Криптосистеми на еліптичних кривих

Lecture 4: Forms

Грубіян Євген Олександрович

Ізоморфізм

Ізоморфізм еліптичних кривих

Біраціональне відображення $\phi : E \longrightarrow E'$ між двома еліптичними кривими, що зберігає групову структуру(ізоморфізм їх груп), а також $\phi(\mathcal{O}_E) = \mathcal{O}_{E'}$

Якщо криві задані в формі Вейєрштраса

$$E/K: \quad y^2 = x^3 + ax + b, \qquad E'/K: \quad y^2 = x^3 + a'x + b'.$$

Тоді всі біраціональні відображення що зберігають групову структуру (ізоморфізми) можна задати:

$$a' = u^4 a, \quad b' = u^6 b \quad \phi(x, y) = (u^2 x, u^3 y)$$

Де $u \in \overline{K}$, при чому воно єдине для 2х ізоморфних кривих

j-інваріант еліптичної кривої

j-інваріант

Нехай $E/K : y^2 = x^3 + ax + b$ — еліптична крива у формі Веєрштраса. Тоді j-інваріант E визначається як

$$j(E) = 1728 \frac{4a^3}{4a^3 + 27b^2}.$$

- Еліптичні криві E/K та E'/K є ізоморфними тоді й тільки тоді, коли
$$j(E) = j(E').$$
- Таким чином, j-інваріант класифікує класи ізоморфних еліптичних кривих, тобто задає відношення еквівалентності на множині еліптичних кривих над полем K.

Криві кручення (Twists)

Крива кручення

Нехай $E/K : y^2 = x^3 + ax + b$ — еліптична крива. Еліптична крива E'/K називається кривою кручення (twist) від E, якщо існує ізоморфізм $\phi : E \to E'$ визначений над алгебраїчним замиканням $\overline{K}$, але ϕ не визначений над K.

Квадратичне кручення (Quadratic Twist)

Якщо $d \in K^\times$ є елементом, який не є квадратичним лишком в K, тоді крива квадратичного кручення E:

$$E^d/K : \quad d\,y^2 = x^3 + Ax + B,$$

Криві E та E^d стають ізоморфними над $K(\sqrt{d})$, але не ізоморфними над K.

Зауваження: j-інваріанти задовольняють $j(E) = j(E^d)$, тому криві з однаковим j-інваріантом можуть бути не ізоморфними над K, а лише над $\overline{K}$.

Типи кручень еліптичних кривих

Група автоморфізмів еліптичної кривої

Нехай E/K — еліптична крива. Група $\mathrm{Aut}(E)$ складається з усіх біраціональних відображень (ізоморфізмів) $\phi : E \to E$,

Основні типи кручень:

- Квадратичні кручення: Якщо $j(E) \neq 0, 1728$, то $\mathrm{Aut}(E) \cong \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, і всі кручення є квадратичними.
- Кубічні/секстичні кручення: Якщо $j(E) = 0$, то $\mathrm{Aut}(E) \cong \mu_6 \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ (група 6-их коренів одиниці). У цьому випадку, криві можуть мати кубічні або секстичні кручення.
- Квартові кручення: Якщо $j(E) = 1728$, то $\mathrm{Aut}(E) \cong \mu_4 \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (група 4-их коренів одиниці), тобто можуть існувати квартові кручення

Зауваження: Інших кручень не існує. Для більшості кривих визначені лише квадратичні кручення.

Форми еліптичних кривих

Сучасна криптографія використовує різні подання еліптичних кривих. Серед них:

- Форма Вейєрштраса: $E_w/K : y^2 = x^3 + ax + b$.
- Форма Монтомері: $E_m/K : B\,y^2 = x^3 + Ax^2 + x$.
- Форма Едвардса: $E_d/K : ax^2 + y^2 = 1 + dx^2y^2$.

За певних умов ці форми є біраціонально еквівалентними.

- Перехід $E_w \to E_m$ можливий якщо $\exists P \in E_w : \mathrm{ord}(P) = 2$
- Перехід $E_m \to E_w$ можливий завжди
- Перехід $E_d \longleftrightarrow E_m$ можливий завжди в обидві сторони

Перехід від форми Вейєрштраса до форми Монтомері

Вихідна форма (Вейєрштраса): $E_w/K: \quad y^2 = x^3 + ax + b$.
Умова: Для перетворення необхідно, щоб крива мала раціональну точку порядку 2, тобто існував $r \in K$ та $r^3 + ar + b = 0$ (тобто точка $P = (r, 0) \in E(K)$).

1. Факторизуємо кубічний многочлен:
   $x^3 + ax + b = (x - r)(x^2 + cx + d)$.
2. Здійснюємо трансляцію змінної: $x = X + r, \quad y = Y$. Тоді рівняння набуває вигляду:

$$Y^2 = X^3 + 3rX^2 + (3r^2 + a)X, \quad \lambda = \sqrt{3r^2 + a}$$

3. Виконавши масштабування змінних отримаємо
   $E_m/K: (1/\lambda^3)Y^2 = X^3 + (3r/\lambda)X^2 + X$

Форма Монтомері та диференціальне додавання точок

Розглянемо еліптичну криву в формі Монтомері:

$$E_m/K : B\,y^2 = x^3 + A\,x^2 + x \quad \Delta = B(A-4) \neq 0$$

Однією з ключових властивостей цієї форми є диференціальне додавання: якщо маємо дві точки P та Q, а також точку $P-Q$ (різницю точок), то x-координата суми $P+Q$ визначається лише через x-координати P, Q та $P-Q$.
Наприклад, в афінних координатах (за певною нормалізацією) формула має вигляд:

$$x(P+Q) = \frac{\Big(x(P)x(Q) - x(P-Q)\Big)^2}{\Big(x(P) - x(Q)\Big)^2}.$$

Перевага: Така властивість дозволяє реалізувати алгоритм Montgomery ladder для скалярного множення, де обчислення проводяться лише над x-координатами, що підвищує ефективність і стійкість до side-chanel атак.

Перехід від форми Монтгомері до форми Едвардса

Розглянемо криву в формі Монтгомері:

$$E_m/K: \quad B\,y^2 = x^3 + A\,x^2 + x,$$

Тоді відповідна крива у формі Едвардса записується як:

$$E_d: \quad a\,x_E^2 + y_E^2 = 1 + d\,x_E^2 y_E^2, \quad a = \frac{A+2}{B}, \quad d = \frac{A-2}{B}.$$

З наступним перетвореннями координат (за деякими виключеннями особливих точок порядків 2,4 та $\mathcal{O}$):

$$x_E = \frac{x_M}{y_M}, \quad y_E = \frac{x_M - 1}{x_M + 1},$$

де (x_M, y_M) — координати на кривій E_M.
Зворотні перетворення:

$$x_M = \frac{1 + y_E}{1 - y_E}, \quad y_M = \frac{1}{x_E(1 - y_E)}.$$

Арифметика кривих в формі Едвардса

Нехай E_d — крива в формі Едвардса

$$E_d/K : ax^2 + y^2 = 1 + dx^2y^2, \quad a \neq 0, d \neq 0, d \neq a$$

Переваги цієї форми:

- Уніфікованість закону додавання: Формули додавання та подвоєння мають єдиний вигляд і деколи є повними (без виключень). Точка на нескінченності переходить в $\mathcal{O} \to (0, 1)$
- Ефективність обчислень: Криві Едвардса швидші в порівнянні з аналогами, зокрема існує ряд кривих, арифметика на яких є найшвидшою в класі (Ed25519).
- Безпека: Зменшена ймовірність виникнення виняткових випадків, що покращує захист від атак через витік інформації (наприклад, через аналіз сторони каналу).

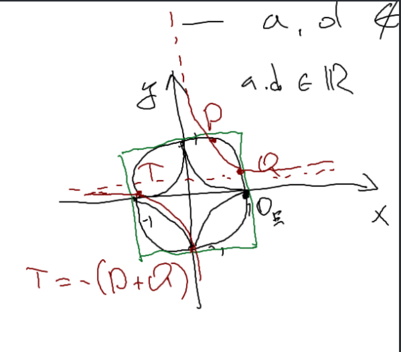
Формули додавання на кривих Едвардса

Нехай $P = (x_1, y_1)$ та $Q = (x_2, y_2)$ — точки на кривій Едвардса

$$E_d/K : ax^2 + y^2 = 1 + dx^2y^2.$$

Тоді формули додавання мають вигляд:

$$x_3 = \frac{x_1y_2 + y_1x_2}{1 + dx_1x_2y_1y_2}, \qquad y_3 = \frac{y_1y_2 - ax_1x_2}{1 - dx_1x_2y_1y_2}.$$



Класифікація кривих в формі Едвардса

Нехай E_d — крива в формі Едвардса над K

$$E_d/K : ax^2 + y^2 = 1 + dx^2y^2, \quad a \neq 0, d \neq 0, d \neq a$$

$$QR(K) = \{x \in K^* | \exists y : y^2 = x\}$$

- $ad \notin QR(K)$ - повні криві в формі Едвардса, завжди можна знайти ізоморфну криву із $a = 1$. Особливі точки відсутні.
- $a, d \in QR(K)$ - квадратичні криві в формі Едвардса. Можуть існувати особливі точки порядку 2 або 4.
- $a, d \notin QR(K)$ - скручені криві в формі Едвардса. Можуть існувати особливі точки порядку 2.