

Universidade de São Paulo
Instituto de Física de São Carlos



Projeto 4: Introdução à física computacional

Julia Martins Simão - 13694997

São Carlos
2025

Sumário

Introdução	2
Tarefa A	2
Pêndulo simples	2
Tarefa B	5
B1	6
B2	8
B3	9
B4	10
Tarefa C	11
Tarefa D	14
Tarefa E	16

Introdução

Nesse projeto explora-se as diversas características físicas de um pêndulo. Inicialmente, trata-se do pêndulo simples e de dois métodos computacionais para a sua descrição: os métodos de Euler e Euler-Cromer. Posteriormente, adiciona-se forçamento e amortecimento ao pêndulo, de modo que novos fenômenos pudessem ser visualizados. A partir da tarefa B, utiliza-se o Método de Euler-Cromer, pois ele mostra-se mais robusto para a caracterização do sistema físico. O objetivo final do projeto é caracterizar e compreender o regime (semi) caótico de um pêndulo físico.

Em todas as tarefas utiliza-se que $l = 9.8$ m (comprimento da haste que segura a partícula), $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$ (aceleração da gravidade) e $m = 1$ kg (massa da partícula), de modo a facilitar os cálculos.

Tarefa A

Pêndulo simples

Faremos um programa que resolva numericamente o pêndulo dentro da aproximação harmônica. Uma possível discretização seria o Método de Euler:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\theta \rightarrow \omega_{i+1} = \omega_i - \frac{g}{l}\theta_i \Delta t \quad (1)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \rightarrow \theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i \Delta t \quad (2)$$

$$t = i \Delta t$$

Faça um programa que calcule $\theta(t)$ usando as equações acima. Faça sempre $0 \leq \theta \leq 2\pi$, isto é, quando θ ultrapassar 2π faça $\theta \rightarrow \theta - 2\pi$, ou se ficar negativo $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$, em suma $\theta = \theta \pmod{2\pi}$. Neste programa faça também o cálculo de $E(t)$, sendo E a energia total do sistema.

Você notará que a solução está incorreta, e que o sistema estará aumentando a sua energia. Isto nos diz que a discretização escolhida não é adequada. Mostre graficamente seus resultados. Uma ligeira modificação no Método de Euler consertará este problema. Ao invés de (2), consideremos:

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \omega_{i+1} \Delta t \quad (3)$$

Pêndulo simples

Para uma partícula de massa m presa por uma haste rígida a um suporte, sendo θ o ângulo que a corda faz com a vertical e a aceleração da gravidade “apontando” para baixo, a segunda Lei de Newton pode ser escrita na forma:

$$F = -mg \sin \theta = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Aqui, $\frac{d^2 s}{dt^2}$ é a aceleração da partícula e s é a seção de arco varrida pelo ângulo θ , de modo que $s = l\theta$. Assumindo θ pequeno, tem-se que $\sin \theta \approx \theta$ e, assim

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta$$

Essa equação diferencial tem solução da forma $\theta = \theta_0 \sin(\Omega t + \delta)$, com $\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ sendo a frequência de oscilação natural da partícula e θ_0 e δ constantes que dependem das condições iniciais do problema.

Para tratar o problema numericamente, é útil que a equação de movimento seja reescrita com duas equações:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l} \theta \quad (4)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (5)$$

com ω sendo a frequência angular do movimento.

É possível, também, descrever matematicamente a energia desse sistema:

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}ml^2\omega^2}_{\text{energia cinética}} + \underbrace{mgl(1 - \cos \theta)}_{\text{energia potencial}}$$

E, novamente utilizando a aproximação de pequenos ângulos, tem-se que $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ e, portanto $1 - \cos \theta \approx \frac{\theta^2}{2}$ e a energia se reduz à

$$E = \frac{1}{2}ml^2\left(\omega^2 + \frac{g}{l}\theta^2\right) \quad (6)$$

Método de Euler

A discretização desse método é baseada nas equações 4 e 5 para tempos $t = i\Delta t$, $i = 0, 1, 2, \dots$. O problema agora é descrito pelas equações 1 e 2.

Substituindo os valores de θ_{i+1} e ω_{i+1} em θ e ω na equação 6, tem-se a discretização da energia do Método de Euler:

$$E_{i+1} = E_i + \frac{1}{2}mgl\left(\omega_i^2 + \frac{g}{l}\theta_i^2\right)(\Delta t)^2 \quad (7)$$

Assim, como o segundo termo sempre será positivo, a energia sempre aumenta, o que não condiz com o que acontece no mundo real.

Método de Euler-Cromer

O Método de Euler-Cromer corrige o problema da energia do método anterior alterando a discretização de θ de modo que a equação 2 se transforme na equação 3. A energia agora é conservada, pois o método utiliza a velocidade angular da partícula no fim do intervalo para calcular a posição da mesma no instante $t = t_{i-1} + i\Delta t$, ao invés de considerar a velocidade antiga para o cálculo da posição atual.

Código:

```

parameter(g=9.8, l=9.8, del_t=0.01, tmax=50)
pi=acos(-1e0)

open(unit=1, file='energia1.dat')
open(unit=2, file='theta1.dat')
open(unit=3, file='energia2.dat')
open(unit=4, file='theta2.dat')

t=0

c condicoesiciais euler
e=0
omg=0
theta=0.1

c condicoesiciais euler cromer
e2=0
omg2=0
theta2=0.1

```

```

c n=5000
    n=tmax/del_t
    do i=1,n
        t=t+del_t

c euler
    omg_aux=omg-theta*del_t
    theta_aux=theta+omg*del_t

c euler cromer (e.c.)
    omg2_aux=omg2-theta2*del_t
    theta2_aux=theta2+omg2_aux*del_t

c e = energia euler; e2 = energia e.c.
c os valores foram multiplicados por 10
c para que o grafico ficasse visualmente
c mais bonito
    e=10*0.5*(g*l*(omg**2+theta**2)*del_t**2)
    e2=10*0.5*(g*l*(omg2**2+theta2**2)*del_t**2)

c preparo as variaveis para mais um i
    omg=omg_aux
    theta=theta_aux
    omg2=omg2_aux
    theta2=theta2_aux

c guardo as energias e thetas em arquivos
    write(1,*) t, e
    write(2,*) t, theta
    write(3,*) t, e2
    write(4,*) t, theta2
end do
close(1)
close(2)
close(3)
close(4)
end

```

Resultados:

Os resultados obtidos foram guardados nos arquivos *energia1.dat*, *theta1.dat* (Método de Euler), *energia2.dat*, *theta2.dat* (Método de Euler-Cromer), e os gráficos obtidos a partir deles são mostrados nas figuras 1 e 2.

Como esperado, a energia aumenta com o tempo com o Método de Euler e é mantida aproximadamente constante com o Método de Euler-Cromer. É possível notar também que os valores de θ aumentam com o tempo com o primeiro método e essa é a razão do aumento da energia. Isso implica que há ω_{i+1} diminui a com relação à ω_i .

No código, foi utilizado $\Delta t = 0.01$ s, visto que o erro do método é da ordem de Δt . Os valor inicial de θ foi escolhido de modo que fosse suficientemente pequeno mas não nulo, pois ω inicial já havia sido escolhido como 0 (já que no instante 0 a partícula está parada) e, se ambos fossem nulos, não haveria movimento oscilatório.

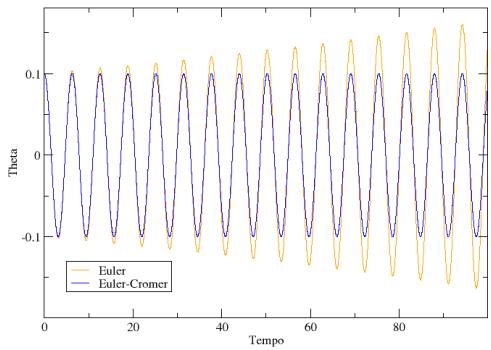


Figura 1: Evolução de $\theta(t)$ de um pêndulo simples pelos métodos de Euler e Euler-Cromer.

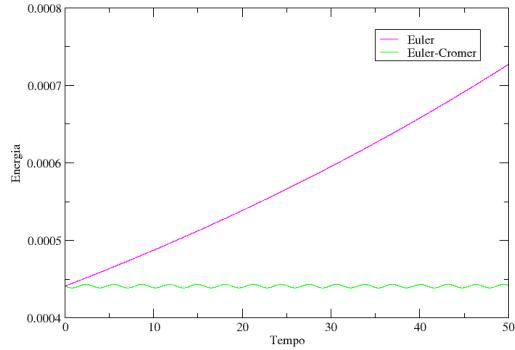


Figura 2: Evolução de $E(t)$ de um pêndulo simples nos métodos de Euler e Euler-Cromer.

Tarefa B

Pêndulo forçado e amortecido

Consideremos agora o pêndulo com oscilações de ângulo arbitrário e que esteja sujeito a efeitos dissipativos e sob a ação de forças externas oscilatórias. Neste caso teremos:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l} \sin \theta - \gamma \frac{d\theta}{dt} + F_0 \sin(\Omega t) \quad (8)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (9)$$

sendo γ o termo que dá a escala resistiva, F_0 proporcional à amplitude da força externa e Ω a frequência de oscilação da força externa.

Pêndulo amortecido e forçado

Considerando novamente o pêndulo já abordado, mas adicionando os parâmetros γ , o fator de amortecimento e $F_{ext} = F_0 \sin(\Omega t)$, uma força externa sinusoidal, tem-se um sistema mais complexo do que o anterior. Sua equação de movimento é:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta - \gamma \frac{d\theta}{dt} + F_{ext}$$

A força externa possui dependência temporal e de Ω , a frequência de oscilação natural dessa força (devido a seu caráter sinusoidal). A discretização do novo sistema é feita, novamente, a partir do Método de Euler-Cromer:

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \left[-\frac{g}{l} \sin \theta_i - \gamma \omega_i + F_0 \sin(\Omega t_i) \right] \Delta t \quad (10)$$

E a equação para θ_{i+1} ainda é dada pela relação 2, visto que as aplicações do amortecimento e da força agem diretamente na frequência angular do movimento.

B1

Considere o caso $\gamma = F_0 = 0$, onde temos apenas o pêndulo simples. Solte o pêndulo para alguns valores de θ_0 e calcule o período do movimento como função de θ_0 . Compare seus resultados com o valor obtido pela integral elíptica:

$$T = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} \quad (11)$$

Calcule numericamente a integral acima tomando cuidado com as singularidades em $\theta = +/\theta_0$.

Inicialmente, foram considerados os parâmetros $\gamma = 0 = F_0$, de modo que o pêndulo estivesse ainda na condição de pêndulo simples. Todavia, a aproximação para pequenos ângulos não é mais usada, de modo que $\sin \theta$ não pode ser aproximado para θ .

O período de um movimento para θ qualquer é dado pela integral . Nota-se que a integral depende do valor θ_0 no qual o pêndulo foi solto e possui singularidades integráveis quando $\theta = \theta_0$ ou $\theta = -\theta_0$ (visto que $\cos \theta_0 = \cos(-\theta_0)$). Por conta disso, ela não pode ser calculada numericamente de forma direta, sendo necessário que ela seja dividida em novos intervalos.

$$T = \sqrt{2} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = \sqrt{2} \cdot I \rightarrow \sqrt{2} \int_{-\theta_0+\epsilon}^{\theta_0+\epsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$$

A razão $\frac{l}{g}$ foi omitida pois vale 1 e o novo intervalo a ser considerado é $[-\theta_0 + \epsilon, \theta_0 + \epsilon]$, sendo ϵ um valor pequeno. Esse intervalo pode ser subdividido em 3 outros: $[-\theta_0 + \epsilon, \theta_0 - \epsilon]$, $[-\theta_0, -\theta_0 + \epsilon]$ e $[\theta_0 - \epsilon, \theta_0]$. Agora a integral é dada pela soma de 3 integrais

$$I_1 = \int_{-\theta_0+\epsilon}^{\theta_0+\epsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} \quad (12)$$

$$I_2 = \int_{-\theta_0}^{-\theta_0+\epsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} \quad (13)$$

$$I_3 = \int_{\theta_0-\epsilon}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} \quad (14)$$

As integrais 13 e 14 são simétricas com solução analítica, de modo que as 3 integrais sejam reduzidas a duas, pois elas possuem o mesmo resultado

$$I = I_1 + 2 \cdot I_3 = I_1 + 2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\sin \theta_0}} \quad (15)$$

A primeira integral, então, será calculada numericamente. O método de integração foi o de **Simpson**, pois ele utiliza da subdivisão da função em parábolas em pares de subintervalos, mostrando-se preciso para integrais de funções harmônicas. Os parâmetros utilizando no cálculo da integral foram $\epsilon = 10^{-5}$ (*eps*) e $h = \frac{2\theta_0}{n}$, sendo $n = \frac{tmax}{del_t}$, com *tmax* sendo o tempo de simulação e igual a 1000 e Δt (*del_t*) valendo 0.3. O valor de Δt é maior do que o utilizado na tarefa A por conta do truncamento do erro em razão do número de iterações.

Além disso, o período foi estimado a partir do método da **Busca Direta**, pois um período refere-se ao tempo entre dois pontos de extremos do gráfico da função seno (note que, pela equação 10, a frequência angular possui dependência sinusoidal). Ou seja, dois pontos de cruzamento dos gráficos no eixo das abscissas definem meio período. Assim, o período da oscilação foi estimado utilizando um contador (*ncont*) que era acrescido de 1 quando era encontrada uma mudança de sinal do produto $\omega_i \cdot \omega_{i+1}$ (*omg2·omg2_aux*). Os 8 valores de θ_0 foram escolhidos arbitrariamente e lidos do arquivo *theta0_new.dat*, e as variáveis de período (*tt*), tempo (*t*), omega inicial (*omg2*) e o contador foram zeradas a cada novo valor de θ_0 , em um loop que varia de $i = 1$ até $i = 8$.

Para a tarefa B, foram produzidos 2 programas: o primeiro abrange as partes B1 e B2, e o segundo refere-se às partes B3 e B4. Os resultados são mostrados na tabela 3.

Código:

```

parameter(g=9.8, l=9.8, tmax=1000, del_t=0.3)
parameter(eps=0.00001)
pi=acos(-1e0)

open(unit=2, file='theta0_new.dat')
c condicoes iniciais euler cromer
n=tmax/del_t

c construcao de uma tabela de comparacao dos result
      write(*,*) " theta0      T aproximado      T pela integral
&T theta pequeno"

do i=1,8
c le o arq com valores de theta0
      read(2,*) theta0
c extremos da integral
      a=-theta0+eps
      b=theta0-eps
c valor inicial da integral
      simp=f(a,theta0)+f(b,theta0)

c as variaveis sao zeradas para cada valor de theta0
      theta2=theta0
      tt=0
      omg2=0
      ncont=0
      t=0

c tamanho do passo da integral
      h=2*theta0/n

do j=1,n
      t=t+del_t
c euler cromer
      omg2_aux=omg2-sin(theta2)*del_t
      theta2_aux=theta2+omg2_aux*del_t

c busca direta
      if(omg2*omg2_aux .lt. 0.0) then
          ncont=ncont+1
      end if
c reinicio as variaveis
      omg2=omg2_aux
      theta2=theta2_aux

c calculo da int por simpson
      do k=1,n-1
          if(mod(k,2) .eq. 0) then
              simp=simp+2*f(a+k*h,theta0)
          else
              simp=simp+4*f(a+k*h,theta0)
          end if
      end do
      simp=(h*simp)/3

```

```

c o resultado final do periodo eh a integral calculada
c adicionada da parte calculada analiticamente
    resul=sqrt(2.0)*(simp+2*sqrt(eps/sin(theta0)))

end do

c periodo eh 2*o tempo final dividido pela qntd de
c vezes em que foram identificadas mudanca de sinal
c de omg2*omg2_aux
    tt=t/(ncont/2)

c periodo aproximado para t pequeno
    tt_apr=2*pi*(1+theta0**2/16)
    write(*,*) theta0, tt, resul, tt_apr
end do

close(2)
end

c funcao a integrada
function f(theta2, theta0)
pi=acos(-1e0)
f=1/sqrt(cos(theta2)-cos(theta0))
return
end

```

Resultados:

theta0	T aproximado	T pela integral	T theta pequeno
0.112999998	6.28850031	6.21333122	6.28819990
0.178920001	6.28850031	6.21510792	6.29575682
0.235988006	6.28850031	6.22185135	6.30505514
1.22172999	6.94355249	6.82036400	6.86933756
-1.04718995	6.75588894		NaN 6.71382236
1.57079601	7.46172810	7.30060768	7.25213099
2.61799312	11.1096840	10.8589392	8.97470093
3.61344409	11.6264133		NaN 11.4106493

Figura 3: Tabela de comparação dos resultados das tarefas B1 e B2.

Foi possível notar que a integral não pode ser calculada para valores negativos ou muito grandes de θ_0 , devido às limitações da própria função. Também foi possível notar que a aproximação para θ_0 pequeno é bastante precisa, tal como os outros dois métodos, algo que já era esperado. O período da oscilação correta é $T \approx 6.28$ s.

B2

Considere θ pequeno e verifique que seus resultados são dados por

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right) \quad (16)$$

assim sendo, período será independente de θ_0 . Neste limite teremos oscilações harmônicas.

De acordo com a última coluna da tabela mostrada na figura 3, é possível perceber que a aproximação é bastante precisa para $\theta < 1$ radiano, de modo que as oscilações dentro desse limite são harmônicas.

B3

Considere o caso $\gamma = 0.5$, $F_0 = 0$. Faça o gráfico $\theta \times t$ (rad × s). O amortecimento é crítico, subcrítico ou supercrítico?

Foi produzido um novo programa em que fosse possível variar os valores de F_0 , de modo que ele abrangesse as tarefas B3 e B4.

Código:

```
parameter(tmax=80, del_t=0.04, gama=0.5, omega=0.666667)
pi=acos(-1e0)

        write(*,*) "digite F0: "
        read(*,*) F0

c condicoes iniciais euler cromer
n=tmax/del_t
ncont=0
theta2=0.1
omg2=0.0
tt=0
t=0

open(unit=3, file='theta_t0.dat')
open(unit=4, file='omega_t0.dat')

open(unit=6, file='theta_t05.dat')
open(unit=7, file='omega_t05.dat')

open(unit=8, file='theta_t12.dat')
open(unit=9, file='omega_t12.dat')

do j=1,n
    t=t+del_t
c euler cromer
    omg2_aux=omg2+(-sin(theta2)-gama*omg2+
&F0*sin(omega*t))*del_t
    theta2_aux=theta2+omg2_aux*del_t

c faco a busca direta para a aprox do periodo para F0=0.5
    if(F0 .eq. 0.5) then
        if(omg2*omg2_aux .lt. 0.0) then
            ncont=ncont+1
        end if
    end if

c casos de F0 analisados
c esses ifs foram feitos para facilitar a organizacao
c dos dados em arquivos
    if(F0 .eq. 0.0) then
        write(3,*) t, theta2_aux
        write(4,*) t, omg2_aux
    else if(F0 .eq. 0.5) then
        write(6,*) t, theta2_aux
        write(7,*) t, omg2_aux
```

```

        else if(F0 .eq. 1.2) then
            write(8,*) t, theta2_aux
            write(9,*) t, omg2_aux
        end if

        omg2=omg2_aux
        theta2=theta2_aux
    end do

c calculo do periodo aproximado
if(ncont .gt. 0) then
    tt=2*t/ncont
end if

write(*,*) "o periodo aproximado eh: ", tt
write(*,*) "a frequencia aproximada eh: ", 1/tt

close(3)
close(4)
close(6)
close(7)
close(8)
close(9)
end

```

Resultados:

A partir do programa (com os dados do arquivo *theta_t05.dat*) foi plotado o gráfico mostrado na figura 4, e é possível notar que o comportamento observado descreve um amortecimento subcrítico.

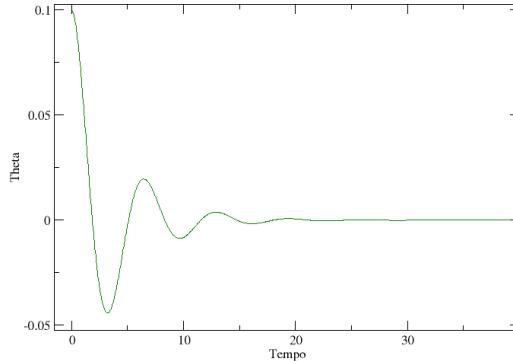


Figura 4: Gráfico do comportamento temporal de θ para $F_0 = 0$ e $\gamma = 0.5$.

B4

Considere o caso $\gamma = 0.5$, $\Omega = \frac{2}{3}$ e $\Delta t = 0.04$. Faça um gráfico conjunto de $\theta(t)$ e $\omega(t)$ para os casos $F_0 = 0$, $F_0 = 0.5$ e $F_0 = 1.2$. Discuta os três casos. Qual a frequência de oscilação do caso em que $F_0 = 0.5$? O movimento do caso em que $F_0 = 1.2$ é periódico? Justifique.

Resultados:

Foram definidos $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.04$ e $\Omega = \frac{2}{3} \approx 0.666667$ e dados os valores $F_0 = 0, 0.5$ e 1.2 como entrada. Para cada valor de entrada, foram criados 2 arquivos, de modo que fosse possível armazenar

o comportamento $\omega(t)$, mostrado na figura 6 e $\theta(t)$, mostrado em 7. Foi estimada a frequência f de oscilação no caso em que F_0 , pois, nesse caso, a oscilação é harmônica. Para isso, estimou-se o período como na tarefa anterior, e usado que $f = \frac{1}{T}$, sendo obtido os valores mostrados em 5. Analisando os resultados para os três casos, é possível notar que o movimento para $F_0 = 1.2$ não é periódico, enquanto que, para $F_0 = 0.5$, tem-se um movimento harmônico. Finalmente, para $F_0 = 0$, nota-se que existe oscilação logo no início, mas ela é dissipada rapidamente, comportamento de amortecimento subcrítico.

```
o periodo aproximado eh: 8.88904953
a frequencia aproximada eh: 0.112497970
```

Figura 5: Frequência e período para $F_0 = 0.5$. Retirado do arquivo *theta_t05.dat*.

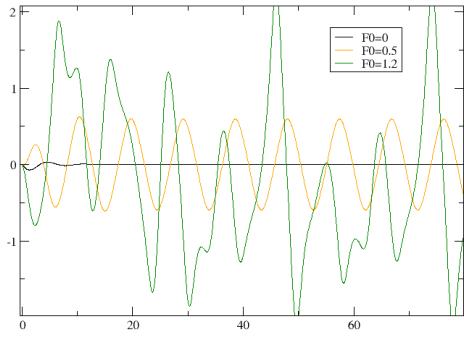


Figura 6: Evolução de $\omega(t)$ (eixo y = ω e eixo x = t) de um pêndulo amortecido e forçado com $\gamma = 0.5$, $\Omega = \frac{2}{3}$ e $F_0 = 0, 0.5$ e 1.2 .

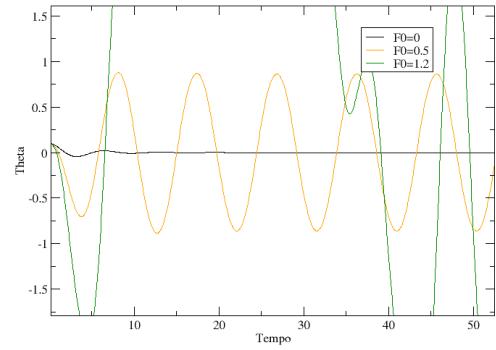


Figura 7: Evolução de $\theta(t)$ de um pêndulo amortecido e forçado com $\gamma = 0.5$, $\Omega = \frac{2}{3}$ e $F_0 = 0, 0.5$ e 1.2 .

Tarefa C

Expoente de Liapunov

Para verificarmos a existência ou não do regime caótico vamos considerar, como antes, $\gamma = 0.5$, $\omega = \frac{2}{3}$, $\Delta t = 0.04$, $F_0 = 0.5$ e $F_0 = 1.2$. Consideramos agora o movimento de dois pêndulos soltos com velocidade nula em ângulos iniciais que difiram de $\theta_0^{(2)} - \theta_0^{(1)} = \Delta\theta_0 = 0.001$ radianos. Faça um gráfico de $\Delta\theta_0$ para os casos em que $F_0 = 0.5$ e $F_0 = 1.2$. Repare que no primeiro caso as trajetórias se aproximam exponencialmente (não caótico), enquanto que no segundo caso as mesmas se afastam exponencialmente (caótico), ou seja

$$\Delta\theta(t) \approx \exp(\lambda t) \quad (17)$$

$$\lambda < 0 \rightarrow \text{não caótico}$$

$$\lambda > 0 \rightarrow \text{caótico}$$

Faça os gráficos $\Delta\theta \times t$ com escala semi-logarítmica e estime o parâmetro λ , chamado de **expoente de Liapunov**.

Expoente de Liapunov

Para um sistema dinâmico composto por trajetórias “infinitesimalmente” próximas, o expoente de Liapunov é a grandeza que define a taxa de separação entre os componentes do sistema no tempo. Para

um sistema composto por dois pêndulos físicos soltos simultaneamente com ângulos iniciais próximos, o expoente de Liapunov é dado pela relação 17. De certa forma, essa grandeza mostra que existe uma certa previsibilidade no sistema, fazendo com que ele não seja rigorosamente caótico. Todavia, no escopo desse projeto, é razoável adotar a definição de que $\lambda < 0 \rightarrow$ comportamento não caótico e $\lambda > 0 \rightarrow$ comportamento caótico.

Código:

```

parameter(tmax=60, del_t=0.04, gama=0.5, omega=0.666667)
pi=acos(-1e0)
n=tmax/del_t
c guarda os resultados para F0=0.5
open(unit=3, file='f05.dat')
c guarda os resultados para F0=1.2
open(unit=4, file='f12.dat')
c arq com os dois valores de F0
open(unit=1, file='trc.dat')

c loop que le cada F0 do arq
do i=1,2
    read(1,*) F0
c valores iniciais de theta arbitrarios para os dois osc.
theta1=0.112000
theta2=0.113000

c valores iniciais de omega para os dois osciladores
omg1=0.0
omg2=0.0
t=0

c loop de euler cromer
do j=1,n
    t=t+del_t

        omg1_aux=omg1-(sin(theta1)+gama*omg1-
& F0*sin(omega*t))*del_t
        omg2_aux=omg2-(sin(theta2)+gama*omg2-
& F0*sin(omega*t))*del_t
        theta1_aux=theta1+omg1_aux*del_t
        theta2_aux=theta2+omg2_aux*del_t

        omg1=omg1_aux
        omg2=omg2_aux

        dif=abs(theta2-theta1)
        dln=alog(dif)

c if para desconsiderar os casos em que a dif de theta1 e 2
c eh menor do que a precisao das variaveis
if(dif .gt. 0.000001) then
    if(F0 .eq. 0.5) then
        write(3,*) t, dln
    else
        write(4,*) t, dln
    end if
end if

```

```

        theta1=theta1_aux
        theta2=theta2_aux
    end do
end do

close(1)
close(3)
close(4)
end

```

Os valores de θ iniciais foram escolhidos de modo que fossem suficiente pequenos e que a diferença entre eles fosse 10^{-3} . Por conta das variáveis do programa serem de simples precisão, fez-se necessária a adição de um *if* que impedisse que a diferença entre os dois ângulos fosse menor do que 10^{-6} (para o caso em que $F_0 = 0.5$, pois os pêndulos se afastam exponencialmente), de modo que fosse evitada a operação $\ln 0$, que diverge.

Resultados:

A partir dos resultados obtidos pelo programa, foram plotados os gráficos mostrados nas figuras 8, 9, 10 e 11. Os gráficos foram produzidos em escala semi-logarítmica devido à relação 17, que revela a dependência de λ com $\ln(\Delta\theta(t))$:

$$\Delta\theta(t) \approx \exp(\lambda t) \rightarrow \lambda \approx \frac{\ln(\Delta\theta(t))}{t}$$

Fazendo as regressões lineares dos gráficos 10 e 11 (linhas retas), o coeficiente λ pôde ser estimado. Para isso, a ferramenta *Feature Extraction* do graficador XMGRACE foi utilizada. Os resultados foram:

- $F_0 = 0.5$: $\lambda \approx -0.235218$
- $F_0 = 1.2$: $\lambda \approx 0.127208$

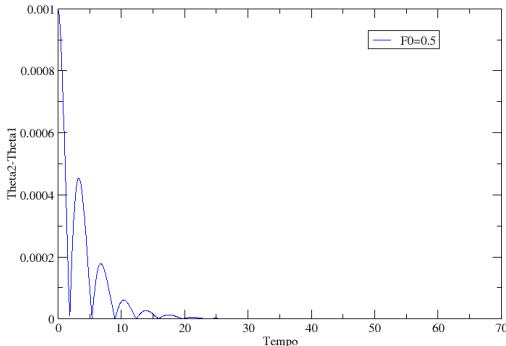


Figura 8: Evolução de $\Delta\theta(t)$ de um pêndulo amortecido e forçado com $\gamma = 0.5$, $\Omega = \frac{2}{3}$ e $F_0 = 0.5$.

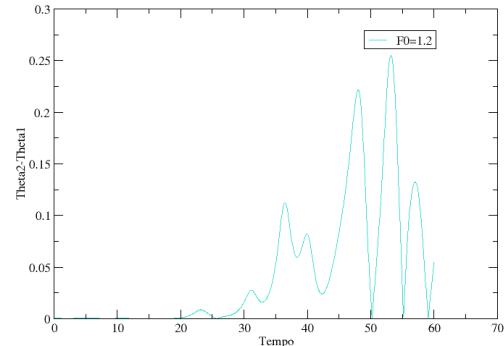


Figura 9: Evolução de $\Delta\theta(t)$ de um pêndulo amortecido e forçado com $\gamma = 0.5$, $\Omega = \frac{2}{3}$ e $F_0 = 1.2$.

Como já era esperado, para o maior forçamento, o expoente de Liapunov é positivo e, portanto, o sistema é caótico e os pêndulos se afastam rapidamente. Em contrapartida, o sistema com menor forçamento possui comportamento não caótico.

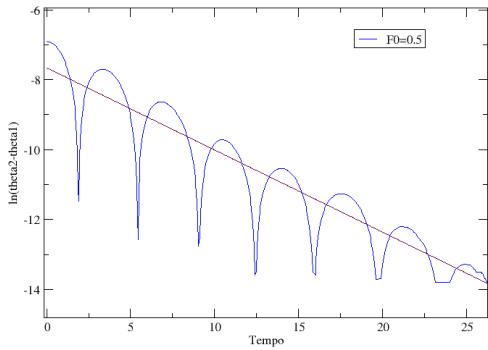


Figura 10: Evolução de $\log(\Delta\theta(t))$ do mesmo sistema com $F_0 = 0.5$. A reta é a regressão linear do comportamento.

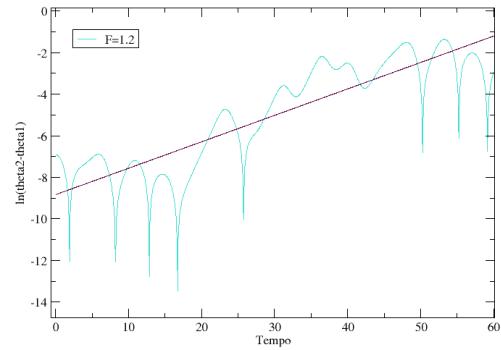


Figura 11: Evolução de $\log(\Delta\theta(t))$ do mesmo sistema com $F_0 = 1.2$. A reta é a regressão linear do comportamento.

Tarefa D

Secção de Poincaré

Faça os gráficos $\omega(\theta)$ para os casos $F_0 = 0.5$ e $F_0 = 1.2$ para algumas condições iniciais próximas. Compare os resultados obtidos. Conforme você deve ter observado, você não obteve no caso caótico algo tão desordenado. Existem regiões do diagrama que nunca foram visitadas. Uma maneira mais efetiva de se visualizar a “estrutura” existente no movimento caótico é a realização de uma **Secção de Poincaré**. Isto é, só graficamos $\omega(\theta)$ quando $\Omega t = n\pi$ (n inteiro).

Seção de Poincaré

Uma Secção de Poincaré é uma forma de reduzir um grande sistema dinâmico discreto a um subespaço de estados com dimensão menor do que o sistema original. Ele é construído considerando uma órbita periódica com condições iniciais dentro de uma seção do espaço original, que posteriormente sai dela, e observa-se o ponto em que essa órbita retorna novamente à seção.

É importante ressaltar que a Secção de Poincaré analisa o comportamento espacial de um sistema (no caso, $\omega(\theta)$).

Código:

```

parameter(tmax=60, del_t=0.04, gama=0.5, omega=0.666667)
pi=acos(-1e0)
n=tmax/del_t

open(unit=3, file='td_omg.dat')

write(*,*) "digite F0 e theta0:"
read(*,*) F0, theta1

omg1=0.0
t=0

c euler cromer
do j=1,n
    t=t+del_t
    if (t*pi) mod (2*pi) .eq. 0 then
        write(3,*) theta1, omg1
    end if
end do

```

```

        omg1_aux=omg1-(sin(theta1)+gama*omg1-
& F0*sin(omega*t))*del_t
        theta1_aux=theta1+omg1_aux*del_t
c agora guardo os valores de omega e theta num arq
        write(3,*) theta1, omg1

        theta1=theta1_aux
        omg1=omg1_aux
end do

close(3)
end

```

Resultados:

Os resultados obtidos são mostrados nas figuras 12, 13, 14, 15, 16 e 17. Os plots em azul mais escuro (à esquerda) referem-se ao caso em que $F_0 = 0.5$ para 3 valores próximos de θ_0 , com diferença de 0.01 entre cada um deles. Analogamente, os plots à direita mostram o caso com $F_0 = 1.2$ para os mesmos 3 valores de θ_0 .

A partir das figuras, é possível notar que o pêndulo forçado fracamente praticamente não “percebe” a pequena mudança de condição incial, característica que condiz com o seu comportamento não caótico. Todavia, os resultados para o pêndulo mais forçado mostram que ele muda seu comportamento mesmo para essas pequenas mudanças de θ_0 , reafirmando sua natureza caótica.

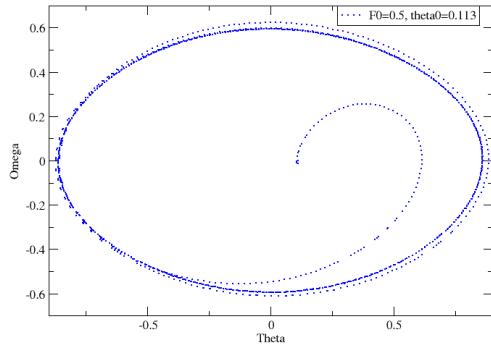


Figura 12: $\omega(\theta)$ para os parâmetros $F_0 = 0.5$ e $\theta_0 = 0.113$.

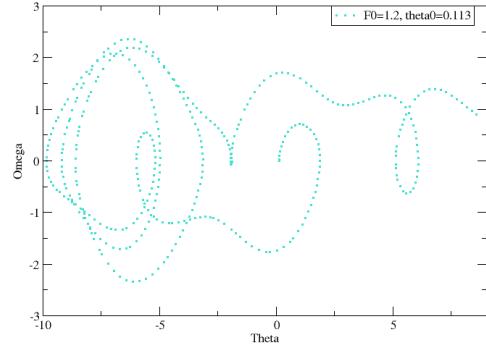


Figura 13: $\omega(\theta)$ para os parâmetros $F_0 = 1.2$ e $\theta_0 = 0.113$.

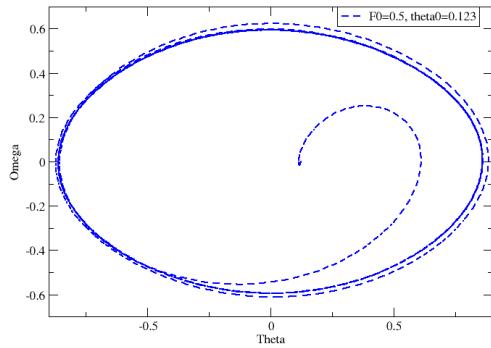


Figura 14: $\omega(\theta)$ para os parâmetros $F_0 = 0.5$ e $\theta_0 = 0.123$.

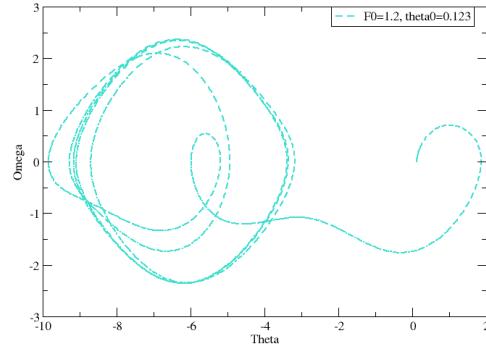


Figura 15: $\omega(\theta)$ para os parâmetros $F_0 = 1.2$ e $\theta_0 = 0.123$.

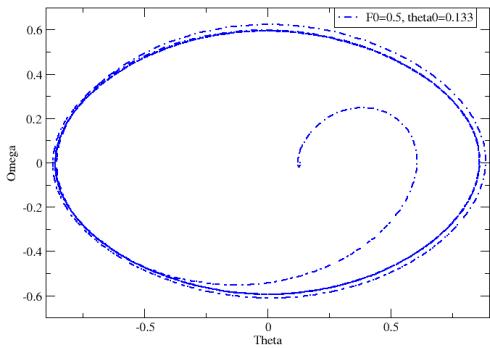


Figura 16: $\omega(\theta)$ para os parâmetros $F_0 = 0.5$ e $\theta_0 = 0.133$.

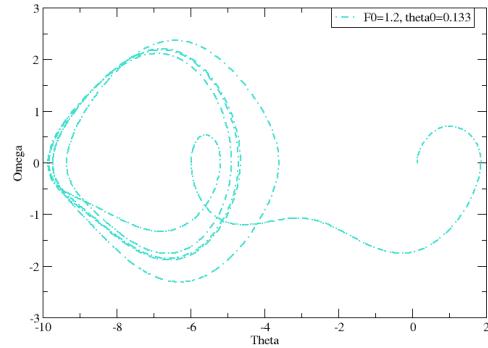


Figura 17: $\omega(\theta)$ para os parâmetros $F_0 = 1.2$ e $\theta_0 = 0.133$.

Tarefa E

Atrator Estranho

Faça o gráfico de $\omega(\theta)$ na secção de Poincarè em $\Omega t = n\pi$, que no presente caso deve ser traduzido numericamente por $|t - \frac{n\pi}{\Omega}| < \frac{\Delta t}{2}$. O gráfico deve ser feito pra o caso $F_0 = 0.5$ e $F_0 = 1.2$. A figura que você obteve é o “R.G.” do movimento caótico em questão. Varie ligeiramente as condições iniciais e verifique que a figura fica inalterada, o que mostra a “universalidade” do seu caos. Na realidade, a figura que você obteve não é contínua e define um fractal. O estudo de fractais e caos estará então intimamente ligado. A figura que você obteve é chamada de “atrator estranho”. Repare que no caso determinístico o atrator estranho é um ponto.

Código:

```

parameter(tmax=1000, del_t=0.04, gama=0.5, omega=0.666667)
pi=acos(-1e0)
n=tmax/del_t

open(unit=3, file='te_omg.dat')

write(*,*) "digite F0 e theta0:"
read(*,*) F0, theta1

omg1=0.0
t=0

c euler cromer
do j=1,n
    t=t+del_t

    omg1_aux=omg1-(sin(theta1)+gama*omg1-
    & F0*sin(omega*t))*del_t
    theta1_aux=theta1+omg1_aux*del_t

    c tratamento em theta para que ele esteja sempre
    c no intervalo [-pi, pi]
    do while(theta1_aux .gt. pi)
        theta1_aux=theta1_aux-2*pi
    end do
end do

```

```

do while (theta1_aux < -pi)
    theta1_aux=theta1_aux+2*pi
end do

c tratamento temporal para que o tempo seja proximo ao
c do periodo natural do forcamento
if(mod(omega*t, pi) < del_t/2) then
    write(3,*) theta1_aux, omg1_aux
end if

theta1=theta1_aux
omg1=omg1_aux
end do

close(3)
end

```

Resultados:

A partir do programa foram gerados os gráficos mostrados nas figuras 18, 19, 20 e 21, para dois valores de θ_0 com diferença de 0.05 entre eles. Nota-se que, para os dois valores de F_0 , o comportamento dos plots não são alterados quando θ_0 sofre uma pequena variação. Todavia, para $F_0 = 0.5$ (plots à esquerda), o comportamento quase não é visualizado, pois tem-se apenas pequenos pontos na diagonal. Em contrapartida, para o caso caótico, obtem-se um comportamento descontínuo e quase antissimétrico em $x = 0$.

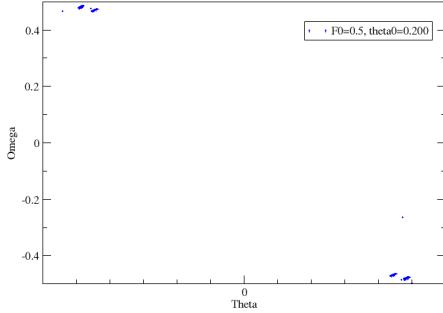


Figura 18: $\omega(\theta)$ para os parâmetros $F_0 = 0.5$ e $\theta_0 = 0.20$.

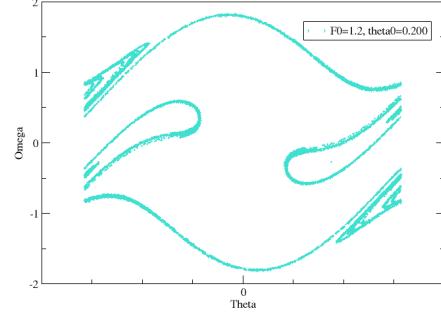


Figura 19: $\omega(\theta)$ para os parâmetros $F_0 = 1.2$ e $\theta_0 = 0.20$.

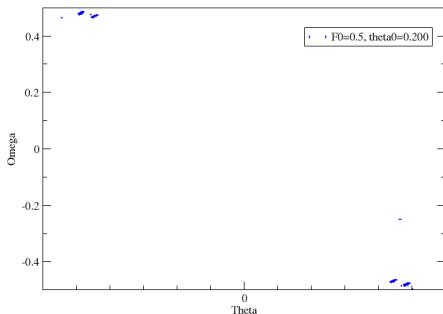


Figura 20: $\omega(\theta)$ para os parâmetros $F_0 = 0.5$ e $\theta_0 = 0.25$.

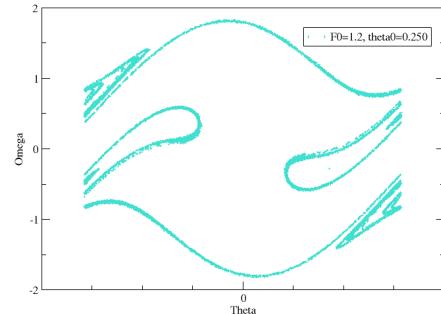


Figura 21: $\omega(\theta)$ para os parâmetros $F_0 = 1.2$ e $\theta_0 = 0.25$.

Referências

- [1] Lyapunov exponent. https://en.wikipedia.org/wiki/Lyapunov_exponent. Accessed: 2025-11-07.
- [2] Poincaré map. https://en.wikipedia.org/wiki/Poincar%C3%A9_map. Accessed: 2025-11-07.
- [3] Nicolas Giordano. *Computational Physics*. Addison-Wesley / Pearson, 2nd edition, 2006.