

# 第 1 章 数列

## 1.1 数列求通项问题

如果已知通项公式, 数列的任意一项就能通过首项和下标表示. 由数列的递推式可求数列的通项. 前文提到的等差数列和等比数列求通项分别对应累加法和累乘法, 现将其写成更普遍的形式. 比如取数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1} = a_n + f(n)$ .  $n \geq 2$  时有

$$a_n = a_{n-1} + f(n-1), \dots, a_2 = a_1 + f(1)$$

把上述  $n-1$  个式子相加得

$$a_n + \dots + a_2 = a_{n-1} + \dots + a_1 + f(n-1) + \dots + f(1) \Leftrightarrow a_n = a_1 + f(n-1) + \dots + f(1)$$

相加后的等式左边有从 2 到  $n$  的链, 右边有从 1 到  $n-1$  的链, 从 2 到  $n-1$  的部分被消去,  $a_n$  和  $a_1$  从此建立起联系. 对于满足  $a_{n+1} = a_n \cdot f(n)$  的数列  $\{a_n\}$ , 也有类似方法.

### 累加法和累乘法

若数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1} = a_n + f(n)$ , 由累加法, 可得  $a_n = \sum_{i=1}^{n-1} f(i) + a_1$ .

若数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1} = a_n \cdot f(n)$ , 由累乘法, 可得  $a_n = \prod_{i=1}^{n-1} f(i) \cdot a_1$ .

数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ ,  $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n+1} (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$ , 求其通项公式.

$n \geq 3$  时有

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_1} = \frac{2}{(n+1)n}$$

经验证,  $n=1, 2$  时满足. 故  $a_n = \frac{2}{(n+1)n}, n \in \mathbb{N}^*$ .

上述方法的前提是  $a_{n+1}$  项与  $a_n$  项的系数相同. 那要是不同该怎么办呢? 给  $a_n$  项加个系数, 得到  $a_{n+1} = \lambda a_n + f(n)$  ( $\lambda \neq 0, 1$ ), 这就是这种情况的通式. 下面是几个例子.

数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 3$ ,  $a_{n+1} = 2a_n + 3$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), 求其通项公式.

设  $a_{n+1} + \alpha = 2(a_n + \alpha)$ , 得  $\alpha = 3$ .  $a_n + 3 = 2^{n-1}(a_1 + 3) = 3 \cdot 2^n$ . 故  $a_n = 3 \cdot 2^n - 3$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . 这里通过猜  $a_n$  加上一个常数能构成以  $\lambda$  为公比的等比数列, 成功让  $a_n$  与  $a_1$  建立起联系. 这种方法有风险, 毕竟这个生造的通项后面还可能挂着  $n$  的一次、二次项甚至更多.

数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ ,  $a_n = 3a_{n-1} + 3^{n-1}$  ( $n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$ ), 求其通项公式.

设  $a_n + \alpha \cdot 3^n = 3(a_{n-1} + \alpha \cdot 3^{n-1})$ , 得  $a_n = 3a_{n-1}$ , 矛盾! 加上  $n$  的一次项试试.

设  $a_n + (\alpha n + \beta) \cdot 3^n = 3(a_{n-1} + [\alpha(n-1) + \beta] \cdot 3^{n-1})$  ( $n \geq 2$ ), 整理可得  $\alpha = -\frac{1}{3}$ ,  $\beta = 0$ . 经验证,  $n = 1$  时满足. 故  $a_n = n \cdot 3^{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

不过对于这种  $f(n)$  中含有  $\lambda$  的  $n$  次幂的情况, 更简便的做法是同除  $\lambda^n$ , 转化成  $a_{n+1} = a_n + f(n)$  的形式再用累加法. 对于本题, 有  $\frac{a_n}{3^n} = \frac{a_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{1}{3}$ , 这样就很好做了. 接下来上点强度.

数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = 2a_n + n(1 + 2^n)$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), 求其通项公式.

首先试试上一题的同除  $\lambda^n$  的方法.

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}} + \frac{n}{2} \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_1}{2^1} = \frac{n(n+1)}{4} + \sum_{i=1}^n \frac{i}{2^{i+1}}$$

等差比数列求和过程略. 故  $a_n = 2^{n-2}(n^2 - n + 6) - n - 1$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

其实这题用待定系数法也能做. 设

$$\begin{aligned} a_{n+1} + [\alpha(n+1) + \beta] + [\gamma(n+1)^2 + \delta(n+1) + \mu] \cdot 2^{n+1} \\ = 2[a_n + (\alpha n + \beta) + (\gamma n^2 + \delta n + \mu) \cdot 2^n] \end{aligned}$$

则

$$a_{n+1} = 2a_n + \alpha n + (\beta - \alpha) - (4\gamma n + 2\gamma + 2\delta) \cdot 2^n = 2a_n + n + n \cdot 2^n$$

于是  $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -\frac{1}{4}, \delta = \frac{1}{4}$ . 取  $\mu \neq -\frac{3}{2}$ ,

$$a_n + (n+1) + (-\frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{4}n + \mu) \cdot 2^n = 2^{n-1} \cdot (3 + 2\mu)$$

化简即得. 显然这很麻烦, 而且在求出系数之前, 含  $n$  项的最高次是未知的, 需要慢慢尝试. 不过待定系数法也因此具有了普适性, 所有数列求通项都能用待定系数法.

## 待定系数法

若数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1} = \lambda a_n + f(n)$  ( $\lambda \neq 0, 1$ ), 可进行合理猜测, 用待定系数法设出  $g(n)$ , 使得  $a_{n+1} + g(n+1) = \lambda[a_n + g(n)]$ , 从而求出  $g(n)$ .

若  $g(n)$  中含有  $\lambda$  的  $n$  次幂, 优先考虑同除  $\lambda^n$ , 转化成  $a_{n+1} = a_n + f(n)$  的形式.

前文出现过的递推式还都长得慈眉善目, 那就见识一下分式型的递推式吧.

数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $a_n = \frac{4a_{n-1} + 3}{a_{n-1} + 2}$  ( $n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$ ), 求其通项公式.

方程  $x = \frac{4x + 3}{x + 2}$  的解为  $x_1 = -1, x_2 = 3$ .

$$\frac{a_n + 1}{a_n - 3} = \frac{\frac{4a_{n-1} + 3}{a_{n-1} + 2} + 1}{\frac{4a_{n-1} + 3}{a_{n-1} + 2} - 3} = 5 \frac{a_{n-1} + 1}{a_{n-1} - 3} \Leftrightarrow \frac{a_n + 1}{a_n - 3} = 5^{n-1} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$$

故  $a_n = \frac{9 \cdot 5^{n-2} - 1}{3 \cdot 5^{n-2} + 1}, n \in \mathbb{N}^*$ . 做这种题都按这个套路来就行. 下面来个三世同堂.

数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n - \frac{1}{9}a_{n-1}$  ( $n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$ ), 求其通项公式.

用待定系数法尝试构造等比数列. 令  $a_{n+1} - \alpha a_n = \beta(a_n - \alpha a_{n-1})$  ( $n \geq 2$ ), 则

$$a_{n+1} = (\alpha + \beta)a_n - \alpha\beta a_{n-1} = \frac{2}{3}a_n - \frac{1}{9}a_{n-1}$$

故  $\alpha, \beta$  是方程  $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0$  的两根. 解得  $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$ . 故  $a_n = (2n-1) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$ . 对于更一般的情况, 下面直接给出通法, 等我学会了再回来推导.

## 不动点法和特征根法

若数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s}$  ( $r \neq 0, ps - rq \neq 0$ ),  $x_1, x_2$  为方程  $x = \frac{px + q}{rx + s}$  的两根, 则由不动点法可知

$x_1 \neq x_2$  时  $\left\{\frac{a_n - x_1}{a_n - x_2}\right\}$  为等比数列

$x_1 = x_2 = x_0$  时  $\left\{\frac{1}{a_n - x_0}\right\}$  为等差数列

若数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1} = \lambda a_n + \mu a_{n-1} (n \geq 2)$ ,  $x_1, x_2$  为方程  $x^2 = \lambda x + \mu$  的两根, 则由特征根法可知

$$x_1 \neq x_2 \text{ 时 } a_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n$$

$$x_1 = x_2 = x_0 \text{ 时 } a_n = (\alpha + \beta n) x_0^n$$

代入  $a_1, a_2$  即可解出  $\alpha, \beta$ .

累加法、累乘法、待定系数法、不动点法和特征根法是数列求通项最基本的方法. 通过取倒数、取对数、平方和开方运算, 可以把它们变得更恶心一点, 但万变不离其宗.

数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1}^2 = 4a_n (n \in \mathbb{N}^*)$ , 求其通项公式.

$$\ln a_{n+1} - 2 \ln 2 = \frac{1}{2} (\ln a_n - 2 \ln 2) \Leftrightarrow a_n = 4^{1 - (\frac{1}{2})^{n-1}}.$$

数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = \frac{5}{2}$ ,  $a_{n+1} = a_n^2 - 2 (n \in \mathbb{N}^*)$ , 求其通项公式.

可令  $a_n = b_n + \frac{1}{b_n}$ , 不妨设  $b_n \in (0, 1)$ ,  $b_1 = \frac{1}{2}$ . 则

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2 \Leftrightarrow b_{n+1} + \frac{1}{b_{n+1}} = b_n^2 + \frac{1}{b_n^2}$$

由函数  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  在  $(0, 1) \downarrow$  得

$$b_{n+1} = b_n^2 \Leftrightarrow \ln b_n = 2^{n-1} \cdot \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}} \Leftrightarrow a_n = 2^{2^{n-1}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}$$

数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = \frac{\pi}{4}$ ,  $a_n \in (0, \pi)$ ,  $(2n+1) \sin(a_{n+1} - a_n) = \sin(a_{n+1} + a_n) (n \in \mathbb{N}^*)$ , 求其通项公式.

展开并化简得

$$n \sin a_{n+1} \cos a_n = (n+1) \cos a_{n+1} \sin a_n \Leftrightarrow \frac{\tan a_{n+1}}{n+1} = \frac{\tan a_n}{n}$$

故

$$\frac{\tan a_n}{n} = \frac{\tan a_1}{1} = 1 \Leftrightarrow a_n = \arctan n$$