TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

JUHO VASTAPUU

TERÄSRAKENTEISEN HALLIN PITUUSSUUNTAISTEN JÄYKIS-TERAKENTEIDEN OPTIMOINTI

Diplomityö

TkT Kristo Mela lähetetty
tarkastukseen 6.6.2016.

TIIVISTELMÄ

JUHO VASTAPUU: Teräsrakenteisen hallin pituussuuntaisen jäykistysjärjestelmän optimointi
Tampereen teknillinen yliopisto
Diplomityö, x sivua, x liitesivua
Joulukuu 2018
Rakennustekniikan diplomi-insinöörin tutkinto-ohjelma
Pääaine: Rakennesuunnittelu
Tarkastaja: TkT Kristo Mela

Avainsanat:

ALKUSANAT

SISÄLLYSLUETTELO

1 JOHDANTO

1.1 Tutkimuksen tausta

1.2 Työn tavoitteet

1.3 Työn rajaukset

2 OPTIMOINTI

2.1 Optimointitehtävän matemaattinen määrittely

Matemaattisella optimoinnilla tarkoitetaan prosessia, jolla löydetään jollekkin funktiolle paras mahdollinen arvo sille asetetut reunaehdot huomioiden. Asettamalla optimoitava kohde sekä halutut rajoite-ehdot matemaattiseen muotoon, voidaan optimoimalla löytää matemaattisin keinoin paras käypä ratkaisu. Käyvällä ratkaisulla tarkoitetaan ratkaisua, joka kuuluu annettujen rajoite-ehtojen joukkoon.

Matemaattisesti optimoinnissa on tavoitteena etsiä funktiolle käyvästä joukosta minimi- tai maksimiarvo. Optimointitekniikoita ja algoritmeja on kehitetty lukuisia ja kukin niistä soveltuu käytettäväksi eri tavalla eri optimointitehtäviin. Optimointi ja erilaisten optimoitimenetelmien tutkiminen on yksi matemaattisen operaatiotutkimuksen osa-alueista. Optimoinnista voidaan joissain yhteyksissä käyttää myös nimitystä matemaattinen ohjelmointi (mathematical programming), jolla viitataan matemaattisten algoritmien kehittämiseen ja ohjelmoimista optimointitarkoituksiin. (Rao 1999, s. 1)

Optimointitehtävä kirjoitetaan matemaattisesti seuraavanlaisessa muodossa.

$$\text{Etsi } \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \text{ joka minimoi } f(\mathbf{x})\text{, siten että}$$

$$
\begin{aligned}
g_i(\mathbf{x}) &\leq 0, \quad j = 1, 2, \cdots, m \\
h_j(\mathbf{x}) &= 0, \quad j = 1, 2, \cdots, p
\end{aligned}
\tag{1}
$$

missä **x** on vektori, joka sisältää n-kappaletta suunnittelumuuttujia, f(**x**) on tavoitefunktio, $g_i(\mathbf{x})$ ja $h_j(\mathbf{x})$ ovat rajoite-ehtoja. Rajoite-ehdot voivat olla joko epäyhtälö- tai yhtälömuotoisesti ilmoitettuja. Suunnittelumuuttujien lukumäärä (n) sekä rajoite-ehtojen lukumäärä (m ja/tai p) eivät ole riippuvaisia toisistaan. Tällaista optimointitehtävää kutsutaan rajoitetuksi optimointiongelmaksi. Optimointiongelman ei kuitenkaan tarvitse olla rajoitettu, vaan se voidaan ilmoittaa myös rajoittamattomana. Kaavassa (1) on esitetty optimointitehtävän standardimuotoinen asettelu (standard design optimization model). (Rao 1999, s. 6)

Vektori **x** sisältää optimointitehtävän kaikki suunnittelumuuttujat (design variables). Muuttamalla jonkin suunnittelumuuttujan x_i arvoa, muuttuu myös tavoitefunktion f(**x**) arvo. Suunnittelumuuttujista voidaan käyttää myös nimitystä optimointimuuttujat tai vapaat muuttujat, eli niiden arvoja voidaan muutella vapaasti kun haetaan tavoitefunktiolle arvoa. Toisistaan riippumattomien eli itsenäisten suunnittelumuuttujien lukumäärä on optimointiongelman vapausasteluku (design degree of freedom). Yleisesti ottaen suunnittelumuuttujien tulee olla toisistaan riippumattomia, mutta joissain tapauksissa niiden määrä voi olla ongelman vapausastelukua suurempi. Tämä on perusteltua esimerkiksi silloin, kun kohdefunktion määrittely pelkillä itsenäisillä suunnittelumuuttujilla olisi hankalaa. Jokaiselle suunnittelumuuttujalle täytyy myös pystyä asettamaan jokin numeerinen lähtöarvo, jotta optimointitehtävä pystytään suorittamaan.

Kohde- tai tavoitefunktio f(**x**) (objective function) on optimointitehtävän matemaattinen muoto ilmoitettuna suunnittelumuuttujavektorin **x** funktiona. Optimointitehtävän tavoitteena on joko minimoida tai maksimoida kohdefunktion arvo. Mikäli optimointitehtävässä on useampi kuin yksi kohdefunktio, käytetään tehtävästä nimitystä monitavoiteoptimointi (multiobjective design optimization). Tällöin kohdefunktio ilmaistaan matemaattisesti kohdefunktioiden joukkona

$$
\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) & f_2(\mathbf{x}) & \cdots & f_p(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \tag{2}
$$

jossa jokainen kohdefunktio koostuu kuitenkin samasta suunnittelumuuttujavektorista **x**.

Optimoitavalle kohteelle asetettavat rajoite-ehdot esitetään rajoitefunktioina $g_i(\mathbf{x})$ ja $h_j(\mathbf{x})$. Optimointialgoritmi ratkaisee optimointitehtävän siten, että kohdefunktion arvo toteuttaa rajoite-ehdot. Rajoite-ehtojen muodostamaa joukkoa kutsutaan täten optimointiongelman käyväksi joukoksi (feasible region). Mitä tahansa käyvässä joukossa olevaa kohdefunktion arvoa kutsutaan käyväksi ratkaisuksi (feasible design) huolimatta siitä onko kyseessä optimiratkaisu. Kaksiulotteisessa tapauksessa käypää joukkoa voidaan havainnollistaa piirtämällä rajoitefunktioiden käyrät koordinaatistoon. Käypä joukko muodostuu näiden käyrien rajoittamana alueena. Käyvän joukon negaatiota kutsutaan ei-käyväksi joukoksi (unfeasible region). Sekä tavoitefunktion f($\mathbf{x}$), että rajoite-ehtojen $g_i(\mathbf{x})$ ja $h_j(\mathbf{x})$ on oltava toisitaan joko implisiittisesti tai eksplisiittisesti riippuvia. Mikäli riippuvuutta funktioiden välillä ei ole, ei optimointitehtävää voi muodostaa eikä varsinaista optimointiongelmaa voi edes osoittaa. (Arora 2004, s. 43)

Kuten optimointitehtävän määrittelevä kaava (1) osoittaa, optimointiongelmalle voidaan asettaa rajoite-ehtoja sekä yhtälö- että epäyhtälömuodossa. Epäyhtälörajoitteita kutsutaan käypään joukkoon nähden toispuoleisiksi rajoite-ehdoiksi (unilateral constraints tai one-sided constraints). Epäyhtälörajoitteiden rajoittama käypä joukko on täten paljon laajempi kun verrataan yhtälörajoitteista käypää joukkoa. Esimerkiksi kakisuloitteisessa tapauksessa yhtälörajoite tarkoittaisi, että käypä ratkaisu löytyisi rajoitefunktion käyrältä. (Arora 2004, s. 16–18)

Yhtälömuotoisten rajoite-ehtojen määrän tulee olla maksimissaan suunnittelumuuttujien määrä, toisin sanottuna optimointitehtävän kaavan (1) tulee toteuttaa ehto

$$p \leq n. \tag{3}$$

Tapaus, jossa yhtälömuotoisia rajoite-ehtoja on annettuja suunnittelumuuttujia enemmän, on kyseessä ylimääritetty yhtälöryhmä (overdetermined system). Tällaisessa tapauksessa rajoite-ehtojen joukossa on ylimääräisiä eli redundatteja ehtoja, jotka toteuttavat suoraan jonkun muun rajoite-ehdon, eikä niiden ilmoittaminen täten ole tarpeellista. Triviaalitapauksessa jossa suunnittelumuuttujien määrä ja yhtälömuotoisten rajoite-ehtojen määrä on yhtäsuuri, löytyy tehtävälle ratkaisu analyyttisin keinoin eikä optimointi ole tarpeellista. Kaksiuloitteisessa tapauksessa tämä tarkoittaisi kahden käyrän leikkauspistettä.

Standardimuotoisessa optimointitehtävässä epäyhtälörajoitteet ilmoitetaan aina kaavan (1) osoittamassa muodossa, eli siten että rajoite-ehto on pienempi tai yhtäsuuri kuin nolla (≤ 0). Tästä huolimatta voidaan optimointitehtävässä käsitellä myös $\geq$ -tyyppisiä rajoite-ehtoja. Standardimuotoista tehtävää aseteltaessa nämä voidaan muuttaa $\leq$ -muotoon yksinkertaisesti kertomalla ehto luvulla -1. Epäyhtälömuotoisten rajoite-ehtojen määrää ei ole rajoitettu, toisin kuin yhtälömuotoiset rajoitteet kaavassa (3). Niiden määrää ei ole siis rajoitettu. (Arora 2004, s. 43)

2.2 Optimointitehtävän luokittelu

Tähän alu
tus

1. Rajoitetuksi tai ei-rajoitetuksi
2. Staattiseksi tai dynaamiseksi

3. Kohdefunktion tai rajoite-ehtojen matemaattisen muodon perusteella
4. Säätöongelmaksi
5. Diskreetiksi tai jatkuvaksi tehtäväksi
6. Deterministiseksi tai stokastiseksi tehtäväksi
7. Kohdefunktion separoituvuuden perusteella
8. Kohdefunktioiden määrän perusteella

(Rao 1999)

Rajoitefunktioiden perusteella tehtävä voidaan luokitella joko rajoitetuksi- tai ei-rajoitetuksi tehtäväksi. Mikäli tehtävällä on yksikin rajoitefunktio, on kyseessä rajoitettu optimointitehtävä. Luokittelua voidaan tarkentaa edelleen osittain rajoitetuksi tai täysin suljetuksi systeemiksi. Suljetulla systeemillä tarkoitetaan tilannetta, jossa rajoitefunktiot muodostavat äärellisen kokoisen käyvän joukon.

Suunnittelumuuttujien perusteella tehtävä voidaan jakaa staattiseksi tai dynaamiseksi tehtäväksi. Staattisessa tai parametrisessa tehtävässä kohdefunktio on määritelty suunnittelumuuttujien suhteessa ja tehtävänä on ratkaista suunnittelumuuttujat. Kaavan (1) määrittelyssä kyseessä on staattinen optimointitehtävä, jossa siis etsitään suunnittelumuuttujille arvo siten, että se minimoi kohdefunktion. Dynaamisessa tehtävässä kohdefunktio puolestaan muodostuu funktioista, jotka on määritelty jonkun tietyn parametrin suhteen, kuten esimerkiksi seuraavasti.

$$\text{Etsi } \mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix} \text{ joka minimoi } f[\mathbf{x}(t)]. \tag{4}$$

Dynaamisessa tehtävässä etsitään siis kohdefunktioon sijoitettavien suunnittelumuuttujien sijasta funktiot, jotka esitetään jonkin parametrin suhteen. (Rao 1999, s. 15)

Optimointitehtävä luokitellaan myös kohdefunktion tai rajoite-ehtojen matemaattisen muodon perusteella. Tämä luokittelutapa on erityisen kriittinen optimointitehtävän ratkaisun kannalta, sillä monet optimointialgoritmit toimivat vain tietyntyyppisille optimointitehtäville juurikin kohdefunktioiden tai rajoite-ehtojen matemaattisen muodon mukaan. Yksi yleisin optimointitehtävän muoto on epälineaarinen ongelma (nonlinear programming problem, NLP). Optimointitehtävä on epälineaarinen mikäli sen kohdefunktio tai yksikin rajoitefunktioista on muodoltaan epälineaarinen. Optimoinnissa muodostuvat ongelmat ovat hyvin usein muodoltaan epälineaarisia ja matematiikan osa-aluetta, joka tutkii epälineaaristen optimointiongelmien ratkaisua, kutsutaan epälineaariseksi matemaattiseksi ohjelmoinniksi (nonlinear programming). Muita optimoinnin tehtävätyyppejä ovat esimerkiksi geometrinen ja kvadraattinen ongelma. (Rao 1999, s. 19)

Säätöongelmassa tai säätöoptimointitehtävässä (optimal control) on kyse tehtävästä, joka jakautuu useampiin osioihin tai sekvensseihin . Jokainen sekvenssi kehittyy edellisestään määritetyllä tavalla. Tehtävän määrittelyyn käytetään suunnittelumuuttujien lisäksi tilamuuttujia (state variables). Säätöoptimointitehtävässä suunnittelumuuttujat määrittävät systeemin kussakin sekvenssissä sekä tavan, jolla systeemi siirtyy seuraavaan sekvenssiin. Tilamuuttujat puolestaan määrittävät kussakin sekvenssissä systeemin tilan, eli tutkittavan ongelman käyttäytymisen kussakin sekvenssissä. Säätöongelmassa tehtävänä on löytää suunnittelu- tai tilamuuttujille sellaiset arvot kussakin eri sekvenssissä, että kohdefunktioiden summa eri sekvensseissä saadaan minimoitua rajoite-ehdot huomoiden. (Rao 1999, s. 19) Tämänkaltaiset tehtävät ovat tavallisia sellaisissa teknisissä sovelluksissa, joiden tila muuttuu jatkuvasti ja tilan ylläpitoon vaaditaan resursseja. Yksi yleinen säätöoptimointitehtäviä soveltava tekniikan ala on säätötekniikka.

tarkista oikea suomenkielinen termi !

tarkista termin oikeellisuus

Suunnittelumuuttujien saadessa vain diskreettejä arvoja, käytetään optimointitehtävästä nimitystä diskreetti tai ei-jatkuva tehtävä. Tämän kaltainen tehtävä voidaan yleistää kokonaislukuoptimoinniksi (integer programming problem). Tehtävän vastakohta on jatkuva tehtävä, jossa siis sallitaan kaikille suunnittelumuuttujille reaalilukuarvo (real-valued programming problem). (Rao 1999, s. 28) Insinööritieteissä suunnittelumuuttujat valitaan yleensä ennalta määritellystä joukosta käytössä olevien resurssien mukaan, eli käsiteltävät optimointitehtävät ovat usein diskreettejä.

Suunnittelumuuttujat tai kohdefunktion parametrit voivat saada määriteltyjen eli determinististen arvojen sijasta todennäköisyyteen perustuvia arvoja. Tällöin optimointitehtävä on stokastinen eli siinä käsitellään determinististen muuttujien sijasta satunnaismuuttujia. (Rao 1999, s. 29)

tähän lisä

2.3 Rakenteiden optimointi

3 TERÄSHALLIN JÄYKISTÄMINEN

3.1 Puristetun sauvan stabiliteetti

Puristetun sauvan stabiliteetti perustuu Eulerin nurjahdukseen, jossa ideaalisuoraa homogeenisesta materiaalista koostuvaa hoikkaa pilaria kuormitetaan keskeisesti. Voimaa, joka aiheuttaa pilarin nurjahduksen kutsutaan nurjahduskuormaksi tai kriittiseksi voimaksi ja se määritellään kaavalla

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}, \tag{5}$$

missä E on materiaalin kimmokerroin, I on poikkileikkauksen neliömomentti tarkasteltavan akselin ympäri ja L on pilarin kyseeseen tulevaa nurjahdusmuotoa nurjahduspituus.

Standardin (**en1993**)

3.2 Ristikon yläpaarteen tuenta

Teräsristikon puristettu yläpaarre on tuettava ristikkon tasoon nähden poikittaisessa suunnassa tukirakenteella, joka on toisesta päästään kiinnittetty sivusiirtymättömään rakenteeseen. Nämä sivuttaiset tuet kuuluvat osana katon jäykistysjärjestelmää.

VIITTEET

Arora, J. S. (2004). Introduction to optimum design. 2. painos. ISBN: 0-12-064155-0.

Rao, S. S. (1999). Engineering optimization : theory and practice. 4. painos. ISBN: 978-0-470-18352-6.