



TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

**JUHO VASTAPUU**  
**TERÄSRAKENTEISEN HALLIN PITUUSSUUNTAISTEN JÄYKIS-**  
**TERAKENTEIDEN OPTIMOINTI**

Diplomityö

TkT Kristo Mela lähetetty  
tarkastukseen 6.6.2016.

# TIIVISTELMÄ

**JUHO VASTAPUU:** Teräsrakenteisen hallin pituussuuntaisen jäykistysjärjestelmän optimointi

Tampereen teknillinen yliopisto

Diplomityö, x sivua, x liitesivua

Joulukuu 2018

Rakennustekniikan diplomi-insinöörin tutkinto-ohjelma

Pääaine: Rakennesuunnittelu

Tarkastaja: TkT Kristo Mela

Avainsanat:

# ALKUSANAT

## SISÄLLYSLUETTELO

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Johdanto</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1      | Tutkimuksen tausta . . . . .                                      | 1         |
| 1.2      | Työn tavoitteet . . . . .   | 1         |
| 1.3      | Työn rajaukset . . . . .  | 1         |
| <b>2</b> | <b>Optimointi</b>   | <b>1</b>  |
| 2.1      | Optimointitehtävän matemaattinen määrittely . . . . .             | 1         |
| 2.2      | Optimointitehtävän luokittelu . . . . .                           | 4         |
| 2.3      | Teräsrakenteen massan optimointi . . . . .                        | 6         |
| 2.4      | Teräsrakenteen kustannusten muodostuminen ja optimointi . . . . . | 7         |
| <b>3</b> | <b>Teräshallin jäykistäminen</b>                                  | <b>12</b> |
| 3.1      | Jäykistäminen yleisesti . . . . .                                 | 12        |
| 3.2      | Jäykisteen jäykkyyden ja lujuuden välinen yhteys . . . . .        | 12        |
| 3.3      | Puristetun sauvan stabiilitetti EN 1993 mukaisesti . . . . .      | 15        |
| 3.4      | Ristikön yläpaarten tuenta hallin pituussuunnassa . . . . .       | 17        |
|          | <b>Viitteet</b>   | <b>19</b> |

# 1 JOHDANTO

Tähän voisi ottaa esim kirjasta Structures (Schodek) rakenteiden mitoituksesta yleensä: serviceability, efficiency, construction, costs ja other.

## 1.1 Tutkimuksen tausta

## 1.2 Työn tavoitteet

## 1.3 Työn rajaukset

# 2 OPTIMOINTI

## 2.1 Optimointitehtävän matemaattinen määrittely

Matemaattisella optimoinnilla tarkoitetaan prosessia, jolla etsitään systemaattisesti asetetulle funktiolle paras mahdollinen arvo siten, että sille asetetut reunaehdot toteutuvat. Asettamalla optimoitava kohde sekä halutut rajoite-ehdot matemaattiseen muotoon, voidaan optimoimalla löytää matemaattisin keinoin paras käypä ratkaisu. Käyvällä ratkaisulla tarkoitetaan ratkaisua, joka kuuluu annettujen rajoite-ehtojen joukkoon.

Matemaattisesti optimoinnissa on tavoitteena etsiä funktiolle käyvästä joukosta minimi- tai maksimiarvo. Optimointitekniikoita ja algoritmeja on kehitetty lukuisia ja kukin niistä soveltuu käytettäväksi eri tavalla eri optimointitehtäviin. Optimointi ja erilaisten optimoimismenetelmien tutkiminen on yksi matemaattisen operaatiotutkimuksen osa-alueista. Optimoinnista voidaan joissain yhteyksissä käyttää myös nimitystä matemaattinen ohjelmointi (mathematical programming), jolla viitataan matemaattisten algoritmien kehittämiseen ja ohjelmoimista optimointitarkoituksiin. (Rao 1999, s. 1)

Optimointitehtävä kirjoitetaan matemaattisesti seuraavanlaisessa muodossa.

$$\text{Etsi } \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \text{ joka } \min_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x}), \text{ siten että} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} g_i(\mathbf{x}) &\leq 0, & i &= 1, 2, \dots, m \\ h_j(\mathbf{x}) &= 0, & j &= 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (2)$$

missä  $\mathbf{x}$  on vektori, joka sisältää  $n$ -kappaletta suunnittelumuuttujia,  $f(\mathbf{x})$  on tavoitefunktio,  $g_i(\mathbf{x})$  ja  $h_j(\mathbf{x})$  ovat rajoite-ehtoja ja  $S$  on tehtävän toteuttavien suunnittelumuuttujien muodostama joukko. Rajoite-ehdot voivat olla joko epäyhtälö- tai yhtälömuotoisesti ilmoitettuja. Suunnittelumuuttujien lukumäärä ( $n$ ) sekä rajoite-ehdojen lukumäärä ( $m$  ja/tai  $p$ ) eivät ole riippuvaisia toisistaan. Tällaista optimointitehtävää kutsutaan rajoitetuksi optimointiongelmaksi. Optimointiongelman ei kuitenkaan tarvitse olla rajoitettu, vaan se voidaan ilmoittaa myös rajoittamattomana. Kaavassa (2) on esitetty optimointitehtävän standardimuotoinen asettelu (standard design optimization model). (Rao 1999, s. 6)

Vektori  $\mathbf{x}$  sisältää optimointitehtävän kaikki suunnittelumuuttujat (design variables). Muuttamalla jonkin suunnittelumuuttujan  $x_i$  arvoa, muuttuu myös tavoitefunktion  $f(\mathbf{x})$  arvo. Suunnittelumuuttujista voidaan käyttää myös nimitystä optimointimuuttujat tai vapaat muuttujat, eli niiden arvoja voidaan muuttaa vapaasti kun haetaan tavoitefunktiolle arvoa. Toisistaan riippumattomien eli itsenäisten suunnittelumuuttujien lukumäärä on optimointiongelman vapausasteluku (design degree of freedom). Yleisesti ottaen suunnittelumuuttujien tulee olla toisistaan riippumattomia, mutta joissain tapauksissa niiden määrä voi olla ongelman vapausastelukua suurempi. Tämä on perusteltua esimerkiksi silloin, kun kohdefunktion määrittely pelkillä itsenäisillä suunnittelumuuttujilla olisi hankalaa. Jokaiselle suunnittelumuuttujalle täytyy myös pystyä asettamaan jokin numeerinen lähtöarvo, jotta optimointitehtävä pystytään suorittamaan.

Kohde- tai tavoitefunktio  $f(\mathbf{x})$  (objective function) on optimointitehtävän matemaattinen muoto ilmoitettuna suunnittelumuuttujavektorin  $\mathbf{x}$  funktiona. Optimointitehtävän tavoitteena on joko minimoida tai maksimoida kohdefunktion arvo. Mikäli optimointitehtävässä on useampi kuin yksi kohdefunktio, käytetään tehtävästä nimitystä monitavoiteoptimointi (multiobjective design optimization). Tällöin kohdefunktio ilmaistaan matemaattisesti kohdefunktioiden joukkona

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}) \quad f_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad f_p(\mathbf{x})], \quad (3)$$

jossa jokainen kohdefunktio koostuu kuitenkin samasta suunnittelumuuttujavektorista  $\mathbf{x}$ .

Optimoitavalle kohteelle asetettavat rajoite-ehdot esitetään rajoitefunktioina  $g_i(\mathbf{x})$  ja  $h_j(\mathbf{x})$ . Optimointialgoritmi ratkaisee optimointitehtävän siten, että kohdefunktion arvo toteuttaa rajoite-ehdot. Rajoite-ehtojen muodostamaa joukkoa kutsutaan täten optimointiongelman käyväksi joukoksi (feasible region). Käypää joukkoa esittää kaavassa (1) osoitettu joukko  $S$ , joka määritellään

$$S = \{\mathbf{x} | g_i(\mathbf{x}) \leq 0; h_j(\mathbf{x}) = 0; i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, p\} \quad (4)$$

Mitä tahansa käyvässä joukossa  $S$  olevaa kohdefunktion arvoa kutsutaan käyväksi ratkaisuksi (feasible design) huolimatta siitä onko kyseessä optimiratkaisu. Kaksiuuloitteisessa tapauksessa käypää joukkoa voidaan havainnollistaa piirtämällä rajoitefunktioiden käyrät koordinaatistoon. Käypä joukko muodostuu näiden käyrien rajoittamana alueena. Käyvän joukon negaatiota kutsutaan ei-käyväksi joukoksi (unfeasible region). Sekä tavoitefunktion  $f(\mathbf{x})$ , että rajoite-ehtojen  $g_i(\mathbf{x})$  ja  $h_j(\mathbf{x})$  on oltava toisistaan joko implisiittisesti tai eksplisiittisesti riippuvia. Mikäli riippuvuutta funktioiden välillä ei ole, ei optimointitehtävää voi muodostaa eikä varsinaista optimointiongelmaa voi edes osoittaa. (Arora 2004, s. 43)

Kuten optimointitehtävän määrittelevä kaava (2) osoittaa, optimointiongelmalle voidaan asettaa rajoite-ehtoja sekä yhtälö- että epäyhtälömuodossa. Epäyhtälörajoitteita kutsutaan käypään joukkoon nähden toispuoleisiksi rajoite-ehdoiksi (unilateral constraints tai one-sided constraints). Epäyhtälörajoitteiden rajoittama käypä joukko on täten paljon laajempi kun verrataan yhtälörajoitteista käypää joukkoa. Esimerkiksi kakisuloitteisessa tapauksessa yhtälörajoite tarkoittaisi, että käypä ratkaisu löytyisi rajoitefunktion käyrältä. (Arora 2004, s. 16–18)

Yhtälömuotoisten rajoite-ehtojen määrän tulee olla maksimissaan suunnittelumuuttujien määrä, toisin sanottuna optimointitehtävän kaavan (2) tulee toteuttaa ehto

$$p \leq n. \quad (5)$$

Tapaus, jossa yhtälömuotoisia rajoite-ehtoja on annettuja suunnittelumuuttujia enemmän, on kyseessä ylimääritetty yhtälöryhmä (overdetermined system). Tällaisessa tapauksessa rajoite-ehtojen joukossa on ylimääräisiä eli redundanteja ehtoja, jotka toteuttavat suoraan jonkun muun rajoite-ehdon, eikä niiden ilmoittaminen täten ole tarpeellista. Triviaalitapauksessa jossa suunnittelumuuttujien määrä ja yhtälömuotoisten rajoite-ehtojen määrä on yhtäsuuri, löytyy tehtävälle ratkaisu analyttisin

keinoin eikä optimointi ole tarpeellista. Kaksiulotteisessa tapauksessa tämä tarkoittaisi kahden käyrän leikkauspistettä.

Standardimuotoisessa optimointitehtävässä epäyhtälörajoitteet ilmoitetaan aina kaavan (2) osoittamassa muodossa, eli siten että rajoite-ehto on pienempi tai yhtäsuuri kuin nolla ( $\leq 0$ ). Tästä huolimatta voidaan optimointitehtävässä käsitellä myös  $\geq$ -tyyppisiä rajoite-ehtoja. Standardimuotoista tehtävää aseteltaessa nämä voidaan muuttaa  $\leq$ -muotoon yksinkertaisesti kertomalla ehto luvulla -1. Epäyhtälömuotoisten rajoite-ehtojen määrää ei ole rajoitettu, toisin kuin yhtälömuotoiset rajoitteet kaavassa (5). Niiden määrää ei ole siis rajoitettu. (Arora 2004, s. 43)

## 2.2 Optimointitehtävän luokittelu

Optimointitehtävän luokittelu perustuu tehtävän asettelun eli kohdefunktioiden, rajoite-ehtojen ja suunnittelumuuttujien matemaattiseen muotoon. Eri tyyppisille optimointitehtäville on sovellettava erilaisia ratkaisumenetelmiä. Tämän vuoksi tehtävän oikeanlainen ja mahdollisimman tarkka luokittelu on tärkeää, jotta tehtävälle löytyisi mahdollisimman tehokas ratkaisukeino. Singresu Rao esittää kirjassaan (Rao 1999) kahdeksan optimointitehtävien jaottelutapaa. Sen mukaan optimointitehtävä voidaan luokitella:

1. Rajoitetuksi tai ei-rajoitetuksi
2. Staattiseksi tai dynaamiseksi
3. Kohdefunktion tai rajoite-ehtojen matemaattisen muodon perusteella
4. Säättöongelmaksi
5. Diskreetiksi tai jatkuvaksi tehtäväksi
6. Deterministiseksi tai stokastiseksi tehtäväksi
7. Kohdefunktion separoituvuuden perusteella
8. Kohdefunktioiden määrän perusteella

Rajoitefunktioiden perusteella tehtävä voidaan luokitella joko rajoitetuksi- tai ei-rajoitetuksi tehtäväksi. Mikäli tehtävällä on yksikin rajoitefunktio, on kyseessä rajoitettu optimointitehtävä. Luokittelua voidaan tarkentaa edelleen osittain rajoitetuksi tai täysin suljetuksi systeemiksi. Suljetulla systeemillä tarkoitetaan tilannetta, jossa rajoitefunktioit muodostavat äärellisen kokoisen käyvän joukon.

Suunnittelumuuttujien perusteella tehtävä voidaan jakaa staattiseksi tai dynaamiseksi tehtäväksi. Staattisessa tai parametrisessa tehtävässä kohdefunktio on määritelty suunnittelumuuttujien suhteessa ja tehtävänä on ratkaista suunnittelumuut-

tujat. Kaavan (2) määrittelyssä kyseessä on staattinen optimointitehtävä, jossa siis etsitään suunnittelumuuttujille arvo siten, että se minimoi kohdefunktion. Dynaamisessa tehtävässä kohdefunktio puolestaan muodostuu funktioista, jotka on määriteltä jonkun tietyn parametrin suhteen, kuten esimerkiksi seuraavasti.

$$\text{Etsi } \mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix} \text{ joka minimoi } f[\mathbf{x}(t)]. \quad (6)$$

Dynaamisessa tehtävässä etsitään siis kohdefunktioon sijoitettavien suunnittelumuuttujien sijasta funktiot, jotka esitetään jonkin parametrin suhteen. (Rao 1999, s. 15)

Optimointitehtävä luokitellaan myös kohdefunktion tai rajoite-ehtojen matemaattisen muodon perusteella. Tämä luokittelutapa on erityisen kriittinen optimointitehtävän ratkaisun kannalta, sillä monet optimointialgoritmit toimivat vain tietyn tyyppisille optimointitehtäville juurikin kohdefunktioiden tai rajoite-ehtojen matemaattisen muodon mukaan. Yksi yleisin optimointitehtävän muoto on epälineaarinen ongelma (nonlinear programming problem, NLP). Optimointitehtävä on epälineaarinen mikäli sen kohdefunktio tai yksikin rajoitefunktioista on muodoltaan epälineaarinen. Optimoinnissa muodostuvat ongelmat ovat hyvin usein muodoltaan epälineaarisia ja matematiikan osa-aluetta, joka tutkii epälineaaristen optimointiongelmien ratkaisua, kutsutaan epälineaariseksi matemaattiseksi ohjelmoinniksi (nonlinear programming). Muita optimoinnin tehtävätyyppejä ovat esimerkiksi geometrisen ja kvadraattinen ongelma. (Rao 1999, s. 19)

Säätöongelmassa tai säätöoptimointitehtävässä (optimal control) on kyse tehtävästä, joka jakautuu useampiin osioihin tai sekvensseihin . Jokainen sekvenssi kehittyy edellisestään määritetyllä tavalla. Tehtävän määrittelyyn käytetään suunnittelumuuttujien lisäksi tilamuuttujia (state variables). Säätöoptimointitehtävässä suunnittelumuuttujat määrittävät systeemin kussakin sekvenssissä sekä tavan, jolla systeemi siirtyy seuraavaan sekvenssiin. Tilamuuttujat puolestaan määrittävät kussakin sekvenssissä systeemin tilan, eli tutkittavan ongelman käyttäytymisen kussakin sekvenssissä. Säätöongelmassa tehtävänä on löytää suunnittelu- tai tilamuuttujille sellaiset arvot kussakin eri sekvenssissä, että kohdefunktioiden summa eri sekvensseissä saadaan minimoitua rajoite ehdot huomoiden. (Rao 1999, s. 19) Tämänkaltaiset tehtävät ovat tavallisia sellaisissa teknisissä sovelluksissa, joiden tila muuttuu jatkuvasti ja tilan ylläpitoon vaaditaan resursseja. Yksi yleinen säätöoptimointitehtäviä soveltava tekniikan ala on säätötekniikka.

Suunnittelumuuttujien saadessa vain diskreettejä arvoja, käytetään optimointitehtävästä nimitystä diskreetti tai ei-jatkuva tehtävä. Tämän kaltainen tehtävä voidaan

tarkista  
oikea suo  
menkieli-  
nen termi  
!

tarkista  
termin oi  
keellisuus



yleistää kokonaislukuoptimoinniksi (integer programming problem). Tehtävän vastakohta on jatkuva tehtävä, jossa siis sallitaan kaikille suunnittelumuuttujille reaalilukuarvo (real-valued programming problem). (Rao 1999, s. 28) Insinööritieteissä suunnittelumuuttujat valitaan yleensä ennalta määritellystä joukosta käytössä olevien resurssien mukaan, eli käsiteltävät optimointitehtävät ovat usein diskreettejä.

Suunnittelumuuttujat tai kohdefunktion parametrit voivat saada määriteltyjen eli deterministisien arvojen sijasta todennäköisyyteen perustuvia arvoja. Tällöin optimointitehtävä on stokastinen eli siinä käsitellään determinististen muuttujien sijasta satunnaismuuttujia. (Rao 1999, s. 29)

tähän lisä

Optimointitehtävä on separoituva, mikäli kohdefunktio ja rajoite-ehdot voidaan esittää yhden muuttujan funktioiden summana, eli muodossa

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \quad (7)$$

Mikäli optimointitehtävä sisältää yhden tavoitefunktion sijasta useamman funktion, on kyseessä monitavoiteoptimointi.

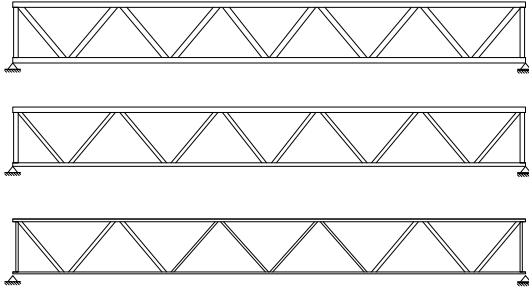
## 2.3 Teräsrakenteen massan optimointi

Rakenteiden optimoinnissa tavoitteena on löytää mahdollisimman taloudellinen, mutta vaatimukset täyttävä rakenne. Tavallisimpia optimointitehtäviä ovat esimerkiksi rakenteiden massan tai tuotantokustannusten minimointi. Kun suunniteltava rakenne asetetaan matemaattiseksi malliksi ja formuloidaan optimointitehtävän muotoon, voidaan rakenne optimoida.

Useista sauvoista koostuvan rakennekokonaisuuden optimointi jaotellaan tavallisesti mitoitusoptimointiin, muodon eli geometrian optimointiin ja topologian optimointiin. Rakennekokonaisuuden geometrialla tarkoitetaan sen sisältämien sauvojen välisten solmupisteiden sijaintia suhteessa toisiinsa. Topologialla puolestaan tarkoitetaan kokonaisuuden sisältämien solmupisteiden määrää. Esimerkiksi teräsristikon topologia sisältää tiedon parresauvojen ja diagonaalien välisten solmupisteiden määrästä, mutta ei niiden sijainnista (Mela 2013, s. 2).

Mitoitusoptimoinnissa rakennekokonaisuudelle haetaan sellaiset rakenneosat, joilla asetetut reunaehdot täyttyvät kuitenkin rakennekokonaisuuden geometriaa muuttamatta. Esimerkiksi teräsristikon mitoitusoptimointitehtävässä haetaan määrätyn muotoisen ristikon kullekin parre- ja diagonaalisauvalle mahdollisimman pieni

poikkileikkaus. Mitoitusoptimointitehtävä on siis tyypiltään hyvin yksinkertainen eikä välttämättä yksinkertaisilla rakenteilla vaadi kovinkaan monimutkaista laskentaa.



**Kuva 1.** Havainne-esimerkki teräspuistikiristikon mitoitusoptimoinnista.

Muodon tai geometrian optimoinnissa eri rakenneosien välisten liitoskohtien sijaintia muuttamalla pyritään hakemaan paras ratkaisu siten, että asetetut reunaehdot täyttyvät. Geometrian optimoinnissa rakenneosien välisten liitosten lukumäärä säilyy vakiona, ainoastaan niiden keskinäinen sijainti muuttuu. Tavallisesti tähän tehtävätyyppiin liitetään myös mitoitusoptimointi. Esimerkiksi eräsristikon geometrian optimointitehtävässä vaihdetaan diagonaalisauvojen liitoskohtien sijaintia paarteilla ja pyritään sillä hakemaan ristikolle optimirakenne.

Topologian optimoinnissa rakennekokonaisuudelle haetaan optimitopologia siten, että asetetut reunaehdot täyttyvät. Koska topologia käsitteenä kuvaa ainoastaan rakennekokonaisuuden sauvojen liittymistä toisiinsa sekä kokonaisuudessa olevien liitosten määrää, sisältää topologian optimointi tavallisesti myös geometrian ja mitoituksen optimoinnin. Topologian optimoinnissa haetaan siis esimerkiksi teräsristikon tapauksessa optimein sauvajärjestely muuttamalla sekä sauvojen ja liitosten määrää että liitosten välistä keskinäistä sijaintia.

## 2.4 Teräsrakenteen kustannusten muodostuminen ja optimointi

Konepajavalmistetun teräskokoonpanon kustannukset muodostuvat materiaalista, valmistuksesta, kuljetuksesta konepajalta työmaalle ja asennuksesta työmaalla. Jaakko Haapio tutki väitöskirjassaan (Haapio 2012) teollisten, toimisto- ja kaupallisten rakennusten teräsrunkojen kustannuksia ja kehitti laskentakaavat kokoonpanon kokonaiskustannusten arviointiin. Väitöskirjassa esitetty teoria tarjoaa myös hyvät lähtökohdat rakenteiden kustannusoptimointiin.

Teräskokoonpanon valmistus ja siten kustannusten muodostuminen jaettiin väitöskirjassa kustannuspaikkoihin. Kokoonpanon kokonaiskustannus muodostuu kumu-

latiivisesti näiden kustannuspaikkojen osakustannuksista. Esitetyt kustannuspaikat ovat

1. Materiaalikustannukset  $C_{SM}$
2. Puhdistus- ja esikäsitteilykustannukset  $C_B$
3. Leikkauskustannukset (levyrakenteille)  $C_{Cu}$
4. Katkaisukustannukset (profileille)  $C_S$
5. Hitsatun profiilin hitsauskustannukset  $C_{Bw}$
6. Muodonleikkauskustannukset  $C_{Co}$
7. Porauskustannukset  $C_D$
8. Viimeistelykustannukset  $C_{PT}$
9. Pintakäsittelykustannukset  $C_P$
10. Kuljetuskustannukset  $C_T$
11. Asennuskustannukset  $C_E$ .

Lisäksi voidaan erikseen esittää kokoonpanoon liittyvien osien kustannukset, joita ovat

1. Liittyvien osien valmistuskustannukset  $C_{PF}$
2. Liittyvien osien asennuskustannukset  $C_{PA}$ .

Valmistuskustannukset voidaan esittää ensimmäisen listan mukaisten kustannuspaikkojen avulla. Liittyvien osien asennuskustannukset jaotellaan pultti- ja hitsausliitoksiin. Tässä diplomityössä käsitellään ainoastaan teräsprofiliin hitsaamalla liitettäviä levyosia. Näin ollen liittyvien osien asennuskustannus  $C_{PA}$  muodostuu pelkästään hitsaamisesta. Hitsatun profiilin hitsauskustannuksia  $C_{Bw}$  ei käsitellä tässä työssä lainkaan.

Kunkin kustannuspaikan kustannus esitetään työhön käytetyn ajan ja hintatekijöiden tulojen perusteella kaavalla

$$C_k = (T_{Nk} + T_{Pk}) \frac{c_{Lk} + c_{Eqk} + c_{Mk} + c_{REk} + c_{Sek}}{u_k} + T_{Pk}(c_{Ck} + c_{Enk}) + C_{Ck}, \quad (8)$$

missä  $C_k$  tarkoittaa kustannuspaikassa  $k$  muodostuvaa kustannusta.  $T_{Nk}$  tarkoittaa kustannuspaikassa tuottamatonta aikaa ja  $T_{Pk}$  tuottavaa aikaa. Tuottamattomaksi ajaksi määritellään kaikki prosessia varten tehtävät valmistavat työt ja tuottavaksi

ajaksi varsinainen prosessin mukainen työvaihe. Hintatekijöitä ovat työvoimakustannukset  $c_{Lk}$ , laiteinvestoinnit  $c_{Eqk}$ , laitteiden ylläpito- ja huoltokustannukset  $c_{Mk}$ , kiinteistö- ja tilakustannukset  $c_{REk}$  ja tuotantotilojen ylläpitokustannukset  $c_{Sek}$ . Lisäksi pelkästään prosessissa tuottavan ajan perusteella muodostuu kustannuksia prosessista kuluva materiaalista  $c_{Ck}$  ja prosessiin käytetystä energiasta  $c_{Enk}$ . Myös ajasta riippumattomat eli kiinteät kulut  $C_{Ck}$  on esitetty. Prosessin hyötysuhdetta kuvataan muuttujalla  $u_k$ . (**haapio**)

Materiaalikustannukset  $C_{SM}$  muodostuvat valmistukseen raaka-aineena konepajalle tulevista teräslevyistä ja -profileista. Teräsosan hinta määrittyy osan painon (kg) ja hintatekijöiden (€/kg) tulona. Hintatekijöitä ovat profileille määritetyt valmiit massa- ja materiaaliperusteiset hinnat. Levyrakenteille vaikuttaa näiden lisäksi myös levyn paksuus sekä tilattavan levytavarän määrä.

Puhdistus- ja esikäsitteilykustannukset  $C_B$  muodostuvat valmistettavaksi tarkoitetun raaka-aineen puhdistuksesta liasta ja rasvasta sekä ruostepinnan ja valssihilseen poistosta. Yleinen käytössä oleva menetelmä on suihkupuhdistus, johon myös väitöskirjan esittämät kustannukset nojaavat. Kustannukset muodostuvat kaavan (8) mukaisesti. Prosessiin käytetty tuottava aika perustuu kuljettimen nopeuteen ja suihkupuhdistettavan osan pituuteen. Prosessi on käytännössä jatkuva, joten siinä ei ole tuottamatonta aikaa. Prosessissa kuluva materiaali on suihkupuhdistuksessa käytettävät puhdistusrakeet.

Levyrakenteiden leikkaamisella tarkoitetaan raaka-ainelevystä joko poltto- tai plasmaleikkausmenetelmällä leikattavien levyosien irroitus raaka-ainelevystä. Kustannus  $C_{Cu}$  muodostuu kaavan (8) mukaisesti. Tuottavalla ajalla tarkoitetaan varsinaista leikkaustyötä, ja se muodostuu leikkeen pituuden ja leikkausnopeuden osamääränä. Prosessissa kuluva materiaali on leikkauksessa tarvittava kaasu sekä kuluvana osana kaasusuutin.

Teräsprofilien sahaamiskustannukset muodostuvat raaka-aineprofilin katkaisemisesta sahaamalla tarvittavaan mittaan. Kustannus  $C_S$  muodostuu kaavan (8) mukaisesti. Tuottamaton aika muodostuu vakiokestoisten valmistelutöiden lisäksi myös profilin kuljettamisesta kuljettimella, jolloin siihen vaikuttaa myös sahattavan profilin pituus. Tuottava aika perustuu sahattavan profilin dimensioihin, sahan liikkeen nopeuteen, sahattavaan materiaaliin ja sahaamistehokkuuteen. Prosessissa kuluva materiaali on sahanterän kuluminen.

Hitsauskustannuksista käsitellään tässä diplomityössä ainoastaan teräsprofilin liitettävien levyosien hitsaaminen, joka muodostaa koko profiliin liitettävän osan asennuskustannuksen  $C_{PA}$ . Hitsaustyö jakautuu hitsattavan osan silloitukseen (puhekielessä heftaus) sekä varsinaiseen liittämishitsaukseen. Kustannus  $C_{PA}$  muodostuu kaavan (8) mukaisesti. Väitöskirjassa on esitetty hitsaamiskustannukset piena- ja

V-hitsille. Kustannus perustuu hitsin pituuteen ja hitsin vahvuuteen.

tähän lisä-  
kustannus-  
sista

Muotoleikkauksella (coping) tarkoitetaan tässä profiiliin ja osiin tehtäviä kolouksia, lovia, aukkoja ja viisteitä. Nämä tehdään tavallisesti polttoleikkaamalla. Kustannus  $C_{Co}$  muodostuu kaavan (8) mukaisesti. Tuottava aika muodostuu leikkausajasta, joka määritetään leikkeen pituuden ja leikkausnopeuden osamääränä, kuten levyosien leikkaaminenkin. Myös prosessissa kuluva materiaali muodostuu levyosien leikkaamisen tapaan leikkauksessa tarvittavasta kaasusta ja kuluvista kaasusuuttimista.

Porauskustannukset  $C_D$  muodostuvat kokoonpanon pääosaan sekä siihen liittyviin osiin poraamalla tehtävistä rei'istä. Kustannus  $C_D$  muodostuu kaavan (8) mukaisesti. Tuottamaton aika muodostuu valmistelutöiden lisäksi profiilin tai osan kuljettamisesta kuljettimella, jolloin myös käsiteltävän osan pituus vaikuttaa prosessin tuottamattomaan aikaan. Tuottava aika on poraustyötä ja sen pituus muodostuu materiaalin paksuudesta, porattavan reiän koosta ja poran syöttönopeudesta. Prosessissa kuluvana osana on poranterä.

Viimeistelytöitä ovat käsittelyn jäljiltä jääneen teräspurseen poisto sekä hitsien tarkistus. Kustannus  $C_{PT}$  määritellään soveltaen kaavaa (8) jättämällä esimerkiksi energia- ja materiaalikulukustannukset huomioimatta, sillä kustannus muodostuu ainoastaan työvoima- ja tilakustannuksista. Tuottava aika muodostuu pursepoistettavien reunojen pituudesta ja tarkastettavien hitsien pituuksista.

Pintakäsittelytyöt koostuvat pinnan maalaus käsittelystä ja kuivumisprosessista. Kustannus  $C_P$  määritellään soveltaen kaavaa (8). Maalaus käsittelyä seuraava kuivumisprosessi on myös tuottavaa aikaa, jolloin pintakäsittelyprosessiin ei kokonaisuudessaan jää tuottamatonta aikaa tai se jää tuottavaan aikaan nähden niin lyhyeksi että se voidaan sivuttaa. Maalaukseen kuluva aika muodostuu maalattavan pinnan kuivapaksuudesta, maalattavasta pinta-alasta ja maalauslaitteen maalinvirtausnopeudesta. Myös käytettävä maalausjärjestelmä vaikuttaa kustannuksiin. Yleisimpiä käytössä olevia maalausjärjestelmiä ovat alkydi-, epoksi-, polyuretaani- ja akryyli-maalit. Materiaalikulu muodostuu prosessissa kuluvan maalin määrästä.

jotain ku-  
vumisest.

Kuljetuskustannukset muodostuvat teräskokoonpanon kuljetuksesta konepajalta työmaalle. Kuljetuksen hinta määräytyy joko massa- tai tilavuusperusteisesti ja kustannuksen suhde kuljetettavaan matkaan on Haapion väitöskirjan mukaan lineaarinen.

Asennuskustannukset  $C_E$  muodostuvat kuorman purkamisesta työmaalla varastointialueelle, asennettavien teräskokoonpanojen siirrosta varastointialueelta nostoalueelle, teräskokoonpanon nostosta suunnitellulle paikalle ja kokoonpanon pulttikiinnityksestä muuhun teräsrunkoon. Kustannukset muodostuvat työhön kuluneesta ajasta, työvoimakustannuksista ja laitekuluista kaavaa (8) soveltaen. Asennusaika muo-

dostuu teräskokoonpanon nostoon, liittämiseen, henkilönostimen käyttöön ja nostokoukun takaisin kuljettamiseen kuluva kokonaisajasta. Näihin aikoihin vaikuttaa edelleen nosturin ja henkilönostimen nopeudet ja noston vaatima matka. Laitekulut muodostuvat nosturin ja siirtokaluston kuluista ja niihin vaikuttaa käyttömäärän (matka) lisäksi niiden tyyppi.

## 3 TERÄSHALLIN JÄYKISTÄMINEN

### 3.1 Jäykistäminen yleisesti

Kantavien rakenneosien stabiliteetti varmistetaan jäykistämällä rakennus. Rakennus on jäykistettävä sekä vaaka- että pystysuunnassa ja jäykisteille kohdistuvat kuormat on vietävä perustuksille.

Jäykistäminen ja jäykistejärjestelmän toimintatarkoitus jaetaan ulkoisia kuormia ja sisäisiä kuormia vastaanottaviin jäykisterakenteisiin. Tavallisesti jäykisterakenteista puhuttaessa ulkoisilla kuormilla tarkoitetaan ulkoisia vaakavoimia, joita ovat esimerkiksi tuulikuorma ja pystykuormista rakenteille niiden epätarkkuuksista aiheutuvat lisävaakavoimat. Vaakakuormat aiheuttavat rakennukseen sivusiirtymiä tai kiertymää, jolloin pystykuormat muuttuvat rakenneosiin nähden epäkeskeiseksi ja puristetut rakenneosat ovat vaarassa menettää kantavuutensa esimerkiksi stabiliteetin menetyksen seurauksena. Jäykisterakenteiden on tarkoitus estää tätä vaakakuormista aiheutuvaa muodonmuutosta ja näin ollen säilyttää rakennuksen muoto jäykänä kokonaisuutena, jolloin kuormat ohjautuvat rakenneosia pitkin suunnitellusti perustuksille. Tavallisia ulkoisia vaakakuormia vastaan toimivia jäykisterakenteita teräshallissa ovat katon tuuliristikko tai pilarien väliset vinositeet.

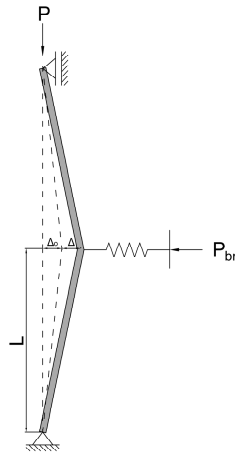
Sisäisiä voimia vastaan toimivilla jäykisteillä tarkoitetaan rakenteita, jotka tukevat kantavan rungon puristettuja tai taivutettuja rakenneosia stabiliteetin menetystä vastaan. Puristetuilla ja myös taivutetuilla rakenneosilla mitoittavaksi tekijäksi usein muodostuu sisäiset stabiliteetti-ilmiöt, kuten nurjahdus ja kiepahdus. Sisäisen jäykistejärjestelmän tarkoitus on muodostaa tukipisteitä näihin rakenneosiin ja näin estää nämä stabiliteetinmenetysilmiöt rajoittamalla vapaata nurjahdus- tai kiepahduspituutta. Yksi esimerkki sisäisestä jäykistysjärjestelmästä teräshallissa on katoristikon yläpaarteen nurjahdustuennat, joista tavallisesti käytetään yleisnimitystä katon jäykistesiteet.

### 3.2 Jäykisteen jäykkyyden ja lujuuden välinen yhteys

Puristetun sauvan stabiliteetti perustuu Eulerin nurjahdukseen, jossa ideaalisuoraa homogeenisesta materiaalista koostuvaa hoikkaa sauvaa kuormitetaan keskeisesti. Kuormaa, joka saa aikaan sauvan stabiliteetin menetyksen kutsutaan kriittiseksi kuormaksi tai nurjahdusvoimaksi ja se määritetään Eulerin nurjahduksen kaavalla

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{cr}^2}, \quad (9)$$

missä  $E$  on materiaalin kimmokerroin,  $I$  on poikkileikkauksen neliömomentti tarkasteltavan akselin ympäri ja  $L_{cr}$  on kyseistä nurjahdusmuotoa vastaava nurjahduspituus. Kaavan (9) mukaan pienentämällä sauvan nurjahduspituutta  $L$  kasvaa sauvan kriittinen kuorma eksponentiaalisesti. Nurjahduspituuden pienentäminen voidaan toteuttaa lisäämällä sauvan poikittaisten tukien määrää. Tätä toimenpidettä kutsutaan jäykistämiseksi. Jäykistämällä pyritään kasvattamaan sauvan kuormankantokykyä parantamalla sen stabiliteettia. Yksinkertaista puristetun sauvan ja jäykisteen rakennetta on esitetty kuvassa (2), jossa nivelellisesti tuettua kuormalla  $P$  puristettua sauvaa tuetaan keskikohdastaan joustavalla jäykisterakenteella. Sauvalla on alkuepäkeskisyys  $\Delta_0$  sekä jäykistesiteen puristumasta aiheutuva siirtymä  $\Delta$ . Jäykistesiteen puristuma aiheuttaa jäykisteeseen aksiaalisen puristusvoiman  $P_{br}$ .



**Kuva 2.** Rakennemalliesimerkki jäykisteen toiminnasta, missä puristettua alkuepäkeskisyyden omaavaa sauvaa tuetaan jännevälin keskeltä jousimaisella jäykisterakenteella.

Jäykistävä rakenne tukee puristettua sauvaa siten, että nurjahdus pääsee tapahtumaan ainoastaan tuki- ja jäykistepisteiden välillä. Toimiakseen jäykisteellä tulee olla riittävä määrä aksiaalista jäykkyyttä sekä jäykisteen poikkileikkauksella lujuutta (Winter 1958). Kun ideaalisuoraa sauvaa kuormitetaan kaavan (9) mukaisella kriittisellä kuormalla  $P_{cr}$ , on pienin toimivan jäykisteen aksiaalisen jäykkyyden arvo kaavan

$$\beta_i = \frac{\gamma_i P_{cr}}{L}, \quad (10)$$

mukainen, missä  $L$  on sauvaa tukipisteiden välinen etäisyys ja  $\gamma_i$  on jäykistävien siteiden määrästä riippuva kerroin (Timoshenko & Gere 1963, s. 76). Jäykistesiteen



jäykkyys  $\beta_i$  on siis pienin jäykkyys, jolla ideaalisuoran puristetun sauvan nurjahdus tapahtuu lokaalisti tukipisteiden välillä.  $P_{cr}$  määritellään kaavan (9) mukaisesti käyttämällä nurjahduspituutena jäykisteiden välistä etäisyyttä.

Kertoimen  $\gamma_i$  avulla voidaan määrittää jäykisteiden ideaalijäykkyys, kun puristettua sauvaa tuetaan useammalla jäykisteellä ja kun jäykisteiden välinen keskinäinen etäisyys on vakio. Jäykkyyskertoimet ja niitä vastaavat rakenteet on esitetty taulukossa (1).

**Taulukko 1.** *Ideaalisuoraa sauvaa jäykistävien rakenteiden vaaditut jäykkyyden kertoimet.*

| Siteiden määrä     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Kerroin $\gamma_i$ | 2,000 | 3,000 | 3,413 | 3,623 | 3,731 |

Taulukosta huomataan, että siteiden määrän kasvaessa kasvaa myös vaadittu ideaalijäykkyyden arvo. Tämä on ilmeistä, sillä näin myös sauvaa voidaan kuormittaa suuremmalla puristusvoimalla sen nurjahduskestävyyden ollessa suurempi. Stephen Timoshenko esitti nämä kertoimet (Timoshenko & Gere 1963) johtamalla ne differentiaalilaskennan kautta jatkuvalle palkille joka tuettu jousituilla.

Myös George Winter päätyi samoihin kertoimiin (Winter 1958) yksinkertaisemmalla tavalla määrittämällä tasapainoehdot sauvan ja jäykisteiden välisten liittymispisteiden ympäri ja ratkaisemalla kertoimet sauvan ominaismuotojen kautta. Winterin teoria perustui otaksumaan, jossa liitospisteessä on fiktiivinen nivel, jolloin sauvaan ei kohdistu lainkaan taivutusmomenttia. Winterin esittämä tasapainomalli ottaa huomioon myös sauvan alkuepäkeskisyyden  $\Delta_0$ . Kuvan (2) rakennemallista voidaan vastaavalla tavalla muodostaa tasapainoehto

$$P(\Delta_0 + \Delta) = \frac{P_{br}L}{2}, \quad (11)$$

missä  $P$  on sauvaan kohdistuva aksiaalinen voima,  $\Delta_0$  sauvan alkuvinous,  $\Delta$  jäykisteen puristuma ja  $P_{br}$  on jäykisteen sauvaan kohdistama tukireaktio. Kun otaksutaan jäykisteessä vaikuttavan tukreaktion suuruisen aksiaalisen voiman, voidaan jousiteorian nojalla määrittää yhteys jäykkyyden ja puristuman välillä kaavalla

$$P_{br} = \beta\Delta, \quad (12)$$

missä  $\beta$  on jäykistesauvan aksiaalinen jäykkyys. Kun sijoitetaan tämä rakenteen tasapainoehdon kaavaan (11) saadaan aksiaalisen jäykkyyden arvoksi

$$\beta_{req} = \frac{2P}{L} \left( \frac{\Delta_0}{\Delta} + 1 \right), \quad (13)$$

missä  $\beta_{req}$  on siis jäykisteenä toimivan rakenteen vaadittu aksiaalinen jäykkyys kun huomioidaan alkusiirtymä  $\Delta_0$ . Ideaalisuoralla sauvalla ( $\Delta_0 = 0$ ) kaava saa saman arvon kuin aikaisemmin esitetty ideaalijäykkyyden arvo (10), sillä taulukon (1) mukaisesti kyseisen rakenteen jäykkyyskerroin  $\gamma_i = 2,0$ . Voidaan siis kirjoittaa, että yleisesti

$$\beta_{req} = \beta_i \left( \frac{\Delta_0}{\Delta} + 1 \right). \quad (14)$$

### 3.3 Puristetun sauvan stabiliteetti EN 1993 mukaisesti

Puristetun sauvan todellisen aksiaalisen puristuskapasiteetin määrittämiseksi on Eulerin teoreettisen nurjahduskapasiteetin lisäksi huomioitava epätarkkuustekijät, joita ovat esimerkiksi poikkeama ideaalisuorasta rakenteesta, materiaalin epälineaarisuus tai materiaalin muokkaamisen seurauksena syntyneet jäännösjännitykset. Näiden tekijöiden huomioiminen vaatii poikkeuksetta epälineaarista analyysia ja niiden laskentaan on historian aikana kehitetty laskentakaavoja, jotka perustuvat niin kokeelliseen tutkimukseen, kuin erilaisiin lujuusopin teorioihin. (Ziemian 2010, s. 27) Teräsrakenteiden suunnittelustandardi (SFS-EN 1993-1-1) esittää näiden poikkeamien huomioon ottamiseksi viisi (5) erilaista epätarkkuustekijää rakenteen valmistustavasta ja profiilin muodosta riippuen. Nämä epätarkkuustekijät on esitetty taulukossa (2).

viittaus  
kuntoon!

**Taulukko 2.** Nurjahduskäyrien epätarkkuustekijät standardin (SFS-EN 1993-1-1) mukaan.

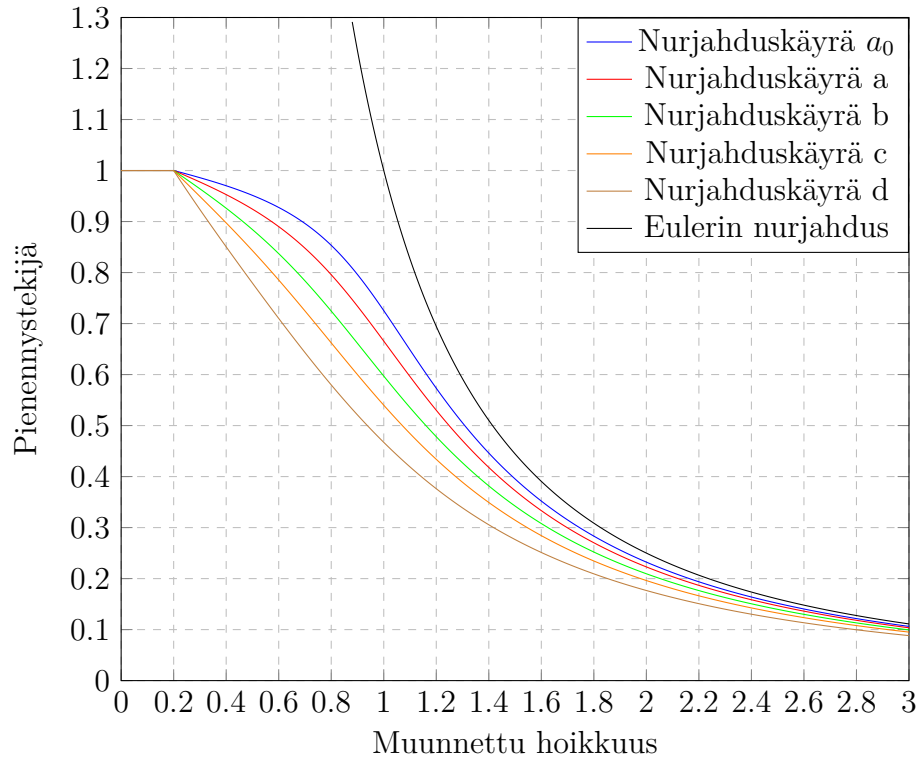
| Nurjahduskäyrä             | $a_0$ | a    | b    | c    | d    |
|----------------------------|-------|------|------|------|------|
| Epätarkkuustekijä $\alpha$ | 0,13  | 0,21 | 0,34 | 0,49 | 0,76 |

Epätarkkuustekijöiden perusteella standardiin on määritetty ja kuvaajin esitetty nurjahduskäyrät, jotka esittävät puristuskapasiteetin laskentaa varten tarvittavan pienennystekijän  $\chi$  rakenteen hoikkuuden  $\lambda$  funktiona. Kutakin epätarkkuustekijää vastaa oma nurjahduskäyränsä, ja ne on esitetty kuvaajassa (3).

Standardin mukaan rakenteen nurjahduskapasiteetin  $N_{b,Rd}$  ja plastisen puristuskapasiteetin  $N_{pl,Rd}$  suhdetta kuvaa nurjahduksen pienennystekijä  $\Phi$ , joka määritetään kaavalla

symbolit  
käyrän la  
beleihin

$$\chi = \frac{N_{b,Rd}}{N_{pl,Rd}} = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \lambda^2}}, \quad (15)$$



**Kuva 3.** SFS-EN 1993-1-1 mukaiset nurjahduskäyrät verrattuna Eulerin nurjahdukseen.

missä  $\lambda$  on poikkileikkauksen muunnettu hoikkuus ja  $\chi$  epätarkkuuden huomioon ottava kerroin. Muunnettu hoikkuus määritetään kaavalla

$$\lambda = \sqrt{\frac{A f_y}{N_{cr}}}, \quad (16)$$

missä  $N_{cr}$  Eulerin nurjahdusvoima (kaava 9),  $A$  on rakenteen poikkileikkauksen pinta-ala ja  $f_y$  materiaalin myötölujuus. Mikäli rakenteen muunnettu hoikkuus täyttää ehdon  $\lambda \leq 0,2$  ei nurjahdusta tarvitse standardin mukaan ottaa huomioon (koh- ta 6.3.1.2(4)). Edelleen kaavan (15) termi  $\Phi$  määritellään kaavalla

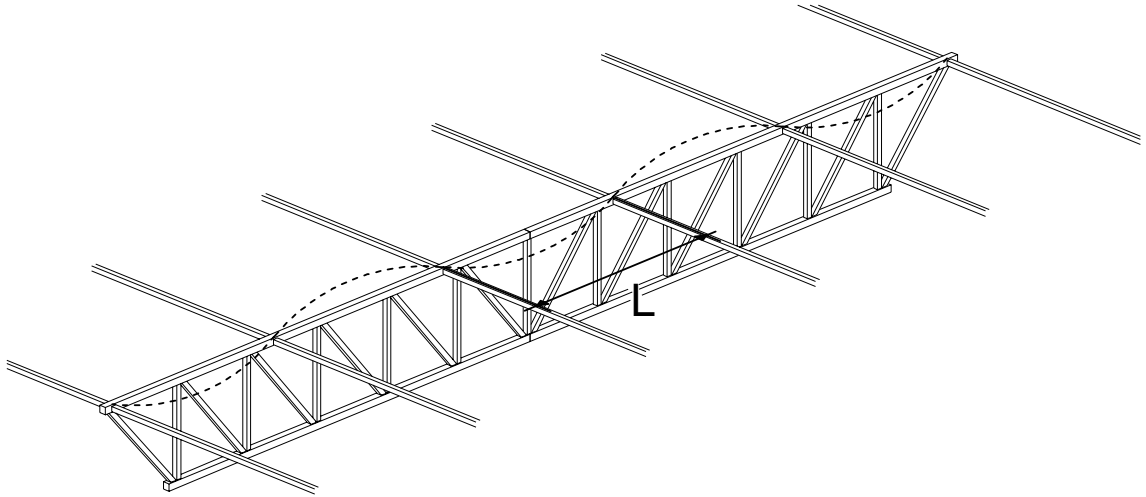
$$\Phi = \frac{1 + \alpha(\lambda - 0.2) + \lambda^2}{2}, \quad (17)$$

missä  $\alpha$  on aiemmin mainittu rakenteen muodosta ja valmistustavasta riippuva epätarkkuustekijä.

Tässä diplomityössä käsiteltävät profiilit rajautuvat lujuusluokan S355 -rakenneputkiin, joiden nurjahduskäyrä on kylmämuovattuna c ( $\alpha = 0,49$ ) ja kuumavalssattuna a ( $\alpha = 0,21$ ).

### 3.4 Ristikön yläpaarten tuenta hallin pituussuunnassa

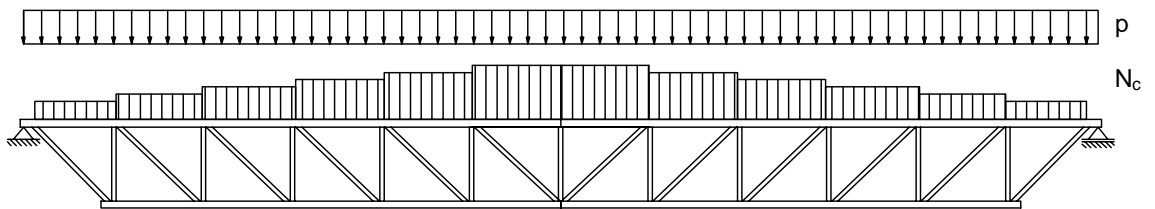
Teräsristikön puristettu yläpaarre on tuettava ristikon tasoon nähden poikittaisessa suunnassa rakennuksen pituussuuntaisin tukirakentein. Tukirakenteet on kuvattu ristikon tuentaa esittävässä kuvassa (4). Näistä tukirakenteista käytetään nimitystä kattositeet tai ristikon (nurjahdus)siteet ja ne kuuluvat osana rakennuksen jäykistysjärjestelmää. (Kaitila 2010)



**Kuva 4.** Putkiristikön puristetun yläpaarten nurjahdusmuoto ja nurjahdustuennat.

Ristikön tuenta ja nurjahdustukien väliset etäisyydet  $L$  suunnitellaan siten, että nurjahduksen kaavan (17) esittämä yläpaarten nurjahduskapasiteetti  $N_{b,Rd}$  ei alita paarteeseen ristikon pystykuormista aiheutuvaa aksiaalista puristusvoimaa. Puristusvoiman ylittäessä yläpaarten nurjahduskapasiteetin, on yläpaarteeseen muodostuvan nurjahtavan sauvan nurjahdusmuoto kuvan (4) mukainen. Suunnittelustandardin (SFS-EN 1993-1-1 liite BB) mukaan kaavassa (9) tarvittavaksi nurjahduspi-tuudeksi voidaan putkiristikön paarteelle asettaa 0,9 kertaa ristikon poikittaistukien väli.

Ristikko kannattelee pystykuormaa palkin tavoin. Ristikön paarteet toimivat taivutuksessa kuten palkin laipat vastaanottaen taivutusmomentista aiheutuvan veto- ja puristusrasituksen. Uumasauvat välittävät leikkausrasituksia palkin uuman tavoin. Koska ristikko ei kuitenkaan ole jatkuva rakenne, paarteille kohdistuvan normaali-voiman jakauma on jatkuvan jakauman sijasta portaittainen. Tätä porrastusta on havainnollistettu kuvassa (5), jossa on esitettyinä ristikon yläpaarten puristusvoiman porrastuksen periaate. Normaalivoima puristetulla yläpaarteella muttuu aina vedetyn uumasauvan kohdalla, kuten kuva esittää.



**Kuva 5.** Periaatekuva normaalivoiman  $N_c$  portaittaisesta jakautumisesta ristikon yläpaarteelle pystykuormasta  $p$  Pratt -tyypin ristikossa.

## VIITTEET

- Arora, J. S. (2004). Introduction to optimum design. 2. painos. ISBN: 0-12-064155-0.
- Haapio, J. (2012). Feature-Based Costing Method for Skeletal Steel Structures based on the Process Approach. Väitöskirja. Tampereen teknillinen yliopisto.
- Kaitila, O. (2010). Teräsrakenteiden suunnittelu ja mitoitus : Eurocode 3 -oppikirja. Teräsrakenneyhdistys. ISBN: 7978-952-9683-50-5.
- Mela, K. (2013). Mixed Variable Formulations for Truss Topology Optimization. Väitöskirja. Tampereen teknillinen yliopisto.
- Rao, S. S. (1999). Engineering optimization : theory and practice. 4. painos. ISBN: 978-0-470-18352-6.
- SFS-EN 1993-1-1 (2010). Eurocode 3: Teräsrakenteiden suunnittelu, Osa 1-1: Yleiset säännöt ja rakennuksia koskevat säännöt. Helsinki: Suomen standardoimisliitto SFS.
- Timoshenko, S. P. & Gere, J. M. (1963). Theory of elastic stability. 17. painos. ISBN: 0-07-Y85821-7.
- Winter, G. (1958). Lateral bracing of columns and beams. American society of civil engineers.
- Ziemian, R. D. (2010). Stability design criteria for metal structures. 6. painos. ISBN: 978-0-470-08525-7.