第 1 章　数列

1.1　数列求通项问题

如果已知通项公式，数列的任意一项就能通过首项和下标表示．由数列的递推式可求数列的通项．前文提到的等差数列和等比数列求通项分别对应累加法和累乘法，现将其写成更普遍的形式．比如取数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=a_n+f(n)$．$n\geq 2$ 时有

$$a_n=a_{n-1}+f(n-1),\dots,a_2=a_1+f(1)$$

把上述 $n-1$ 个式子相加得

$$a_n+\cdots+a_2=a_{n-1}+\cdots+a_1+f(n-1)+\cdots+f(1)\Leftrightarrow a_n=a_1+f(n-1)+\cdots+f(1)$$

相加后的等式左边有从 2 到 n 的链，右边有从 1 到 $n-1$ 的链，从 2 到 $n-1$ 的部分被消去，a_n 和 a_1 从此建立起联系．对于满足 $a_{n+1}=a_n\cdot f(n)$ 的数列 $\{a_n\}$，也有类似方法．

累加法和累乘法

若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=a_n+f(n)$，由**累加法**，可得 $a_n=\sum\limits_{i=1}^{n-1}f(n)+a_1$．

若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=a_n\cdot f(n)$，由**累乘法**，可得 $a_n=\prod\limits_{i=1}^{n-1}f(n)\cdot a_1$．

> 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n-1}{n+1}(n\geq 2,n\in\mathbb{N}^*)$，求其通项公式．

$n\geq 3$ 时有

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\dots\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}=\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\dots\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{a_n}{a_1}=\frac{2}{(n+1)n}$$

经验证，$n=1,2$ 时满足．故 $a_n=\dfrac{2}{(n+1)n},n\in\mathbb{N}^*$．

上述方法的前提是 a_{n+1} 项与 a_n 项的系数相同．那要是不同该怎么办呢？给 a_n 项加个系数，得到 $a_{n+1}=\lambda a_n+f(n)(\lambda\neq 0,1)$，这就是这种情况的通式．下面是几个例子．

> 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，$a_{n+1}=2a_n+3(n\in\mathbb{N}^*)$，求其通项公式．

设 $a_{n+1}+\alpha=2(a_n+\alpha)$，得 $\alpha=3$．$a_n+3=2^{n-1}(a_1+3)=3\cdot 2^n$．故 $a_n=3\cdot 2^n-3,n\in\mathbb{N}^*$．这里通过猜 a_n 加上一个常数能构成以 λ 为公比的等比数列，成功让 a_n 与 a_1 建立起联系．这种方法有风险，毕竟这个生造的通项后面还可能挂着 n 的一次、二次项甚至更多．

> 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_n=3a_{n-1}+3^{n-1}(n\geq 2,n\in\mathbb{N}^*)$，求其通项公式．

设 $a_n+\alpha\cdot 3^n=3(a_{n-1}+\alpha\cdot 3^{n-1})$，得 $a_n=3a_{n-1}$，矛盾！加上 n 的一次项试试．

设 $a_n+(\alpha n+\beta)\cdot 3^n=3(a_{n-1}+[\alpha(n-1)+\beta]\cdot 3^{n-1})(n\geq 2)$，整理可得 $\alpha=-\dfrac{1}{3}$，$\beta=0$．经验证，$n=1$ 时满足．故 $a_n=n\cdot 3^{n-1},n\in\mathbb{N}^*$．

不过对于这种 $f(n)$ 中含有 λ 的 n 次幂的情况，更简便的做法是同除 λ^n，转化成 $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 的形式再用累加法．对于本题，有 $\dfrac{a_n}{3^n}=\dfrac{a_{n-1}}{3^{n-1}}+\dfrac{1}{3}$，这样就很好做了．接下来上点强度．

> 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+n(1+2^n)(n\in\mathbb{N}^*)$，求其通项公式．

首先试试上一题的同除 λ^n 的方法．

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}+\frac{n}{2}\Leftrightarrow\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_1}{2^1}=\frac{n(n+1)}{4}+\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^{i+1}}$$

等差比数列求和过程略．故 $a_n=2^{n-2}(n^2-n+6)-n-1,n\in\mathbb{N}^*$．

其实这题用待定系数法也能做．设

$$\begin{aligned}&a_{n+1}+[\alpha(n+1)+\beta]+[\gamma(n+1)^2+\delta(n+1)+\mu]\cdot 2^{n+1}\\=&2[a_n+(\alpha n+\beta)+(\gamma n^2+\delta n+\mu)\cdot 2^n]\end{aligned}$$

则

$$a_{n+1}=2a_n+\alpha n+(\beta-\alpha)-(4\gamma n+2\gamma+2\delta)\cdot 2^n=2a_n+n+n\cdot 2^n$$

于是 $\alpha=1,\beta=1,\gamma=-\dfrac{1}{4},\delta=\dfrac{1}{4}$．取 $\mu\neq-\dfrac{3}{2}$，

$$a_n+(n+1)+(-\frac{1}{4}n^2+\frac{1}{4}n+\mu)\cdot 2^n=2^{n-1}\cdot(3+2\mu)$$

化简即得．显然这很麻烦，而且在求出系数之前，含 n 项的最高次是未知的，需要慢慢尝试．不过待定系数法也因此具有了普适性，所有数列求通项都能用待定系数法．

待定系数法

若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\lambda a_n+f(n)(\lambda\neq 0,1)$，可进行合理猜测，用**待定系数法**设出 $g(n)$，使得 $a_{n+1}+g(n+1)=\lambda[a_n+g(n)]$，从而求出 $g(n)$.
若 $g(n)$ 中含有 λ 的 n 次幂，优先考虑同除 λ^n，转化成 $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 的形式.

前文出现过的递推式还都长得慈眉善目，那就见识一下分式型的递推式吧.

> 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_n=\dfrac{4a_{n-1}+3}{a_{n-1}+2}(n\geq 2,n\in\mathbb{N}^*)$，求其通项公式.

方程 $x=\dfrac{4x+3}{x+2}$ 的解为 $x_1=-1,x_2=3$.

$$\frac{a_n+1}{a_n-3}=\frac{\dfrac{4a_{n-1}+3}{a_{n-1}+2}+1}{\dfrac{4a_{n-1}+3}{a_{n-1}+2}-3}=5\frac{a_{n-1}+1}{a_{n-1}-3}\Leftrightarrow\frac{a_n+1}{a_n-3}=5^{n-1}\cdot(-\frac{3}{5})$$

故 $a_n=\dfrac{9\cdot 5^{n-2}-1}{3\cdot 5^{n-2}+1},n\in\mathbb{N}^*$. 做这种题都按这个套路来就行. 下面来个三世同堂.

> 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a_2=1$，$a_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n-\dfrac{1}{9}a_{n-1}(n\geq 2,n\in\mathbb{N}^*)$，求其通项公式.

用待定系数法尝试构造等比数列. 令 $a_{n+1}-\alpha a_n=\beta(a_n-\alpha a_{n-1})(n\geq 2)$，则

$$a_{n+1}=(\alpha+\beta)a_n-\alpha\beta a_{n-1}=\frac{2}{3}a_n-\frac{1}{9}a_{n-1}$$

故 α,β 是方程 $x^2-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{9}=0$ 的两根. 解得 $\alpha=\beta=\dfrac{1}{3}$. 故 $a_n=(2n-1)\cdot(\dfrac{1}{3})^{n-1},n\in\mathbb{N}^*$.
对于更一般的情况，下面直接给出通法，等我学会了再回来推导.

不动点法和特征根法

若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}(r\neq 0,ps-rq\neq 0)$，$x_1,x_2$ 为方程 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ 的两根，则由**不动点法**可知

$$x_1\neq x_2\text{时}\{\frac{a_n-x_1}{a_n-x_2}\}\text{为等比数列}$$

$$x_1=x_2=x_0\text{时}\{\frac{1}{a_n-x_0}\}\text{为等差数列}$$

若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\lambda a_n+\mu a_{n-1}(n\geq 2)$，$x_1,x_2$ 为方程 $x^2=\lambda x+\mu$ 的两根，则由**特征根法**可知

$$x_1\neq x_2\text{时}a_n=\alpha x_1^n+\beta x_2^n$$

$$x_1=x_2=x_0\text{时}a_n=(\alpha+\beta n)x_0^n$$

代入 a_1,a_2 即可解出 α,β.

累加法、累乘法、待定系数法、不动点法和特征根法是数列求通项最基本的方法. 通过取倒数、取对数、平方和开方运算，可以把它们变得更恶心一点，但万变不离其宗.

> 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}^2=4a_n(n\in\mathbb{N}^*)$，求其通项公式.

$$\ln a_{n+1}-2\ln 2=\frac{1}{2}(\ln a_n-2\ln 2)\Leftrightarrow a_n=4^{1-(\frac{1}{2})^{n-1}}.$$

> 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{5}{2}$，$a_{n+1}=a_n^2-2(n\in\mathbb{N}^*)$，求其通项公式.

可令 $a_n=b_n+\frac{1}{b_n}$，不妨设 $b_n\in(0,1),b_1=\frac{1}{2}$. 则

$$a_{n+1}=a_n^2-2\Leftrightarrow b_{n+1}+\frac{1}{b_{n+1}}=b_n^2+\frac{1}{b_n^2}$$

由函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$在$(0,1)\downarrow$得

$$b_{n+1}=b_n^2\Leftrightarrow \ln b_n=2^{n-1}\cdot\ln\frac{1}{2}\Leftrightarrow b_n=(\frac{1}{2})^{2^{n-1}}\Leftrightarrow a_n=2^{2^{n-1}}+(\frac{1}{2})^{2^{n-1}}$$

> 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{\pi}{4}$, $a_n\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $(2n+1)\sin(a_{n+1}-a_n)=\sin(a_{n+1}+a_n)(n\in\mathbb{N}^*)$，求其通项公式.

展开并化简得

$$n\sin a_{n+1}\cos a_n=(n+1)\cos a_{n+1}\sin a_n\Leftrightarrow\frac{\tan a_{n+1}}{n+1}=\frac{\tan a_n}{n}$$

故

$$\frac{\tan a_n}{n}=\frac{\tan a_1}{1}=1\Leftrightarrow a_n=\arctan n$$