Практическое исследование цепочки Гейзенберга S=1/2 Часть III — Practical study of the Heisenberg chain S=1/2 Part III

И.А.Юхновский

ноябрь 2020

Аннотация

Заключительная часть работы «Практическое исследование цепочки Гейзенберга S = 1/2» рассматривает вопросы запутанности для перехода от физического эксперимента к квантовым вычислениям. Рассматривается запутанность, индуцированная в частицах со спином 1/2 спиновой цепочкой в качестве теоретического обоснования актуальности проведения эксперимента по облучению одномерных магнетиков частицами ионизирующего излучения при нормальных условиях и сравнении результатов на цепочках ультра-холодных атомов.

Abstract

The final part of the work « Practical Investigation of the Heisenberg Chain S = 1/2 » deals with entanglement issues for the transition from physical experiment to quantum computing. The entanglement induced in particles with a spin 1/2 by a spin chain is considered as a theoretical substantiation of the relevance of an experiment on irradiating one-dimensional magnets with ionizing radiation particles under normal conditions and comparing the results on chains of ultra-cold atoms

Содержание

1 Введение

В [1] в 2006 была установлена связь между запутанностью и критичностью спиновых цепочек на ультра-холодных атомах. Рассматривалась запутанность, которая разделяется между вспомогательными частицами, которые изолированы друг от друга, но связаны с одной и той же критической цепочкой со спином 1/2. Была сделана аналитическая оценка приведённой матрицы плотности и численно показана запутанность вспомогательных частиц вблизи критических точек спиновой цепочки. Была обнаружена, что запутанность, вызванная спиновой цепочкой, может достигать 1, и это может очень хорошо сигнализировать о критических точках цепочки. Представлены физическое понимание и экспериментальная реализация с захваченными ионами. Цель данной работы рассмотреть механизм запутанности на одномерных спиновых цепочках и подготовить теоретическое обоснование квантового эксперимента по облучению частицами ионизирующего излучения

2 Запутанность

йй

3 Эксперимент Йи

Квантовая запутанность лежит в основе разницы между квантовым и классическим многочастичным миром и может рассматриваться как полезный ресурс в различных задачах, таких как:

- криптография,
- квантовые вычисления

- телепортация [2],

Квантовые фазовые переходы [?] - это переходы между квантовыми вычислениями. отдельные фазы квантовых систем многих тел, управляемые исключительно квантовыми флуктуациями. В последнее десятилетие были предприняты большие усилия, чтобы понять взаимосвязь между запутанностью и квантовыми фазовыми переходами 3–9. На самом деле, естественно связывать квантовый фазовый переход и запутанность, если за ними стоят корреляции. Разделяя эту точку зрения, можно ожидать, что запутанность, вызванная квантовой критической системой многих тел, даст впечатляющую сигнатуру квантовых критических точек для системы многих тел.

С другой стороны, мы обычно думаем об окружающей среде, окружающей квантовую систему, как об источнике декогеренции. Недавно исследователи начали изучать положительные эффекты [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18] окружающей среды, например, обработку информации, обусловленную окружающей средой, и запутанность, вызываемую окружающей средой. Эти исследования открывают новый путь к разработке механизмов предотвращения, минимизации или использования воздействия окружающей среды при обработке квантовой информации. Однако в этих работах окружающая среда моделировалась как набор независимых квантовых систем, то есть корреляций между частицами в окружающей среде. игнорировались. Интересный открытый вопрос заключается в том, может ли корреляция между частицами окружающей среды влиять на запутанность, индуцированную в двух частичной системе, которая с ней соединяется.

В этой статье мы покажем, как использовать запутанность во вспомогательных частицах, индуцированную квантовой критической системой многих тел, в качестве важного инструмента для выявления квантовых явлений в квантовой системе многих тел. Действительно, квантовые фазовые переходы сопровождаются качественным изменением характера классических корреляций, такие резкие изменения свойств основных состояний часто связаны с коллективностью и/или случайностью межчастичных взаимодействий, которые, возможно, отражаются в запутанности между системами, которые с ними связаны. Здесь мы принимаем систему спиновых цепочек, описываемую одномерной моделью спина 1/2XY как систему многих тел. Другая пара систем со спином 1/2, которые связаны со спиновой цепочкой, будет действовать как вспомогательные частицы. Мы видим, что спутанность вспомогательных частиц резко меняется в зависимости от близости квантового фазового перехода. Это изменение можно проследить до наличия коллективности в доминирующих связях вспомогательных частиц с цепочкой, а затем оно отражает критические свойства системы многих тел. Это наблюдение предлагает новый инструмент для изучения квантовых критических явлений, в частности, для более общих систем, для которых аналитические решения могут быть недоступны. Предлагается возможная реализация этой схемы с захваченными ионами. Он использует нерезонансные ионы, управляемые стоячими волнами, в ловушках [19, 20] для моделирования одномерной цепочки XY спина. Это предложение также могло быть реализовано с ультра-холодными атомами, наложенными на оптическую решётку cite20. Это делает исследование привлекательным для экспериментального тестирования.

Рассмотрим двудольную систему, состоящую из двух частиц со спином $1/2$ a и b, и квантовую систему многих тел, описываемую одномерной моделью со спином $1/2$XY. Системный гамильтониан H_S и гамильтониан H_B цепи имеют вид

$$H_S = \frac{\omega_a}{2}\sigma_a^Z + \frac{\omega_b}{2}\sigma_b^Z$$

$$H_B = -\sum_{l=1}^{N}(\frac{1+\gamma}{2}\sigma_l^x\sigma_{l+1}^x + \frac{1-\gamma}{2}\sigma_l^y\sigma_{l+1}^y + \frac{\lambda}{2}\sigma_l^z) \tag{1}$$

где N - число узлов, $\sigma_i^\alpha(\alpha = x, y, z)$ - матрицы Паули, γ- безразмерный параметр анизотропии. Для спиновой цепочки предполагается периодическое граничное условие $\sigma_{N+1} = \sigma_1$. Предположим, что связь вспомогательных частиц в цепочку принимает вид

$$H_l = \sum_{l=1}^{N}(g\sigma_a^z\sigma_l^z + h\sigma_b^z\sigma_l^z) \tag{2}$$

где g и h обозначают изменённые безразмерные константы связи. Ясно, что $[H_S, H_l] = 0$, что означает, что энергия вспомогательных частиц сохраняется, но когерентность может не сохраняться в зависимости от деталей связи системы и цепи. Это приводит к следующей форме оператора эволюции во времени $U(t)$

$$U(t) = \sum_{i,j=0,1} U_{ij}(t)|ij\rangle\langle ij| \tag{3}$$

, где $|ij\rangle = |i\rangle_a \otimes |j\rangle_b$ и $|i\rangle_a(|i\rangle_b, i = 0, 1)$ представляет собственные состояния $\sigma_a^z(\sigma_b^z)$.

Легко показать что $U_{ij}(t)(i,j=0,1)$ удовлетворяет:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U_{ij}(t)=H_{ij}U_{ij}(t) \tag{4}$$

где:

$$H_{ij}=-\sum_{l=1}^{N}(\frac{1+\gamma}{2}\sigma_l^x\sigma_{l+1}^x+\frac{1-\gamma}{2}\sigma_l^y\sigma_{l+1}^y+\frac{\Lambda_{ij}}{2}\sigma_l^z)$$

где:

$$\Lambda_{ij}=\lambda+(-1)^{i+1}2g+(-1)^{j+1}2h, i,j=0,1$$

Если вспомогательные частицы изначально находятся в состоянии $|ij\rangle$, динамика и статистические свойства спиновой цепочки будут определяться величиной H_ij, которая принимает ту же форму что и H_B но с изменёнными значениями напряжённости поля Λ_{ij}. Гамильтониан H_{ij} должен быть диагонализирован по стандартной процедуре [22] следующим образом:

$$H_ij=\sum_k\omega_{ij,k}(\eta_{ij,k}^{\dagger}\eta_{ij,k}-\frac{1}{2})$$

,где $\eta_{ij,k}(\eta_{ij,k}^{\dagger})$ операторы аннигиляции фермионных мод с частотой:

$$\omega_{ij,k}=\sqrt{\epsilon_{ij,k}^2+\gamma^2 sin^2\frac{2\pi k}{N}}$$

,где:

$$\epsilon_{ij,k}=(cos\frac{2\pi k}{N}-\Lambda_{ij}), k=-\frac{N}{2},-\frac{N}{2}+1,\ldots,\frac{N}{2}-1$$

Фермионный оператор $\eta_{ij,k}$, k был определён преобразованием Боголюбова как:

$$\eta_{ij,k}=d_k cos\frac{\Theta_{ij,k}}{2}-id_{-k}^{\dagger}sin\frac{\Theta_{ij,k}}{2}$$

,где:

$$d_k=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_l a_l e^{\frac{-i2\pi lk}{N}}$$

а угол смещения $\Theta_{ij,k}$ был определён как

$$cos\Theta_{ij,k} = \frac{\epsilon_{ij,k}}{\omega_{ij,k}}$$

Фермионные операторы a_l были связаны со спиновыми операторами преобразованием Жордана-Вигнера через

$$a_l = (\prod_{m<l} \sigma_m^z)(\sigma_l^x + i\sigma_l^y)/2$$

Операторы $\eta_{ij,k}$, параметризованные с помощью i и j, явно не коммутируют друг с другом, это приводит к запутыванию во вспомогательных частицах, как будет показано ниже. Прежде чем перейти к вычислению приведённой матрицы плотности, мы обсудим диагонализацию Hij. Для цепочки с периодическим граничным условием, т.е. $\sigma_1 = \sigma_N$, граничные члены:

$$H_{bound} \sim [(a_N^\dagger a_1 + \gamma a_N a_1) + H.c.]e^{i\pi M} + 1$$

необходимо принять во внимание [22, 23]. В этой статье мы будем работать с игнорированием момента указанного в [22] M не является неизменным при преобразовании Боголюбова, однако его чётность или нечётность даёт ($e^{i\pi M}$, инвариантен):

Члены с $e^{i\pi M} = -1$ дают нулевой вклад в $\Gamma_{ij;mn}(t)$, потому что в этом случае граничные члены исчезают.

При $e^{i\pi M} = 1$ граничные члены изменяют порядок $1/N$ в $cos(\Theta_{ij,k}/2)$ и $sin(\Theta_{ij,k}/2)$. Поэтому они вносят поправки до порядка $1/N$ в $\Gamma_{ij;mn}(t)$, которыми можно безопасно пренебречь в пределе $N \to \infty$. Интуитивно, при $N \to \infty$ два случая открытой границы и циклической границы становятся одинаковыми, поэтому граничный эффект в этом смысле исчезнет.

Игнорируем потому, что мы заинтересованы в обнаружении связи между критичностью цепи и запутанностью во вспомогательных частицах.

Задав начальное состояние отделимости продукта общей системы:

$$|\psi(0)\rangle = |\phi_a(0)\rangle \otimes |\phi_b(0)\rangle \otimes |\phi_B(0)\rangle$$

, мы можем получить приведённую матрицу плотности для вспомогательных частиц как

$$\rho_{ab}(t) = Tr_B[U(t)|\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|U^\dagger(t)]$$

и его можно формально записать в виде:

$$\rho_{ab}(t) = \sum_{i,j;mn} \rho_{ij;mn}(t)|ij\rangle\langle mn|$$

Простой, но несколько утомительный расчёт показывает, что:

$$\rho_{ij;mn}(t) = \rho_{ij;mn}(t=0)\Gamma_{ij;mn}(t)$$

,где:

$$\begin{gathered}\Gamma_{ij;mn}(t) = \prod_k e^{(i/2)(\omega_{ij,k}-\omega_{mn,k})t}[\\ 1-(1-e^{i\omega_{ij,k}t})sin^2\frac{\Theta_k-\Theta_{ij,k}}{2}\\ -(1-e^{-i\omega_{mn,k}t})sin^2\frac{\Theta_k-\Theta_{mn,k}}{2}\\ +(1-e^{i\omega_{ij,k}t})(1-e^{i\omega_{mn,k}t})\\ \times(sin\frac{\Theta_k-\Theta_{ij,k}}{2}sin\frac{\Theta_k-\Theta_{mn,k}}{2}cos\frac{\Theta_{ij,k}-\Theta_{mn,k}}{2})]\end{gathered} \tag{5}$$

,где:

$$cos\Theta_k = \frac{cos(2\pi k/N)-\lambda}{\sqrt{[cos(2\pi k/N)-\lambda]^2+\gamma^2 sin^2(2\pi k/N)}}$$

Для получения этого результата предполагалось, что спиновая цепочка изначально находится в основном состоянии H_B. Обсуждения по формуле 5 в порядке.

Для $g=h$: $\Lambda_{ij}=\lambda$ и $j=1$ или $i=1$ и $j=0$.

Следовательно, $|01\rangle$ и $|10\rangle$ расширяют подпространство, свободное от декогеренции. Впоследствии запутанность состояний в этом подпространстве остаётся неизменной благодаря $\Gamma_{ij;mn}(t)=1$. Ситуация меняется, если $h \neq g$, где свободное от некогерентности подпространство не существует. Запутанность, разделяемая между вспомогательными частицами, эволюционирует со временем в соответствии с уравнением 5 в этой ситуации.

Используя эти выражения, мы переходим к изучению запутанности, разделяемой между вспомогательными частицами и состоянием 3. Для конкретности в качестве начального состояния вспомогательных частиц выберем $|\phi_a(0)\rangle \otimes |\phi_b(0) = 1/\sqrt{2}(|0\rangle_a + |1\rangle_a) \otimes 1/\sqrt{2}(|0\rangle_b + |1\rangle_b)$, а спиновая цепочка предполагается находящейся в основном состоянии гамильтониана H_B. Запутанность, измеренная Wootters, может быть рассчитана, и численный результат показан на рисунках 1–4. Масштаб t был изменён на безразмерный в соответствии с константами связи. Области критичности возникают при вырождении основного и первого возбуждённых состояний. Сначала мы сосредоточимся на критичности модели XX. Модель XX, соответствующая $\gamma = 0$, имеет область критичности вдоль линии между $\lambda = 1$ и $\lambda = -1$. Критичность отражается в запутывании вспомогательных частиц, которые показаны на рис. 1 и 2. На рис. 1 показано совпадение с Wootters как функция времени и параметра анизотропии γ, видно, что совпадение Wootters имеет резкое изменение предела $\gamma \to 0$. Этот результат можно понять, рассматривая значения $\Theta_{ij,k}$, которые принимают 0 или π в зависимости от знака $cos(2\pi k/N) - \Lambda_{ij}$ в этом пределе.

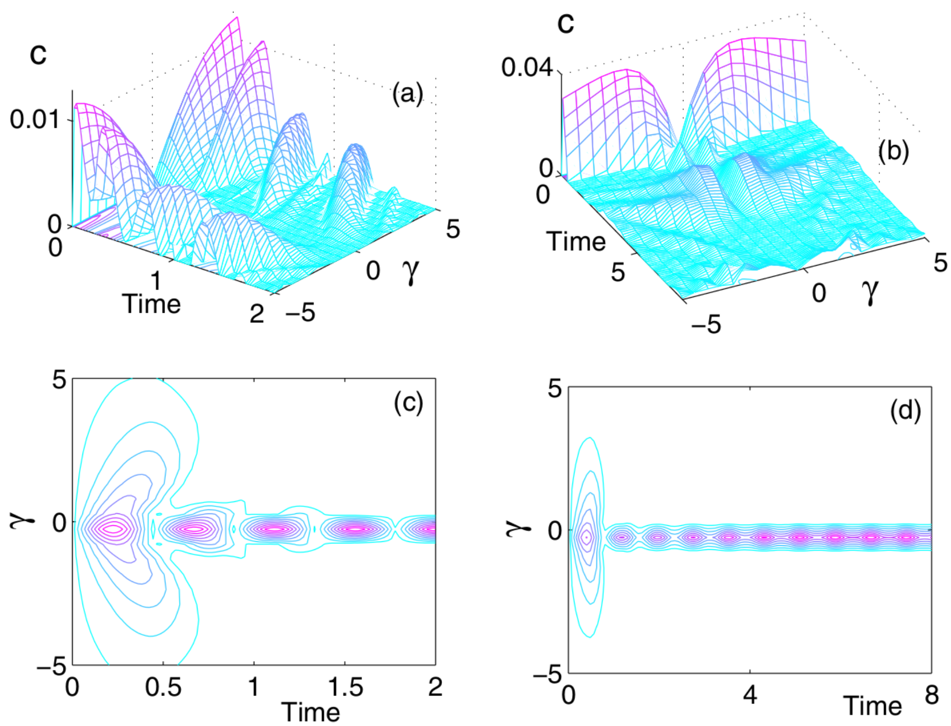

Рис. 1: Совпадение вспомогательных пар частиц как функция времени и параметров анизотропии [1]

В любом случае $|\Gamma_{ij;mn}(t)| = 1$, что указывает на то, что норма любого элемента приведённой матрицы плотности остаётся неизменной. На рис. 2 показано запутывание вспомогательных частиц вблизи области критичности с $\gamma = 0$ и $\lambda = \pm 1$. Запутанность резко меняется по линии $\lambda = \pm 1$ на временной плоскости. Это отражение критических явлений при запутывании вспомогательных частиц.

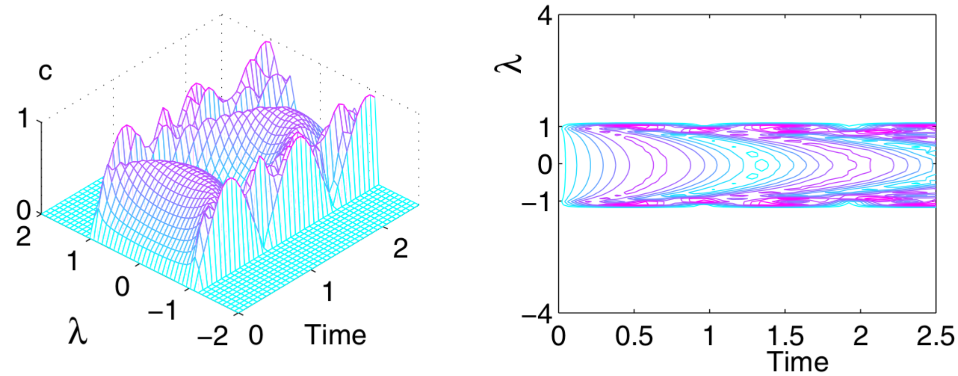

Рис. 2: Согласованность Wootters против времени и λ при фиксированном $\gamma = 10^{-4}$ [1]

Теперь мы переходим к изучению критичности в поперечной модели Изинга. Структура основного состояния поперечной модели кардинально меняется при изменении параметра. Зависимость запутанности от λ довольно сложна [3]. Здесь мы представляем анализ для пределов $\lambda \to \infty$, $\lambda = 1$ и $\lambda = 0$. В $\lambda \to \infty$ пределе основное состояние цепи приближается к произведению спинов, указывающих в положительном направлении z. В этом пределе угол смешивания $\Theta_{ij,k}$ и Θ_k стремится к $-\pi$. Это приводит к $\Gamma_{ij;mn}(t) = 1$, что указывает на то, что начальное состояние не эволюционирует со временем, т.е. вспомогательные частицы остаются неразделимыми состояниями. Предел $\lambda = 0$ принципиально отличается от $\lambda \to \infty$ предела, поскольку соответствующее основное состояние дважды вырождается при глобальном перевороте спина на $\prod_{l=1}^{N} \sigma_l^z$. Эта симметрия нарушается при $|\lambda| = 1$ и цепочка приобретает ненулевую намагниченность $\langle \sigma^x \rangle \neq 0$ который растёт по мере уменьшения. Это резкое изменение основного состояния спиновой цепи можно найти в запутывании вспомогательных частиц на рис. 3.

На самом деле, основное состояние XY-моделей очень сложно с множеством различных режимов поведения [24, 25]. Как бы то ни было, наблюдается резкое изменение запутанности по линии $|\lambda| = 1$ Рис.4. Это сигнализирует об изменении основного состояния спиновой цепочки с парамагнитной фазы на другие. Хотя запутанность в обоих случаях с

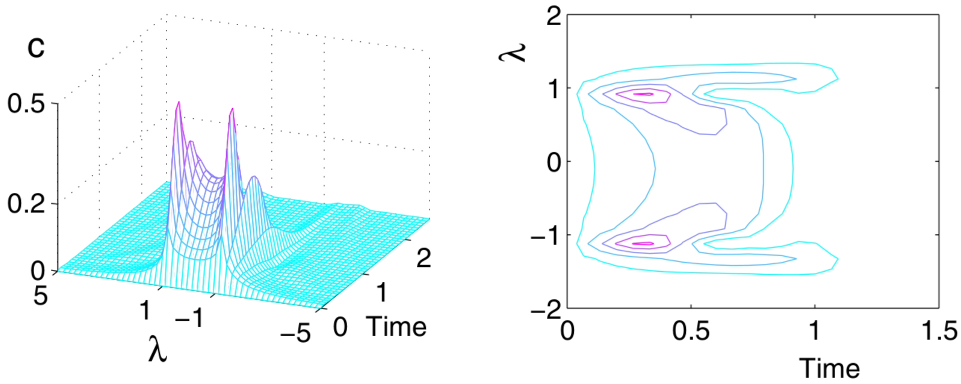

Рис. 3: Запутанность индуцированная поперечной изинговой цепочкой S=1/2, которую можно получить из модели XY, положив $\gamma = 1$ [1]

$\gamma = 0$ и $\gamma = 1$ имеет одни и те же свойства вдоль линии $|\lambda| = 1$, т.е. резко меняется в этой критической области. Две вспомогательные частицы никогда не эволюционируют в случае $\gamma = 0$, в то время как две в конечном итоге эволюционируют в состояния указателя в другом случае, кроме $\lambda \to \infty$, следовательно, нет запутанности между вспомогательными частицами в более позднем случае при $t \to \infty$ и $N \to \infty$.

Связь между запутанностью во вспомогательных частицах и критичностью спиновой цепочки можно понимать как сингулярность в одном или нескольких $\rho_{ij;mn}(t)$ элементах приведённой матрицы плотности в критических точках. Чтобы показать это, напомним, что

$$\rho_{ij;mn}(t) = \frac{1}{4}\langle\phi_B(0)|e^{-iH_{ij}t}e^{-iH_{kl}t}|\phi_B(0)\rangle \tag{6}$$

с теми же обозначениями и начальными состояниями, данными перед уравнением 3. Обратите внимание, что $|\phi_B(0)\rangle$ было взято в качестве основного состояния $|0\rangle$ H_B, но оно не является собственным состоянием H_{ij} с $\Lambda_{ij} \neq \lambda$. Разложив $|0\rangle_B$ по собственному состоянию $|\alpha\rangle_B^{ij}$ H_{ij}, $\alpha = 0, 1, \ldots,$)

$$|0\rangle_B = c_0^{ij}|0\rangle_B^{ij} + \sum_{\alpha\neq 0} c_\alpha^{ij}|\alpha\rangle_B^{ij} \tag{7}$$

легко доказать, что $|c_{\alpha\neq 0}^{ij}| \sim h, g$ где $g << 1$ и $h << 1$. Это именно тот случай, который мы рассматриваем, где $|0\rangle_B^{ij}$ обозначает основное состояние H_{ij}. Следовательно

$$\rho_{ij;mn}(t) \sim \frac{1}{4} c_0^{ij} [c_0^{kl}]_B^{*kl} \langle 0|0\rangle_B^{ij} e^{-i(\Omega_{ij}-\Omega_{kl})t} \tag{8}$$

до первого порядка g и h. Здесь Ω_{ij} обозначает энергию основного состояния H_{ij}. Как наблюдалось в [26], внезапное падение в $\langle 0|0\rangle_B^{ij}$ может сигнализировать об областях критичности в спиновой цепочке. Следовательно, запутанность как функция $\rho_{ij;mn}(t)$ может сигнализировать о критичности цепи.

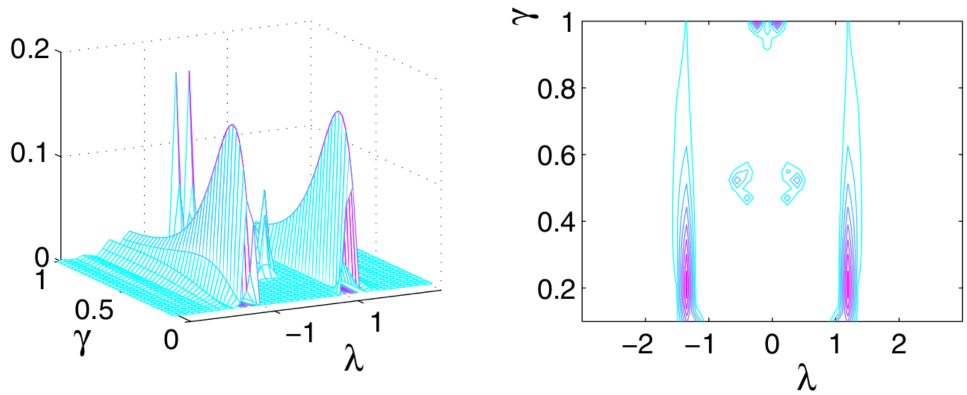

Рис. 4: Согласованность Wootters в момент времени t = 0,75. Положения пиков на оси не меняются со временем [1]

Это обсуждение, помимо теоретических интересов, предлагает возможный экспериментальный метод изучения критических явлений без необходимости определения состояния системы, в частности, при наличии вырождения. Модель XY может быть реализована с захваченными ионами под действием нерезонансных волн 19 следующим образом. Рассмотрим систему ловушек, физическая реализация которой соответствует кулоновским цепочкам в ловушках Пеннинга или массиву ионных микроловушек. Кулоновское отталкивание вместе с захваченным потенциалом и движением ионов дает набор коллективных мод колебаний, эти коллективные моды могут быть связаны с внутренними состояниями ионов условными силами. Направления условных сил [20] будут определять эффективные связи между эффективными спинами. Чтобы смоделировать модель XY, мы применим две условные силы в обоих направлениях x и y. Эффективное взаимодействие пропорционально $1/r^3$, где r представляет собой относительное расстояние между ионами. Хотя соединения зависят от расстояния, показано, что критические свойства аналогичны идеальным моделям [20, 27], рассмотренным в этой статье. Связь вспомогательных частиц с цепочкой, которые разделяют другой захват с ионами в цепочке, может быть смоделирована таким же образом, где прикладывается условная сила в одном направлении. Частицы в цепи могут окружать вспомогательные частицы, так что связи вспомогательных частиц с частицами в цепи равны. Это предложение также может быть реализовано с ультра-холодными атомами в оптической решётке методом, представленным в [28]. Мы хотели бы отметить, что предотвращение любого обмена энергией между цепочкой и вспомогательными частицами может быть сложной задачей в экспериментах. Требование равномерного сцепления также очень сложно экспериментально. Тем не менее, в этой статье установлена связь между запутанностью и критичностью с другой стороны, что может пролить свет на понимание критичности со стороны вспомогательных частиц, и может открыть способ охарактеризовать и экспериментально обнаружить квантовый фазовый переход с точки зрения теории квантовой информации [29], где рассматриваются две вспомогательные функции, связанные с двумя частицами на разных участках цепи. С помощью этой модели была установлена связь между качеством передачи состояния и спектральным зазором цепи.

4 Заключение

Предложенный в [2] метод изучения критических явлений в системах многих тел интересно проверить при других условиях. Было обнаружено, что критичность отражается в запутанности сопряжённых с цепочкой вспомогательных частиц и резко меняется вдоль линии критических точек. Это резкое изменение было объяснено с точки зрения отражения квантовых фазовых переходов, которые приводят к коллективности связей спиновой цепочки с вспомогательные частицы. Также в [30] был сделан вывод, что квантовая критическая система многих тел также может отражать свою критичность в декогеренции квантовой системы, которая с ней взаимодействует - этот факт также интересно проверить при далёких от абсолютного 0 температурах. Проведение этих экспериментов с частицами ионизирующего излучения прольёт свет на роль окружающей среды в обработке квантовой информации, откроют путь для изучения критических явлений в системах многих тел, а также дадут старт практическому созданию квантового компьютера на источниках ионизирующего излучения. Получение и обобщение этих результатов на широкий круг материалов и источников излучения - многообещающий и сложный вопрос, который заслуживает обширного исследования.

Список литературы

[1] Yi, X. X., Cui, H. T., & Wang, L. C. (2006). Entanglement induced in spin-1/2particles by a spin chain near its critical points. Physical Review A, 74(5). doi: 10.1103/physreva.74.054102

[2] M.A.Nielsen and I.L.Chuang, Quantum Computation andQuantum Information Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[3] S. Sachdev,Quantum Phase Transition Cambridge UniversityPress, Cambridge, 1999.

[4] T. J. Osborne and M. A. Nielsen, Phys. Rev. A66, 032110 – 2002.

[5] G. Vidal, J. I. Latorre, E. Rico, and A. Kitaev, Phys. Rev. Lett.90, 227902 – 2003.

[6] A. Osterloh, L. Amico, G. Falci, R. Fazio, Nature London 416, 608 – 2002.

[7] L. A. Wu, M. S. Sarandy, and D. A. Lidar, Phys. Rev. Lett.93,250404 – 2004.

[8] Y. Chen, P. Zanardi, Z. D. Wang, and F. C. Zhang, New J.Phys.8,97 – 2006; Y. Chen, Z. D. Wang, and F. C. Zhang,Phys. Rev. B73, 224414 – 2006.

[9] S. J. Gu, S. S. Deng, Y. Q. Li, and H. Q. Lin, Phys. Rev. Lett.93, 086402 – 2004.

[10] F. Verstraete, M. Popp, and J. I. Cirac, Phys. Rev. Lett.92,027901 – 2004.

[11] M. B. Plenio, S. F. Huelga, A. Beige, and P. L. Knight, Phys.Rev. A59, 2468 – 1999; M. B. Plenio and S. F. Huelga, Phys.Rev. Lett.88, 197901, 2002.

[12] S. Bose, P. L. Knight, M. B. Plenio, and V. Vedral, Phys. Rev.Lett.83, 5158 – 1999.

[13] A. Beige, S. Bose, D. Braun, S. F. Huelga, P. L. Knight, M. B.Plenio, and V. Vedral, J. Mod. Opt.47, 2583 – 2000.

[14] P. Horodecki, Phys. Rev. A63, 022108 – 2001.

[15] D. Braun, Phys. Rev. Lett.89, 277901 – 2002.

[16] X. X. Yi, C. S. Yu, L. Zhou, and H. S. Song, Phys. Rev. A68,052304 – 2003.

[17] F. Benatti, R. Floreanini, and M. Piani, Phys. Rev. Lett.91,070402 – 2003

[18] S. Shresta, C. Anastopoulos, A. Dragulescu, and B. L. Hu,Phys. Rev. A71, 022109 – 2005.

[19] L. M. Duan, E. Demler, and M. D. Lukin, Phys. Rev. Lett.91,090402 – 2003.

[20] D. Porras and J. I. Cirac, Phys. Rev. Lett.92, 207901 – 2004;X. L. Deng, D. Porras, and J. I. Cirac, Phys. Rev. A72,063407 – 2005.

[21] J. K. Pachos and M. B. Plenio, Phys. Rev. Lett.93, 056402 – 2004.

[22] E. Lieb, T. Schultz, and D. Mattis, Ann. Phys.16, 407 – 1961.

[23] S. Katsura, Phys. Rev.127, 1508 – 1962.

[24] E. Barouch and B. M. McCoy, Phys. Rev. A2, 1075 – 1970;3, 786 – 1971.

[25] M. F. Yang, Phys. Rev. A71, 030302R – 2005.

[26] P. Zanardi and N. Paunkovic, Phys. Rev. E74, 031123 – 2006.

[27] A. Dutta and J. K. Bhattacharjee, Phys. Rev. B64, 184106 – 2001.

[28] Angelo C. M. Carollo and Jiannis K. Pachos, Phys. Rev. Lett.95, 157203 – 2005.

[29] M. J. Hartmann, M. E. Reuter, and M. B. Plenio, New J. Phys.8,94 – 2006.

[30] H. T. Quan, Z. Song, X. F. Liu, P. Zanardi, and C. P. Sun, Phys.Rev. Lett.96, 140604 – 2006