

第 1 章 数列

1.1 数列求通项问题

如果已知通项公式, 数列的任意一项就能通过首项和下标表示. 由数列的递推式可求数列的通项. 前文提到的等差数列和等比数列求通项分别对应累加法和累乘法, 现将其写成更普遍的形式. 比如取数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n + f(n)$. $n \geq 2$ 时有

$$a_n = a_{n-1} + f(n-1), \dots, a_2 = a_1 + f(1)$$

把上述 $n-1$ 个式子相加得

$$a_n + \dots + a_2 = a_{n-1} + \dots + a_1 + f(n-1) + \dots + f(1) \Leftrightarrow a_n = a_1 + f(n-1) + \dots + f(1)$$

相加后的等式左边有从 2 到 n 的链, 右边有从 1 到 $n-1$ 的链, 从 2 到 $n-1$ 的部分被消去, a_n 和 a_1 从此建立起联系. 对于满足 $a_{n+1} = a_n \cdot f(n)$ 的数列 $\{a_n\}$, 也有类似方法.

累加法和累乘法

若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n + f(n)$, 由**累加法**, 可得 $a_n = \sum_{i=1}^{n-1} f(i) + a_1$.

若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n \cdot f(n)$, 由**累乘法**, 可得 $a_n = \prod_{i=1}^{n-1} f(i) \cdot a_1$.

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n+1} (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$, 求其通项公式.

$n \geq 3$ 时有

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_1} = \frac{2}{(n+1)n}$$

经验证, $n=1, 2$ 时满足. 故 $a_n = \frac{2}{(n+1)n}, n \in \mathbb{N}^*$.

上述方法的前提是 a_{n+1} 项与 a_n 项的系数相同. 那要是不同该怎么办呢? 给 a_n 项加个系数, 得到 $a_{n+1} = \lambda a_n + f(n)$ ($\lambda \neq 0, 1$), 这就是这种情况的通式. 下面是几个例子.

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n + 3$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 求其通项公式.

设 $a_{n+1} + \alpha = 2(a_n + \alpha)$, 得 $\alpha = 3$. $a_n + 3 = 2^{n-1}(a_1 + 3) = 3 \cdot 2^n$. 故 $a_n = 3 \cdot 2^n - 3$, $n \in \mathbb{N}^*$. 这里通过猜 a_n 加上一个常数能构成以 λ 为公比的等比数列, 成功让 a_n 与 a_1 建立起联系. 这种方法有风险, 毕竟这个生造的通项后面还可能挂着 n 的一次、二次项甚至更多.

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_n = 3a_{n-1} + 3^{n-1}$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$), 求其通项公式.

设 $a_n + \alpha \cdot 3^n = 3(a_{n-1} + \alpha \cdot 3^{n-1})$, 得 $a_n = 3a_{n-1}$, 矛盾! 加上 n 的一次项试试.

设 $a_n + (\alpha n + \beta) \cdot 3^n = 3(a_{n-1} + [\alpha(n-1) + \beta] \cdot 3^{n-1})$ ($n \geq 2$), 整理可得 $\alpha = -\frac{1}{3}$, $\beta = 0$. 经验证, $n = 1$ 时满足. 故 $a_n = n \cdot 3^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

不过对于这种 $f(n)$ 中含有 λ 的 n 次幂的情况, 更简便的做法是同除 λ^n , 转化成 $a_{n+1} = a_n + f(n)$ 的形式再用累加法. 对于本题, 有 $\frac{a_n}{3^n} = \frac{a_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{1}{3}$, 这样就很好做了. 接下来上点强度.

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + n(1 + 2^n)$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 求其通项公式.

首先试试上一题的同除 λ^n 的方法.

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}} + \frac{n}{2} \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_1}{2^1} = \frac{n(n+1)}{4} + \sum_{i=1}^n \frac{i}{2^{i+1}}$$

等差比数列求和过程略. 故 $a_n = 2^{n-2}(n^2 - n + 6) - n - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

其实这题用待定系数法也能做. 设

$$\begin{aligned} a_{n+1} + [\alpha(n+1) + \beta] + [\gamma(n+1)^2 + \delta(n+1) + \mu] \cdot 2^{n+1} \\ = 2[a_n + (\alpha n + \beta) + (\gamma n^2 + \delta n + \mu) \cdot 2^n] \end{aligned}$$

则

$$a_{n+1} = 2a_n + \alpha n + (\beta - \alpha) - (4\gamma n + 2\gamma + 2\delta) \cdot 2^n = 2a_n + n + n \cdot 2^n$$

于是 $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -\frac{1}{4}, \delta = \frac{1}{4}$. 取 $\mu \neq -\frac{3}{2}$,

$$a_n + (n+1) + (-\frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{4}n + \mu) \cdot 2^n = 2^{n-1} \cdot (3 + 2\mu)$$

化简即得. 显然这很麻烦, 而且在求出系数之前, 含 n 项的最高次是未知的, 需要慢慢尝试. 不过待定系数法也因此具有了普适性, 所有数列求通项都能用待定系数法.

待定系数法

若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \lambda a_n + f(n)$ ($\lambda \neq 0, 1$), 可进行合理猜测, 用待定系数法设出 $g(n)$, 使得 $a_{n+1} + g(n+1) = \lambda[a_n + g(n)]$, 从而求出 $g(n)$.

若 $g(n)$ 中含有 λ 的 n 次幂, 优先考虑同除 λ^n , 转化成 $a_{n+1} = a_n + f(n)$ 的形式.

前文出现过的递推式还都长得慈眉善目, 那就见识一下分式型的递推式吧.

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{4a_{n-1} + 3}{a_{n-1} + 2}$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$), 求其通项公式.

方程 $x = \frac{4x+3}{x+2}$ 的解为 $x_1 = -1, x_2 = 3$.

$$\frac{a_n + 1}{a_n - 3} = \frac{\frac{4a_{n-1} + 3}{a_{n-1} + 2} + 1}{\frac{4a_{n-1} + 3}{a_{n-1} + 2} - 3} = 5 \frac{a_{n-1} + 1}{a_{n-1} - 3} \Leftrightarrow \frac{a_n + 1}{a_n - 3} = 5^{n-1} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$$

故 $a_n = \frac{9 \cdot 5^{n-2} - 1}{3 \cdot 5^{n-2} + 1}, n \in \mathbb{N}^*$. 做这种题都按这个套路来就行. 下面来个三世同堂.

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n - \frac{1}{9}a_{n-1}$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$), 求其通项公式.

用待定系数法尝试构造等比数列. 令 $a_{n+1} - \alpha a_n = \beta(a_n - \alpha a_{n-1})$ ($n \geq 2$), 则

$$a_{n+1} = (\alpha + \beta)a_n - \alpha\beta a_{n-1} = \frac{2}{3}a_n - \frac{1}{9}a_{n-1}$$

故 α, β 是方程 $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0$ 的两根. 解得 $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$. 故 $a_n = (2n-1) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$. 对于更一般的情况, 下面直接给出通法, 等我学会了再回来推导.

不动点法和特征根法

满足 $a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s}$ ($r \neq 0, ps - rq \neq 0$) 的数列 $\{a_n\}$ 称为分式线性递推数列,

x_1, x_2 为方程 $x = \frac{px+q}{rx+s}$ 的两根, 则由不动点法可知

$$x_1 \neq x_2 \text{ 时 } \left\{ \frac{a_n - x_1}{a_n - x_2} \right\} \text{ 为等比数列}$$

$x_1 = x_2 = x_0$ 时 $\{\frac{1}{a_n - x_0}\}$ 为等差数列

满足 $a_{n+1} = \lambda a_n + \mu a_{n-1} (n \geq 2)$ 的数列 $\{a_n\}$ 称为二阶线性齐次递推数列, x_1, x_2 为方程 $x^2 = \lambda x + \mu$ 的两根, 则由**特征根法**可知

$$x_1 \neq x_2 \text{ 时 } a_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n$$

$$x_1 = x_2 = x_0 \text{ 时 } a_n = (\alpha + \beta n) x_0^n$$

代入 a_1, a_2 即可解出 α, β .

累加法、累乘法、待定系数法、不动点法和特征根法是数列求通项最基本的方法. 通过取倒数、取对数、平方和开方运算, 可以把它们变得更恶心一点, 但万变不离其宗.

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1}^2 = 4a_n (n \in \mathbb{N}^*)$, 求其通项公式.

$$\ln a_{n+1} - 2 \ln 2 = \frac{1}{2} (\ln a_n - 2 \ln 2) \Leftrightarrow a_n = 4^{1 - (\frac{1}{2})^{n-1}}.$$

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{5}{2}, a_{n+1} = a_n^2 - 2 (n \in \mathbb{N}^*)$, 求其通项公式.

可令 $a_n = b_n + \frac{1}{b_n}$, 不妨设 $b_n \in (0, 1), b_1 = \frac{1}{2}$. 则

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2 \Leftrightarrow b_{n+1} + \frac{1}{b_{n+1}} = b_n^2 + \frac{1}{b_n^2}$$

由函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1) \downarrow$ 得

$$b_{n+1} = b_n^2 \Leftrightarrow \ln b_n = 2^{n-1} \cdot \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}} \Leftrightarrow a_n = 2^{2^{n-1}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}$$

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{\pi}{4}, a_n \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (2n+1) \sin(a_{n+1} - a_n) = \sin(a_{n+1} + a_n) (n \in \mathbb{N}^*)$, 求其通项公式.

展开并化简得

$$n \sin a_{n+1} \cos a_n = (n+1) \cos a_{n+1} \sin a_n \Leftrightarrow \frac{\tan a_{n+1}}{n+1} = \frac{\tan a_n}{n}$$

故

$$\frac{\tan a_n}{n} = \frac{\tan a_1}{1} = 1 \Leftrightarrow a_n = \arctan n$$