TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

JUHO VASTAPUU

TERÄSRAKENTEISEN HALLIN PITUUSSUUNTAISTEN JÄYKISTERAKENTEIDEN OPTIMOINTI

Diplomityö

TkT Kristo Mela lähetetty
tarkastukseen 6.6.2016.

TIIVISTELMÄ

JUHO VASTAPUU: Teräsrakenteisen hallin pituussuuntaisen jäykistysjärjestelmän optimointi
Tampereen teknillinen yliopisto
Diplomityö, x sivua, x liitesivua
Joulukuu 2018
Rakennustekniikan diplomi-insinöörin tutkinto-ohjelma
Pääaine: Rakennesuunnittelu
Tarkastaja: TkT Kristo Mela

Avainsanat:

ALKUSANAT

SISÄLLYSLUETTELO

1 JOHDANTO

1.1 Tutkimuksen tausta

1.2 Työn tavoitteet

1.3 Työn rajaukset

2 OPTIMOINTI

2.1 Optimointitehtävän matemaattinen määrittely

Matemaattisella optimoinnilla tarkoitetaan prosessia, jolla etsitään systemaattisesti asetetulle funktiolle paras mahdollinen arvo siten, että sille asetetut reunaehdot toteutuvat. Asettamalla optimoitava kohde sekä halutut rajoite-ehdot matemaattiseen muotoon, voidaan optimoimalla löytää matemaattisin keinoin paras käypä ratkaisu. Käyvällä ratkaisulla tarkoitetaan ratkaisua, joka kuuluu annettujen rajoite-ehtojen joukkoon.

Matemaattisesti optimoinnissa on tavoitteena etsiä funktiolle käyvästä joukosta minimi- tai maksimiarvo. Optimointitekniikoita ja algoritmeja on kehitetty lukuisia ja kukin niistä soveltuu käytettäväksi eri tavalla eri optimointitehtäviin. Optimointi ja erilaisten optimoitimenetelmien tutkiminen on yksi matemaattisen operaatiotutkimuksen osa-alueista. Optimoinnista voidaan joissain yhteyksissä käyttää myös nimitystä matemaattinen ohjelmointi (mathematical programming), jolla viitataan matemaattisten algoritmien kehittämiseen ja ohjelmoimista optimointitarkoituksiin. (Rao 1999, s. 1)

Optimointitehtävä kirjoitetaan matemaattisesti seuraavanlaisessa muodossa.

$$\text{Etsi } \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \text{ joka } \min_{x_1 \in S} f(\mathbf{x}), \text{ siten että} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} g_i(\mathbf{x}) &\leq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ h_j(\mathbf{x}) &= 0, \quad j = 1, 2, \ldots, p \end{aligned} \tag{2}$$

missä **x** on vektori, joka sisältää n-kappaletta suunnittelumuuttujia, f(**x**) on tavoitefunktio, $g_i(\mathbf{x})$ ja $h_j(\mathbf{x})$ ovat rajoite-ehtoja ja S on tehtävän toteuttavien suunnittelumuuttujien muodostama joukko. Rajoite-ehdot voivat olla joko epäyhtälö- tai yhtälömuotoisesti ilmoitettuja. Suunnittelumuuttujien lukumäärä (n) sekä rajoite-ehtojen lukumäärä (m ja/tai p) eivät ole riippuvaisia toisistaan. Tällaista optimointitehtävää kutsutaan rajoitetuksi optimointiongelmaksi. Optimointiongelman ei kuitenkaan tarvitse olla rajoitettu, vaan se voidaan ilmoittaa myös rajoittamattomana. Kaavassa (2) on esitetty optimointitehtävän standardimuotoinen asettelu (standard design optimization model). (Rao 1999, s. 6)

Vektori **x** sisältää optimointitehtävän kaikki suunnittelumuuttujat (design variables). Muuttamalla jonkin suunnittelumuuttujan x_i arvoa, muuttuu myös tavoitefunktion f(**x**) arvo. Suunnittelumuuttujista voidaan käyttää myös nimitystä optimointimuuttujat tai vapaat muuttujat, eli niiden arvoja voidaan muutella vapaasti kun haetaan tavoitefunktiolle arvoa. Toisistaan riippumattomien eli itsenäisten suunnittelumuuttujien lukumäärä on optimointiongelman vapausasteluku (design degree of freedom). Yleisesti ottaen suunnittelumuuttujien tulee olla toisistaan riippumattomia, mutta joissain tapauksissa niiden määrä voi olla ongelman vapausastelukua suurempi. Tämä on perusteltua esimerkiksi silloin, kun kohdefunktion määrittely pelkillä itsenäisillä suunnittelumuuttujilla olisi hankalaa. Jokaiselle suunnittelumuuttujalle täytyy myös pystyä asettamaan jokin numeerinen lähtöarvo, jotta optimointitehtävä pystytään suorittamaan.

Kohde- tai tavoitefunktio f(**x**) (objective function) on optimointitehtävän matemaattinen muoto ilmoitettuna suunnittelumuuttujavektorin **x** funktiona. Optimointitehtävän tavoitteena on joko minimoida tai maksimoida kohdefunktion arvo. Mikäli optimointitehtävässä on useampi kuin yksi kohdefunktio, käytetään tehtävästä nimitystä monitavoiteoptimointi (multiobjective design optimization). Tällöin kohdefunktio ilmaistaan matemaattisesti kohdefunktioiden joukkona

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) & f_2(\mathbf{x}) & \cdots & f_p(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \tag{3}$$

jossa jokainen kohdefunktio koostuu kuitenkin samasta suunnittelumuuttujavektorista **x**.

Optimoitavalle kohteelle asetettavat rajoite-ehdot esitetään rajoitefunktioina $g_i(\mathbf{x})$ ja $h_j(\mathbf{x})$. Optimointialgoritmi ratkaisee optimointitehtävän siten, että kohdefunktion arvo toteuttaa rajoite-ehdot. Rajoite-ehtojen muodostamaa joukkoa kutsutaan täten optimointiongelman käyväksi joukoksi (feasible region). Käypää joukkoa esittää kaavassa (1) osoitettu joukko S, joka määritellään

$$S = \{\mathbf{x} | g_i(\mathbf{x}) \leq 0; h_j(\mathbf{x}) = 0; i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, p\} \tag{4}$$

Mitä tahansa käyvässä joukossa S olevaa kohdefunktion arvoa kutsutaan käyväksi ratkaisuksi (feasible design) huolimatta siitä onko kyseessä optimiratkaisu. Kaksiuloitteisessa tapauksessa käypää joukkoa voidaan havainnollistaa piirtämällä rajoitefunktioiden käyrät koordinaatistoon. Käypä joukko muodostuu näiden käyrien rajoittamana alueena. Käyvän joukon negaatiota kutsutaan ei-käyväksi joukoksi (unfeasible region). Sekä tavoitefunktion f($\mathbf{x}$), että rajoite-ehtojen $g_i(\mathbf{x})$ ja $h_j(\mathbf{x})$ on oltava toisitaan joko implisiittisesti tai eksplisiittisesti riippuvia. Mikäli riippuvuutta funktioiden välillä ei ole, ei optimointitehtävää voi muodostaa eikä varsinaista optimointiongelmaa voi edes osoittaa. (Arora 2004, s. 43)

Kuten optimointitehtävän määrittelevä kaava (2) osoittaa, optimointiongelmalle voidaan asettaa rajoite-ehtoja sekä yhtälö- että epäyhtälömuodossa. Epäyhtälörajoitteita kutsutaan käypään joukkoon nähden toispuoleisiksi rajoite-ehdoiksi (unilateral constraints tai one-sided constraints). Epäyhtälörajoitteiden rajoittama käypä joukko on täten paljon laajempi kun verrataan yhtälörajoitteista käypää joukkoa. Esimerkiksi kakisuloitteisessa tapauksessa yhtälörajoite tarkoittaisi, että käypä ratkaisu löytyisi rajoitefunktion käyrältä. (Arora 2004, s. 16-18)

Yhtälömuotoisten rajoite-ehtojen määrän tulee olla maksimissaan suunnittelumuuttujien määrä, toisin sanottuna optimointitehtävän kaavan (2) tulee toteuttaa ehto

$$p \leq n. \tag{5}$$

Tapaus, jossa yhtälömuotoisia rajoite-ehtoja on annettuja suunnittelumuuttujia enemmän, on kyseessä ylimääritetty yhtälöryhmä (overdetermined system). Tällaisessa tapauksessa rajoite-ehtojen joukossa on ylimääräisiä eli redundatteja ehtoja, jotka toteuttavat suoraan jonkun muun rajoite-ehdon, eikä niiden ilmoittaminen täten ole tarpeellista. Triviaalitapauksessa jossa suunnittelumuuttujien määrä ja yhtälömuotoisten rajoite-ehtojen määrä on yhtäsuuri, löytyy tehtävälle ratkaisu analyyttisin keinoin eikä optimointi ole tarpeellista. Kaksiuloitteisessa tapauksessa tämä tarkoittaisi kahden käyrän leikkauspistettä.

Standardimuotoisessa optimointitehtävässä epäyhtälörajoitteet ilmoitetaan aina kaavan (2) osoittamassa muodossa, eli siten että rajoite-ehto on pienempi tai yhtäsuuri kuin nolla (≤ 0). Tästä huolimatta voidaan optimointitehtävässä käsitellä myös $\geq$ -tyyppisiä rajoite-ehtoja. Standardimuotoista tehtävää aseteltaessa nämä voidaan muuttaa $\leq$ -muotoon yksinkertaisesti kertomalla ehto luvulla -1. Epäyhtälömuotoisten rajoite-ehtojen määrää ei ole rajoitettu, toisin kuin yhtälömuotoiset rajoitteet kaavassa (5). Niiden määrää ei ole siis rajoitettu. (Arora 2004, s. 43)

2.2 Optimointitehtävän luokittelu

Optimointitehtävän luokittelu perustuu tehtävän asettelun eli kohdefunktioiden, rajoite-ehtojen ja suunnittelumuuttujien matemaattiseen muotoon. Eri tyyppisille optimoinitehtäville on sovellettava erilaisia ratkaisumenetelmiä. Tämän vuoksi tehtävän oikeanlainen ja mahdollisimman tarkka luokittelu on tärkeää, jotta tehtävälle löytyisi mahdollisimman tehokas ratkaisukeino. Singresu Rao esittää kirjassaan (Rao 1999) kahdeksan optimointitehtävien jaottelutapaa. Sen mukaan optimointitehtävä voidaan luokitella:

1. Rajoitetuksi tai ei-rajoitetuksi
2. Staattiseksi tai dynaamiseksi
3. Kohdefunktion tai rajoite-ehtojen matemaattisen muodon perusteella
4. Säätöongelmaksi
5. Diskreetiksi tai jatkuvaksi tehtäväksi
6. Deterministiseksi tai stokastiseksi tehtäväksi
7. Kohdefunktion separoituvuuden perusteella
8. Kohdefunktioiden määrän perusteella

Rajoitefunktioiden perusteella tehtävä voidaan luokitella joko rajoitetuksi- tai ei-rajoitetuksi tehtäväksi. Mikäli tehtävällä on yksikin rajoitefunktio, on kyseessä rajoitettu optimointitehtävä. Luokittelua voidaan tarkentaa edelleen osittain rajoitetuksi tai täysin suljetuksi systeemiksi. Suljetulla systeemillä tarkoitetaan tilannetta, jossa rajoitefunktiot muodostavat äärellisen kokoisen käyvän joukon.

Suunnittelumuuttujien perusteella tehtävä voidaan jakaa staattiseksi tai dynaamiseksi tehtäväksi. Staattisessa tai parametrisessa tehtävässä kohdefunktio on määritelty suunnittelumuuttujien suhteessa ja tehtävänä on ratkaista suunnittelumuuttujat. Kaavan (2) määrittelyssä kyseessä on staattinen optimointitehtävä, jossa siis etsitään suunnittelumuuttujille arvo siten, että se minimoi kohdefunktion. Dynaamisessa tehtävässä kohdefunktio puolestaan muodostuu funktioista, jotka on määritelty jonkun tietyn parametrin suhteen, kuten esimerkiksi seuraavasti.

$$\text{Etsi } \mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix} \text{ joka minimoi } f[\mathbf{x}(t)]. \tag{6}$$

Dynaamisessa tehtävässä etsitään siis kohdefunktioon sijoitettavien suunnittelumuuttujien sijasta funktiot, jotka esitetään jonkin parametrin suhteen. (Rao 1999, s. 15)

Optimointitehtävä luokitellaan myös kohdefunktion tai rajoite-ehtojen matemaattisen muodon perusteella. Tämä luokittelutapa on erityisen kriittinen optimointitehtävän ratkaisun kannalta, sillä monet optimointialgoritmit toimivat vain tietyntyyppisille optimointitehtäville juurikin kohdefunktioiden tai rajoite-ehtojen matemaattisen muodon mukaan. Yksi yleisin optimointitehtävän muoto on epälineaarinen ongelma (nonlinear programming problem, NLP). Optimointitehtävä on epälineaarinen mikäli sen kohdefunktio tai yksikin rajoitefunktioista on muodoltaan epälineaarinen. Optimoinnissa muodostuvat ongelmat ovat hyvin usein muodoltaan epälineaarisia ja matematiikan osa-aluetta, joka tutkii epälineaaristen optimointiongelmien ratkaisua, kutsutaan epälineaariseksi matemaattiseksi ohjelmoinniksi (nonlinear programming). Muita optimoinnin tehtävätyyppejä ovat esimerkiksi geometrinen ja kvadraattinen ongelma. (Rao 1999, s. 19)

Säätöongelmassa tai säätöoptimointitehtävässä (optimal control) on kyse tehtävästä, joka jakautuu useampiin osioihin tai sekvensseihin . Jokainen sekvenssi kehittyy edellisestään määritetyllä tavalla. Tehtävän määrittelyyn käytetään suunnittelumuuttujien lisäksi tilamuuttujia (state variables). Säätöoptimointitehtävässä suunnittelumuuttujat määrittävät systeemin kussakin sekvenssissä sekä tavan, jolla systeemi siirtyy seuraavaan sekvenssiin. Tilamuuttujat puolestaan määrittävät kussakin sekvenssissä systeemin tilan, eli tutkittavan ongelman käyttäytymisen kussakin sekvenssissä. Säätöongelmassa tehtävänä on löytää suunnittelu- tai tilamuuttujille sellaiset arvot kussakin eri sekvenssissä, että kohdefunktioiden summa eri sekvensseissä saadaan minimoitua rajoite-ehdot huomoiden. (Rao 1999, s. 19) Tämänkaltaiset tehtävät ovat tavallisia sellaisissa teknisissä sovelluksissa, joiden tila muuttuu jatkuvasti ja tilan ylläpitoon vaaditaan resursseja. Yksi yleinen säätöoptimointitehtäviä soveltava tekniikan ala on säätötekniikka.

tarkista oikea suo menkieli- nen term !

tarkista termin oi keellisuus

Suunnittelumuuttujien saadessa vain diskreettejä arvoja, käytetään optimointitehtävästä nimitystä diskreetti tai ei-jatkuva tehtävä. Tämän kaltainen tehtävä voidaan yleistää kokonaislukuoptimoinniksi (integer programming problem). Tehtävän vastakohta on jatkuva tehtävä, jossa siis sallitaan kaikille suunnittelumuuttujille reaalilukuarvo (real-valued programming problem). (Rao 1999, s. 28) Insinööritieteissä suunnittelumuuttujat valitaan yleensä ennalta määritellystä joukosta käytössä olevien resurssien mukaan, eli käsiteltävät optimointitehtävät ovat usein diskreettejä.

Suunnittelumuuttujat tai kohdefunktion parametrit voivat saada määriteltyjen eli determinististisien arvojen sijasta todennäköisyyteen perustuvia arvoja. Tällöin optimointitehtävä on stokastinen eli siinä käsitellään determinististen muuttujien sijasta satunnaismuuttujia. (Rao 1999, s. 29) tähän lis

Optimointitehtävä on separoituva, mikäli kohdefunktio ja rajoite-ehdot voidaan esittää yhden muuttujan funktioiden summana, eli muodossa

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \tag{7}$$

.

Mikäli optimointitehtävä sisältää yhden tavoitefunktion sijasta useamman funktion, on kyseessä monitavoiteoptimointi.

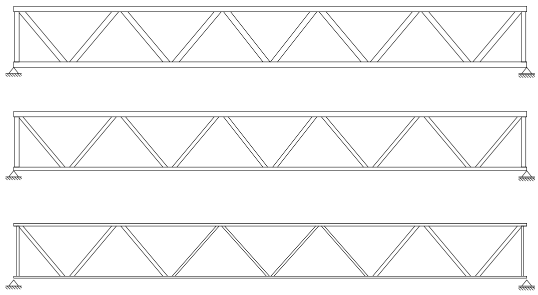
2.3 Rakenteiden optimointi

Rakenteiden optimoinnissa tavoitteena on löytää mahdollisimman taloudellinen, mutta vaatimukset täyttävä rakenne. Tavallisimpia optimointitehtäviä ovat esimerkiksi rakenteiden massan tai tuotantokustannusten minimointi. Kun suunniteltava rakenne asetetaan matemaattiseksi malliksi ja formuloidaan optimointitehtävän muotoon, voidaan rakenne optimoida.

Useista sauvoista koostuvan rakennekokonaisuuden optimointi jaotellaan tavallisesti mitoitusoptimointiin, muodon eli geometrian optimointiin ja topologian optimointiin. Rakennekokonaisuuden geometrialla tarkoitetaan sen sisältämien sauvojen välisten solmupisteiden sijaintia suhteessa toisiinsa. Topologialla puolestaan tarkoitetaan kokonaisuuden sisältämien solmupisteiden määrää. Esimerkiksi teräsristikon topologia sisältää tiedon paarresauvojen ja diagonaalien välisten solmupisteiden määrästä, mutta ei niiden sijainnista (Mela 2013, s. 2).

Mitoitusoptimoinnissa rakennekokonaisuudelle haetaan sellaiset rakenneosat, joilla asetetut reunaehdot täyttyvät kuitenkaan rakennekokonaisuuden geometriaa muuttamatta. Esimerkiksi teräsristikon mitoitusoptimointitehtävässä haetaan määrätyn muotoisen ristikon kullekkin paarre- ja diagonaalisauvalle mahdollisimman pieni poikkileikkaus. Mitoitusoptimointitehtävä on siis tyypiltään hyvin yksinkertainen eikä välttämättä yksinkertaisilla rakenteilla vaadi kovinkaan monimutkaista laskentaa.

Muodon tai geometrian optimoinnissa eri rakenneosien välisten liitoskohtien sijain-



Kuva 1. *Havainne-esimerkki teräsputkiristikon mitoitusoptimoinnista.*

tia muuttamalla pyritään hakemaan paras ratkaisu siten, että asetetut reunaehdot täyttyvät. Geometrian optimoinnissa rakenneosien välisten liitosten lukumäärä säilyy vakiona, ainoastaan niiden keskinäinen sijainti muuttuu. Tavallisesti tähän tehtävätyyppiin liitetään myös mitoitusoptimointi. Esimerkiksi eräsristikon geometrian optimointitehtävässä vaihdetaan diagonaalisauvojen liitoskohtien sijaintia paarteilla ja pyritään sillä hakemaan ristikolle optimirakenne.

Topologian optimoinnissa rakennekokonaisuudelle haetaan optimitopologia siten, että asetetut reunaehdot täyttyvät. Koska topologia käsitteenä kuvaa ainoastaan rakennekokonaisuuden sauvojen liittymistä toisiinsa sekä kokonaisuudessa olevien liitosten määrää, sisältää topologian optimointi tavallisesti myös geometrian ja mitoituksen optimoinnin. Topologian optimoinnissa haetaan siis esimerkiksi teräsristikon tapauksessa optimein sauvajärjestely muuttamalla sekä sauvojen ja liitosten määrää että liitosten välistä keskinäistä sijaintia.

3 TERÄSHALLIN JÄYKISTÄMINEN

3.1 Jäykisteen jäykkyyden ja lujuuden välinen yhteys

Tähän vielä tekstiä yleisesti; jäykistäminen on 1) jäykistämistä ulkoisia vaakakuormia vastaan ja 2) jäykistämistä kantavien rakenteiden stabiliteetin säilyttämistä varten. yms yms. Löytyy Winterin artikkelista.

TÄMÄ KESKEN

Puristetun sauvan stabiliteetti perustuu Eulerin nurjahdukseen, jossa ideaalisuoraa homogeenisesta materiaalista koostuvaa hoikkaa sauvaa kuormitetaan keskeisesti. Kuorma, joka saa aikaan sauvan stabiliteetin menetyksen kutsutaan kriittiseksi kuormaksi tai nurjahdusvoimaksi ja se määritetään Eulerin kaavalla

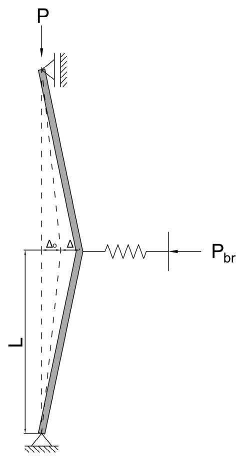
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}, \tag{8}$$

missä E on materiaalin kimmokerroin, I on poikkileikkauksen neliömomentti tarkasteltavan akselin ympäri ja L on kyseistä nurjahdusmuotoa vastaava nurjahduspituus. Kaavan (8) mukaan pienentämällä sauvan nurjahduspituutta L kasvaa sauvan kriittinen kuorma eksponentiaalisesti. Nurjahduspituuden pienentäminen voidaan toteuttaa lisäämällä sauvan poikittaisten tukien määrää. Tätä toimenpidettä kutsutaan jäykistämiseksi. Jäykistämisellä pyritään kasvattamaan sauvan kuormankantokykyä parantamalla sen stabiliteettia. Yksinkertaista puristetun sauvan ja jäykisteen rakennetta on kuvattu kuvassa (2), missä nivelellisesti tuettua kuormalla P puristettua sauvaa tuetaan vapaasta päästään jousimaisella jäykisterakenteella. Sauvalla on alkuvinous Δ_0 sekä jäykistesiteen puristumasta aiheutuva siirtymä Δ. Jäykistesiteen puristuma aiheuttaa jäykisteeseen aksiaalisen puristusvoiman P_{br}.

Jäykistävä rakenne tukee puristettua sauvaa siten, että nurjahdus pääsee tapahtumaan ainoastaan jäykistepisteiden välillä. Toimiakseen jäykisteellä tulee olla riittävä määrä aksiaalista jäykkyyttä sekä jäykisteen poikkileikkauksella lujuutta (Winter 1958). Kun ideaalisuoraa sauvaa kuormitetaan kaavan (8) mukaisella kriittisellä kuormalla P_{cr}, on pienin toimivan jäykisteen aksiaalisen jäykkyyden arvo kaavan

$$\beta_i = \frac{\gamma_i P_{cr}}{L}, \tag{9}$$

mukainen, L on sauvaa tukipisteiden välinen etäisyys ja γ_i on jäykistävien siteiden määrästä riippuva kerroin (Timoshenko & Gere 1963, s. 76). Jäykistesiteen jäykkyys



Kuva 2. *Jäykistesauvan toiminta puristetun sauvan tuentana.*

β_i on siis pienin jäykkyys, jolla ideaalisuoran puristetun sauvan nurjahdus tapahtuu lokaalisti tukipisteiden välillä. P_{cr} määritellään kaavan (8) mukaisesti käyttämällä nurjahduspituutena jäykisteiden välistä etäisyyttä.

Kertoimen γ_i avulla voidaan määrittää jäykisteiden ideaalijäykkyys, kun puristettua sauvaa tuetaan useammalla jäykisteellä ja kun jäykisteiden välinen keskinäinen etäisyys on vakio. Jäykkyyskertoimet ja niitä vastaavat rakenteet on esitetty taulukossa (1).

Taulukko 1. *Ideaalisuoraa sauvaa jäykistävien rakenteiden vaaditut jäykkyyden kertoimet.*

Siteiden määrä	1	2	3	4	5
Kerroin γ_i	2,000	3,000	3,413	3,623	3,731

Taulukosta huomataan, että siteiden määrän kasvaessa kasvaa myös vaadittu ideaalijäykkyyden arvo. Tämä on ilmeistä, sillä näin myös sauvaa voidaan kuormittaa suuremmalla puristusvoimalla sen nurjahduskestävyyden ollessa suurempi. Stephen Timoshenko esitti nämä kertoimet (Timoshenko & Gere 1963) johtamalla ne differentiaalilaskennan kautta jatkuvalle palkille joka tuettu jousituilla.

Myös George Winter päätyi samoihin kertoimiin (Winter 1958) yksinkertaisemmalla tavalla määrittämällä tasapainoehdot sauvan ja jäykisteiden välisten liittymispisteiden ympäri ja ratkaisemalla kertoimet sauvan ominaismuotojen kautta. Winterin teoria perustui otaksumaan, jossa liitospisteessä on fiktiivinen nivel, jolloin sauvaan ei kohdistu lainkaan taivutusmomenttia. Winterin esittämä tasapainomalli ottaa huomioon myös sauvan vinouden Δ_0. Kuvan (2) rakennemallista voidaan vastaavalla tavalla muodostaa tasapainoehto

$$P(\Delta_0 + \Delta) = \frac{P_{br}L}{2}, \tag{10}$$

missä P on sauvaan kohdistuva aksiaalinen voima, Δ_0 sauvan alkuvinous, Δ jäykisteen puristuma ja P_{br} on jäykisteen sauvaan kohdistama tukireaktio. Kun otaksutaan jäykisteessä vaikuttavan tukreaktion suuruisen aksiaalisen voiman, voidaan jousiteorian nojalla määrittää yhteys jäykkyyden ja puristuman välillä kaavalla

$$P_{br} = \beta\Delta, \tag{11}$$

missä β on jäykistesauvan aksiaalinen jäykkyys. Kun sijoitetaan tämä rakenteen tasapainoehdon kaavaan (10) saadaan aksiaalisen jäykkyyden arvoksi

$$\beta_{req} = \frac{2P}{L}(\frac{\Delta_0}{\Delta} + 1), \tag{12}$$

missä β_{req} on siis jäykisteenä toimivan rakenteen vaadittu aksiaalinen jäykkyys kun huomioidaan alkusiirtymä Δ_0. Ideaalisuoralla sauvalla $(Delta_0 = 0)$ kaava saa saman arvon kuin aikaisemmin esitetty ideaalijäykkyyden arvo (9), sillä taulukon (1) kyseisen rakenteen jäykkyyskerroin $\gamma_i = 2{,}0$. Voidaan siis kirjoittaa, että

$$\beta_{req} = \beta_i(\frac{\Delta_0}{\Delta} + 1). \tag{13}$$

3.2 Puristetun sauvan stabiliteetti EN 1993 mukaisesti

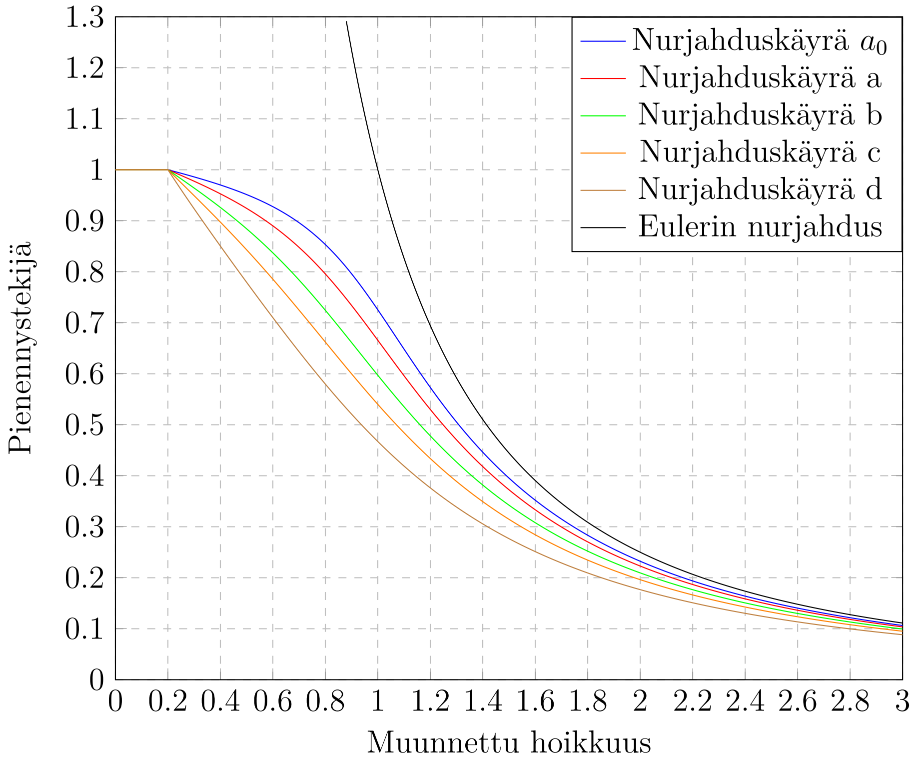
Puristetun sauvan todellisen aksiaalisen puristuskapasiteetin määrittämiseksi on Eulerin teoreettisen nurjahduskapasiteetin lisäksi huomioitava epätarkkuustekijät, joita ovat esimerkiksi poikkeama ideaalisuorasta rakenteesta, materiaalin epälineaarisuus tai materiaalin muokkaamisen seurauksena syntyneet jäännösjännitykset. Näiden tekijöiden huomioiminen vaatii poikkeuksetta epälineaarista analyysia ja niiden laskentaan on historian aikana kehitetty laskentakaavoja, jotka perustuvat niin kokeelliseen tutkimukseen, kuin erilaisiin lujuusopin teorioihin. (Ziemian 2010, s. 27) Teräsrakenteiden suunnittelustandardi (SFS-EN 1993-1-1)esittää näiden poikkeamien huomioon ottamiseksi viisi (5) erilaista epätarkkuustekijää rakenteen valmistustavasta ja profiilin muodosta riippuen. Nämä epätarkkuustekijät on esitetty taulukossa (2).

viittaus kuntoon!

Taulukko 2. *Nurjahduskäyrien epätarkkuustekijät standardin (SFS-EN 1993-1-1) mukaan.*

Nurjahduskäyrä	a_0	a	b	c	d
Epätarkkuustekijä α	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76

Epätarkkuustekijöiden perusteella standardiin on määritetty ja kuvaajin esitetty nurjahduskäyrät, jotka esittävät puristuskapasiteetin laskentaa varten tarvittavan pienennystekijän χ rakenteen hoikkuuden λ funktiona. Kutakin epätarkkuustekijää vastaa oma nurjahduskäyränsä, ja ne on esitetty kuvaajassa (3).



Kuva 3. *SFS-EN 1993-1-1 mukaiset nurjahduskäyrät verrattuna Eulerin nurjahdukseen.*

symbolit käyrän la beleihin

Standardin mukaan rakenteen nurjahduskapasiteetin $N_{b,Rd}$ ja plastisen puristuskapasiteetin $N_{pl,Rd}$ suhdetta kuvaa nurjahduksen pienennystekijä Φ, joka määritetään kaavalla

$$\chi = \frac{N_{b,Rd}}{N_{pl,Rd}} = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \lambda^2}}, \tag{14}$$

missä λ on poikkileikkauksen muunnettu hoikkuus ja χ epätarkkuuden huomioon ottava kerroin. Muunnettu hoikkuus määritetään kaavalla

$$\lambda = \sqrt{\frac{Af_y}{N_{cr}}}, \tag{15}$$

missä N_{cr} Eulerin nurjahdusvoima (kaava 8), A on rakenteen poikkileikkauksen pinta-ala ja f_y materiaalin myötölujuus. Mikäli rakenteen muunnettu hoikkuus täyttää ehdon $\lambda \leq 0,2$ ei nurjahdusta tarvitse standardin mukaan ottaa huomioon (kohta 6.3.1.2(4)). Edelleen kaavan (14) termi Φ määritellään kaavalla

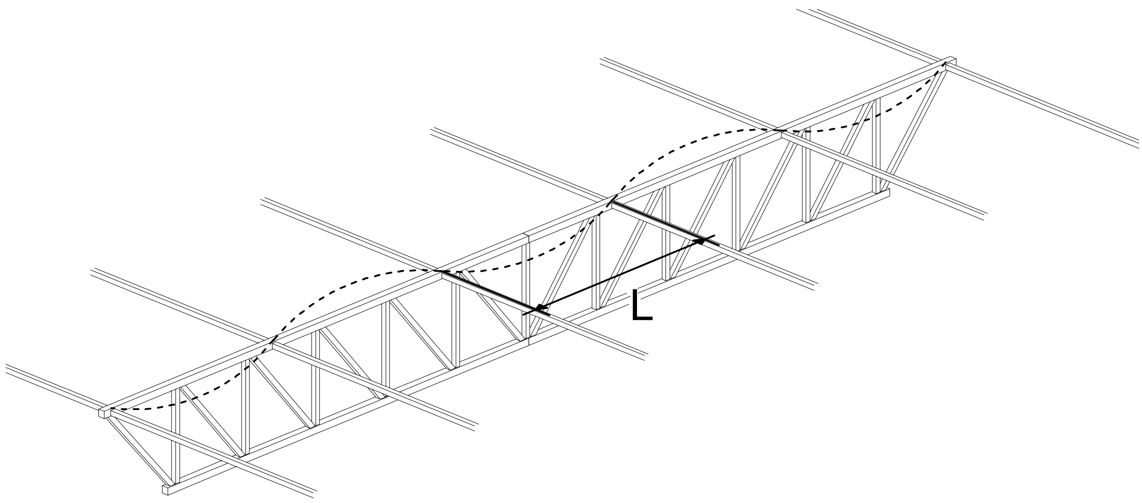
$$\Phi = \frac{1 + \alpha(\lambda - 0.2) + \lambda^2}{2}, \tag{16}$$

missä α on aiemmin mainuttu rakenteen muodosta ja valmistustavasta riippuva epätarkkuustekijä.

Tässä diplomityössä käsiteltävät profiilit rajautuvat lujuusluokan S355 -rakenneputkiin, joiden nurjahduskäyrä on kylmämuovattuna c ($\alpha = 0,49$) ja kuumavalssattuna a ($\alpha = 0,21$).

3.3 Ristikon yläpaarteen tuenta hallin pituussuunnassa

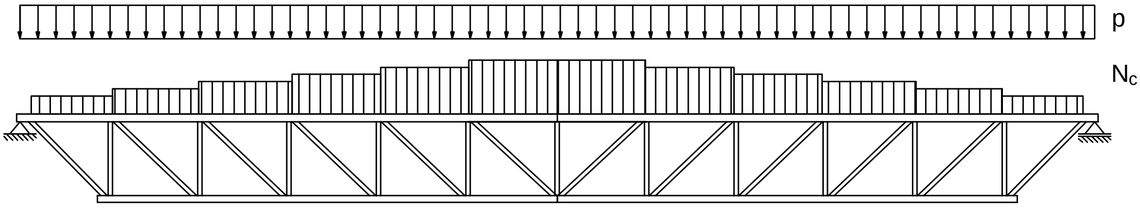
Teräsristikon puristettu yläpaarre on tuettava ristikon tasoon nähden poikittaisessa suunnassa rakennuksen pituussuuntaisin tukirakentein. Tukirakenteet on kuvattu ristikon tuentaa esittävässä kuvassa (4). Näistä tukirakenteista käytetään nimitystä kattositeet tai ristikon (nurjahdus)siteet ja ne kuuluvat osana rakennuksen jäykistysjärjestelmää. (Kaitila 2010)



Kuva 4. *Putkiristikon puristetun yläpaarteen nurjahdusmuoto ja nurjahdustuennat.*

Ristikon tuenta ja nurjahdustukien väliset etäisyydet L suunnitellaan siten, että nurjahduksen kaavan (16) esittämä yläpaarteen nurjahduskapasiteetti $N_{b,Rd}$ ei alita paarteeseen ristikon pystykuormista aiheutuvaa aksiaalista puristusvoimaa. Puristusvoiman ylittäessä yläpaarteen nurjahduskapasiteetin, on yläpaarteeseen muodostuvan nurjahtavan sauvan nurjahdusmuoto kuvan (4) mukainen. Suunnittelustandardin (SFS-EN 1993-1-1 liite BB) mukaan kaavassa (8) tarvittavaksi nurjahduspituudeksi voidaan putkiristikon paarteelle asettaa 0,9 kertaa ristikon poikittaistukien väli.

Ristikko kannattelee pystykuormaa palkin tavoin. Ristikon paarteet toimivat taivutuksessa kuten palkin laipat vastaanottaen taivutusmomentista aiheutuvan veto- ja puristusrasituksen. Uumasauvat välittävät leikkausrasituksia palkin uuman tavoin. Koska ristikko ei kuitenkaan ole jatkuva rakenne, paarteille kohdistuvan normaalivoiman jakauma on jatkuvan jakauman sijasta portaittainen. Tätä porrastusta on havainnollistettu kuvassa (5), jossa on esitettynä ristikon yläpaarteen puristusvoiman porrastuksen periaate. Normaalivoima puristetulla yläpaarteella muttuu aina vedetyn uumasauvan kohdalla, kuten kuva esittää.



Kuva 5. *Periaatekuva normaalivoiman N_c portaittaisesta jakautumisesta ristikon yläpaarteelle pystykuormasta p Pratt -tyypin ristikossa.*

VIITTEET

Arora, J. S. (2004). Introduction to optimum design. 2. painos. ISBN: 0-12-064155-0.

Kaitila, O. (2010). Teräsrakenteiden suunnittelu ja mitoitus : Eurocode 3 -oppikirja. Teräsrakenneyhdistys. ISBN: 7978-952-9683-50-5.

Mela, K. (2013). Mixed Variable Formulations for Truss Topology Optimization. Väitöskirja. Tampereen teknillinen yliopisto.

Rao, S. S. (1999). Engineering optimization : theory and practice. 4. painos. ISBN: 978-0-470-18352-6.

SFS-EN 1993-1-1 (2010). Eurocode 3: Teräsrakenteiden suunnittelu, Osa 1-1: Yleiset säännöt ja rakennuksia koskevat säännöt. Helsinki: Suomen standardoimisliitto SFS.

Timoshenko, S. P. & Gere, J. M. (1963). Theory of elastic stability. 17. painos. ISBN: 0-07-Y85821-7.

Winter, G. (1958). Lateral bracing of columns and beams. American society of civil engineers.

Ziemian, R. D. (2010). Stability design criteria for metal structures. 6. painos. ISBN: 978-0-470-08525-7.