗ No tiene ceros de fase no mínima.
- ∗ Es estable.

También se considera:

- ∗ Los valores de s que se hacen $N(s) = 0$ se denominan los ceros de $G(s)$ y en el plano s se indican mediante círculos.
- ∗ Los valores de s que hacen $D(s) = 0$ se denominan polos de $G(s)$ y en el plano s se indican mediante asteriscos.
- ∗ los polos ubicados en el semiplano derecho (S.P.D.) hacen que el sistema sea inestable.
- ∗ los ceros ubicados en el S.P.D se denominan ceros de fase no mínima.
- ∗ El eje imaginario hace parte del S.P.D.
- ∗ Dado que los coeficientes de los polinomios $N(s)$ y $D(s)$ son reales entonces los polos como los ceros de $G(s)$ pueden ser:
  - Reales y Diferentes.
  - Reales e iguales.
  - Complejos conjugados.
  - Combinación de los anteriores
- ∗ En un mismo punto del plano s no puede haber un polo y un cero.

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + ... + b_m s^m}{a_n s^n + ... + a_1 s + a_0}$$

Puede escribirse como:

$$G(s) = \frac{K_1(b_o + b_1 s + ... + b_m s^m)}{(s + p_0)(s + p_1)...(s + p_{n-1})}$$
$$p_l \in \Re \ \forall \ l = 0(1)n - 1$$
$$p_l \neq p_k \forall \ l \neq k$$

Entonces podemos escribir $G(s)$ mediante expansión en fracciones parciales:

$$G(s) = \frac{\alpha_0}{s+p_0} + \frac{\alpha_1}{s+p_1} + ... + \frac{\alpha_{n-1}}{s+p_{n-1}}$$

Eso presenta dos opciones:

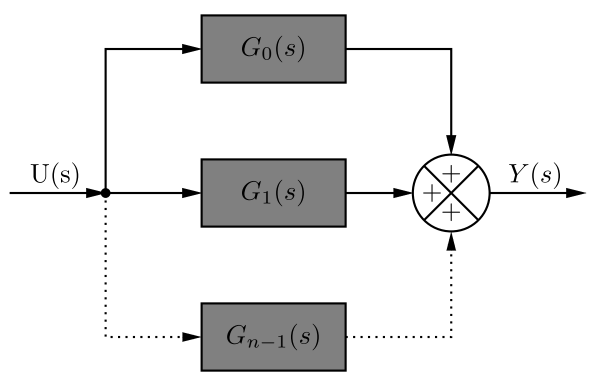
✓ Obtener la respuesta al impulso $h(t)$.

$$\begin{aligned} h(t) =& \mathfrak{L}^{-1}\left(G(s)\right) = \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{\alpha_0}{s+p_0} + \frac{\alpha_1}{s+p_1} + \cdots + \frac{\alpha_{n-1}}{s+p_{n-1}}\right) \\ \Rightarrow h(t) =& (\alpha_0 e^{-p_0 t} + \alpha_1 e^{-p_1 t} + \cdots + \alpha_{n-1} e^{-p_{n-1} t}) U_0(t) \end{aligned}$$

✓ Determinar la realización en paralelo de $G(s)$

$$\begin{aligned} Y(s) =& G(s)U(s) \\ =& \left(G_0(s) + G_1(s) + \cdots + G_{n-1}(s)\right) U(s) \\ Y(s) =& G_0(s)U(s) + G_1(s)U(s) + ... + G_{n-1}(s)U(s) \\ G_i(s) =& \frac{\alpha_i}{s+p_i} \end{aligned}$$

Figura 2. Diagrama para la realización en paralelo de $G(s)$.



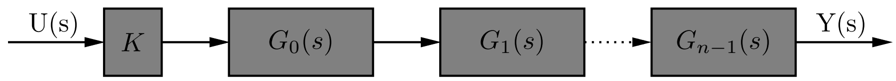
De otro lado si se factoriza también el numerador se obtiene

$$\begin{aligned} G(s) =& \frac{K(s+z_0)(s+z_1)\cdots(s+z_{m-1})}{(s+p_0)(s+p_1)\cdots(s+p_{n-1})} \\ & z_i \in \Re \; \forall \; i = 0(1)m-1 \\ & z_i \neq z_k \forall \; i \neq k \\ & \frac{z_i}{p_l} \neq 1 \forall \; i, l \end{aligned}$$

Se realiza a $G(s)$ a partir de la conexión en serie de las funciones de transferencia $G_i(s)$

$$G(s) = K G_0(s)\, G_1(s) \cdots G_{n-1}(s)$$

Figura 3. Diagrama para la realización en serie de $G(s)$.



Ejemplo 1 *Sea un sistema L.T.I. descrito por la E.D.O.*

$$\frac{dy^3}{dt^3} + 6\frac{dy^2}{dt^2} + 11\frac{dy}{dt} + 6y(t) = \frac{1}{2}u(t) + \frac{du}{dt}$$

Obtener:

- ✓ *La función de transferencia $G(s)$.*
- ✓ *El diagrama de polos polos y ceros de $G(s)$.*
- ✓ *La respuesta al impulso $h(t)$.*
- ✓ *La realización en paralelo de $G(s)$.*
- ✓ *Una realización en serie de $G(s)$.*

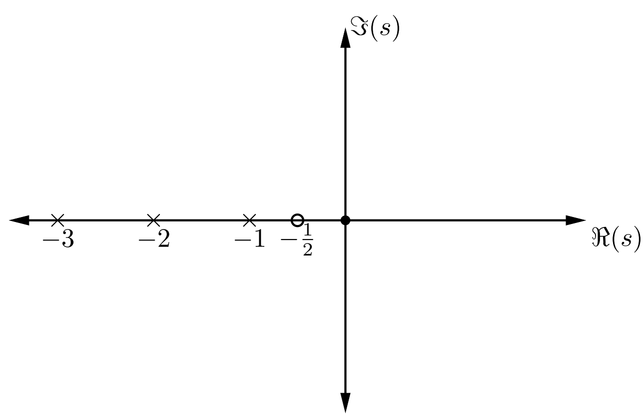
Al aplicar transformada de Laplace a la E.D.O., considerando que el sistema parte del reposo, se logra:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{L}\left(\frac{dy^3}{dt^3} + 6\frac{dy^2}{dt^2} + 11\frac{dy}{dt} + 6y(t) = \frac{1}{2}u(t) + \frac{du}{dt}\right)\\
\Rightarrow &(s^3 + 6s^2 + 11s + 6)Y(s) = \left(\frac{1}{2} + s\right)U(s)\\
\Rightarrow &Y(s) = \frac{(0{,}5 + s)U(s)}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = G(s)U(s)\\
\Rightarrow &G(s) = \frac{(0{,}5 + s)}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{(0{,}5 + s)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{N(s)}{D(s)}
\end{aligned}$$

Este sistema no es invertible porque su función de transferencia no tiene igual número de polos que de ceros, uno de los requisitos para que un sistema sea invertible.

En la Figura 4 se aprecia el diagrama de polos y ceros de la función de transferencia del sistema considerado. Para la obtención de la respuesta al impulso, se expande a $G(s)$ en fracciones parciales

Figura 4. Diagrama de polos y ceros para el ejemplo.



dando lugar a:

$$G(s) = \frac{(0{,}5 + s)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{\alpha_0}{s+1} + \frac{\alpha_1}{s+2} + \frac{\alpha_2}{s+3}$$

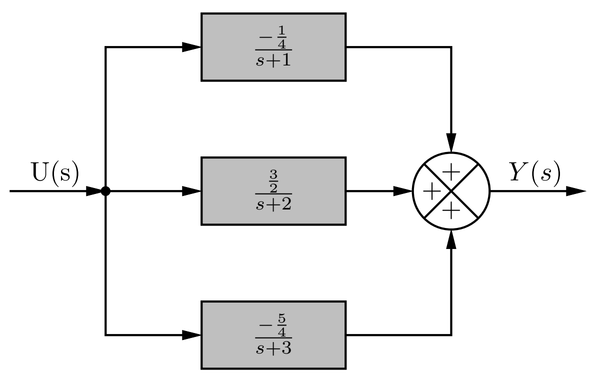
Los valores de $\alpha_0,\ \alpha_1$ y α_2 son respectivamente: $\alpha_0 = -\frac{1}{4},\ \alpha_1 = \frac{3}{2}$ y $\alpha_2 = -\frac{5}{4}$, por tanto:

$$G(s) = \frac{-\frac{1}{4}}{s+1} + \frac{\frac{3}{2}}{s+2} + \frac{-\frac{5}{4}}{s+3}$$

con lo cual $h(t)$ será

$$\begin{aligned} h(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left(G(s)\right) &= \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{-\frac{1}{4}}{s+1} + \frac{\frac{3}{2}}{s+2} + \frac{-\frac{5}{4}}{s+3}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2\,t} - \frac{5}{4}e^{-3\,t}\right)U_0(t), \qquad U_0(t) \text{ señal escalón unitario} \end{aligned}$$

Figura 5. Diagrama de realización en paralelo de la función de transferencia del ejemplo.



En lo que concierne a la realización en serie, se tiene:

$$G(s) = \frac{(0{,}5 + s)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1}{(s+1)}\,\frac{(0{,}5+s)}{(s+2)}\,\frac{1}{(s+3)} = G_0(s)\,G_1(s)\,G_2(s)$$

en donde $G_0(s) = 1/(s+1)$, $G_1(s) = (0{,}5+s)/(s+2)$ y $G_2(s) = 1/(s+3)$. Se debe tener cuidado y garantizar que todas las funciones de transferencia planteadas, $G_i(s)$, sean a lo menos bipropias. Es importante notar que no hay una única forma de obtener las diferentes funciones de transferencia $G_i(S)$ dado que depende de la forma como se establezca su numerador y su denominador, lo cual hasta cierto punto es arbitrario; por ello la realización en serie o cascada no es única como si lo es la realización en paralelo.

Variables de Estado

La descripción mediante variables de estado (V.E.) se considera la representación más completa de los sistemas dinámicos, puesto que mediante ésta se puede "observar" la dinámica interna del sistema, lo que no es posible si se utiliza la representación mediante ecuación diferencial ó la representación mediante función de transferencia. En esta representación se albergan todas las funciones de transferencia para las entradas y salidas consideradas en el sistema. De otro lado, para un sistema dinámico no se tiene una única representación en V.E. como si sucede con la representación mediante E.D.O. y mediante función de transferencia.

Un sistema dinámico descrito en variables de estado, se indica mediante la siguiente expresión:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u} \tag{2}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\,\mathbf{x} + \mathbf{D}\,\mathbf{u} \tag{3}$$

✓ La ecuación (2) se denomina ecuación de evolución y la ecuación (3) se denomina ecuación de salida.

✓ La ecuación de evolución, ecuación (2), indica la forma como evolucionan las variables de estado a partir de si mismas y por efecto de las entradas.

✓ La ecuación de salida, ecuación (3), plantea la manera como las salidas dependen de las variables de estado así como de las señales de entrada.

✓ $\dot{\mathbf{x}}$ corresponde al vector de variables de estado que tiene un tamaño igual a $n \times 1$ y en donde n corresponde al número de variables de estado presentes en el sistema.

✓ $\mathbf{A}$ es una matriz con tamaño $n \times n$

✓ $\mathbf{B}$ matriz de tamaño $n \times p$ donde p es el número de entradas.

✓ $\mathbf{u}$ es un vector de tamaño $p \times 1$ e indica la cantidad de señales aplicadas al sistema.

✓ $\mathbf{y}$ vector de tamaño $q \times 1$ donde q es el número de salidas.

✓ $\mathbf{C}$ matriz de tamaño $q \times n$

✓ $\mathbf{D}$ matriz de tamaño $q \times p$

✓ $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ no dependerán del tiempo para los sistemas $L.T.I.$, pues debe considerarse el hecho que con esta representación se pueden modelar sistemas variantes en el tiempo, caso en el cual al menos uno de los componentes de las matrices indicadas dependerán del tiempo.

1.2. Obtención de una representación en variables de estado a partir de la E.D.O. del sistema

Sea un sistema dinámico $L.T.I.$ caracterizado por la ecuación diferencial ordinaria (E.D.O.)

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = u(t)$$

$$a_i \in \Re, \qquad \forall i = 0(1)n-1$$

Como la E.D.O. es de orden n, se requiere asignar n variables de estado $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ahora bien, si se asignan como variables de estado:

$$x_1 = y(t), \quad x_2 = \frac{dy}{dt}, \quad x_3 = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}$$

De manera que

$$\dot{x}_n = \frac{d^n y}{dt^n}$$

Además

$$\dot{x}_1 = \frac{dy}{dt} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

Al reemplazar en la E.D.O. se tiene:

$$\dot{x}_n + a_{n-1}x_n + \ldots, a_1 x_2 + a_0 x_1 = u(t)$$

con lo cual

$$\begin{aligned}\dot{x}_n =& -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \ldots a_{n-1}x_n + u(t)\\ \dot{x}_{n-1} =& x_n\\ &\vdots\\ \dot{x}_1 =& x_2\end{aligned}$$

Lo anterior puede llevarse a la forma matricial

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}\\ \dot{x}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

Para la salida, se tiene que $y = x_1$, lo que puede escribirse en forma vectorial

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix}1 & 0 & \ldots & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix}0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

Por tanto se tiene la representación en variables de estado

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} =& \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y} =& \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}\end{aligned}$$

Si ahora se asignan como variables de estado a

$$x_1 = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}; \quad x_2 = \frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}}; \quad \ldots; \quad x_{n-1} = \frac{dy}{dt}; \quad x_n = y(t)$$

Se llega a

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix}-a_{n-1} & \ldots & -a_2 & -a_1 & -a_0\\ 1 & \ldots & 0 & 0 & 0\\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & \ldots & 1 & 0 & 0\\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y} &= \begin{bmatrix}0 & 0 & \ldots & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix}0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\end{aligned}$$

Ejemplo 2 *Un sistema dinámico se ha modelado mediante la ecuación diferencial ordinaria*

$$\frac{d^3y}{dt^3} + \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y(t) = u(t)$$

Obtener una representación en variables de estado.

Sea asignan las 3 variables de estado

$$x_1 = y(t), \quad x_2 = \frac{dy}{dt}, \quad x_3 = \frac{d^2y}{dt^2}$$

con lo que se obtiene como representación en variables de estado

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \\
\boldsymbol{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}
\end{aligned}$$

Ejemplo 3 *Para el sistema dinámico descrito por la* E.D.O. *realizar una representación en variables de estado.*

$$5\frac{d^4y}{dt^4} - 3\frac{d^3y}{dt^3} + 2\frac{d^2y}{dt^2} + y(t) = u(t)$$

Lo primero a hacer es llevar la *E.D.O.* a la forma planteada, es decir que el coeficiente de la más alta derivada de y sea la unidad, por lo cual.

$$\begin{aligned}
5\left(\frac{d^4y}{dt^4} - \frac{3}{5}\frac{d^3y}{dt^3} + \frac{2}{5}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{5}y(t)\right) &= u(t) \\
\frac{d^4y}{dt^4} - \frac{3}{5}\frac{d^3y}{dt^3} + \frac{2}{5}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{5}y(t) &= \frac{1}{5}u(t)
\end{aligned}$$

si ahora se asignan como variables de estado

$$x_1 = y(t), \quad \ldots, x_4 = \frac{d^3y}{dt^3}$$

se obtiene como representación

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \\
\boldsymbol{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}
\end{aligned}$$

Ejercicio 1 *Para la misma ecuación diferencial del ejemplo anterior, si se asignan como variables de estado*

$$x_4 = \dot{y}, \quad x_3 = \ddot{y}, \quad x_2 = \dddot{y}, \quad x_1 = y$$

haga todo el proceso indicado para determinar la representación en variables de estado asociada a la asignación indicada para llegar a:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \\ \dot{x_4} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \\
\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}
\end{aligned}$$

Tarea 1 *Determinar la representación de variables de estado de la siguiente ecuación diferencial.*

$$\frac{d^3y}{dt^3} + \frac{5d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = u(t) \tag{4}$$

1. *Si se asignan como variables de estado*

$$x_1 = y(t), \quad x_2 = \frac{dy}{dt}, \quad x_3 = \frac{d^2y}{dt^2}$$

2. *Si ahora se asignan como variables de estado*

$$x_1 = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad x_2 = \frac{dy}{dt}, \quad x_3 = y(t)$$

3. *Si se asignan las variables de estado*

$$x_1 = \frac{dy}{dt}, \quad x_2 = y(t), \quad x_3 = \frac{d^2y}{dt^2}$$

1.3. Otención de una representación en variables de estados a partir de E.D.O. con derivadas de u

Como la representación en variables de estado no está planteada en términos de derivadas de la señal de entrada, en caso de que la E.D.O. las tenga se tienen dos caminos posibles. El primero consiste en obtener la función de transferencia del sistema y a partir de ésta obtener una representación en variables de estado, tal como se indica en 1.5. El otro camino consiste en plantear transformaciones de las señales de manera que se eliminen las derivadas de la señal de entrada, una vez logrado esto se plantea la representación en variables de estado según lo indicado en 1.2. A continuación se indica la aplicación del método a una ecuacicón diferencial de segundo orden, para a partir de los resultados obtenidos luego generalizar a ecuaciones diferenciales de orden n.

Considérese un sistema descrito por la E.D.O. escrita en notación de puntos, para mayor claridad

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y(t) = b_0u(t) + b_1\dot{u} + b_2\ddot{u}$$

si se define la variable de estado x_1 como

$$\begin{aligned} x_1 &= y - \beta_2 u, \ (y = x_1 + \beta_2 u) \qquad \text{se obtiene} \\ \dot{y} &= \dot{x}_1 + \beta_2\dot{u} \qquad \text{y} \qquad \ddot{y} = \ddot{x}_1 + \beta_2\ddot{u} \end{aligned}$$

al reeemplazar en la E.D.O. se logra

$$\ddot{x}_1 + \beta_2\ddot{u} + a_1(\dot{x}_1 + \beta_2\dot{u}) + a_0(x_1 + \beta_2 u) = b_0u + b_1\dot{u} + b_2\ddot{u}$$

al acomodar los términos

$$\ddot{x}_1 + a_1\dot{x}_1 + a_0x_1 = (b_0 - a_0\beta_2)u + (b_1 - a_1\beta_2)\dot{u} + (b_2 - \beta_2)\ddot{u}$$

nótese que el lado izquierdo de la anterior ecuación es igual al lado izquierdo de la E.D.O. planteada solo que en términos de x_1. Si se hace que $\beta_2 = b_2$ se elimina el término de la segunda derivada de u, con lo que ahora la Ecuación diferencial queda

$$\ddot{x}_1 + a_1\dot{x}_1 + a_0x_1 = (b_0 - a_0\beta_2)u + (b_1 - a_1\beta_2)\dot{u} = (b_0 - a_0\beta_2)u + \beta_1\dot{u}$$

donde $\beta_1 = b_1 - a_1\beta_2$. Si ahora se hace $\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u$ se tendrá:

$$\ddot{x}_1 = \dot{x}_2 + \beta_1\dot{u}$$

de forma que la E.D.O. será ahora:

$$\dot{x}_2 + \beta_1\dot{u} + a_1(x_2 + \beta_1 u) + a_2 x_1 = (b_1 - a_1\beta_2)\dot{u} + (b_2 - a_0\beta_2)u$$

organizando se tiene:

$$\dot{x}_2 + a_1 x_2 + a_0 x_1 = (b_0 - a_0\beta_2 - a_1\beta_1)u + (b_1 - a_1\beta_2 - \beta_1)\dot{u}$$

si se hace $\beta_1 = b_1 - a_1\beta_2$ y se define $\beta_0 = b_0 - a_0\beta_2 - a_1\beta_1$ la E.D.O. queda, finalmente

$$\dot{x}_2 + a_1 x_2 + a_0 x_1 = \beta_0 u$$

Con lo que se obtiene la representación en variables de estado

$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u \qquad \dot{x}_2 + a_1 x_2 + a_0 x_1 = \beta_0 u$

en forma matricial

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad \text{y la salida} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \beta_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

con

$$\begin{aligned} \beta_2 &= b_2 \\ \beta_1 &= b_1 - a_1\beta_2 \\ \beta_0 &= b_0 - a_1\beta_1 - a_0\beta_2 \end{aligned}$$

los cuales se pueden obtener a partir de la solución del sistema triangular inferior mediante sustitución progresiva.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_0 & a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

En forma general se tiene:

Dado un sistema L.T.I. descrito por la ecuación diferencial

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t) + b_1\frac{du}{dt} + \cdots + b_{n-1}\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} + b_n\frac{d^n u}{dt^n}$$
$$a_i \in \Re,\ \forall\ i = 0(1)n-1 \qquad b_i \in \Re,\ \forall\ i = 0(1)n$$

una representación en variables de estado será

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \tag{5}$$

con la salida

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \beta_n \end{bmatrix} \mathbf{u} \tag{6}$$

Los $\beta' s$ se obtienen al solucionar el sistema de $n+1$ ecuaciones lineales, descrito por la forma triangular inferior

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Ejemplo 4 *Considérese un sistema dinámico descrito por la E.D.O.*

$$\ddddot{y} - 2\ddot{y} + 4y(t) = u(t) - \ddot{u}$$

Obtener una representación en variables de estado para este sistema.
Conforme lo indicado con anterioridad, a partir de la ecuación diferencial se obtiene

$$a_0 = 4, \quad a_1 = 0 = a_3, \quad a_2 = -2, \quad b_0 = 1, \quad b_1 = 0 = b_3 = b_4, \quad b_2 = -1$$

con lo cual para la determinación de los $\beta' s$ se plantea el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_4 \\ \beta_3 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

cuya solución es $\beta_4 = 0,\ \beta_3 = 0,\ \beta_2 = -1,\ \beta_1 = 0,\ \beta_0 = -1$, con lo cual la representación en variables de estado asociada correspondiente es

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

Ejemplo 5 *Para el ejemplo anterior, considere la asignación de variables de estado $x_1 = \dot{y} - f_1(u),\ x_2 = y(t) - f_2(u),\ x_3 = \ddot{y} - f_3(u),\ y\ x_4 = \dddot{y} + f_4(u)$.*
Como se ha planteado que $x_2 = y(t) + f_2(u)$ lo que corresponde a una asignación de variables de estado diferente a la indicada con anterioridad, lo más conveniente será desarrollar el caso general para esta asignación de manera que pueda observarse la forma general. Entonces si se considera la E.D.O.

$$\ddddot{y} + a_3\dddot{y} + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y(t) = b_0 u(t) + b_1\dot{u} + b_2\ddot{u} + b_3\dddot{u} + b_4\ddddot{u}$$
$$a_i \in \Re,\ \forall\ i = 0(1)3 \qquad b_i \in \Re,\ \forall\ i = 0(1)4$$

Con la asignación de variables de estado indicada se tiene:

$$\ddddot{x}_2 + \beta_4\ddddot{u} + a_3(\dddot{x}_2 + \beta_4\dddot{u}) + a_2(\ddot{x}_2 + \beta_4\ddot{u}) + a_1(\dot{x}_2 + \beta_4\dot{u}) + a_0(x_2 + \beta_4 u) = b_0 u(t) + b_1\dot{u} + b_2\ddot{u} + b$$

Si se hace $\beta_4 = b_4$ y trasponiendo y agrupando términos se tiene:

$$\ddddot{x}_2 + a_3\dddot{x}_2 + a_2\ddot{x}_2 + a_1\dot{x}_2 + a_0x_2 = (b_0 - a_0\beta_4)u + (b_1 - a_1\beta_4)\dot{u} + (b_2 - a_2\beta_4)\ddot{u} + (b_3 - a_3\beta_4)\dddot{u}$$

al definir $\beta_3 = b_3 - a_3\beta_4$ y $\dot{x}_2 = x_1 + \beta_3 u$ se tiene que la E.D.O. queda en términos de x_1 y x_2

$$\dddot{x}_1 + a_3(\ddot{x}_1 + \beta_3\ddot{u}) + a_2(\dot{x}_1 + \beta_3\dot{u}) + a_1(x_1 + \beta_3 u) + a_0x_2 = (b_0 - a_0\beta_4)u + (b_1 - a_1\beta_4)\dot{u} + (b_2 - a_2\beta_4)\ddot{u}$$

la cual al ordenary agrupar términos se tiene:

$$\dddot{x}_1 + a_3\ddot{x}_1 + a_2\dot{x}_1 + a_1x_1 + a_0x_2 = (b_0 - a_0\beta_4 - a_1\beta_3)u + (b_1 - a_1\beta_4 - a_2\beta_3)\dot{u} + (b_2 - a_2\beta_4 - a_3\beta_3)\ddot{u}$$

si se define $\beta_2 = b_2 - a_2\beta_4 - a_3\beta_3$ y si se hace $\dot{x}_1 = x_3 + \beta_2 u$, la E.D.O. queda en términos de $x_1,\ x_2\ y\ x_3$ como:

$$\ddot{x}_3 + a_3\dot{x}_3 + a_2x_3 + a_1x_1 + a_0x_2 = (b_0 - a_0\beta_4 - a_1\beta_3 - a_2\beta_2)u + (b_1 - a_1\beta_4 - a_2\beta_3 - a_3\beta_2)\dot{u}$$

si se hace $\beta_1 = b_1 - a_1\beta_4 - a_2\beta_3 - a_3\beta_2$ y $\dot{x}_3 = x_4 + \beta_1 u$, la E.D.O. queda:

$$\dot{x}_4 + a_3x_4 + a_2x_3 + a_1x_1 + a_0x_2 = (b_0 - a_0\beta_4 - a_1\beta_3 - a_2\beta_2 - a_3\beta_1)u$$

si ahora se hace $\beta_0 = b_0 - a_0\beta_4 - a_1\beta_3 - a_2\beta_2 - a_3\beta_1$ la E.D.O. finalmente queda

$$\dot{x}_4 + a_3x_4 + a_2x_3 + a_1x_1 + a_0x_2 = \beta_0 u$$

la ecuación de evolución y de salida finalmente pueden escribirse

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_0 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\
\mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \beta_4 \end{bmatrix} \mathbf{u}
\end{aligned}$$

Los $\beta's$ se obtienen a partir de la solución del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_4 \\ \beta_3 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_4 \\ b_3 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

Es importante notar que el sistema de ecuaciones para determinar los $\beta's$ es el mismo que se obtuvo en el anterior ejemplo, muy importante porque indica que no importa la asignación de variables de estado que se haga los $\beta's$ serán los mismos. Por otro lado es de notar la forma como queda la ecuación de evolución y la ecuación de salida, respecto a las correspondientes del ejemplo anterior.

Al reemplazar los coeficientes de la E.D.O. se obtiene como representación en variables de estado, para la asignación establecida

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\
\mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}
\end{aligned}$$

1.4. Obtención de $\mathbf{G}(s)$ a partir de una representacion de V.E.

Considérese un sistema dinámico *L.T.I.* con representación en variables de estado dada por las ecuaciones (2) y (3), las cuales se recuerdan por comodidad.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} =& \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u}\\ \mathbf{y} =& \mathbf{C}\,\mathbf{x} + \mathbf{D}\,\mathbf{u}\end{aligned}$$

Si se considera que el sistema parte del reposo, al aplicar transformada de *Laplace* a las escuaciones del sistema se logra:

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \tag{8}$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \tag{9}$$

De la ecuación de evolución se tiene:

$$s\mathbf{X}(s) = s\mathbf{I}\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

al sumar $-\mathbf{A}\mathbf{X}(s)$ a la ecuación se tiene

$$s\mathbf{I}\mathbf{X}(s) - \mathbf{A}\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

al factorizar a derecha $\mathbf{X}(s)$ se logra

$$(\mathbf{sI} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

La matriz $\mathbf{sI} - \mathbf{A}$ es no singular, por tanto tiene inversa única denotada $(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}$, luego al premultiplicar la anterior ecuación, por esta inversa se logra:

$$(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \tag{10}$$

$$\mathbf{I}\mathbf{X}(s) = \mathbf{X}(s) = (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \tag{11}$$

luego $\mathbf{X}(s)$ está dado por:

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{G}_1(s)\mathbf{U}(s) \tag{12}$$

Siendo la matriz $\mathbf{G}_1(s)$

$$\mathbf{G}_1(s) = (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

esta es una matriz de funciones de transferencia si se considera como salida al vector de estados, la cual puede ser usada para determinar el comportamiento de las variables de estado a partir de la señal de entrada $\mathbf{u}$, cuando el sistema parte del reposo.

De otro lado la matriz $(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}$ se puede expresar a partir de su adjunta y de su determinante a partir de:

$$(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{adj(\mathbf{sI} - \mathbf{A})}{|\mathbf{sI} - \mathbf{A}|}$$

Ahora bien, al reemplazar $\mathbf{X}(s)$ en la ecuación de salida se logra:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\frac{adj(\mathbf{sI} - \mathbf{A})}{|\mathbf{sI} - \mathbf{A}|}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)$$

al factorizar a derecha $\mathbf{U}(s)$ se tiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}(s) =& \left(\mathbf{C}\frac{adj(\mathbf{sI}-\mathbf{A})}{|\mathbf{sI}-\mathbf{A}|}\mathbf{B}+\mathbf{D}\right)\mathbf{U}(s)\\ =&\boldsymbol{G(s)}\mathbf{U}(s)\end{aligned}$$

Con la cual $\boldsymbol{G(s)}$, la matriz de funciones de transferencia del sistema, está dada por:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G(s)} =&\boldsymbol{C}\frac{\boldsymbol{adj(sI-A)}}{\boldsymbol{|sI-A|}}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\\ =&\frac{\boldsymbol{C\,adj(sI-A)\,B}+\boldsymbol{|sI-A|D}}{\boldsymbol{|sI-A|}}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{|sI-A|}$ se denomina polinomio de valores propios.

De forma general se puede expresar que $\boldsymbol{G(s)}$:

$$\boldsymbol{G_{q\times p}(s)} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1p}\\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ G_{q1} & G_{q2} & \cdots & G_{qp}\end{pmatrix}$$

De la misma manera se puede expresar cada componente $\boldsymbol{G}_{ij} = \boldsymbol{G_{ij}(s)}$ de la matriz de funciones de transferencia $\boldsymbol{G(s)}$ en función de la entrada y la salida:

$$\begin{aligned}G_{ij}(s) =&\frac{Y_i(s)}{U_j(S)}\\ G(s) =& \begin{pmatrix} \frac{Y_1(s)}{U_1(s)} & \frac{Y_1(s)}{U_2(s)} & \cdots & \frac{Y_1(s)}{U_p(s)}\\ \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} & \frac{Y_2(s)}{U_2(s)} & \cdots & \frac{Y_2(s)}{U_p(s)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{Y_q(s)}{U_1(s)} & \frac{Y_q(s)}{U_2(s)} & \cdots & \frac{Y_q(s)}{U_p(s)}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

además, como

$$G_{ij}(s) =\frac{N_{ij}(s)}{D_{ij}(S)}$$

pero dado que $D_{ij}(s) = D(s) = |sI - A|$ entonces

$$G_{ij}(s) =\frac{Y_i(s)}{U_j(s)} = \frac{N_{ij}(s)}{D(s)}$$

por tanto, $\boldsymbol{G(s)}$ toma la forma

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{N_{11}(s)}{D(s)} & \frac{N_{12}(s)}{D(s)} & \cdots & \frac{N_{1p}(s)}{D(s)}\\ \frac{N_{21}(s)}{D(s)} & \frac{N_{22}(s)}{D(s)} & \cdots & \frac{N_{2p}(s)}{D(s)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{N_{q1}(s)}{D(s)} & \frac{N_{q2}(s)}{D(s)} & \cdots & \frac{N_{qp}(s)}{D(s)}\end{pmatrix}$$

Mediante la relación anteriormente planteada:

$$\frac{Y_i(s)}{U_j(s)} = \frac{N_{ij}(s)}{D(s)}$$

Se puede obtener la **Ecuación Diferencial que relaciona la i-ésima salida respecto a la j-ésima entrada**: mediante

$$D(s)Y_i(s) = N_{ij}(s)U_j(s)$$

Además se tiene que:

$$\boldsymbol{Y(s) = G(s)U(s)}$$

De forma vectorial se expresa:

$$\boldsymbol{Y}(s) = \begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_i(s) \\ \vdots \\ Y_q(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{N_{11}(s)}{D(s)} & \frac{N_{12}(s)}{D(s)} & \cdots & \frac{N_{1p}(s)}{D(s)} \\ \frac{N_{21}(s)}{D(s)} & \frac{N_{22}(s)}{D(s)} & \cdots & \frac{N_{2p}(s)}{D(s)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{N_{i1}(s)}{D(s)} & \frac{N_{i2}(s)}{D(s)} & \cdots & \frac{N_{ip}(s)}{D(s)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{N_{q1}(s)}{D(s)} & \frac{N_{q2}(s)}{D(s)} & \cdots & \frac{N_{qp}(s)}{D(s)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_p(s) \end{pmatrix} \tag{13}$$

Resolviendo la operacion matricial se obtiene:

$$\begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_i(s) \\ \vdots \\ Y_q(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{N_{11}(s)}{D(s)}U_1(s) + \frac{N_{12}(s)}{D(s)}U_2(s) + \cdots + \frac{N_{1p}(s)}{D(s)}U_p(s) \\ \frac{N_{21}(s)}{D(s)}U_1(s) + \frac{N_{22}(s)}{D(s)}U_2(s) + \cdots + \frac{N_{2p}(s)}{D(s)}U_p(s) \\ \vdots \\ \frac{N_{i1}(s)}{D(s)}U_1(s) + \frac{N_{i2}(s)}{D(s)}U_2(s) + \cdots + \frac{N_{ip}(s)}{D(s)}U_p(s) \\ \vdots \\ \frac{N_{q1}(s)}{D(s)}U_1(s) + \frac{N_{q2}(s)}{D(s)}U_2(s) + \cdots + \frac{N_{qp}(s)}{D(s)}U_p(s) \end{pmatrix}$$

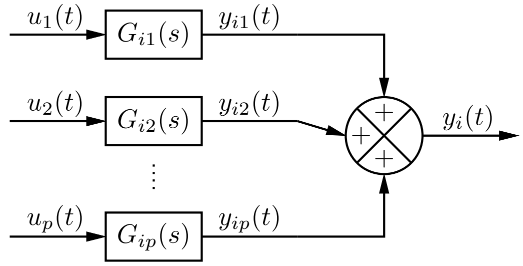
A partir de esta representación se obtiene:

$$Y_i(s) = \frac{N_{i1}(s)}{D(s)}U_1(s) + \frac{N_{i2}(s)}{D(s)}U_2(s) + \cdots + \frac{N_{ip}(s)}{D(s)}U_p(s)$$

De la anterior ecuación se obtiene la siguiente que se de denomina **Ecuación Diferencial de la i-ésima salida respecto a las p entradas**:

$$D(s)Y_i(s) = N_{i1}(s)U_1(s) + N_{i2}(s)U_2(s) + \cdots + N_{ip}(s)U_p(s)$$

Visto de manera gráfica la anterior ecuación se representa



Ejemplo 6 *Un sistema dinámico* L.T.I. *ha sido modelado mediante la representación en variables de estado*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

Determinar la matriz de funciones de transferencia $\boldsymbol{G(s)}$.
Es necesario determinar la matriz $\boldsymbol{sI - A}$,

$$\boldsymbol{sI - A} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ -1 & s-2 \end{bmatrix}$$

Ahora

$$|\boldsymbol{sI - A}| = (s+1)(s-2) - 1 = s^2 - s - 3$$
$$adj\{\boldsymbol{sI - A}\} = \begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$\boldsymbol{C adj\{sI - A\}B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Si se hace primero el producto $adj\{\}\boldsymbol{B}$

$$adj\{\}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-s & s+1 \\ 2s+1 & 3s+4 \end{bmatrix}$$

De manera que

$$\boldsymbol{C\,adj\{\}B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4-s & s+1 \\ 2s+1 & 3s+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(s+2) & 2(7s+9) \\ 2-5s & -5s-7 \\ 7s+17 & 18s+23 \end{bmatrix}$$

Con lo cual

$$\boldsymbol{G(s)} = \frac{\begin{bmatrix} 6(s+2) & 2(7s+17) \\ 2-5s & -5s-7 \\ 7s+17 & 18s+23 \end{bmatrix}}{s^2 - s - 3}$$

Finalmente

$$\boldsymbol{G(s)} = \begin{bmatrix} \frac{6(s+2)}{s^2-s-3} & \frac{2(7s+9)}{s^2-s-3} \\ \frac{2-5s}{s^2-s-3} & \frac{-5s-7}{s^2-s-3} \\ \frac{7s+17}{s^2-s-3} & \frac{18s+23}{s^2-s-3} \end{bmatrix}$$

Tarea 2 *Para el sistema planteado anteriormente y para el cual se obtuvo la matriz de funciones de transferencia hallar:*

1. *Realizar el diagrama de bloques en donde se indique cada salida y su relación con las entradas.*
2. *La ecuación diferencial que relaciona a cada salida con cada entrada.*
3. *La ecuación diferencial que relaciona a cada salida con todas las entradas.*
4. *La matriz de respuestas al impulso del sistema.*

1.5. Obtención de una representación de variables de estado a partir de la función de transferencia $G(s)$

A partir de la función de transferencia de un sistema, es posible determinar una representación en variables de estados, aunque puede plantearse en forma general para un sistema de orden n, por sencillez se elige un $n = 4$ y a partir de los resultados acomodar el resultado para el orden necesario.

Sea un sistema dinámico con función de transferencia $G(s)$, dada por:

$$\boldsymbol{G}(s) = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)} := \frac{Y(s)}{U(s)}$$

con

$$b_i \in \mathbb{R} \quad \forall\, i = 0(1)3 \qquad a_l \in \mathbb{R}\, \forall\, l = 0(1)3$$

Sabiendo por definición que:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Ahora multiplicamos y dividimos por $W(s)$ así,

$$\begin{aligned} G(s) =& \frac{Y(s)}{U(s)} * \frac{W(s)}{W(s)} = \frac{W(s)}{U(s)} * \frac{Y(s)}{W(s)} \\ =& \left(\frac{1}{D(s)}\right) N(s) \end{aligned}$$

Si se hace

$$\frac{1}{D(s)} = \frac{W(s)}{U(s)} \tag{14}$$

y

$$N(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} \tag{15}$$

A partir de la ecuación (14) al multiplicar en cruz se tiene:

$$D(s)W(s) = U(s)$$

Al remplazar $D(s)$ se logra

$$(s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0) * W(s) = U(s)$$

En el tiempo

$$\frac{d^4 w}{dt^4} + a_3 \frac{d^3 w}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 w}{dt^2} + a_1 \frac{dw}{dt} + a_0 w(t) = u(t)$$

Si se asignan como variables de estado:

$$w(t) = x_1; \quad \frac{dw}{dt} = x_2; \quad \frac{d^2w}{dt^2} = x_3; \quad \frac{d^3w}{dt^3} = x_4$$

de donde se obtiene la ecuación de evolución para x_4

$$\dot{x}_4 = -a_0x_1 - a_1x_2 - a_2x_3 - a_3x_4 + u(t)$$

Luego la ecuación de evolución para $\boldsymbol{x}$ será:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \tag{16}$$

Ahora como

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = N(s)$$

De donde

$$Y(s) = N(s)W(s)$$

Al reemplazar el $N(s)$ dado se obtiene

$$Y(s) = (b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0)W(s)$$

En el tiempo

$$y(t) = b_3\frac{d^3w}{dt^3} + b_2\frac{d^3w}{dt^2} + b_1\frac{dw}{dt} + b_0w(t)$$

en términos de las variables de estado definidas anteriormente

$$y(t) = b_3x_4 + b_2x_3 + b_1x_2 + b_0x_1$$

De forma matricial:

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \tag{17}$$

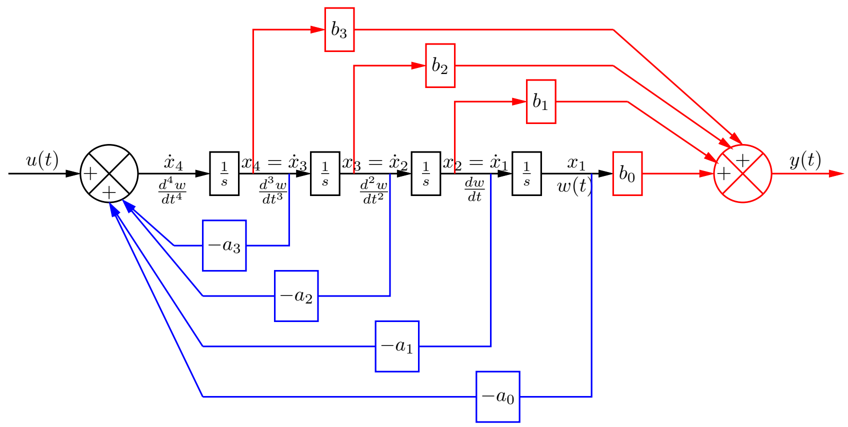
Nótese que la ecuación de evolución (ecuación (16)) depende de los recíprocos aditivos de los coeficientes del polinomio característico de la función de transferencia, mientras que la ecuación de salida (ecuación (17)) está compuesta por los coeficientes del polinomio numerador.

Toda ecuación de variable de estado se puede representar gráficamente, el diagrama se denomina *diagrama de realización* de $G(s)$ mediante variables de estado. Para el caso planteado el diagrama de realización se muestra en la Figura 6.

Estas son algunas consideraciones que debemos tener en cuenta para aplicar este metodo:

- ✓ Los sistemas deben ser extrictamente propios.
- ✓ El coeficiente de la más alta potencia del polinomio $D(s)$ debe ser uno (Polinomio mónico), de no ser así se debe llevar a esta estructura al factorizar en el denominador el coeficiente a_n y luego haciéndolo parte del numerador, de manera que el nuevo polinomio del denominador tenga la forma deseada.

Figura 6. Diagrama de realización para el $G(s)$ indicado.



✓ Si la función de transferencia $G(s)$, corresponde a un sistema bipropio, esta función puede escribirse de la forma

$$G(s) = G(\infty) + G_1(s) \tag{18}$$

lo cual se logra mediante división sintética u otros métodos. La representación en V.E. se hará con $G_1(s)$ y $G(\infty)$ hará parte de D.

Ejemplo 7 *Teniendo la siguiente función de transferencia obtenga su representación en variables de estado.*

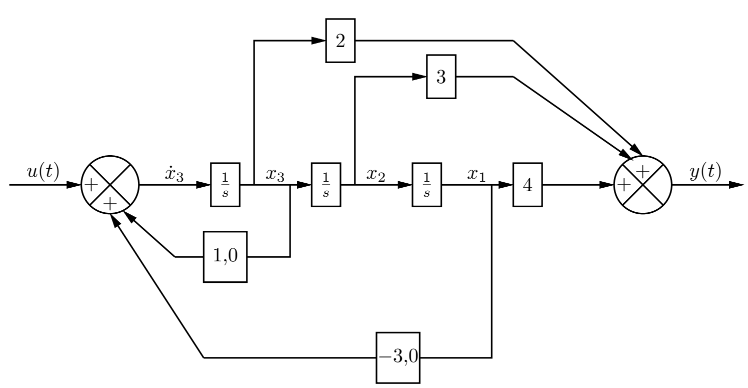
$$G(s) = \frac{2s^2 + 3s + 4}{s^3 - s^2 + 3}$$

Con la asignación de variables de estado planteada se obtiene:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}; \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

Su diagrama de realización sera el siguiente:

Figura 7. Diagrama de realización ejemplo 7.



Ejemplo 8 *Teniendo la siguiente función de transferencia obtenga su representación en variables de estado.*

$$G(s) = \frac{5s^4 - 2s^2}{3s^4 - \frac{1}{2}s^2 + 3}$$

Al no ser el polinomio característico un polinomio mónico se debe llevarlo a esta estructura y utilizando la definición de la ecuación (18) se obtiene:

Al realizar la división sintética se logra:

$$\begin{array}{r|l} & \qquad\qquad\qquad \frac{5}{3} \\ \hline 3s^4 - \frac{1}{2}s^2 + 3 & \ \ 5s^4 \ - 2s^2 \\ & -5s^4 + \frac{5}{6}s^2 - 5 \\ \cline{2-2} & \qquad -\frac{7}{6}s^2 - 5 \end{array}$$

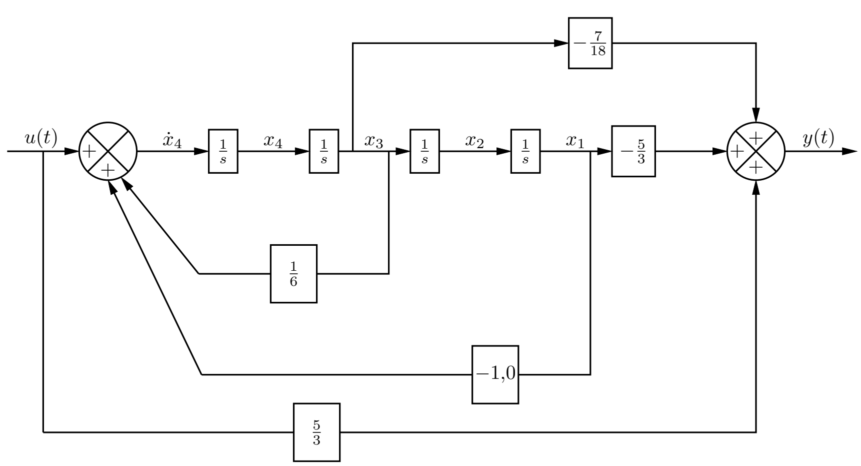
$$\begin{aligned} G(s) &= G(\infty) + G_1(s) \\ G(\infty) &= \frac{5}{3} \\ G_1(s) &= G(s) - G(\infty) \\ G(s) &= \frac{5}{3} + \frac{-\frac{7}{6}s^2 - 5}{3s^4 - \frac{1}{2}s^2 + 3} \\ G(s) &= \frac{5}{3} + \frac{-\frac{7}{18}s^2 - \frac{5}{3}}{s^4 - \frac{1}{6}s^2 + 1} \end{aligned}$$

Con lo anterior se plantea la representación en variables de estado

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}; \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & 0 & -\frac{7}{18} & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

Su diagrama de realización es el mostrado en la Figura 8.

Figura 8. Diagrama de realización ejemplo 8.



Tarea 3 *Un sistema dinámico se ha modelado mediante la función de transferencia*

$$G(s) = \frac{3s^3 - 7s^2 + 2}{5s^3 + s - 1}$$

Hallar:

1. *Dos representaciones en V.E.*
2. *Para cada representación indicar el respectivo diagrama de realización.*