

Universidade de São Paulo
Instituto de Física de São Carlos



Projeto 5: Introdução à física computacional

Julia Martins Simão - 13694997

Sumário

Introdução	2
Tarefa A	2
A1	2
A2	3
Tarefa B	6
B1	6
B2	9
B3	10

Introdução

O objetivo desse projeto é estudar alguns efeitos da força gravitacional a partir de simulações do Sistema Solar. Para isso, é utilizado o Método de Verlet, que é mais preciso do que os métodos utilizados em projetos anteriores. Por conta da sensibilidade dos casos estudados, foi necessária a utilização de variáveis de precisão dupla.

Tarefa A

Problema de dois corpos

Monte as expressões para usar o método de Verlet e faça um programa que calcule as posições $(x(t), y(t))$ de um planeta que gira ao redor do Sol. Que valor de Δt você precisa ajustar para ter órbita circular? Isto é, se você sabe que deve ter uma órbita circular, que valor de Δt te dá realmente uma órbita circular? Se você varia um pouco (para mais ou para menos) a velocidade, você deve verificar a órbita saindo da circular e indo para a elíptica.

Utilizando o método de Verlet para a terra ($r = 1$), foi possível notar que o valor de Δt ideal para se obter uma órbita circular ($v_0 = \sqrt{\frac{GM_S}{r}}$) foi $\Delta t \approx 0.001$, apesar das variações no formato da órbita serem pequenas com a variação de Δt . O código utilizado para essa análise foi adaptado para as tarefas A1 e A2 (tudo em um único código), mostrado no decorrer desse projeto.

A1

Considere a tabela 1 abaixo onde temos as massas, raios e excentricidades das órbitas planetárias do sistema solar. A excentricidade é dada por:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (1)$$

Calcule por tentativa e erro (numericamente) a velocidade que teria que ter cada planeta para se obter uma órbita circular. Faça uma tabela da razão $\frac{T^2}{R^3}$ para os planetas (Terceira Lei de Kepler), onde T e R são os períodos e raios das respectivas órbitas (discuta seus resultados).

Planeta	massa (kg)	raio (UA)	excentricidade
Mercúrio	2.4×10^{23}	0.39	0.206
Vênus	4.9×10^{24}	0.72	0.007
Terra	6.0×10^{24}	1.00	0.017
Marte	6.6×10^{23}	1.52	0.093
Júpiter	1.9×10^{27}	5.20	0.048
Saturno	5.7×10^{26}	9.24	0.056
Urano	8.8×10^{25}	19.19	0.046
Netuno	1.03×10^{26}	30.06	0.010
Plutão	6.0×10^{24}	39.53	0.248

Tabela 1: Planetas e suas respectivas massas, raios e excentricidade de suas órbitas.

Resultados:

Os resultados obtidos são mostrados em 1. Como era esperado, a razão $\frac{T^2}{R^3}$ é aproximadamente constante e igual à 1 para todos os planetas (pois assumiu-se órbita circular, ou seja, $v_0 = \sqrt{\frac{GM_S}{R}}$, que é a velocidade de escape do planeta). Além disso, os períodos são maiores quanto maior for o raio da órbita.

Foi possível notar, também, que quanto maior for o período do planeta, maior pode ser o valor de Δt , levando em conta a “regra” de que o valor do “passo” de cada iteração deve ser proporcional ao período do planeta.

0.390000000000000001	0.24357568499278412	1.0001705072523812
0.71999999999999997	0.61106017399197998	1.0003925975199033
1.00000000000000000	1.0005002248503003	1.0010006999255014
1.52000000000000000	1.8744141981965794	1.0004614678253838
5.20000000000000002	11.904761604022323	1.0079323285204547
9.24000000000000002	28.169013372897894	1.0058364234542834
19.1900000000000001	86.956519542423933	1.0699891482958308
30.059999999999999	166.66666245631254	1.0226583024866440
39.5300000000000001	249.99999368446879	1.0118113629812719

Figura 1: Respectivamente raio, período e a razão T^2/R^3 para cada planeta.

A2

Execute seu programa para órbitas não circulares e verifique em que condições as órbitas são fechadas ou não. Em seguida, para o caso das órbitas fechadas, verifique as três Leis de Kepler:

1. **Primeira Lei de Kepler:** Todos os planetas movem-se em órbitas elípticas tendo o Sol em um dos focos.
2. **Segunda Lei de Kepler:** A linha que une um planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.
3. **Terceira Lei de Kepler:** Se T é o período da órbita e a é o semi-eixo maior da elipse, então $\frac{T^2}{a^3} = \text{constante}$ para todos os planetas.

Código:

```
implicit real*8(a-h, o-z)
pi=acos(-1e0)
gm=4*pi**2

open(unit=1, file='a2.dat')
open(unit=2, file='excent.dat')
open(unit=3, file='area.dat')

dt=0.0001d0

do j=1,9
    read(2,*) r,eps

    c tempo longo de simulacao para abranger
    c todos os diferentes periodos
    n=1000/dt

    c assumindo orbita eliptica
    vy=sqrt(gm*(1-eps)/(r*(1+eps)))
    vx=0.0e0

    x=r*(1+eps)
    y=0.0
    t=0

    ncont=0
    somax=0.0
    somay=0.0

    x_old=x-vx*dt
    y_old=y-vy*dt
```

```

do i=1,n
    t=t+dt
    c raio para cada nova coordenada x, y
    r_new=sqrt(x**2+y**2)
    ax=-gm*x/r_new**3
    ay=-gm*y/r_new**3

    c metodo de verlet
    y_aux=2*y-y_old+ay*dt**2
    x_aux=2*x-x_old+ax*dt**2

    c busca direta para encontrar o periodo
    if(y*y_aux .lt. 0.0) then
        ncont=ncont+1
        somax=somax+abs(x)
    end if

    if(x*x_aux .lt. 0.0) then
        somay=somay+abs(y)
    end if

    c atualizacao das variaveis para mais uma iteracao
    x_old=x
    y_old=y

    x=x_aux
    y=y_aux
end do

per=2*t/ncont
a=2*somax/ncont
b=2*somay/ncont
razao=per**2/max(a,b)**3

c=sqrt(max(a,b)**2-min(a,b)**2)
apr_eps=c/max(a,b)
write(1,*) r,per,razao,apr_eps
end do

close(1)
close(2)
close(3)
end

```

Resultados:

As órbitas são fechadas por conta da dependência da Força Gravitacional com $\frac{1}{r^2}$, acrescido ao fato do sistema em estudo ser de dois corpos (Sol+planeta). A partir dessas informações, foi possível gerar um programa que verificasse a validade das Leis de Kepler para órbitas fechadas.

Para verificar a Primeira Lei, é necessário compreender que, no nosso sistema, o Sol já foi tomado na posição correta. Ademais, para a órbita ser elíptica, é preciso que a excentricidade $\epsilon > 0$, condição que, como mostrado em 3, foi satisfeita para todos os planetas. Os valores de ϵ ficaram próximos dos mostrados em 1, com exceção de Urano, que também foi o planeta cujo período calculado ficou mais distante do esperado.

Já no caso da verificação da Segunda Lei, o código foi adaptado para não ler os valores de r e ϵ de um arquivo, e as áreas para alguns planetas foram calculadas em espaços de tempo $\Delta T = 100$, para que a quantidade de pontos não fosse tão grande. A partir dessa adaptação, foi plotado o gráfico mostrado na figura 2. O trecho adicionado ao código foi:

```

c teste da segunda lei - calculo da area
if(mod(i,100) .eq. 0) then
    if(theta0*theta .gt. 0.0) then
        area=(theta-theta0)*r_new**2/2
        write(3,*) area
    end if
    theta0=theta
end if

```

Com $\theta_0 = 0$ e $\theta = \text{atan}(y_i/x_i)$. Os resultados foram guardados no arquivo ‘*area.dat*’.

Finalmente, para a Terceira Lei foi necessário estimar o período de cada planeta pelo método da Busca Direta, assim como o valor de a . Os valores da razão $\frac{T^2}{a^3}$ foi aproximadamente constante para todos os planetas.

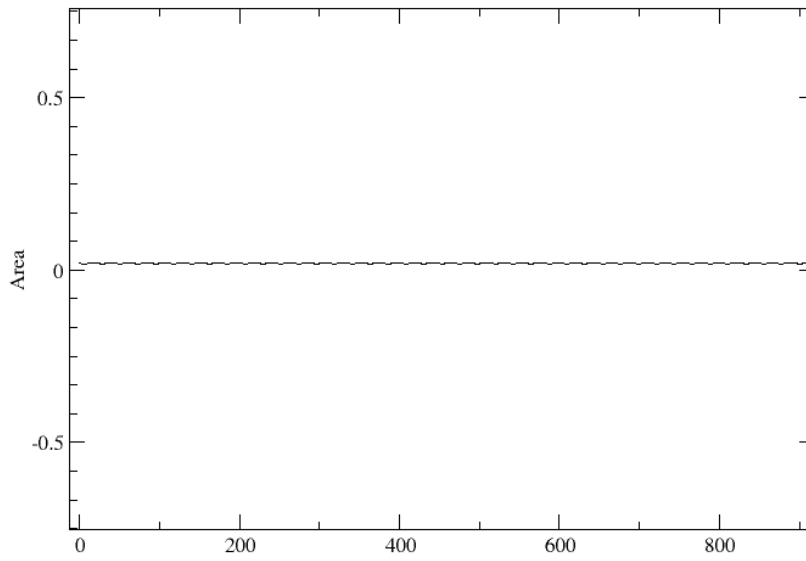


Figura 2: Área varrida pela distância ao Sol em intervalos de tempo $\Delta T = 100$.

raio	período	T^2/a^3	excentricidade
0.390000000000000001	0.24357569110232991	0.12504764927866352	0.28746488715043644
0.719999999999999997	0.61106018931904393	0.12495276799486485	2.2752124348221693E-002
1.000000000000000000	1.0005002499455882	0.12504584492331736	2.0957476768304124E-002
1.520000000000000000	1.8744142452120252	0.12509039418695164	0.13058332331251399
5.200000000000000002	11.904761902626374	0.12462771789861554	8.5027026421091931E-002
9.240000000000000002	28.169014079453955	0.12602753051251500	6.8505342559599502E-002
19.19000000000000001	86.956521723531779	0.11846744307391882	0.28527822927591862
30.05999999999999999	166.66666663676924	0.12783230248865324	1.4141724114190627E-002
39.53000000000000001	249.99999995515387	0.12647640985494857	0.34529030594539117

Figura 3: Verificação das Leis de Kepler.

Tarefa B

Problema de três ou mais corpos

Podemos generalizar o programa anterior para incluir todos os planetas. Para facilitar colocaremos os planetas no plano. Diferentemente do problema de dois corpos a órbita de cada planeta não será mais exatamente periódica. Para testar esta afirmação consideraremos o problema de 3 corpos em que temos a Terra (M_T), Sol (M_S) e Júpiter (M_J). Neste caso as equações de movimento para a Terra (x_T, y_T) são:

$$\frac{d^2 x_T}{dt^2} = -G \frac{M_S x_T}{r_{T-S}^3} - G \frac{M_J}{r_{T-J}^3} (x_T - x_J), \quad (2)$$

$$\frac{d^2 y_T}{dt^2} = -G \frac{M_S y_T}{r_{T-S}^3} - G \frac{M_J}{r_{T-J}^3} (y_T - y_J), \quad (3)$$

e equações análogas para Júpiter (x_J, y_J). Em 4 e 5

$$r_{T-S} = \sqrt{(x_T - x_S)^2 + (y_T - y_S)^2} \quad (4)$$

e

$$r_{T-J} = \sqrt{(x_T - x_J)^2 + (y_T - y_J)^2} \quad (5)$$

são as distâncias instantâneas Terra-Sol e Terra-Júpiter, respectivamente.

B1

Faça um programa usando o método de Verlet para o problema de três corpos. Calcule a órbita da Terra colocando Júpiter na posição e velocidade que teria caso sua órbita fosse circular (no problema de dois corpos). Mostre que agora, diferentemente do problema de dois corpos, a órbita terrestre não é mais periódica. Que distâncias típicas a Terra passa a cada ano de sua posição anterior?

Os valores utilizados para as constantes GM_J e GM_T foram obtidos a partir de GM_S :

$$GM_S = 4\pi^2$$

sendo $M_S \approx 10^3 M_J \approx 3 \cdot 10^5 M_T$

Para as tarefas B1 e B2, foi feito um único programa.

Código:

```
implicit real*8(a-h, o-z)
pi=acos(-1d0)

c valores das constantes GMs, GMt e GMj
gm=4*pi**2
gmj=gm*1.0d-3
gmt=(gm/3)*1.0d-5

open(unit=1, file='terra.dat')
open(unit=3, file='jupiter.dat')

dt=0.0001d0
```



```

c tempo longo de simulacao para abranger
c todos os diferentes periodos
  n=10/dt

  rt=1.0d0
  rj=5.2d0
  eps=0.017d0

c assumindo orbita geral para a terra
  vyt=dsqrt(gm*(1-eps)/rt*(1+eps))
c assumindo orbita circular para jup
  vyj=dsqrt(gm/rj)

  vxt=0.0d0
  vxj=0.0d0

  xt=rt*(1+eps)
c assumindo que jupiter tem eps=0
  xj=rj

  yt=0.0d0
  yj=0.0d0
  t=0

  xt_old=xt-vxt*dt
  yt_old=yt-vyt*dt

  xj_old=xj-vxj*dt
  yj_old=yj-vyj*dt

  do i=1,n
    t=t+dt
c raio terra-jup para cada nova coordenada x, y
    rtj=dsqrt((xt-xj)**2+(yt-yj)**2)
c as coordenadas do sol sao (0,0)
c raio terra sol
    rts=dsqrt(xt**2+yt**2)
c raio jupiter sol
    rjs=dsqrt(xj**2+yj**2)

    axt=-gm*xt/rts**3
    ayt=-gm*yt/rts**3

    axj=-gm*xj/rjs**3
    ayj=-gm*yj/rjs**3

    r=1/rtj**3
c metodo de verlet para terra e jup
    xt_aux=2*xt-xt_old+(axt+gmj*(xt-xj)*r)*dt**2
    yt_aux=2*yt-yt_old+(ayt+gmj*(yt-yj)*r)*dt**2

    xj_aux=2*xj-xj_old+(axj+gmt*(xj-xt)*r)*dt**2
    yj_aux=2*yj-yj_old+(ayj+gmt*(yj-yt)*r)*dt**2

    write(1,*) xt,yt
    write(3,*) xj,yj
c atualizacao das variaveis para mais uma iteracao
    xt_old=xt
    yt_old=yt

```

```

xt=xt_aux
yt=yt_aux

xj_old=xj
yj_old=yj

xj=xj_aux
yj=yj_aux
end do

close(1)
close(3)
end

```

Resultados:

Para que a órbita de Júpiter fosse aproximadamente circular, o valor inicial $v_0 = \sqrt{\frac{GM_S}{r_J}}$ foi utilizado, além de $x_0 = r_J$. Com os resultados obtidos, foi plotada a figura mostrada em 4 e 5, e a partir da figura 5 foi possível notar a não periodicidade da órbita terrestre, além de se obter as distâncias em que a Terra passa a cada ano de sua posição inicial, que são da ordem de 10^{-4} UA.

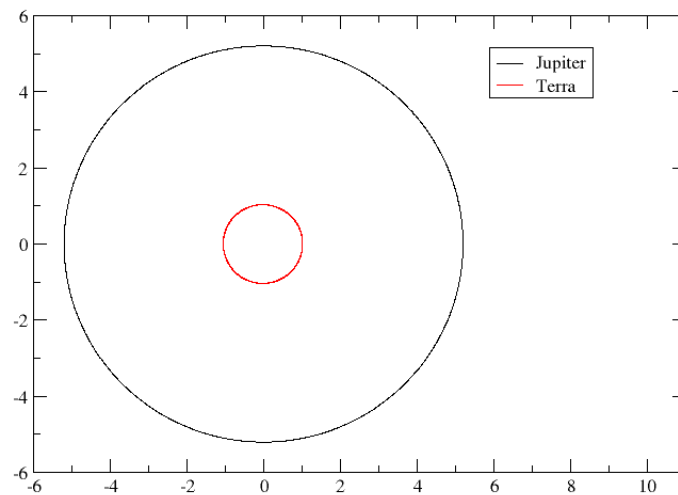


Figura 4: Órbitas da Terra e de Júpiter.

B2

Multiplique a massa de Júpiter por 100 e 1000 e veja os efeitos mais acentuados.

Com o aumento da massa de Júpiter, os efeitos da não periodicidade orbital terrestre ficaram mais evidentes, como é possível notar nas figuras 6 e 7.

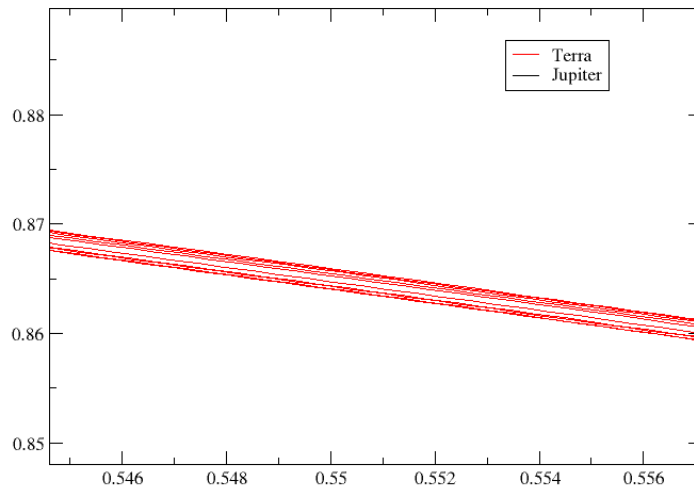


Figura 5: Zoom da órbita da Terra sob efeitos de Júpiter (com massa $M = M_J$) e do Sol.

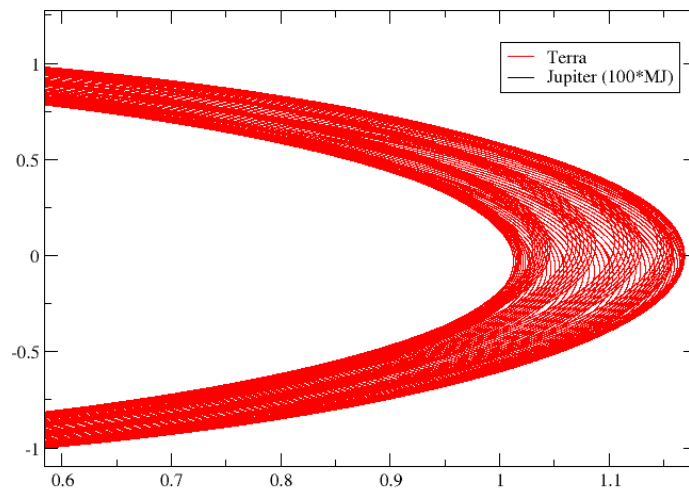


Figura 6: Zoom da órbita da Terra sob efeitos de Júpiter (com massa $M = 100M_J$) e do Sol.

B3

Existe uma faixa relativamente grande do sistema solar com uma grande concentração de asteróides. Alguns deles possuem dados astronômicos conforme mostrado em 2.

Considere os dados para Júpiter sendo raio 5.2 UA e velocidade 2.755 UA/ano. Despreze o efeito dos asteróides em Júpiter e apenas considere o efeito de Júpiter e do Sol nos asteróides. Monte as órbitas dos asteróides devido aos efeitos gravitacionais de Júpiter. Discuta seus resultados. Você já ouviu falar nas lacunas de Kirkwood?

Coloque os planetas todos juntos (no plano) e brinque com eles!!!

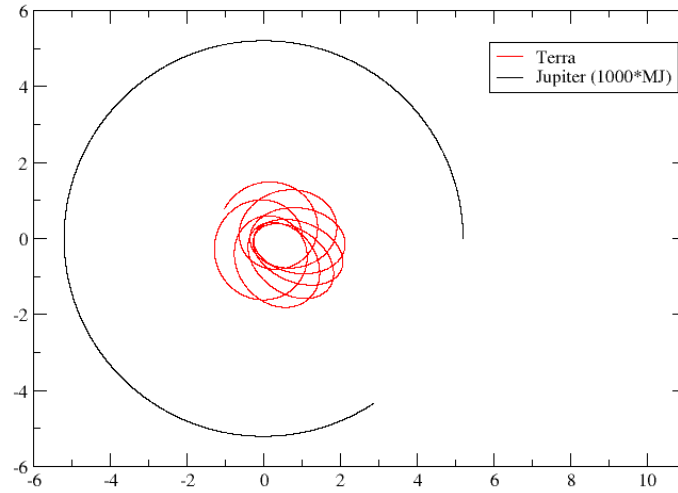


Figura 7: Órbitas da Terra e de Júpiter com $M = 1000M_J$.

Objeto	Raio (UA)	Velocidade (UA/ano)
Asteróide 1	3.000	3.628
Asteróide 2	3.276	3.471
Asteróide 3	3.700	3.267

Tabela 2: Dados dos asteróides.

Código:

```

implicit real*8(a-h, o-z)
dimension r(1:4)
dimension v0(1:4)
dimension vx(1:4)
dimension x(1:4)
dimension y(1:4)
dimension x_old(1:4)
dimension y_old(1:4)
dimension x_aux(1:4)
dimension y_aux(1:4)
c raios jupiter, ast 1, ast 2 e ast 3
r=(/5.2d0, 3.0d0, 3.276d0, 3.7d0/)
vx=(/0.0d0, 0.0d0, 0.0d0, 0.0d0/)
c v0 jup, ast 1, ast 2 e ast 3 - orbita circ
v0=(/2.755d0, 3.628d0, 3.471d0, 3.267d0/)

c valores das constantes GMs e GMj
pi=dacos(-1d0)
gm=4*pi**2
gmj=gm*1.0d-3

```

```

        open(unit=1, file='ast1.dat')
        open(unit=2, file='ast2.dat')
        open(unit=3, file='ast3.dat')
        open(unit=4, file='jup.dat')

        dt=0.0001d0
        n=300/dt
c como agora sao muitos corpos, convem usar vetores
        do i=1,4
                x(i)=r(i)
                y(i)=0.0d0

                x_old(i)=x(i)-vx(i)*dt
                y_old(i)=y(i)-v0(i)*dt
        end do

        do j=1,n
                t=t+dt
c distancia jup-sol
                rj=dsqrt(x(1)**2+y(1)**2)

                do k=2,4
c distancia jup-ast(1,2,3)
                        raj=dsqrt((x(k)-x(1))**2+(y(k)-y(1))**2)
c distancia ast(1,2,3)-sol
                        ras=dsqrt(x(k)**2+y(k)**2)

                        ax=-gm*x(k)/ras**3
                        ay=-gm*y(k)/ras**3

                        axja=-gmj*(x(k)-x(1))/raj**3
                        ayja=-gmj*(y(k)-y(1))/raj**3
c metodo de verlet asteroides
                        x_aux(k)=2*x(k)-x_old(k)+(ax+axja)*dt**2
                        y_aux(k)=2*y(k)-y_old(k)+(ay+ayja)*dt**2
                end do

                axj=-gm*x(1)/rj**3
                ayj=-gm*y(1)/rj**3
c metodo de verlet jupiter
                x_aux(1)=2*x(1)-x_old(1)+axj*dt**2
                y_aux(1)=2*y(1)-y_old(1)+ayj*dt**2

                do l=1,4
c atualizo todos os vetores para nova iteracao
                        x_old(l)=x(l)
                        y_old(l)=y(l)

                        x(l)=x_aux(l)
                        y(l)=y_aux(l)

                        write(l,*) x(l),y(l)
                end do
        end do
        close(1)
        close(2)
        close(3)
        close(4)
end

```

Resultados:

Com os resultados obtidos pelo programa, foi plotado um gráfico, que é mostrado em 8. Na figura 9, é dado um “zoom” no plot, de modo que a visualização dos comportamentos das órbitas fosse mais claro. É evidente que o asteróide 2 “sente” de maneira mais acentuada a presença de Júpiter. O motivo disso é explicado pelas Lacunas de Kirkwood: locais entre Marte e Júpiter onde não há (aproximadamente) asteróides. Pelo estudo dessas lacunas, é possível notar que a lacuna que está localizada numa posição de aproximadamente 3.3 UA do Sol corresponde a um período orbital que é $\approx 0.5T_J$. Assim, um objeto localizado próximo à essa posição (como o asteróide 2), entra em ressonância 2 : 1 com Júpiter: a cada período completo de Júpiter, o asteróide 2 completa 2 períodos.

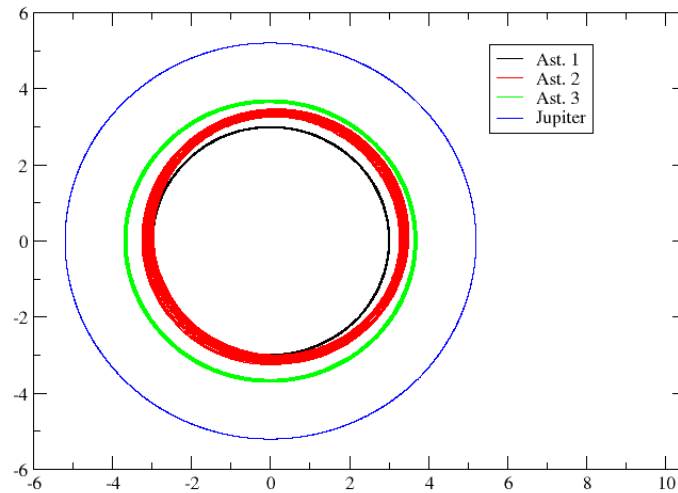


Figura 8: Órbitas dos asteróides e de Júpiter.

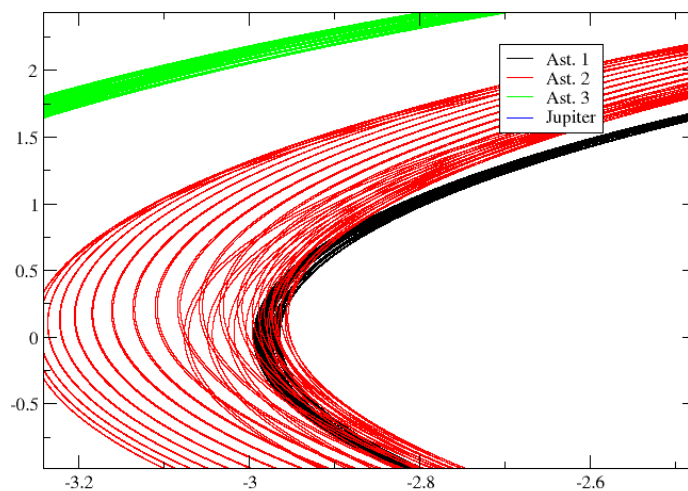


Figura 9: Zoom das órbitas dos asteróides sob influência de Júpiter.

Referências

- [1] Nicolas Giordano. *Computational Physics*. Addison-Wesley / Pearson, 2nd edition, 2006.