Name: ………………………………….

Matrikel-Nr.: ……………………………

Hinweise:

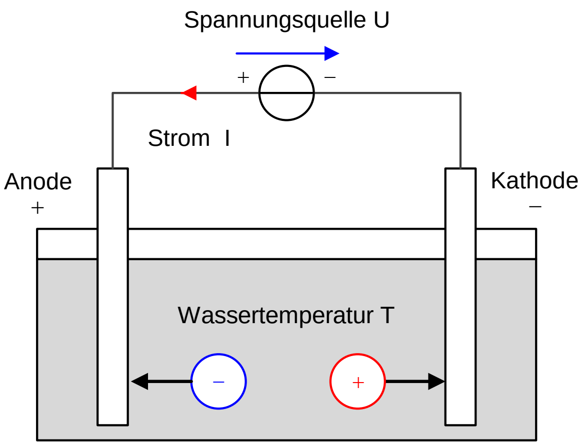
- Diese Klausur enthält 1 Aufgabe.
- Die Unterlagen bestehen aus 18 Seiten inkl. Deckblatt.
- Die Dauer der Klausur beträgt 180 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel:
  - Vorlesungsskript, Vorlesungsfolien
  - Schriftliche Unterlagen
  - Zugewiesener Laborrechner
  - Taschenrechner
- Notieren Sie auf jedem Blatt Ihren Namen und Matrikelnummer.
- Stellen Sie Ihren Lösungsweg ausführlich dar und begründen Sie Ihr Vorgehen.
- Geben Sie dieses Deckblatt, die Aufgabenstellung und alle bearbeiteten Blätter mit Ihrer Klausur ab.

max. Punktzahl	Ist-Punktzahl
100	

Note	

Beschreibung der Aufgabe

Zur Qualitätssicherung von entionisiertem Wasser werden Leitfähigkeitstests durchgeführt. Dazu werden zwei Elektroden in das zu untersuchende Wasser getaucht.



Die Elektroden werden an eine Wechselspannungsquelle angeschlossen und die Effektivwerte von Strom I und Spannung U bestimmt. Die Leitfähigkeit γ ergibt sich aus dem Quotienten

$$\gamma = \frac{I}{U} \cdot \frac{L}{A} = \frac{I}{U} \cdot K$$

Da der effektive Abstand L und die effektive Fläche A der Elektroden nicht geometrisch bestimmt werden können, wird eine sogenannte Zellkonstante K definiert.

Aus der Literatur ist bekannt, dass die Leitfähigkeit signifikant von der Temperatur abhängt. Um Temperatureffekte kompensieren zu können, soll die Temperaturabhängigkeit bestimmt werden. Dazu werden die Wassertemperatur T und die Leitfähigkeit mit einem Referenzsystem gemessen. Die Daten sind in der Datei *Temperaturabhaengigkeit.mat* gespeichert.

Temperatur	**T / °C**	20	22.5	25	27.5	30
Messung 1	**γ / µS**	0.8974	0.9474	1.0077	1.0437	1.0986
Messung 2	**γ / µS**	0.8899	0.9581	1.0022	1.0500	1.1039
Messung 3	**γ / µS**	0.8922	0.9521	1.0001	1.0563	1.1073

Regressionsrechnung

a) Stellen Sie die Messwerte grafisch dar.

b) Bestimmen Sie eine geeignete Regressionsfunktion γ(T), die die Leitfähigkeit als Funktion der Temperatur beschreibt. Beginnen Sie mit einem vollquadratischen Modell. Stellen Sie die Regressionsfunktion und ihren 99%-Konfidenzbereich in der Grafik dar.

c) Geben Sie den 99%-Konfidenzbereich der Regressionskoeffizienten an.

Statistische Tolerierung

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Leitfähigkeit einer Flüssigkeit bei 25 °C einen Wert γ_0 aufweist und ein lineares Temperaturverhalten besitzt.

$$\gamma(T) = \gamma_0 \cdot \left(1 + \alpha \cdot \left(T - T_0\right)\right)$$

Um die Leitfähigkeit automatisch messen zu können, wird ein Messsystem aufgebaut. Dabei wird die Elektrodenspannung U über ein Voltmeter und der Strom I über den Spannungsabfall U_R an einem Shunt-Widerstand R bestimmt. Der Spannungsabfall U_R wird mit einem zweiten Voltmeter bestimmt. Es gilt der Zusammenhang

$$\gamma(T) = \frac{U_R}{U \cdot R} \cdot K$$

Zur Bestimmung der Zellkonstante K wird eine Referenzmessung mit einer Referenzlösung durchgeführt. Die Lösung hat einen bekannten Wert γ_{01}. Bei einer Temperatur T_1 werden die Spannungen U_1 und U_{R1} bestimmt. Der Widerstand hat zu diesem Zeitpunkt den Wert R_1.

Mit der so charakterisierten Messvorrichtung soll die Leitfähigkeit γ_{02} einer anderen Lösung bei einer Temperatur T_2 bestimmt werden. Zu diesem Zeitpunkt hat der Widerstand den Wert R_2.

d) Zeigen Sie, dass sich aus diesem Vorgehen für die Leitfähigkeit γ_{02} eine Messkette ergibt, die mit der folgenden Gleichung beschrieben werden kann.

$$\gamma_{02} = \gamma_{01} \cdot \frac{1 + \alpha \cdot \left(T_1 - T_0\right)}{1 + \alpha \cdot \left(T_2 - T_0\right)} \cdot \frac{U_{R2}}{U_{R1}} \cdot \frac{U_1 \cdot R_1}{U_2 \cdot R_2}$$

Die einzelnen Größen der Messkette sind wie folgt spezifiziert.

Messgröße	Sollwert	Verteilung	Toleranzangabe	Korrelation
Leitfähigkeit γ_{01} Referenz	1 µS	gleich-verteilt	$T_{\gamma REF}$ = 0.05 µS	ohne Korrelation
Temperatur-koeffizient α	$2.1 \cdot 10^{-2}$ / °C	toleranzfrei		
Bezugs-temperatur T_0	25 °C	toleranzfrei		
Temperatur-messungen	25 °C	normal-verteilt	σ_T = 0.03 °C	Korrelation zwischen T_1 und T_2 beträgt ρ_T = 0.8
Spannungs-messungen U_R	0.200 V	normal-verteilt	σ_{UR} = 0.01 mV	alle Messungen unkorreliert
Spannungs-messung U	10.00 V	toleranzfrei		
Widerstände R_1 und R_2	10 kΩ	normal-verteilt	σ_R = 0.05 Ω	Korrelation zwischen R_1 und R_2 beträgt ρ_R = 0.95

e) Führen Sie eine statistische Tolerierung nach dem Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeit durch. Geben Sie die Toleranz mit einem Konfidenzbereich von 99 % an.

f) Validieren Sie das Ergebnis der Rechnung mithilfe einer statistischen Simulation.

g) Wie wirken sich die angegebenen Korrelationen auf die Gesamttoleranz aus? Begründen Sie Ihre Antwort.

h) Definieren Sie einen Hypothesentest, mit dem die Leitfähigkeit des entionisierten Wassers auf $\gamma_0 = 1$ µS geprüft werden kann. Gehen Sie von einer bekannten Standardabweichung von $\sigma_{\gamma 0} = 0.005$ µS und einem Signifikanzniveau von $\alpha = 10$ % aus.

i) Wie groß ist die Abweichung $\Delta\gamma$, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % erkannt wird?

Mess-System-Analyse

Für das aufgebaute Messsystem und eine Toleranzvorgabe von $T_\gamma = 0.1$ µS wird eine Mess-System-Analyse durchgeführt. Nach erfolgreichem Nachweis einer ausreichenden Auflösung wird der systematische Messfehler bei einer Referenz von $\gamma_0 = 1$ µS bewertet. Dazu wird eine Messreihe mit N = 50 Stichprobenwerten bei einer konstanten Temperatur $T_0 = 25$ °C aufgenommen. Die Daten sind in der Datei *SystematischerMessfehler.mat* gespeichert.

Nr.	**Leitfähigkeit γ / µS**									
1 - 10	1.0068	1.0039	1.0082	1.0063	1.0061	1.0049	1.0062	1.0032	1.0055	1.0049
11 – 20	1.0047	1.0020	1.0043	1.0022	1.0044	1.0002	1.0053	1.0045	1.0043	1.0028
21 - 30	1.0043	1.0049	1.0066	1.0024	1.0024	1.0036	1.0048	1.0043	1.0068	1.0065
31 - 40	1.0061	1.0061	1.0034	1.0038	1.0032	1.0022	0.9997	1.0027	1.0082	1.0060
41 - 50	1.0069	1.0052	1.0025	1.0020	1.0030	1.0057	1.0051	1.0062	1.0028	1.0040

j) Bewerten Sie die systematische Messabweichung. Stellen Sie dazu die Stichprobe im Vergleich zu dem Referenzwert grafisch dar. Berechnen Sie den C_g und C_{gk}-Wert und diskutieren Sie das Ergebnis.

Zur Bestimmung der Reproduzierbarkeit werden mit 25 Teilen zwei Messreihen aufgenommen. Wegen der Temperaturschwankungen in der Fertigungshalle werden die Temperaturen, bei denen die Leitfähigkeitsmessungen stattgefunden hat, protokolliert. Die Daten sind in der Datei *Reproduzierbarkeit.mat* gespeichert.

Teil	γ_1 / µS	T_1 / °C	γ_2 / µS	T_2 / °C	Teil	γ_1 / µS	T_1 / °C	γ_2 / µS	T_2 / °C
1	0.9711	25.14	0.9848	25.78	14	1.0093	25.16	1.0064	25.10
2	0.9854	24.68	1.0045	25.61	15	0.9688	25.71	0.9426	24.44
3	1.0129	24.90	1.0616	27.16	16	0.9921	25.47	0.9975	25.73
4	0.9624	23.55	0.9712	24.02	17	0.9735	22.66	1.0191	24.78
5	0.9988	25.45	0.9978	25.38	18	0.9447	22.86	0.9866	24.81
6	0.9733	24.52	0.9258	22.18	19	1.0184	24.95	1.0329	25.69
7	1.0156	25.60	1.0232	25.90	20	1.0062	24.09	1.0392	25.52
8	0.9991	25.49	0.9763	24.46	21	0.9754	24.99	0.9807	25.20
9	1.0160	26.66	0.9333	22.65	22	0.9727	24.55	0.9828	25.03
10	1.0209	25.76	1.0447	26.92	23	0.9644	22.83	1.0219	25.54
11	0.9677	23.53	1.0284	26.47	24	1.0334	26.02	1.0474	26.56
12	0.9683	24.15	0.9899	25.21	25	0.9668	24.03	0.9734	24.46
13	0.9846	25.06	0.9488	23.28					

k) Bewerten Sie das Streuverhalten des Messsystems ohne Temperaturkompensation.

l) Korrigieren Sie den durch die variable Temperatur entstandenen Fehler und bewerten Sie das Streuverhalten des Messsystems mit Temperaturkompensation.

Um die Langzeitstabilität des Messsystems bewerten zu können, wurden an 10 verschiedenen Tagen jeweils 7 Messungen mit einer Referenzflüssigkeit mit γ_0 = 1 µS durchgeführt. Aus Voruntersuchungen ist bekannt, dass die Standardabweichung σ = 0.005 µS beträgt. Die Daten sind in der Datei *Langzeitstabilitaet.mat* gespeichert.

Nr.	**Leitfähigkeit γ / µS**									
	Tag 1	Tag 2	Tag 3	Tag 4	Tag 5	Tag 6	Tag 7	Tag 8	Tag 9	Tag 10
1	1.0040	0.9983	1.0020	0.9964	0.9999	0.9909	0.9945	0.9972	0.9948	0.9993
2	0.9990	0.9913	1.0010	0.9983	1.0000	0.9845	0.9883	0.9968	0.9901	0.9932
3	1.0038	0.9990	0.9993	0.9970	0.9979	0.9977	0.9973	0.9978	0.9866	0.9989
4	1.0021	1.0099	0.9969	1.0001	1.0019	1.0017	0.9984	0.9985	0.9937	1.0004
5	1.0010	0.9980	0.9947	0.9883	0.9962	0.9937	0.9996	0.9844	0.9938	0.9970
6	1.0007	1.0014	0.9893	1.0044	0.9893	0.9958	1.0038	0.9970	0.9948	0.9962
7	1.0038	0.9972	1.0040	0.9926	0.9984	0.9919	0.9902	0.9994	0.9984	0.9945

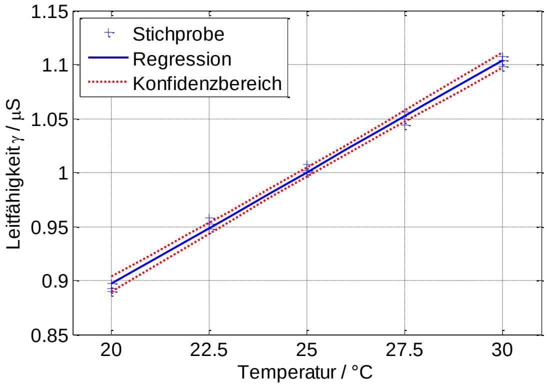
m) Bewerten Sie die Langzeitstabilität des Messsystems mithilfe der Shewhart Regelkarte. Zeichnen Sie eine Eingriffsgrenze (γ= 99 %) und eine Warngrenze (γ= 95 %) ein.

Untersuchungen an der Messapparatur zeigen, dass die Drift in der Langzeitmessung auf eine Drift des Widerstandes R über die Lebensdauer zurückzuführen ist.

n) Was können Sie tun, um die Drift des Widertandes zu kompensieren und das System langzeitstabil zu machen, ohne die Hardware zu ändern?

Musterlösung

a) Die Daten sind bereits als Vektor gespeichert und können deshalb direkt mit einem *plot*-Befehl dargestellt werden.




```
% Laden der Daten
load Temperaturabhaengigkeit.mat;

% Grafische Darstellung
f = figure(1);
plot(T,gamma,'b+');
hold on;
plot(TInt,gammaInt,'b','linewidth',2);
plot(TInt,gammaInt + Delta,'r:','linewidth',2);
plot(TInt,gammaInt - Delta,'r:','linewidth',2);
hold off;
xlabel('Temperatur / °C','FontWeight');
ylabel('Leitfähigkeit \gamma / \muS');
grid on;
box on;
h = legend('Stichprobe','Regression','Konfidenzbereich');
```

b) Es wird von einem quadratischen Modell ausgegangen und eine Prüfung auf Signifikanz durchgeführt. Die Analyse zeigt, dass der quadratische Term nicht signifikant ist (p-Wert = 16.04 %). Er wird deshalb eliminiert. Anschließend sind alle Terme signifikant. Es wird also ein lineares Regressionsmodell verwendet.

$$\gamma(T) = 0.4828 \mu S + 0.0207\ \mu S / °C \cdot T$$

Der Konfidenzbereich wird über die Befehle *polyfit* und *polyconf* bestimmt. Regressionsfunktion und Konfidenzbereich sind bereits in der Grafik eingezeichnet.

```
% Bewertung der Regressionsfunktion mit Regstats
model = [0; 1; 2];
stat = regstats(gamma,T,model,'tstat');
stat.tstat.pval
model = [0; 1];
stat = regstats(gamma,T,model,'tstat');
stat.tstat.pval

% Regressionsfunktion mit Konfidenzintervall für lineares Modell
TInt = 20:1:30;
[P,S] = polyfit(T,gamma,1);
[gammaInt,Delta] = polyconf(P,TInt,S,'alpha',0.01,'predopt','curve');
```

c) Der Konfidenzbereich der Regressionskoeffizienten wird über den Befehl *regress* bestimmt. Es ergeben sich die Konfidenzbereiche

$$0.4534 \le \beta_0 \le 0.5121$$

und

$$0.0195 \le \beta_1 \le 0.0219$$

```
% Konfidenzbereich für die Regressionskoeffizienten
[B,BINT] = regress(gamma,[ones(size(T)) T],0.01)
```

d) Zur Herleitung der Maßkette werden die beiden Gleichungen gleichgesetzt:

$$\gamma_0 \cdot \left(1+\alpha \cdot \left(T - T_0\right)\right) = \frac{U_R}{U \cdot R} \cdot K$$

Die unbekannte Zellkonstante K wird durch die erste Messung mit bekannter Leitfähigkeit bestimmt.

$$K = \gamma_{01} \cdot \left(1+\alpha \cdot \left(T_1 - T_0\right)\right) \cdot \frac{U_1 \cdot R_1}{U_{R1}}$$

Für die Leitfähigkeit bei der zweiten Messung und Raumtemperatur ergibt sich damit

$$\gamma_{02} = \frac{1}{1+\alpha \cdot \left(T_2 - T_0\right)} \cdot \frac{U_{R2}}{U_2 \cdot R_2} \cdot K = \frac{1}{1+\alpha \cdot \left(T_2 - T_0\right)} \cdot \frac{U_{R2}}{U_2 \cdot R_2} \cdot \gamma_{01} \cdot \left(1+\alpha \cdot \left(T_1 - T_0\right)\right) \cdot \frac{U_1 \cdot R_1}{U_{R1}}$$

$$= \gamma_{01} \cdot \frac{1+\alpha \cdot \left(T_1 - T_0\right)}{1+\alpha \cdot \left(T_2 - T_0\right)} \cdot \frac{U_{R2}}{U_{R1}} \cdot \frac{U_1 \cdot R_1}{U_2 \cdot R_2}$$

e) Um den Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeit anwenden zu können, muss die Maßkette zunächst linearisiert werden. Dazu werden die partiellen Ableitungen benötigt. Sie werden über eine symbolische Rechnung in MATLAB ermittelt.

$$E_{\gamma 01} = \frac{\partial \gamma_{02}}{\partial \gamma_{01}} = \frac{1+\alpha \cdot \left(T_1 - T_0\right)}{1+\alpha \cdot \left(T_2 - T_0\right)} \cdot \frac{U_{R2}}{U_{R1}} \cdot \frac{U_1 \cdot R_1}{U_2 \cdot R_2} = 1$$

$$E_{T1} = \frac{\partial \gamma_{02}}{\partial T_1} = \gamma_{01} \cdot \frac{\alpha}{1+\alpha \cdot \left(T_2 - T_0\right)} \cdot \frac{U_{R2}}{U_{R1}} \cdot \frac{U_1 \cdot R_1}{U_2 \cdot R_2} = 0.0210 \, \frac{\mu S}{°C}$$

$$E_{T2} = \frac{\partial \gamma_{02}}{\partial T_2} = -\gamma_{01} \cdot \alpha \cdot \frac{1+\alpha \cdot \left(T_1 - T_0\right)}{\left(1+\alpha \cdot \left(T_2 - T_0\right)\right)^2} \cdot \frac{U_{R2}}{U_{R1}} \cdot \frac{U_1 \cdot R_1}{U_2 \cdot R_2} = -0.0210 \, \frac{\mu S}{°C}$$

$$E_{UR1} = \frac{\partial \gamma_{02}}{\partial U_{R1}} = -\gamma_{01} \cdot \frac{1+\alpha \cdot \left(T_1 - T_0\right)}{1+\alpha \cdot \left(T_2 - T_0\right)} \cdot \frac{U_{R2}}{U_{R1}^2} \cdot \frac{U_1 \cdot R_1}{U_2 \cdot R_2} = -5 \, \frac{\mu S}{V}$$

$$E_{UR2} = \frac{\partial \gamma_{02}}{\partial U_{R2}} = \gamma_{01} \cdot \frac{1+\alpha \cdot \left(T_1 - T_0\right)}{1+\alpha \cdot \left(T_2 - T_0\right)} \cdot \frac{1}{U_{R1}} \cdot \frac{U_1 \cdot R_1}{U_2 \cdot R_2} = 5 \, \frac{\mu S}{V}$$

$$E_{R1} = \frac{\partial\gamma_{02}}{\partial R_1} = \gamma_{01} \cdot \frac{1+\alpha\cdot\left(T_1 - T_0\right)}{1+\alpha\cdot\left(T_2 - T_0\right)} \cdot \frac{U_{R2}}{U_{R1}} \cdot \frac{U_1}{U_2 \cdot R_2} = 10^{-4}\ \frac{\mu S}{\Omega}$$

$$E_{R2} = \frac{\partial\gamma_{02}}{\partial R_2} = -\gamma_{01} \cdot \frac{1+\alpha\cdot\left(T_1 - T_0\right)}{1+\alpha\cdot\left(T_2 - T_0\right)} \cdot \frac{U_{R2}}{U_{R1}} \cdot \frac{U_1 \cdot R_1}{U_2 \cdot R_2^2} = -10^{-4}\ \frac{\mu S}{\Omega}$$

Die Standardabweichungen von allen Größen sind bis auf die der Leitfähigkeit γ_{01} bekannt. Die Standardabweichung der Leitfähigkeit γ_{01} ergibt sich zu

$$\sigma_{\gamma 01} = \frac{0.05}{\sqrt{12}}\ \mu S = 0.0144\ \mu S$$

Unter Berücksichtigung der angegebenen Korrelationen ergibt sich

$$\begin{aligned}\sigma_{\gamma 02}^2 = {} & E_{\gamma 01}^2 \cdot \sigma_{\gamma 01}^2 + E_{T1}^2 \cdot \sigma_{T1}^2 + E_{T2}^2 \cdot \sigma_{T2}^2 + 2 \cdot \rho_{T1T2} \cdot E_{T1} \cdot E_{T2} \cdot \sigma_{T1} \cdot \sigma_{T2} \\ & + E_{UR1}^2 \cdot \sigma_{UR1}^2 + E_{UR2}^2 \cdot \sigma_{UR2}^2 + E_{R1}^2 \cdot \sigma_{R1}^2 + E_{R2}^2 \cdot \sigma_{R2}^2 + 2 \cdot \rho_{R1R2} \cdot E_{R1} \cdot E_{R2} \cdot \sigma_{R1} \cdot \sigma_{R2}\end{aligned}$$

Der 99%-Konfidenzbereich errechnet sich mit der Standardnormalverteilung sowie

$$c_1 = F^{-1}\left(0.005\right) = -2.5758$$

und

$$c_2 = F^{-1}\left(0.995\right) = 2.5758$$

zu

$$c_1 \cdot \sigma_{\gamma 02} \le \Delta\gamma_{02} \le c_2 \cdot \sigma_{\gamma 02}$$

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt mit $\gamma_{01} = \gamma_{02}$ einen Toleranzbereich von

$$0.9628\ \mu S \le \gamma_{02} \le 1.0372\ \mu S$$

```
% Berechnung der Empfindlichkeiten durch symbolische Ableitungen
syms gamma1 gamma2 alpha UR1 UR2 U1 U2 R1 R2 T0 T1 T2
gamma2 = gamma1*(1+alpha*(T1 - T0))/(1+alpha*(T2 - T0))*UR2/UR1*U1/U2*R1/R2;
dgamma2dgamma1 = diff(gamma2,gamma1)
dgamma2dT1 = diff(gamma2,T1)
dgamma2dT2 = diff(gamma2,T2)
dgamma2dUR1 = diff(gamma2,UR1)
dgamma2dUR2 = diff(gamma2,UR2)
dgamma2dR1 = diff(gamma2,R1)
dgamma2dR2 = diff(gamma2,R2)

% Definition der Zahenwerte, Standardabweichungen ud Korrelationen
gamma1 = 1;
alpha = 2.1e-2;
UR1 = 0.2;
UR2 = 0.2;
U1 = 10;
U2 = 10;
R1 = 1e4;
R2 = 1e4;
T0 = 25;
T1 = 25;
T2 =25;
sigGamma1 = 0.05/sqrt(12);
sigT = 0.03;
rohT = 0.8;
sigUR = 0.01E-3;
sigR = 0.05;
rohR = 0.95;

% Berechnen der Empfindlichkeiten
Egamma1 = eval(dgamma2dgamma1);
ET1 = eval(dgamma2dT1);
ET2 = eval(dgamma2dT2);
EUR1 = eval(dgamma2dUR1);
EUR2 = eval(dgamma2dUR2);
ER1 = eval(dgamma2dR1);
ER2 = eval(dgamma2dR2);

% Berechnen der Standardabweichung
sigGamma2 = sqrt(Egamma1^2*sigGamma1^2 ...
               + ET1^2*sigT^2 + ET2^2*sigT^2 + 2*rohT*ET1*ET2*sigT*sigT ...
               + EUR1^2*sigUR^2 + EUR2^2*sigUR^2 ...
               + ER1^2*sigR^2 + ER2^2*sigR^2 + 2*rohR*ER1*ER2*sigR*sigR)

% Berechnung der gesuchten Toleranz
c1 = norminv(0.005);
c2 = norminv(0.995);
gamma2anamin = gamma1 + c1*sigGamma2
gamma2anamax = gamma1 + c2*sigGamma2
```

f) Zur statistischen Simulation werden N = 10 000 Zufallszahlen erzeugt, die die angegebene Verteilung und Korrelation aufweisen. Mit den Werten wird die Zielgröße berechnet. Die empirische Varianz wird zur Berechnung der Standardabweichung verwendet.

$$c_1 \cdot s_{\gamma 02} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{N}} \le \Delta\gamma_{02} \le c_2 \cdot s_{\gamma 02} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{N}}$$

Die Konstanten c_1 und c_2 werden mit der inversen t-Verteilung mit N – 1 Freiheitsgraden berechnet.

$$c_1 = F^{-1}\left(0.005\right) = -2.5763$$

und

$$c_2 = F^{-1}\left(0.995\right) = 2.5763$$

Es ergibt sich ein Toleranzbereich von

$$0.9629\,\mu S \le \gamma_{02} \le 1.0371\,\mu S$$

Der Toleranzbereich entspricht weitgehend der Rechnung aus Aufgabenteil e).

Die Daten können wegen der Korrelation nicht zur Validierung der Empfindlichkeiten verwendet werden.

```
% Erzeugen der Zufallszahlen
N = 1000;
gamma1 = 1 + unifrnd(-0.025,0.025,N,1);
alpha = 2.1e-2;
T0 = 25;
z1 = normrnd(0,1,N,1);
z2 = normrnd(0,1,N,1);
T1 = T0 + sigT*z1;
T2 = T0 + rohT*sigT*z1 + sqrt(1-rohT^2)*sigT*z2;
UR1 = normrnd(0.2,0.01e-3,N,1);
UR2 = normrnd(0.2,0.01e-3,N,1);
U1 = 10;
U2 = 10;
z1 = normrnd(0,1,N,1);
z2 = normrnd(0,1,N,1);
R1 = 10E3 + sigR*z1;
R2 = 10E3 + rohR*sigR*z1 + sqrt(1-rohR^2)*sigR*z2;

% Berechnen und Auswerten der Zielgröße
gamma2 = gamma1.*(1+alpha*(T1 - T0))./(1+alpha*(T2 -
T0)).*UR2./UR1*U1/U2.*R1./R2;
sigGamma2 = std(gamma2);
c1 = tinv(0.005,N-1)
c2 = tinv(0.995,N-1)
gamma2min = mean(gamma2) + c1*sigGamma2*sqrt(1+1/N)
gamma2max = mean(gamma2) + c2*sigGamma2*sqrt(1+1/N)
```

g) Da das Produkt aus Empfindlichkeiten und Korrelationskoeffizient negativ ist, wird die Varianz der Zielgröße verringert, die Toleranz nimmt also wegen der Korrelation der Temperaturen und Widerstände ab.

h) Der Hypothesentest hat die H0-Hypothese, dass die Grundgesamtheit eine Leitfähigkeit von $\gamma_0 = 1$ µS aufweist. Da die Standardabweichung mit $\sigma_{\gamma 0}$ bekannt ist, wird eine standardnormalverteilte Variable für den Hypothesentest verwendet.

$$z = \frac{x - \gamma_0}{\sigma_{\gamma 0}}$$

Für den Annahmebereich der Hypothese gilt:

$$1 - \alpha = P\left(c_1 \le z \le c_2\right) = P\left(c_1 \le \frac{x - \gamma_0}{\sigma_{\gamma 0}} \le c_2\right)$$

Dabei ergeben sich die Grenzen c_1 und c_2 zu

$$c_1 = F^{-1}\left(0.05\right) = -1.6449$$

und

$$c_2 = F^{-1}\left(0.95\right) = 1.6449$$

Auflösen nach dem Messwert x ergibt

$$\gamma_0 + c_1 \cdot \sigma_{\gamma 0} \le x \le \gamma_0 + c_2 \cdot \sigma_{\gamma 0}$$

beziehungsweise als Zahlenwert

$$0.9918\ \mu S \le x \le 1.0082\ \mu S$$

Liegt der Stichprobenwert in diesen Grenzen, wird die Nullhypothese nicht verworfen.

```
% Definition Hypothesentest
sigHyp = 0.005;
gammaHyp = 1;
c1 = norminv(0.05)
c2 =norminv(0.95)
gammaHypmin = gammaHyp + c1*sigHyp
gammaHypmax = gammaHyp + c2*sigHyp
```

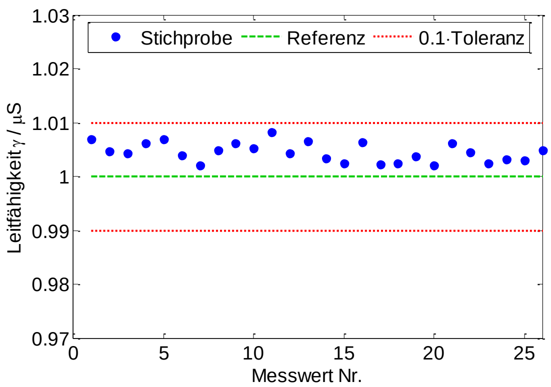
i) Zur Beantwortung der Frage wird die Gütefunkton für eine variable Leitfähigkeit der Grundgesamtheit γ_0 berechnet.

$$\text{Guete} = F\left(0.902, \gamma_0, \sigma_{\gamma 0}\right) + 1 - F\left(1.098, \gamma_0, \sigma_{\gamma 0}\right)$$

Die Gütefunktion steigt in Richtung sehr kleiner und sehr großer Leitfähigkeit an. An der Stelle γ_0 = 0.9810 µS und 1.0190 µS beträgt die Gütefunktion 0.99. Damit werden Abweichungen von ± 0.0190 µS mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % erkannt.

```
% Gütefunkton und Bestimmung der Grenzen
gammaGuete = 0.8:0.001:1.2;
Guete = normcdf(gammaHypmin,gammaGuete,sigHyp) + 1 - normcdf(gammaHypmax,gamma-
Guete,sigHyp);
bin = find(Guete<=0.99,1,'first');
gammaHypUnten = gammaGuete(bin)
bin = find(Guete<=0.99,1,'last');
gammaHypOben = gammaGuete(bin)
```

j) Die Stichprobe kann mit einem plot-Befehl dargestellt werden.



C_g- und C_{gk}-Wert berechnen sich zu

$$C_g = \frac{0.2 \cdot T}{6 \cdot s} = \frac{0.1 \cdot T}{3 \cdot s} = 1.7857$$

und

$$C_{gk} = \frac{0.1 \cdot T - |\Delta y|}{3 \cdot s} = 0.9934$$

Damit ist die Streuung des Messsystems ausreichend klein, allerdings liegt ein systematischer Messfehler vor.

```
% Laden der Daten
load SystematischerMessfehler.mat;

% Systematische Messabweichung
Messwerte = gammaSys;
Referenz = 1;
Toleranz = 0.1;
n = 1:length(Messwerte);

% Definition des Grafikfensters
figure(2);
scatter(n,Messwerte,'bo','filled');
hold on;
plot(n,Referenz*ones(size(n)),'g--','linewidth',2);
plot(n,(Referenz+Toleranz/10)*ones(size(n)),'r:','linewidth',2);
plot(n,(Referenz-Toleranz/10)*ones(size(n)),'r:','linewidth',2);
hold off;
axis([0 26 0.97 1.03]);
xlabel('Messwert Nr.','FontWeight','normal');
ylabel('Leitfähigkeit \gamma / \muS','FontWeight','normal');
grid off;
box on;
legend('Stichprobe','Referenz','0.1\cdotToleranz');

% Berechnung Qualitätskenngrößen
Cg = 0.2*Toleranz/6/std(Messwerte)
Cgk = (0.1*Toleranz-abs(mean(Messwerte)-Referenz))/3/std(Messwerte)
```

k) Zur Bewertung der Reproduzierbarkeit wird die normierte Quadratsumme benötigt. Sie wird mit dem ANOVA Befehl bestimmt und umgerechnet. Der Einfluss der Teile ist erwartungsgemäß signifikant. Mit den Quadratsummen der ANOVA-Tabelle ergeben sich die geschätzten Standardabweichungen

$$\sigma_{GRR} = \sigma_{\varepsilon} = \sqrt{M_{\varepsilon}} = 0.0238\ \mu S$$

und

$$\sigma_{\beta} = \sqrt{\frac{M_{\beta} - M_{\varepsilon}}{N}} = 0.0195\ \mu S$$

Der %GRR-Wert ergibt sich mit der vorgegebenen Toleranz zu

$$T_{GRR} = \frac{6 \cdot \sigma_{GRR}}{0.1} = 1.4250$$

Der Wert ist deutlich zu schlecht für ein fähiges Messsystem. Der ndc-Wert ist mit

$$ndc = 1.41 \cdot \frac{6 \cdot \sigma_{\beta}}{6 \cdot \sigma_{GRR}} = 1.41 \cdot \frac{\sigma_{\beta}}{\sigma_{GRR}} = 1.1569$$

ebenfalls nicht groß genug.

```
% Streuungsanalyse: Berechnung der Daten für die Aufgabenstellung

load Reproduzierbarkeit.mat;
n = 1:length(T1);
T0 = 25;

% Berechnung der Anova-Tabelle mit unkorrigierten Werten
[p, anovatab] = anova1([gammaRep1 gammaRep2]',[],'off');
mbeta = cell2mat(anovatab(2,4));
mepsilon = cell2mat(anovatab(3,4));
K = 25;
N = 2;
sigepsilon = sqrt(mepsilon);
sigbeta = sqrt((mbeta-mepsilon)/K);
sigGRR = sigepsilon;
TGRR = 6*sigGRR/Toleranz
ndc = 1.41*sigbeta/sigGRR
```

l) Zur Verbesserung der Messfähigkeit wird die bekannte Temperaturabweichung dazu genutzt, um die Messwerte zu korrigieren.

$$\gamma_0 = \frac{\gamma(T)}{1+\alpha\cdot(T-T_0)}$$

Die sich daraus ergebenden Stichprobenwerte werden demselben Auswerteverfahren unterzogen. Es ergeben sich die Standardabweichungen

$$\sigma_{GRR} = \sigma_\varepsilon = \sqrt{M_\varepsilon} = 0.0008\ \mu S$$

und

$$\sigma_\beta = \sqrt{\frac{M_\beta - M_\varepsilon}{N}} = 0.0176\ \mu S$$

Der %GRR-Wert ergibt sich mit der vorgegebenen Toleranz zu

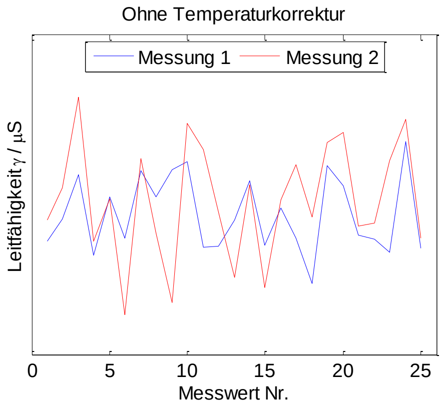
$$T_{GRR} = \frac{6\cdot\sigma_{GRR}}{0.1} = 0.0486$$

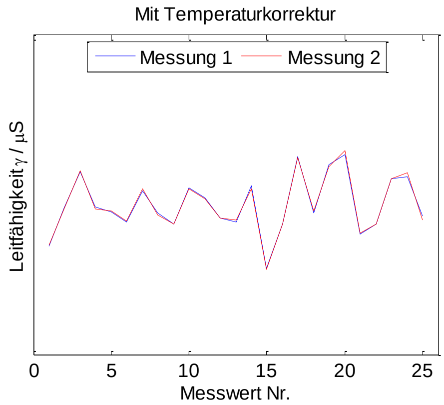
Das System ist damit zumindest bedingt fähig. Der ndc-Wert ist mit

$$ndc = 1.41\cdot\frac{6\cdot\sigma_\beta}{6\cdot\sigma_{GRR}} = 1.41\cdot\frac{\sigma_\beta}{\sigma_{GRR}} = 30.5491$$

ausreichend groß.

Zur Verdeutlichung der unterschiedlichen Datensätze werden die Werte zusätzlich visualisiert. Es wird deutlich, dass die Streuung von Messung zu Messung verringert wird.






```
% Berechnung der Anova-Tabelle mit korrigierten Werten
gammaRep1Tkorr = gammaRep1./(1+alpha*(T1-T0));
gammaRep2Tkorr = gammaRep2./(1+alpha*(T2-T0));
[p, anovatab] = anova1([gammaRep1Tkorr gammaRep2Tkorr]',[],'off');
mbeta = cell2mat(anovatab(2,4));
meps = cell2mat(anovatab(3,4));
K = 25;
N = 2;
sigepsilon = sqrt(mepsilon);
sigbeta = sqrt((mbeta-mepsilon)/N);
sigGRR = sigepsilon;
TGRR = 6*sigGRR/Toleranz
ndc = 1.41*sigbeta/sigGRR
```

m) Bei der Shewhart Regelkarte werden Mittelwert und Standardabweichung überwacht. Für die Standardabweichung ergibt sich der erwartete Konfidenzbereich des Mittelwertes zu

$$\gamma = P\left(c_1 < \frac{\bar{y}-\mu}{\sigma/\sqrt{N}} \le c_2\right) = P\left(\frac{c_1\cdot\sigma}{\sqrt{N}} < \bar{y}-\mu \le \frac{c_2\cdot\sigma}{\sqrt{N}}\right) = P\left(\mu + \frac{c_1\cdot\sigma}{\sqrt{N}} < \bar{y} \le \mu + \frac{c_2\cdot\sigma}{\sqrt{N}}\right)$$

Die Konstanten c_1 und c_2 werden mit den angegebenen Konfidenzzahlen über die inverse Standardnormalverteilung zu

$$c_1 = F^{-1}\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)$$

und

$$c_2 = F^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$$

bestimmt. Für die Grenzen der Varianz ergibt sich der Annahmebereich zu

$$\gamma = P\left(c_1 < \frac{s^2}{\sigma^2}\cdot(N-1) \le c_2\right) = P\left(\frac{c_1\cdot\sigma^2}{N-1} < s^2 \le \frac{c_2\cdot\sigma^2}{N-1}\right)$$

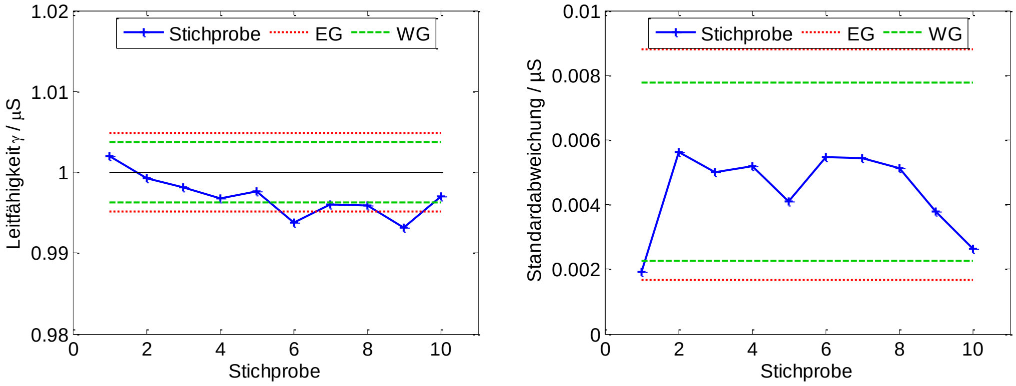
Die Konstanten c_1 und c_2 ergeben sich aus der inversen Chi^2-Verteilung mit den angegebenen Konfidenzzahlen zu

$$c_1 = F^{-1}\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)$$

und

$$c_2 = F^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$$

Es ergibt folgendes Shewhart Regelkarte:



Der Mittelwert driftet, das System ist damit nicht langzeitstabil.

n) Zur Driftkompensation könnte die Kalibrierung über die Referenzlösung in so engen Abständen wiederholt werden, dass die Drift zulässig klein wird.

```
% Daten laden
load Langzeitstabilitaet.mat;
Messwerte = gammaLang;
muMesswerte = mean(Messwerte);
muref = 1;
stdMesswerte = std(Messwerte);
sref = 0.005;
M = length(Messwerte(1,:));

% Konstanten bestimmen
cmw = norminv(0.975,0,1);
cme = norminv(0.995,0,1);
cseu = sqrt(chi2inv(0.005,6)/6)
cswu = sqrt(chi2inv(0.025,6)/6)
cswo = sqrt(chi2inv(0.975,6)/6)
cseo = sqrt(chi2inv(0.995,6)/6)

% Grafische Darstellung
f = figure(5);
set(f,'Position',[100 100 1200 400]);

subplot(1,2,1);
plot(1:M,muMesswerte,'b+-','linewidth',2);
hold on;
plot(1:M,ones(1,M)*(muref-cme*sref/sqrt(3)),'r:','linewidth',2);
h = plot(1:M,ones(1,M)*(muref-cmw*sref/sqrt(3)),'g--','linewidth',2);
set(h,'Color',[0 0.8 0]);
plot(1:M,ones(1,M)*(muref+cme*sref/sqrt(3)),'r:','linewidth',2);
plot(1:M,ones(M)*muref,'k','linewidth',1);
h = plot(1:M,ones(1,M)*(muref+cmw*sref/sqrt(3)),'g--','linewidth',2);
set(h,'Color',[0 0.8 0]);
hold off;
axis([0 11 0.98 1.02]);
set(gca,'XTick',0:2:10,'YTick',0.98:0.01:1.02);
set(gca,'FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
xlabel('Stichprobe','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Leitfähigkeit \gamma / \muS','FontWeight','normal','FontName','Ari-
al','FontSize',14);
grid off;
box on;
h = legend('Stichprobe','EG','WG');
set(h,'location','north','orientation','horizontal','FontWeight','normal','Font-
Name','Arial','FontSize',14);

subplot(1,2,2);
plot(1:M,stdMesswerte,'b+-','linewidth',2);
hold on;
plot(1:M,ones(1,M)*cseu*sref,'r:','linewidth',2);
h = plot(1:M,ones(1,M)*cswu*sref,'g--','linewidth',2);
set(h,'Color',[0 0.8 0]);
plot(1:M,ones(1,M)*cseo*sref,'r:','linewidth',2);
h = plot(1:M,ones(1,M)*cswo*sref,'g--','linewidth',2);
set(h,'Color',[0 0.8 0]);
hold off;
axis([0 11 0 0.01]);
set(gca,'XTick',0:2:10,'YTick',0:0.002:0.01);
set(gca,'FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
xlabel('Stichprobe','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Standardabweichung / µS','FontWeight','normal','FontName','Arial','Font-
Size',14);
grid off;
box on;
h = legend('Stichprobe','EG','WG');
set(h,'location','north','orientation','horizontal','FontWeight','normal','Font-
Name','Arial','FontSize',14);
```