

Design For Six Sigma

Teil B: Statistische Grundlagen
- Musterlösungen -

Manfred Strohrmann



Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Näher dran.

Änderungsindex

Datum	Verfasser	Änderungen
03.08.2016	M. Strohrmann	Korrigierte Ausgabe für Vorlesung SS 2017
26.06.2016	M. Strohrmann	Überarbeitung für Vorlesung SS 2016, Erstausgabe Statistische Tolerierung
15.03.2015	M. Strohrmann	Erstausgabe für Vorlesung SS 2015

1 Inhalt

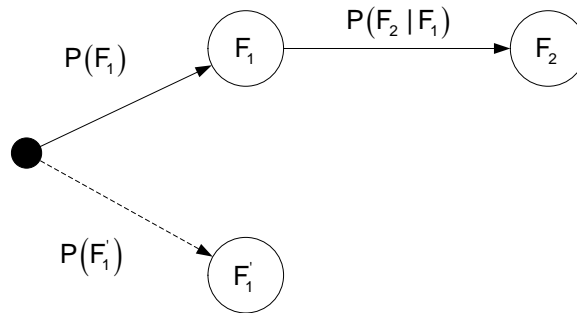
1	Inhalt	1
2	Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie	3
2.1	Auswahl Multimeter	3
2.2	System mit vier Teilsystemen	4
2.3	Ausschuss einer Spritzgussmaschine	5
2.4	Schnelltest für Messfühler	6
2.5	Fertigung von Drucksensoren	7
3	Beschreibende Statistik univariater Daten	9
3.1	Durchmesser einer Glasfaser	9
3.2	Verunreinigung von Halbleitermaterial	12
4	Univariate Wahrscheinlichkeitstheorie	15
4.1	Fertigung von Frästeilen	15
4.2	Erwarteter Mittelwert einer Windkraftanlage	16
4.3	Rauschleistung eines Quantisierungsfehlers	17
4.4	Zeitverläufe und Verteilungsfunktionen	18
4.5	Generierung von Zufallszahlen beliebiger Verteilung	19
5	Schätzung unbekannter Parameter	21
5.1	Thermische Ausdehnung von Kunststoffen	21
5.2	Konfidenzintervall bei Temperaturmessungen	22
5.3	Maßabweichungen von Drehteilen	24
6	Hypothesentest	27
6.1	Statistische Prozesskontrolle	27
6.2	Zugversuche an Bond-Verbindungen	28
6.3	Messung der Schmelzwärme	30
6.4	Kalibrierung von Drucksensoren	33
7	Beschreibende Statistik multivariater Daten	37
7.1	Brechungsindex und Dichte von Glas	37
7.2	Scherfestigkeit von Lötverbindungen	38
8	Multivariate Wahrscheinlichkeitstheorie	41
8.1	Reihenschaltung von Widerständen	41
9	Korrelationsanalyse	45
9.1	Drift von Widerständen	45
9.2	Schwindung bei Gussteilen	47
9.3	Lungenvolumen von Sportlern	49
10	Varianzanalyse	51
10.1	Waschmitteltest	51
10.2	Lebensdauer von Generatoren	52

11	Regression zweidimensionaler Datensätze	55
11.1	Scherfestigkeit von Schweißverbindungen	55
11.2	Kennlinie von Luftmassenmessern	58
11.3	Messung eines Diodenstroms	60
12	Regression mehrdimensionaler Datensätze	63
12.1	Ausbeute eines chemischen Prozesses	63
12.2	Lebensdauer von Maschinenkomponenten	66
12.3	Einspritzmenge bei einem Common-Rail-System	69
13	Statistische Versuchsplanung	73
13.1	Fertigung von Blattfedern	73
13.2	Reaktives-Ionen-Ätzen	75
13.3	Optimierung von Glühstiftkerzen	78
14	Statistische Tolerierung	82
14.1	Durchflussmessung mit Wirkdruckverfahren	82
14.2	Kompensation von Temperatureinflüssen bei Pendeluhrn	87
14.3	Wärmemessung in Fernwärme-Übergabestationen	90
15	Mess-System-Analyse	93
15.1	Temperaturmessung	93
15.2	Gewichtsmessung	100

2 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie

2.1 Auswahl Multimeter

a) Der Vorgang wird zum besseren Verständnis zunächst als Ereignisbaum dargestellt. Dabei steht die Bezeichnung F_n für ein funktionsfähiges Multimeter bei der n -ten Auswahl.



Zunächst liegen 10 Multimeter in der Schublade, von denen 7 funktionsfähig sind. Bei der ersten Auswahl beträgt die Übergangswahrscheinlichkeit $P(F_1) = 7/10$. Wurde ein funktionstüchtiges Multimeter ausgewählt, sind noch 9 Multimeter in der Schublade, von denen 6 funktionstüchtig sind. Bei der zweiten Wahl ergibt sich eine Übergangswahrscheinlichkeit von $P(F_2|F_1) = 6/9$. Da der schwarz eingezeichnete Pfad die einzige Möglichkeit ist, zu einem günstigen Ereignis zu kommen, ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu

$$P(F) = P(F_1) \cdot P(F_2 | F_1) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = 0.4667$$

Es handelt sich um ein Zufallsexperiment, dem das Ziehen ohne Zurücklegen entspricht. Die Reihenfolge ist nicht relevant. Damit muss eine Kombination ohne Wiederholung berechnet werden.

Mit $N = 10$ Multimetern und $K = 2$ Zügen ergeben sich

$$M_N = \binom{N}{K} = \frac{N!}{K! \cdot (N-K)!} = \frac{10!}{2! \cdot (10-2)!} = 45$$

mögliche Fälle. Die Anzahl günstiger Fälle ergibt sich der Auswahl von $K = 2$ funktionsfähigen Multimetern aus einer Menge von $N = 7$ Multimetern.

$$M_G = \binom{N}{K} = \frac{N!}{K! \cdot (N-K)!} = \frac{7!}{2! \cdot (7-2)!} = 21$$

Damit berechnet sich die Wahrscheinlichkeit dafür, zwei funktionsfähige Multimeter zu entnehmen

$$P(F) = \frac{21}{45} = 0.4667$$

b) Die Rechnung ändert sich bis auf die Zahlenwerte nicht. Mit den Übergangswahrscheinlichkeiten aus dem Ereignisbaum ergibt sich

$$P(F) = P(F_1) \cdot P(F_2 | F_1) \cdot P(F_3 | F_2) \cdot P(F_4 | F_3) \cdot P(F_5 | F_4) = \frac{11}{19} \cdot \frac{10}{18} \cdot \frac{9}{17} \cdot \frac{8}{16} \cdot \frac{7}{15} = 0.0397$$

Die Anzahl möglicher Fälle erhöht sich zu

$$M_N = \binom{N}{K} = \frac{N!}{K! \cdot (N-K)!} = \frac{19!}{5! \cdot (19-5)!} = 11628$$

und die Anzahl günstiger Fälle ändert sich auf den Wert

$$M_G = \binom{N}{K} = \frac{N!}{K! \cdot (N-K)!} = \frac{11!}{5! \cdot (11-5)!} = 462$$

Damit ergibt die Berechnung der Wahrscheinlichkeit

$$P(F) = \frac{462}{11628} = 0.0397$$

2.2 System mit vier Teilsystemen

a) Es wird davon ausgegangen, dass die Ausfälle voneinander unabhängig sind. Ein Defekt der Komponente n wird mit D_n bezeichnet, eine ordnungsgemäße Funktion der Komponente n wird entsprechend mit F_n bezeichnet. Für die unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten ergibt sich die folgende Tabelle.

Teil n	1	2	3	4
$P(D_n)$	0.05	0.1	0.03	0.03
$P(F_n) = 1 - P(D_n)$	0.95	0.9	0.97	0.97

Wegen der Unabhängigkeit der Ereignisse werden die Wahrscheinlichkeiten für das gemeinsame Eintreffen miteinander multipliziert. Damit ein System völlig einwandfrei ist (Ereignis E), müssen alle Teilsysteme funktionsfähig sein.

$$P(E) = P(F_1) \cdot P(F_2) \cdot P(F_3) \cdot P(F_4) = 0.8045$$

Das System ist gerade noch funktionsfähig, wenn zwei der vier Teilsysteme funktionieren und die beiden anderen defekt sind. Das Ereignis wird mit G bezeichnet.

$$\begin{aligned}
 P(G) &= P(F_1) \cdot P(F_2) \cdot P(D_3) \cdot P(D_4) + P(F_1) \cdot P(D_2) \cdot P(F_3) \cdot P(D_4) + P(F_1) \cdot P(D_2) \cdot P(D_3) \cdot P(F_4) \\
 &\quad + P(D_1) \cdot P(F_2) \cdot P(F_3) \cdot P(D_4) + P(D_1) \cdot P(F_2) \cdot P(D_3) \cdot P(F_4) \\
 &\quad + P(D_1) \cdot P(D_2) \cdot P(F_3) \cdot P(F_4) \\
 &= 0.0136
 \end{aligned}$$

b) Die Anzahl M von Teilen mit einer definierten Eigenschaft ergibt sich aus dem Produkt von Wahrscheinlichkeit und Stichprobengröße. Mit der angegebenen Stichprobengröße von 100 ergibt sich

$$M(D_1) = P(D_1) \cdot N = 0.05 \cdot 100 = 5$$

$$M(E) = P(E) \cdot N = 0.8045 \cdot 100 = 80.45$$

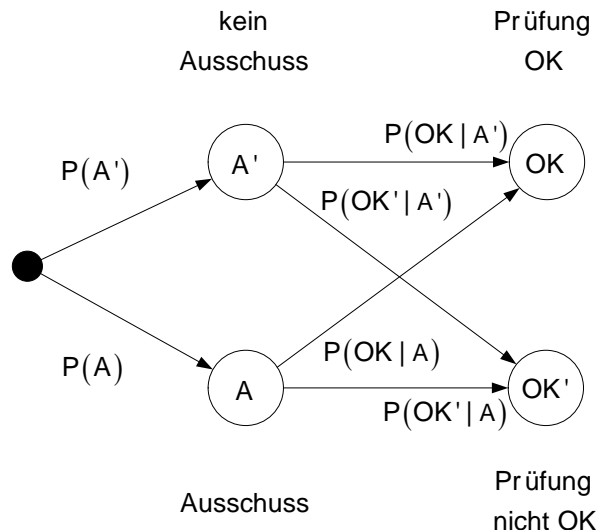
$$M(G) = P(G) \cdot N = 0.0136 \cdot 100 = 1.36$$

2.3 Ausschuss einer Spritzgussmaschine

a) Zur Erstellung des Ereignisbaum werden zwei Ereignisse definiert

- Ereignis A: Es wird ein Ausschussteil produziert.
- Ereignis OK: Das Prüfergebnis ist positiv, das Teil wird als gut gekennzeichnet.

Damit ergibt sich für diese Aufgabe folgender Ereignisbaum.



Die in der Aufgabenstellung gegebenen Wahrscheinlichkeiten sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

$P(A)$	$P(OK' A)$	$P(OK' A')$
0.07	0.78	0.015

b) Es soll die Wahrscheinlichkeit $P(A|OK)$ berechnet werden, mit der ein positiv getestetes Teil Ausschuss ist. Mit dem Satz von Bayes und dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit ergibt sich

$$\begin{aligned}
 P(A|OK) &= \frac{P(OK|A) \cdot P(A)}{P(OK)} = \frac{P(OK|A) \cdot P(A)}{P(OK|A) \cdot P(A) + P(OK|A') \cdot P(A')} \\
 &= \frac{(1 - P(OK'|A)) \cdot P(A)}{(1 - P(OK'|A)) \cdot P(A) + (1 - P(OK'|A')) \cdot (1 - P(A))} = \frac{0.22 \cdot 0.07}{0.22 \cdot 0.07 + 0.985 \cdot 0.93} = 0.0165
 \end{aligned}$$

c) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(A'|OK')$, mit der ein Teil kein Ausschuss ist, obwohl es bei der Prüfung ausgesondert wurde. Wieder werden der Satz von Bayes und der Satz der totalen Wahrscheinlichkeit angewendet.

$$\begin{aligned}
 P(A'|OK') &= \frac{P(OK'|A') \cdot P(A')}{P(OK')} = \frac{P(OK'|A') \cdot (1 - P(A))}{P(OK'|A') \cdot P(A') + P(OK'|A) \cdot P(A)} \\
 &= \frac{P(OK'|A') \cdot (1 - P(A))}{P(OK'|A') \cdot (1 - P(A)) + P(OK'|A) \cdot P(A)} = \frac{0.015 \cdot 0.93}{0.015 \cdot 0.93 + 0.78 \cdot 0.07} = 0.2035
 \end{aligned}$$

d) Nach den Rechnungen unter b) ergibt sich bei $N = 100$ Teilen eine Anzahl M von

$$M = P(A \cap OK) \cdot N = 0.0165 \cdot 100 = 1.65$$

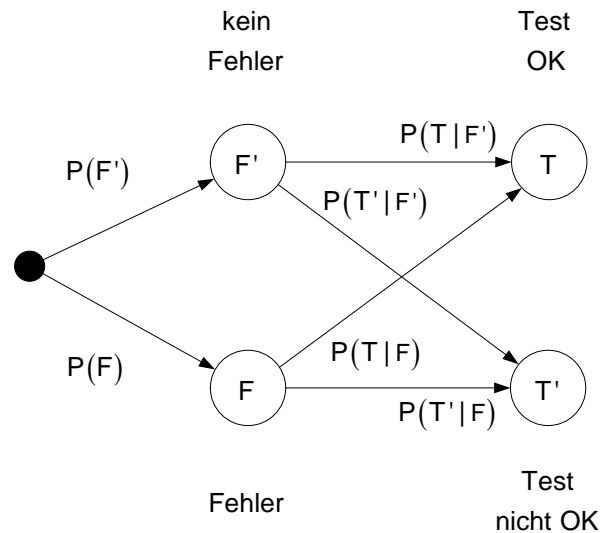
Teilen.

2.4 Schnelltest für Messfühler

a) Zur Erstellung des Ereignisbaum werden zwei Ereignisse definiert

- Ereignis F: Das Teil hat einen Fehler
- Ereignis T: Das Testergebnis ist positiv, das Teil wird als gut gekennzeichnet.

Damit ergibt sich für diese Aufgabe folgender Ereignisbaum.



Die in der Aufgabenstellung gegebenen Wahrscheinlichkeiten sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

$P(F)$	$P(T' F)$	$P(T' F')$
0.0015	0.95	0.1

b) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(F|T')$, mit der ein Teil einen Fehler aufweist, unter der Bedingung, dass der Test einen Fehler angezeigt hat.

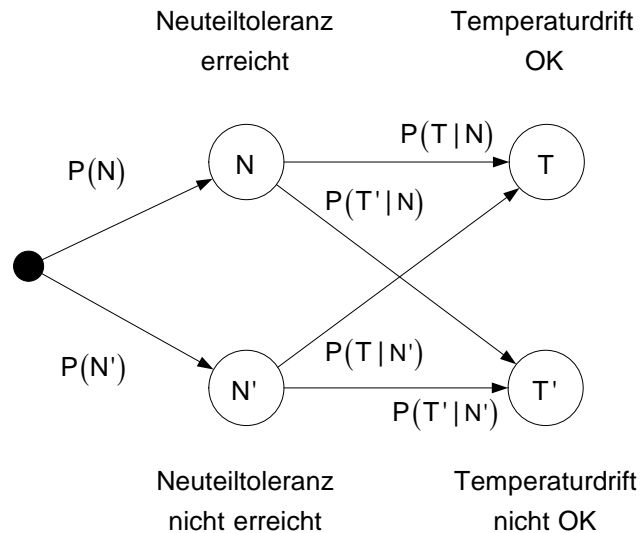
$$\begin{aligned}
 P(F|T') &= \frac{P(T'|F) \cdot P(F)}{P(T')} = \frac{P(T'|F) \cdot P(F)}{P(T'|F) \cdot P(F) + P(T'|F') \cdot (1 - P(F))} \\
 &= \frac{0.95 \cdot 0.0015}{0.95 \cdot 0.0015 + 0.1 \cdot 0.9985} = 0.0141
 \end{aligned}$$

2.5 Fertigung von Drucksensoren

a) Um die Aufgabe lösen zu können, werden folgende Bezeichnungen definiert:

- N: Die spezifizierte Neuteiltoleranz wird erreicht.
- T: Die spezifizierte Temperaturdrift wird erreicht.

Der Ereignisbaum ist in folgender Grafik dargestellt.



b) Da die Ereignisse unabhängig sind, gelten die Bedingungen:

$$P(T) = P(T | N) = P(T | N')$$

$$P(T') = P(T' | N) = P(T' | N')$$

Wird zufällig ein Drucksensor ausgewählt, ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für einen Defekt D aus der Bedingung

$$P(D) = P(N) + P(T) - P(N \cap T)$$

Unter der Annahme, dass die Prüfung repräsentativ war, ergibt sich die Wahrscheinlichkeit

$$P(D) = P(N) + P(T) - P(N \cap T) = \frac{4}{100} + \frac{7}{100} - \frac{1}{100} = \frac{10}{100} = 0.1$$

Die einzelnen Auftretenswahrscheinlichkeiten sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

		Spezifikation Temperaturdrift	
		erfüllt	nicht erfüllt
Spezifikation Neuteiltoleranz	nicht erfüllt	3	1
	erfüllt	90	6

c) Bei der Entnahme werden 10 % der entnommenen Teile einen oder mehrere Defekte aufweisen, bei 25 Teilen also 2.5 Teile. Ein Anteil von 3 % der entnommenen Teile wird die Spezifikation ausschließlich aufgrund ihrer Neuteiltoleranz nicht erfüllen.

3 Beschreibende Statistik univariater Daten

3.1 Durchmesser einer Glasfaser

a) Für die vorliegende Stichprobe berechnet sich das arithmetische Mittel mit dem Matlab-Befehl `mean(...)` zu

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_N}{N} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^N x_n = 16.7330 \mu\text{m}$$

Der Median x_{MED} ergibt sich mit dem Befehl `median(...)`

$$x_{\text{MED}} = 16.8495 \mu\text{m}$$

Für die in dem Aufgabenblatt gegebenen Zahlenwerte ergibt sich eine Spannweite von

$$\Delta x = x_{\text{MAX}} - x_{\text{MIN}} = 8.2700 \mu\text{m}$$

Die Varianz berechnet sich mit dem MATLAB-Befehl `var(...)` zu

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})^2 = 3.8519 \mu\text{m}^2$$

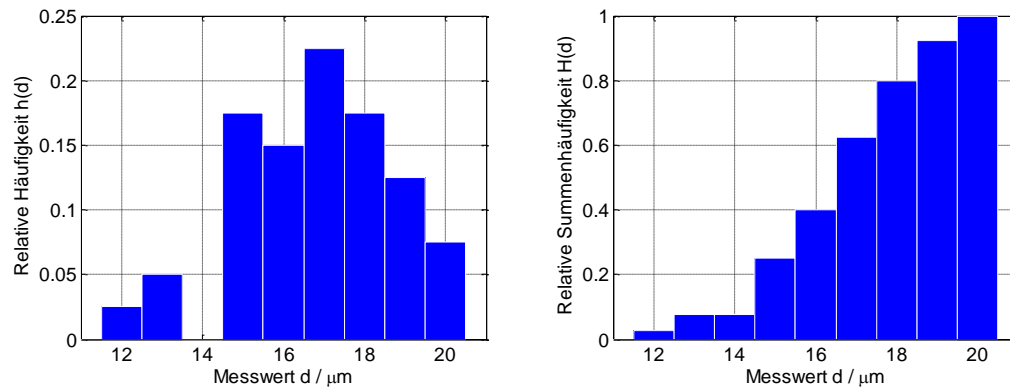
Die Standardabweichung s ergibt sich aus der positiven Quadratwurzel der Varianz s^2 und berechnet sich mit dem Matlab-Befehl `std(...)` zu

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})^2} = 1.9626 \mu\text{m}$$

b) Zur Berechnung der absoluten Häufigkeit, wurden die Stichprobenwerte in 10 Klassen unterteilt und die absolute sowie die relative Häufigkeit ermittelt. In Matlab kann die Unterteilung in Klassen mit dem Befehl `hist(...)` erzielt werden.

Gruppenwert	Absolute Häufigkeit $h_A(x)$	Relative Häufigkeit $h(x)$	Absolute Summenhäufigkeit $H_A(x)$	Relative Summenhäufigkeit $H(x)$
11	0	0	0	0
12	1	0.025	1	0.025
13	2	0.05	3	0.075
14	0	0	3	0.075
15	7	0.175	10	0.25
16	9	0.15	16	0.4
17	6	0.225	25	0.625
18	7	0.175	32	0.8
19	5	0.125	37	0.9250
20	3	0.075	40	1

Auf Basis der bestimmten Werte der obigen Tabelle können die relative Häufigkeitsverteilung und die relative Summenhäufigkeit grafisch dargestellt werden. In den Grafiken ist zu erkennen, dass es zu einer Häufung der Messwerte im Bereich um den Mittelwert kommt. Zu den Randbereichen hin werden die vorliegenden Stichprobenwerte immer seltener. In der Abbildung ist außerdem zu erkennen, dass die relative Summenhäufigkeit gegen den Wert 1 läuft.



c) Das p - Quartil einer Verteilung trennt die Daten so in zwei Teile, dass ein Anteil p unter und ein Anteil 1 - p über dem Quartil liegt. Anhand der obigen Definition des Median lässt sich ableiten, dass der Median dem 50 % - Quartil entspricht. Die Berechnungsgleichung für die Quartile lautet

$$x_p = x_{n-1} + \frac{d \cdot (p - H(x_{n-1}))}{h(x_n)}$$

In Matlab können Quantile mit dem Befehl `quantile(...)` berechnet werden. Die Berechnungsgleichung für den 25% - Quantilkoeffizient der Schiefe lautet

$$g_{0.25} = \frac{(x_{0.75} - x_{0.5}) - (x_{0.5} - x_{0.25})}{x_{0.75} - x_{0.25}}$$

Die Auswertung ergibt die in der folgenden Tabelle dargestellten Werte für die Quantile und den zu bestimmenden 25% - Quantilkoeffizienten der Schiefe.

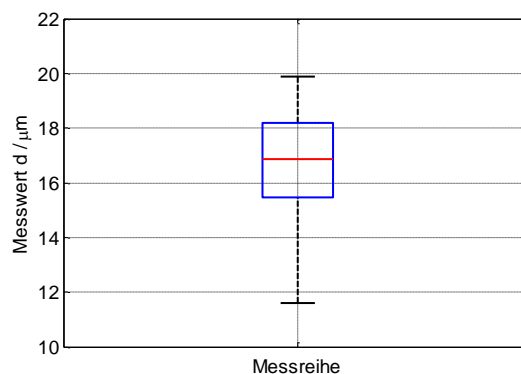
Quantil	Wert
25 %	15.4661
50 %	16.8495
75 %	18.2045
Quantilkoeffizient der Schiefe	-0.0104

Da der 25% - Quantilkoeffizient der Schiefe nur leicht negativ ist, ist die Stichprobe nach Definition leicht linksschief. der Häufigkeitsverteilung ist jedoch praktisch kein Unterschied zwischen der Anzahl der Stichprobenwerte unterhalb und oberhalb des Median zu erkennen, die Stichprobe ist daher nahezu symmetrisch.

d) Der Box – Plot stellt eine grafische Zusammenfassung der bereits berechneten Lage- und Streuungskennwerte dar. Er fasst somit die charakteristischen Punkte einer Verteilung zusammen. Im Einzelnen sind dies:

- minimaler Stichprobenwert
- 25% Quantil
- Median
- 75% Quantil
- maximaler Stichprobenwert
- Ausreißer

In der folgenden Grafik ist der Box – Plot dargestellt, der mit dem Matlab-Befehl `boxplot(...)` erzeugt wurde.



Anhand des blauen Rechtecks in der Grafik des Box-Plots kann abgelesen werden, in welchem Bereich 50% der Stichprobenwerte liegen. Die rote Linie kennzeichnet den Median der Verteilung. Durch seine Lage innerhalb des Rechtecks kann zusätzlich eine Aussage über die Schiefe der Verteilung getroffen werden. In dem hier vorliegenden Beispiel sind gleich viele Werte unterhalb wie oberhalb der Medianlinie, die Verteilung ist somit symmetrisch. Dies deckt sich mit der Erkenntnis aus dem berechneten 25% - Quantilkoeffizienten der Schiefe insoweit, dass dieser sehr nahe an 0 liegt. Zusätzlich kann der Grafik der minimale und der maximale Wert einer Stichprobe entnommen werden, wobei Ausreißer unberücksichtigt bleiben. Gekennzeichnet werden diese Extremwerte durch oberhalb und unterhalb des Rechtecks befindliche schwarze horizontale Linien. Die dieser Aufgabe zu Grunde liegende Stichprobe enthält keine Messausreißer. Andernfalls wären diese als rote Kreuze in dem Box - Plot eingezeichnet.

3.2 Verunreinigung von Halbleitermaterial

a) Für die vorliegende Stichprobe berechnet sich das arithmetische Mittel mit dem Matlab-Befehl `mean(...)` zu

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^N x_n = 502.1647 \text{ ppm}$$

Der Median x_{MED} ergibt sich mit dem Befehl `median(...)`:

$$x_{\text{MED}} = c_{n-1} + \frac{d \cdot (0.5 - H(c_{n-1}))}{h(c_n)} = 502.0939 \text{ ppm}$$

In Matlab kann die Berechnung der Spannweite vereinfacht mit dem Befehl `range(...)` durchgeführt werden. Für die angegebenen Zahlenwerte ergibt sich eine Spannweite von

$$\Delta x = x_{\text{MAX}} - x_{\text{MIN}} = 2.7490 \text{ ppm}$$

Die Varianz betrachtet die Streuung aller Stichprobenwerte um den Mittelwert. Der entsprechende Matlab-Befehl lautet `var(...)`.

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})^2 = 0.4377 \text{ ppm}^2$$

Die Standardabweichung s ergibt sich aus der positiven Quadratwurzel der Varianz s^2 und berechnet sich mit dem Matlab-Befehl `std(...)` zu

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})^2} = 0.6616 \text{ ppm}$$

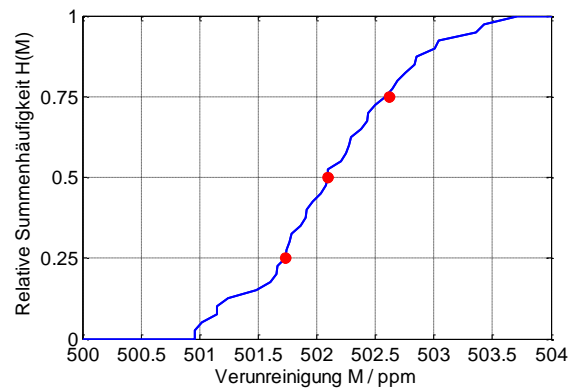
Die Standardabweichung hat dieselbe physikalische Dimension wie die Stichprobenwerte x und eignet sich damit gut für eine anschauliche Interpretation.

b) Die relative Summenhäufigkeit ergibt bei einem sortierten Datensatz aus der Kenntnis, dass jeder der N Werte einmal vorkommt. Jeder Wert hat die relative Häufigkeit $1/N$. Deshalb steigt die relative Summenhäufigkeit bei jedem Wert um $1/N$ an. Die Realisierung ist in folgendem Programmausschnitt zu sehen.

```
% Vorbereiten der Messdaten
N = length(data);
dataSort = sort(data);
relSummenhaeufigkeit = 1/N*(1:N);

% Grafische Darstellung
plot(dataSort , relSummenhaeufigkeit, 'b', 'linewidth', 2);
```

Es ergibt sich folgende relative Summenhäufigkeit.



c) Mit dem MATLAB-Befehl `quantile(...)` lassen sich die unten aufgeführten Quantile berechnen und der Quartilkoeffizient der Schiefe bestimmen.

Quantil	Wert
25 %	501.7346
50 %	502.0939
75 %	502.6163
Quartilkoeffizient der Schiefe	0.1849

Da der 25% - Quartilkoeffizient der Schiefe positiv ist, ist die Stichprobe rechtsschief.

4 Univariate Wahrscheinlichkeitstheorie

4.1 Fertigung von Frästeilen

a) Mittelwert μ und Standardabweichung σ sind bekannt. Es muss mit einer Normalverteilung gerechnet werden. Ausschussteile haben eine Dicke von weniger als 2.495 mm.

$$P(d < 2.495 \text{ mm}) = F(2.495) = 0.0062$$

b) Der Ausschussanteil ergibt sich aus der Wahrscheinlichkeit

$$P(d > 2.506 \text{ mm}) = 1 - P(d \leq 2.506 \text{ mm}) = 1 - F(2.506) = 0.0013$$

c) In diesem Fall muss mit einem Ausschussanteil von

$$1 - P(2.497 \text{ mm} \leq d \leq 2.503 \text{ mm}) = 1 - F(2.503) + F(2.497) = 0.1336$$

gerechnet werden.

d) Bei der Lösung wird davon ausgegangen, dass gleichviel Teile zu klein und zu groß sind. Damit ergibt sich eine untere Fehlergrenze von 1 % und für die Zufallsvariable

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

ergibt sich die Wahrscheinlichkeit von

$$0.01 = F(z) = F\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

Auflösen nach der Standardabweichung führt über

$$F^{-1}(0.01) = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

zu der Standardabweichung

$$\sigma = \frac{x - \mu}{F^{-1}(0.01)} = \frac{-0.003}{-2.3263} = 0.0013$$

e) Die Rechnung von Aufgabenteil c ergibt mit $\mu = 2.51$ mm einen Ausschussanteil von

$$1 - P(2.497 \text{ mm} \leq d \leq 2.503 \text{ mm}) = 1 - F(2.503) + F(2.497) = 0.9998$$

Wegen des verschobenen Mittelwertes sind praktisch alle Teile unbrauchbar.

Alle Werte wurden über folgendes MATLAB-File berechnet:

```
% Definition der bekannten Parameter
mu = 2.5;
sig = 0.002;

% Aufgabenteil a
Pa = normcdf(2.495,mu,sig)

% Aufgabenteil b
Pb = 1 - normcdf(2.506,mu,sig)

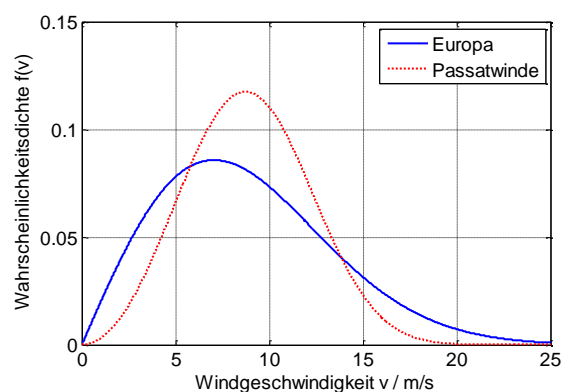
% Aufgabenteil c
Pc = 1 - normcdf(2.503,mu,sig) + normcdf(2.497,mu,sig)

% Aufgabenteil d
signeu = - 0.003/norminv(0.01,0,1)

% Aufgabenteil c
muneu = 2.51;
Pe = 1 - normcdf(2.503,muneu,sig) + normcdf(2.497,muneu,sig)
```

4.2 Erwarteter Mittelwert einer Windkraftanlage

a) Darstellung der Windgeschwindigkeitsverteilung von Europa ($\beta = 2$) mit der Windverteilung von Passatwinden ($\beta = 3$) für einen konstanten Skalierungsfaktor von $\eta = 10$.



Passatwinde haben eine engere Verteilung als Winde, die für Europa typisch sind. Damit lässt sich eine Windkraftanlage für Passatwinde gezielter auslegen.

b) Die Windkraftanlage arbeitet in einem Geschwindigkeitsintervall zwischen 5 und 15 m/s. Mit einem Rotorradius von 5 m und einem Leistungsbeiwert $c_p = 0.48$ sowie einer Dichte $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$ aus ergibt sich mit dem Erwartungswertoperator die mittlere Leistung über

$$E(P) = \int_5^{15} c_p \cdot \rho \cdot A \cdot \frac{1}{2} \cdot v^3 \cdot f(v) \, dv$$

Die Berechnung kann nicht analytisch ausgeführt werden. Die numerische Berechnung ergibt sich aus der MATLAB-Sequenz:

```
% Geschwindigkeitsvektor erzeugen
dv = 0.01;
v = 5:dv:15;

% Variablendefinition Leistungsberechnung
roh = 1.2;
r = 5;
A = pi*r^2;
cp = 0.48;

% Leistungsberechnung über Riemannsche Summe
P1 = sum(0.5 * cp * roh * A * v.^3.*wblpdf(v,10,2)*dv)
P2 = sum(0.5 * cp * roh * A * v.^3.*wblpdf(v,10,3)*dv)
```

Für das Beispiel ergibt sich bei einem Standort in Europa ein Erwartungswert von 15.4 kW, bei einem Standort mit Passatwinden ein Erwartungswert von 19.1 kW. Der Erwartungswert ist bei Passatwinden erwartungsgemäß höher.

4.3 Rauschleistung eines Quantisierungsfehlers

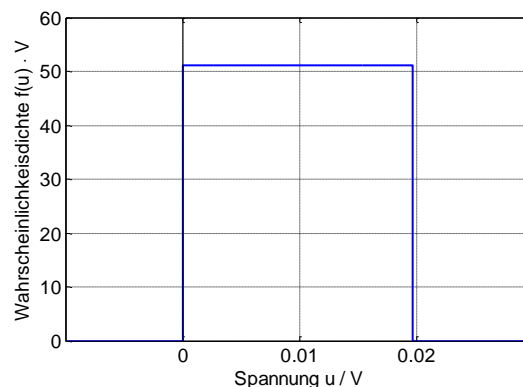
a) Ein 8-Bit-Wandler hat bei einer Referenzspannung von $U_{\text{REF}} = 5 \text{ V}$ eine Auflösung ΔU von

$$\Delta U = \frac{U_{\text{REF}}}{2^8} = \frac{5}{256} = 0.0195 \text{ V}$$

Der bei der Quatisierung entstehende Fehler liegt damit zwischen 0 und ΔU . Er weist eine Gleichverteilung auf. Aufgrund der Normierung

$$\int_0^{\Delta U} f(u) \, du = 1$$

besitzt die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(u)$ in dem Intervall von 0 ... ΔU den konstanten Wert $f(u) = 1/\Delta U = 1/(0.0195 \text{ V})$. Damit kann die Wahrscheinlichkeitsdichte grafisch dargestellt werden.



b) Die Leistung eines Signals ist als das Quadrat des Signals definiert. Die mittlere Rauschleistung ergibt sich aus dem Erwartungswert von u^2 .

$$E(u^2) = \int_0^{\Delta U} u^2 \cdot f(u) \, du = \int_0^{\Delta U} u^2 \cdot \frac{1}{\Delta U} \, du = P_0 \cdot \frac{1}{3} \cdot u^3 \Big|_0^{\Delta U} = \frac{1}{\Delta U} \cdot \frac{1}{3} \cdot (\Delta U^3 - 0) = \frac{\Delta U^2}{3} = 0.12675 \text{ mW}$$

c) Bei einem normalverteilten Signal ergibt sich

$$\sigma^2 = E((u - \mu)^2) = E(u^2 - 2 \cdot E(u) \cdot \mu + \mu^2) = E(u^2 - \mu^2) = E(u^2) - \mu^2$$

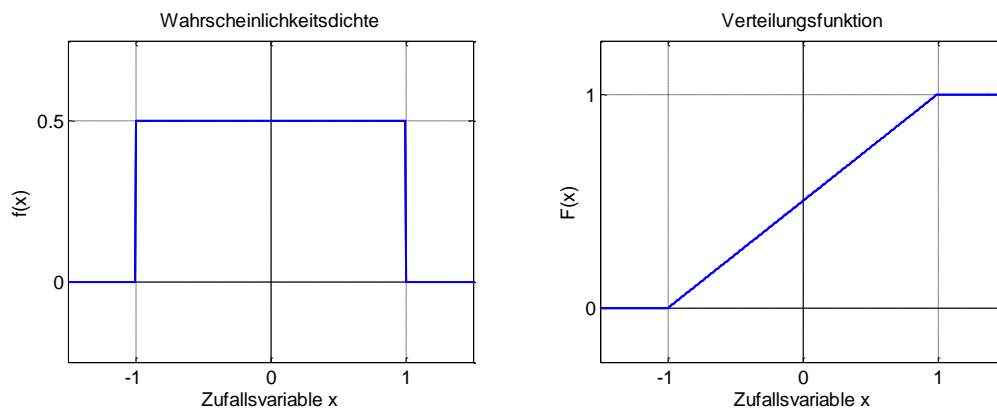
Auflösen nach $E(u^2)$ führt zu

$$E(u^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

Die mittlere Leistung ergibt sich aus der Summe von quadriertem Mittelwert und Varianz.

4.4 Zeitverläufe und Verteilungsfunktionen

a) Das dargestellte Sägezahnsignal zeigt über der Zeit einen linearen Anstieg. Damit sind alle Werte zwischen -1 und 1 gleich wahrscheinlich. Bei der gesuchten Verteilung handelt sich deshalb um eine Gleichverteilung zwischen -1 und 1. Wahrscheinlichkeitsdichte und Verteilungsfunktion sind in den folgenden Diagrammen dargestellt. Aufgrund der Normierungsbedingung hat die Wahrscheinlichkeitsdichte in dem Intervall von -1 bis 1 von $f(x) = 1/2$.



b) Die Berechnung der Wahrscheinlichkeitsdichte wird des Signals $x(t)$ wird auf die Transformation einer Zufallsvariablen zurückgeführt. Es wird von einer Variablen t ausgegangen, die in dem Intervall von 0 ... 1 gleichverteilt ist. Die Wahrscheinlichkeitsdichte von t lautet in dem Intervall von 0 ... 1

$$f_T(t) = 1$$

und die entsprechende Verteilungsfunktion

$$F_T(t) = t$$

Die Zufallsvariable t wird mit der Funktion

$$x(t) = \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{2} \cdot t\right) = \cos(\pi \cdot t)$$

auf die Zufallsvariable x abgebildet. In den Zahlenbereich $0 \leq t \leq 1$ ist die Funktion streng monoton fallend. Deshalb lautet die Umkehrfunktion in dem Bereich von $0 < t \leq 1$

$$t = \frac{1}{\pi} \cdot \arccos(x)$$

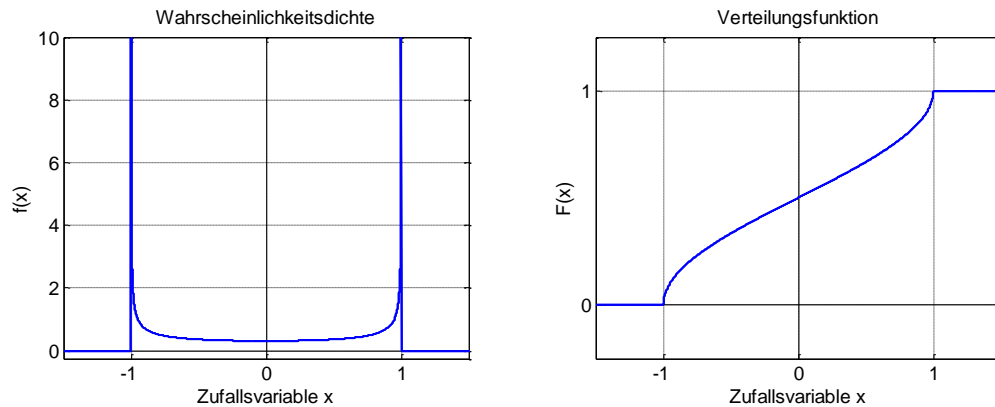
Die Verteilungsfunktion der Variable x errechnet sich damit zu

$$F_X(x) = F_T\left(\frac{1}{\pi} \cdot \arccos(x)\right) = t \Big|_{t=\frac{1}{\pi} \cdot \arccos(x)} = \frac{1}{\pi} \cdot \arccos(x)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte errechnet sich über

$$f_x(x) = f_T\left(\frac{1}{\pi} \cdot \arccos(x)\right) \cdot \left| \frac{1}{\pi} \cdot \frac{d \arccos(x)}{dx} \right| = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Wahrscheinlichkeitsdichte und Verteilungsfunktion der Zufallsvariable x sind in den folgenden Diagrammen dargestellt.



4.5 Generierung von Zufallszahlen beliebiger Verteilung

a) Die Wahrscheinlichkeitsdichte der generierten Zahlen ist zwischen 0 und 1 gleichverteilt. Sie besitzt in dem Bereich $0 < x \leq 1$ die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_x(x) = 1$$

und die Verteilungsfunktion

$$F_x(x) = x$$

Um Zufallszahlen y mit einer Normalverteilung $F_Y(y)$ zu generieren, wird die inverse Verteilungsfunktion

$$y = F_Y^{-1}(x)$$

verwendet.

a) Mit der inversen Standardnormalverteilung ergeben sich entsprechend standard-normalverteilte Zufallsvariablen.

b) Um Zufallszahlen mit einer Weibull-Verteilung zu generieren, wird die inverse Weibull-Verteilung mit $\beta = 2$ und $\eta = 10$ verwendet.

5 Schätzung unbekannter Parameter

5.1 Thermische Ausdehnung von Kunststoffen

Es liegt eine Stichprobe mit $N = 40$ Messwerten vor. Von der Grundgesamtheit sind weder Mittelwert noch Standardabweichung bekannt. Der Mittelwert der Stichprobe beträgt $\bar{x} = 19.5818$ mm und eine Standardabweichung von $s = 2.4857$ mm.

a) Der Konfidenzbereich für den Mittelwert bei unbekannter Varianz berechnet sich über

$$\bar{x} - \frac{c_2 \cdot s}{\sqrt{N}} < \mu \leq \bar{x} + \frac{c_1 \cdot s}{\sqrt{N}}$$

Die Konstanten $c_{1,2}$ ergeben sich mit der inversen t-Verteilung mit $N - 1$ Freiheitsgraden zu

$$c_1 = F^{-1}(0.025) = -2.0227$$

$$c_2 = F^{-1}(0.975) = 2.0227$$

Damit lautet der Konfidenzbereich für den Mittelwert

$$18.7868 \text{ mm} < \mu \leq 20.3768 \text{ mm}$$

b) Der Konfidenzbereich der Varianz wird abgeschätzt mit

$$\frac{s^2 \cdot (N-1)}{c_2} < \sigma^2 \leq \frac{s^2 \cdot (N-1)}{c_1}$$

Dabei ergeben sich die beiden Konstanten $c_{1,2}$ aus der inversen Chi-Quadrat-Verteilung mit $N - 1 = 39$ Freiheitsgraden zu

$$c_1 = F^{-1}(0.025) = 23.6543$$

und

$$c_2 = F^{-1}(0.975) = 58.1201$$

Damit lautet das Konfidenzintervall für die Varianz

$$4.1461 \text{ mm}^2 < \sigma^2 \leq 10.1871 \text{ mm}^2$$

beziehungsweise für die Standardabweichung

$$2.0362 \text{ mm} < \sigma \leq 3.1917 \text{ mm}$$

c) Der Prognosebereich für zukünftige Stichprobenwerte berechnet sich nach

$$\bar{x} + c_1 \cdot s \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{N}} < x \leq \bar{x} + c_2 \cdot s \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{N}}$$

Wie unter Teil a) werden die Konstanten $c_{1,2}$ mit der inversen t-Verteilung mit $N - 1 = 39$ Freiheitsgraden berechnet. Es ergibt sich ein Prognosebereich für $\gamma = 99.73 \%$ von

$$11.5180 \text{ mm} < x \leq 27.6455 \text{ mm}$$

5.2 Konfidenzintervall bei Temperaturmessungen

a) Der Datensatz wird zunächst eingelesen

```
% Laden des Datensatzes
load Selbstentzuendung.mat;
N = length(Temp);
```

Mittelwert und Standardabweichung ergeben sich aus den entsprechenden Funktionen in MATLAB, Konfidenzbereiche werden mit den Formeln der Vorlesung abgeschätzt.

Konfidenzbereich für den Mittelwert bei unbekannter Varianz

$$\bar{x} - \frac{c_2 \cdot s}{\sqrt{N}} < \mu \leq \bar{x} + \frac{c_1 \cdot s}{\sqrt{N}}$$

Konfidenzbereich für die Varianz

$$\frac{s^2 \cdot (N-1)}{c_2} < \sigma^2 \leq \frac{s^2 \cdot (N-1)}{c_1}$$

```
% Mittelwert und Standardabweichung
Tempquer = mean(Temp)
s = std(Temp)

% Konfidenzbereiche der Kenngrößen
alpha = 0.05;
mu_min = Tempquer - tinv(1 - alpha/2, N-1) * s / sqrt(N)
mu_max = Tempquer + tinv(alpha/2, N-1) * s / sqrt(N)
sig_min = sqrt(s^2 * (N-1) / chi2inv(1-alpha/2, N-1))
sig_max = sqrt(s^2 * (N-1) / chi2inv(alpha/2, N-1))
```

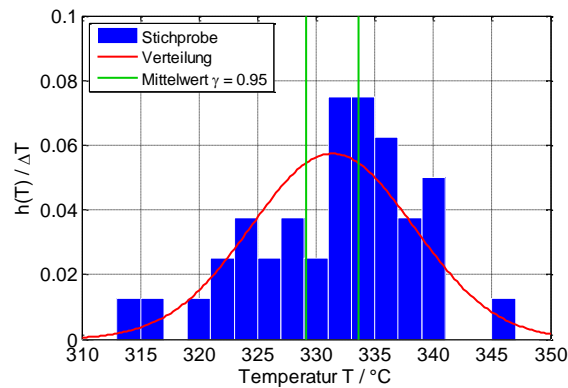
b) Die Daten für das Histogramm können mit dem MATLAB-Befehl hist erzeugt werden.

```
% Berechnung des entsprechenden Histogramms mit einer Gesamtfläche von 1
dTemph = 2;
Temph = 310:dTemph:350;
h = hist(Temp, Temph) / N / dTemph;
hdl = bar(Temph, h, 'b');
```

c) Bei der Darstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung muss berücksichtigt werden, dass sich die Flächen entsprechen. Deshalb wird die Wahrscheinlichkeitsdichte für eine einheitliche Darstellungsform normiert.

```
% Berechnung der entsprechenden Verteilung
dTempf = 0.2;
Tempf = 310:dTempf:350;
f = normpdf(Tempf, Tempquer, s);
plot(Tempf, f, 'r', 'Linewidth', 2);
```

Es ergibt sich folgende Grafik:



d) Bei der Verteilung sind weder Mittelwert noch Varianz bekannt. Die Variable x weist eine Varianz von s^2 auf, die Variable \bar{x} weist eine Varianz von s^2/N auf. Die Differenz beider Variablen weist damit eine Varianz von $s^2 \cdot (1 + 1/N)$ auf. Da die Varianz nicht bekannt ist, muss die t-Verteilung mit $N - 1$ Freiheitsgraden verwendet werden. Damit weist die Variable

$$t = \frac{x - \bar{x}}{s \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{N}}}$$

eine t-Verteilung mit $N - 1$ Freiheitsgraden auf. Das Prognoseintervall errechnet sich damit zu

$$\bar{x} + c_1 \cdot s \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{N}} < x \leq \bar{x} + c_2 \cdot s \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{N}}$$

```
% Prognoseintervall zukünftige Stichprobenwerte
pr_min = Tempquer + tinv(alpha/2,N-1)*s*sqrt(1+1/N)
pr_max = Tempquer + tinv(1 - alpha/2,N-1)*s*sqrt(1+1/N)
```

e) Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit für eine Temperatur $T < 300$ °C errechnet sich wieder aus der t-Verteilung, da die Verteilung der zukünftiger Stichprobenwerte entspricht. Mit dieser Verteilung und den berechneten Kenngrößen kann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Papier brennt, berechnet werden zu $P(\text{Papier brennt}) = 34.259$ ppm. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Papier nicht brennt, ergibt sich damit zu $P(\text{Papier brennt nicht}) = 1 - 34$ ppm.

```
% Wenn die Selbstentzündungstemperatur > als 300 °C ist, entzündet sich das
% Papier bei 300 °C nicht, Berechnung der Wahrscheinlichkeit
p = 1 - tcdf((300-Tempquer)/s/sqrt(1+1/N),N-1)
```

5.3 Maßabweichungen von Drehteilen

a) Es wird die Zufallsvariable t mit

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{N} + \frac{1}{M}} \cdot s}$$

ausgewertet. Dazu müssen jeweils aus den $N = M = 15$ Werten die Mittelwerte

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^N x_{1n} = -0.0427 \text{ mm}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{M} \cdot \sum_{m=1}^M x_{2m} = -0.1800 \text{ mm}$$

sowie die einzelnen Standardabweichungen

$$s_1 = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{n=1}^N (x_{1n} - \bar{x}_1)^2} = 0.4937 \text{ mm}$$

$$s_2 = \sqrt{\frac{1}{M-1} \cdot \sum_{m=1}^M (x_{2m} - \bar{x}_2)^2} = 0.4677 \text{ mm}$$

und die Gesamtstandardabweichung

$$s = \sqrt{\frac{s_1^2 \cdot (N-1) + s_2^2 \cdot (M-1)}{N+M-2}} = 0.4808 \text{ mm}$$

berechnet werden. Der Konfidenzbereich ergibt sich zu

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - c_2 \cdot \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{1}{M}} \cdot s < (\mu_1 - \mu_2) \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - c_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{1}{M}} \cdot s$$

Die Konstanten $c_{1,2}$ berechnen sich aus einer t -Verteilung mit $N + M - 2$ Freiheitsgraden über

$$c_1 = F^{-1}\left(\frac{1-\gamma}{2}\right) = -3.2913$$

und

$$c_2 = F^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) = 3.2913$$

Mit diesen Ergebnissen ergibt sich ein Konfidenzbereich von

$$-0.4405 \text{ mm} < (\mu_1 - \mu_2) \leq 0.7152 \text{ mm}$$

b) Das 99.73 % - Konfidenzintervall des Verhältnisses der Varianzen berechnet sich mit der Variable

$$f = \frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$$

zu

$$\frac{s_2^2}{s_1^2} \cdot c_1 < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq \frac{s_2^2}{s_1^2} \cdot c_2$$

Mit $F(x)$ als Verteilungsfunktion einer f -Verteilung mit $(N - 1, M - 1)$ Freiheitsgraden können die Konstanten c_1 und c_2 berechnet werden:

$$c_1 = F^{-1}\left(\frac{1-\gamma}{2}\right) = 0.1786$$

$$c_2 = F^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) = 5.5982$$

Mit den Varianzen aus Aufgabenteil a) ergibt sich

$$0.1603 < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq 5.0240$$

c) Die Differenz aller Messwerte führt zu folgendem Datensatz.

Differenz der Messungen: Abweichungen Δx / μm				
0,05	0,58	0,81	0,62	0,19
-0,65	-0,43	-0,10	-0,19	0,09
0,91	0,13	0,07	-0,08	0,06

d) Da die Standardabweichung nicht bekannt ist, wird das Konfidenzintervall des Mittelwertes über die t -Verteilung mit $N - 1$ Freiheitsgraden verwendet,

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{N}}$$

Der Mittelwert ergibt sich zu

$$\overline{\Delta x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^N \Delta x_n = 0.1373 \text{ mm}$$

und die Standardabweichung beträgt

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{n=1}^N (\Delta x_n - \bar{x})^2} = 0.4354 \text{ mm}$$

Um das Konfidenzintervall

$$\bar{x} - \frac{c_2 \cdot s}{\sqrt{N}} < \mu \leq \bar{x} + \frac{c_1 \cdot s}{\sqrt{N}}$$

bestimmen zu können, müssen die Grenzen $c_{1,2}$ errechnet werden. Sie ergeben sich aus der t -Verteilung mit $N - 1$ Freiheitsgraden über

$$c_1 = F^{-1}\left(\frac{1-\gamma}{2}\right) = -3.6358$$

$$c_2 = F^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) = 3.6358$$

Mit den errechneten Zahlenwerten ergibt sich das Konfidenzintervall

$$-0.2714 \text{ mm} < \Delta\mu \leq 0.5461 \text{ mm}$$

Das Konfidenzintervall ist kleiner als das in Aufgabenteil a. In dieser Aufgabe wird davon ausgegangen, dass gepaarte Ergebnisse vorliegen während bei der Variante in Aufgabenteil a) keine gezielte Paarung vorliegt. Eine Streuung setzt sich damit aus der Teile-Streuung und der Messwert-Streuung zusammen.

Die Berechnung erfolgt zum Beispiel mit folgendem MATLAB-Programm.

```
% Initialisierung
clear all;
close all;
clc;

% -----
% Laden des Datensatzes
load AbweichungenSoll.mat;

% -----
% Aufgabenteil a)
N = length(Messung1)
x1quer = mean(Messung1)
s1 = std(Messung1)

M = length(Messung2)
x2quer = mean(Messung2)
s2 = std(Messung2)

sges = sqrt((s1^2*(N-1)+s2^2*(M-1))/(N+M-2))

gamma = 0.9973;
c1 = tinv((1-gamma)/2,N+M-2)
c2 = tinv((1+gamma)/2,N+M-2)

dxmin = (x1quer - x2quer) - c2*sqrt(1/M+1/N)*sges
dxmax = (x1quer - x2quer) + c1*sqrt(1/M+1/N)*sges

% -----
% Aufgabenteil b)
c1 = finv((1-gamma)/2,N-1,M-1)
c2 = finv((1+gamma)/2,N-1,M-1)

rvmin = s2^2/s1^2*c1
rvmax = s2^2/s1^2*c2

% -----
% Aufgabenteil c)
dMessung = Messung1 - Messung2;
xdquer = mean(dMessung)
sd = std(dMessung)

% -----
% Aufgabenteil d)
c1 = tinv((1-gamma)/2,N-1)
c2 = tinv((1+gamma)/2,N-1)

dxmin = xdquer - c2*sqrt(1/N)*sd
dxmax = xdquer + c1*sqrt(1/N)*sd
```

6 Hypothesentest

6.1 Statistische Prozesskontrolle

a) Zur Überwachung des Mittelwertes wird die standardnormalverteilte Größe

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} = \sqrt{N} \cdot \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}$$

verwendet. Die Hypothesen sind

H0: Mittelwert ist richtig $\mu = 3$

H1: Mittelwert weicht ab $\mu \neq 3$

b) Für ein Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$ ergeben sich mit

$$c_1 = F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -1.9600$$

und

$$c_2 = F^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = 1.9600$$

die Eingriffsgrenzen

$$2.5617 = \mu_{C1} = \mu + \frac{c_1 \cdot \sigma}{\sqrt{N}} < \bar{x} \leq \mu + \frac{c_2 \cdot \sigma}{\sqrt{N}} = \mu_{C2} = 3.4383$$

```
% Definition der Eingriffsgrenzen
alpha = 0.05;
N = 5;
M = 10;
mu = 3;
sig = 0.5;
OEG = mu + norminv(1-alpha/2,0,1)*sig/sqrt(N)
UEG = mu + norminv(alpha/2,0,1)*sig/sqrt(N)
```

c) Die Gütefunktion gibt die Wahrscheinlichkeit für eine richtige Verwerfung der Nullhypothese als Funktion der wirklichen Abweichung $\Delta\mu$ an. Sie ergibt sich aus der Gleichung

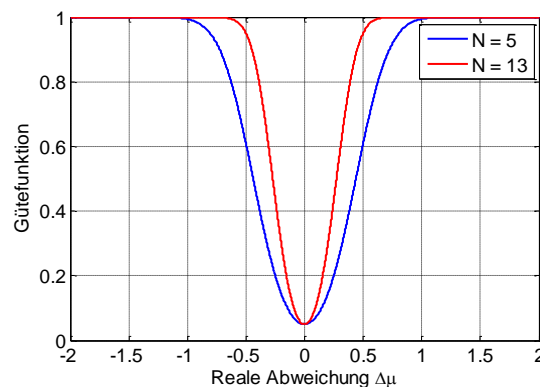
$$1 - \beta(\Delta\mu) = \int_{-\infty}^{UEG} f(x) dx + 1 - \int_{-\infty}^{OEG} f(x) dx$$

Dabei ist $f(x)$ eine Normalverteilung mit dem oben berechneten Mittelwert $\mu + \Delta\mu$ und der Standardabweichung σ/\sqrt{N} .

```
% Berechnung der Gütefunktion
dmu = -2:0.001:2;
G = normcdf(UEG,mu + dmu,sig/sqrt(N)) + 1 - normcdf(OEG,mu + dmu,sig/sqrt(N));

% Definition des Grafikfensters
f = figure(2);
set(f,'Position',[100 100 600 400]);
plot(dmu,G,'b','Linewidth',2);
hold on;
hold off;
axis([-2 2 0 1]);
set(gca,'XTick',-2:0.5:2,'YTick',0:0.2:1);
set(gca,'XTickLabel',-2:0.5:2,'YTickLabel',0:0.2:1,'FontWeight','normal','Font-
Name','Arial','FontSize',14);
xlabel('Reale Abweichung \Delta\mu','FontWeight','normal','FontName','Arial','Font-
Size',14);
ylabel('Gütefunktion','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
grid on;
box on;
```

Es ergibt sich die blaue Kurve in dem folgenden Diagramm:



d) Nach dem Diagramm wird eine Abweichung von $\Delta\mu = 0.5$ mit einer Wahrscheinlichkeit von 60.88 % erkannt.

e) Erhöhung des Stichprobenumfangs führt zu einer Verringerung der Varianz. Dadurch ändern sich Eingriffsgrenzen und Gütefunktion. Der Stichprobenumfang wird solange erhöht, bis die geforderte Aussagesicherheit erreicht wird.

```
n = 0;
while Dmu > 0.5
    n = n + 1;
    OEG = mu + norminv(1-alpha/2,0,1)*sig/sqrt(n);
    UEG = mu + norminv(alpha/2,0,1)*sig/sqrt(n);
    G = normcdf(UEG,mu + dmu,sig/sqrt(n)) + 1 - normcdf(OEG,mu + dmu,sig/sqrt(n));
    bin = find(G<=0.95,1,'first');
    Dmu = abs(dmu(bin));
end;
```

Die entsprechende Gütefunktion ist in dem Diagramm oben bereits eingezeichnet.

f) Es ergeben sich die Eingriffsgrenzen $UEG = 2.7282$ und $OEG = 3.2718$.

6.2 Zugversuche an Bond-Verbindungen

a) Jede Gruppe weist eine Normalverteilung auf, außerdem ist die Standardabweichung bekannt. Damit ist die Größe z standardnormalverteilt.

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} = \sqrt{N} \cdot \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}$$

Mit

$$c = F^{-1}(0.975) = 1.96$$

berechnet sich das Konfidenzintervall zu

$$\bar{x} - c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq \bar{x} + c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Die Rechnung muss für jede Drahtlänge angewendet werden. Deshalb können Matrix-Operationen verwendet werden.

```
% Daten laden, Variablenname Zugfestigkeit
load Zugversuch.mat
laenge = 2.8:0.2:3.6;
N = 10;

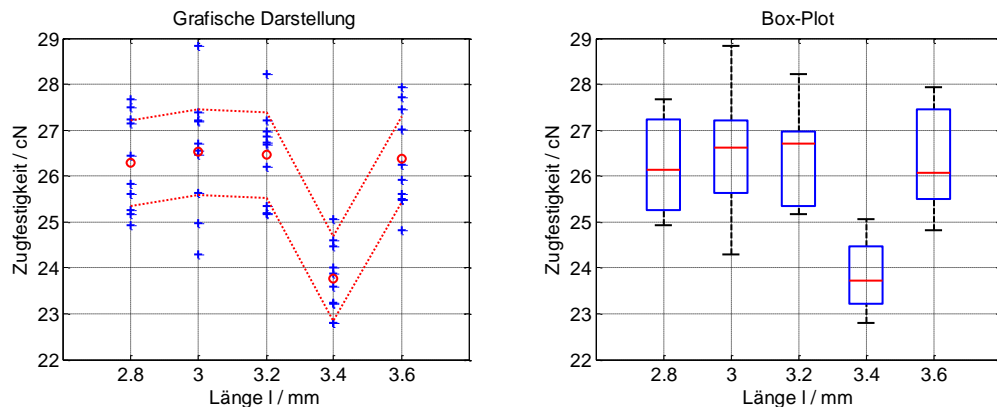
% Konfidenzbereich des Mittelwertes
mu = mean(zugfestigkeit);
sig = 1.5;
c = norminv(0.975,0,1)
min = mu - c*sig/sqrt(N);
max = mu + c*sig/sqrt(N);
```

Darstellung des Konfidenzintervalls, alternativ kann der Box-Plot dargestellt werden.

```
% Grafische Darstellung
subplot(1,2,1);
plot(ones(10,1)*laenge,zugfestigkeit,'b+', 'Linewidth',2);
hold on;
plot(laenge,mu,'ro','Linewidth',2);
plot(laenge,max,'r:','Linewidth',2);
plot(laenge,min,'r:','Linewidth',2);
hold off;

subplot(1,2,1);
boxplot(zugfestigkeit);
```

Es ergeben sich folgende Bilder:



b) Wenn die Resonanz ausgeprägt ist, führt sie zu Vorschädigungen und damit zu einer verminderten Zugfestigkeit. Bei der Drahtlänge von 3.4 mm ist die Zugfestigkeit gegenüber den anderen Längen verringert. Es wird deshalb vermutet, dass die Resonanz bei dieser Drahtlänge auftritt.

c) Die Hypothesen sind

H0: Mittelwerte der Gruppe mit Drahtlänge 3.4 mm und den anderen Gruppe sind identisch

H1: Mittelwert der Gruppe mit Drahtlänge 3.4 mm ist kleiner

Wenn die Nullhypothese stimmt, sind die Mittelwerte beider Gruppe gleich. Außerdem ist die Standardabweichung σ bekannt. Damit ist die Zufallsvariable

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\sigma_x^2}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\sigma^2 \cdot \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{M}\right)}}$$

standardnormalverteilt.

Es liegt ein einseitiges Verwerfungsintervall vor. Für ein Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$ ergibt sich mit

$$c = F^{-1}(\alpha) = -1.6449$$

der Annahmebereich für die Nullhypothese zu

$$c \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{1}{M}} \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2$$

Der Grenzwert beträgt -0.3084. Im Vergleich dazu liegt die Differenz der Mittelwerte mit -2.6455 deutlich unter dieser Grenze, sodass die Nullhypothese verworfen wird. Es liegt eine signifikante Abweichung vor.

```
% Hypothesentest, dass die Reihe mit einer Länge von 3.4 mm signifikant
% nach unten abweicht, Berechnung der kritischen Annahmegrenze

N = 10;
M = 40;
sig = 1.5;
muN = mean(zugfestigkeit(:,4));
muM = mean([zugfestigkeit(:,1); zugfestigkeit(:,2); zugfestigkeit(:,3); ...
            zugfestigkeit(:,5)]);
dmu = muN - muM
sigeff = sig*sqrt(1/M + 1/N)
cla = norminv(0.05,0,1);
xquergrenza = cla*sigeff
Ha = dmu < xquergrenza
```

d) Wird das Signifikanzniveau auf 1 % gesenkt, verschiebt sich die Grenze für den Annahmebereich zu -0.4362. Es wird der Fehler erster Art verringert, also der Fehler, bei dem gleiche Mittelwerte als unterschiedlich bewertet werden. Allerdings wird der Fehler 2. Art vergrößert. Damit wird eine Mittelwertverschiebung erst größeren Abweichungen erkannt.

6.3 Messung der Schmelzwärme

a) Der Datensatz wird zunächst eingelesen

```
% Laden des Datensatzes
load Schmelzwaerme.mat;
NA = length(VA);
NB = length(VB);
```

Mittelwert ergibt sich aus den entsprechenden Funktionen in MATLAB, Konfidenzbereiche werden mit den Gleichungen aus der Vorlesung abgeschätzt, Konfidenzbereich für den Mittelwert bei unbekannter Varianz, t-Verteilung mit $N_A - 1$ Freiheitsgraden

$$\bar{x} - \frac{c_2 \cdot s}{\sqrt{N}} < \mu \leq \bar{x} + \frac{c_1 \cdot s}{\sqrt{N}}$$

```
% Mittelwert und Standardabweichung
VAquer = mean(VA)
SVA = std(VA)
VBquer = mean(VB);
SVB = std(VB);

% Konfidenzbereiche des Mittelwertes für Verfahren A
alpha = 0.05;
muA_min = VAquer - tinv(1 - alpha/2, NA-1)*SVA/sqrt(NA)
muA_max = VAquer + tinv(alpha/2, NA-1)*SVA/sqrt(NA)
```

Es ergibt sich ein Mittelwert von $\bar{x}_A = 80.0208 \text{ cal/g}$ und ein Konfidenzbereich von

$$80.0063 \text{ cal/g} < \mu \leq 80.0353 \text{ cal/g}$$

b) Standardabweichung ergibt sich aus den entsprechenden Funktionen in MATLAB, Konfidenzbereiche werden mit den Gleichungen aus der Vorlesung abgeschätzt, Konfidenzbereich für die Varianz, Chi²-Verteilung mit $N_A - 1$ Freiheitsgraden

$$\frac{s^2 \cdot (N_A - 1)}{c_2} < \sigma^2 \leq \frac{s^2 \cdot (N_A - 1)}{c_1}$$

Es ergibt sich eine Varianz von $s_A = 5.7436 \cdot 10^{-4} \text{ cal}^2/\text{g}^2$ und ein Konfidenzbereich von

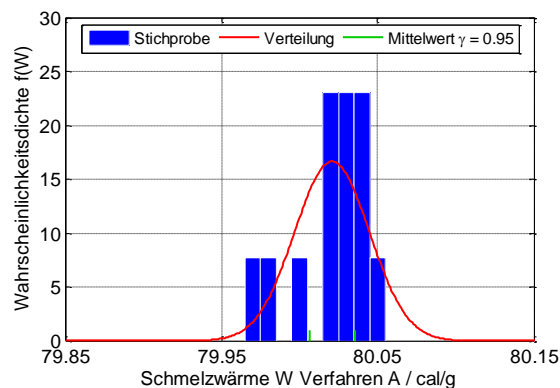
$$2.9534 \cdot 10^{-4} \text{ cal}^2/\text{g}^2 < \sigma^2 \leq 0.0016 \text{ cal}^2/\text{g}^2$$

```
% Konfidenzbereiche der Varianz für Verfahren A
varA_min = SVA^2*(NA-1)/chi2inv(1-alpha/2, NA-1)
varA_max = SVA^2*(NA-1)/chi2inv(alpha/2, NA-1)
```

c) Die Daten für das Histogramm können mit dem MATLAB-Befehl `hist` erzeugt werden. Die Verteilung ist eine t-Verteilung mit $N_A - 1$ Freiheitsgraden. Um die beiden Grafiken aufeinander abzubilden, muss eine der beiden Grafiken skaliert werden. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Flächen unter beiden Kurven gleich groß sind.

```
% Berechnung des entsprechenden Histogramms
dVAh = 0.01;
VAh = 79:dVAh:81;
h = hist(VA,VAh)/nA/dVAh;

% Berechnung der entsprechenden Verteilung
dVAf = 0.001;
VAf = 79:dVAf:81;
f = normpdf(VAf,VAquer,SVA);
```



d) Die Prüfung auf gleiche Mittelwerte $\mu_A = \mu_B$ erfolgt über die Variable

$$t = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_B}} \cdot s}$$

mit

$$s = \sqrt{\frac{(N_A - 1) \cdot s_A^2 + (N_B - 1) \cdot s_B^2}{N_A + N_B - 2}}$$

Sie besitzt eine t-Verteilung mit $(N_A + N_B - 2)$ Freiheitsgraden. Sind die beiden Mittelwerte μ_A und μ_B gleich, muss die Stichprobe in dem Intervall

$$c_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_B}} \cdot s < \bar{x}_A - \bar{x}_B \leq c_2 \cdot \sqrt{\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_B}} \cdot s$$

liegen. Es kann auch der p-Wert des Hypothesentests bestimmt werden. Beide Ergebnisse sind äquivalent.

```
% Vergleich der Mittelwerte über einen t-Test mit zwei Stichproben
% Berechnung des Annahmebereiches
Vquer = VAquer - VBquer
S = sqrt(((nA-1)*SVA^2+(nB-1)*SVB^2)/(nA+nB-2));
V1 = tinvs(alpha/2,nA+nB-2)*sqrt(1/nA+1/nB)*S
V2 = tinvs(1-alpha/2,nA+nB-2)*sqrt(1/nA+1/nB)*S
% Berechnung des P-Wertes
P = tcdf(Vquer/sqrt(1/nA+1/nB)/S,nA+nB-2)
```

Es ergibt sich

$$P = 0.9992 > 1 - \frac{\alpha}{2}$$

wodurch die Hypothese verworfen wird.

e) Nach den Rechenregeln zur Varianz ergibt sich für die Variable

$$y = \frac{1}{N_A} \cdot \sum_{n=1}^{N_A} x_{An} - \frac{1}{N_B} \cdot \sum_{n=1}^{N_B} x_{Bn}$$

die Varianz

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N_A^2} \cdot \sum_{n=1}^{N_A} \sigma_x^2 + \frac{1}{N_B^2} \cdot \sum_{n=1}^{N_B} \sigma_x^2 = \frac{1}{N_A} \cdot \sigma_x^2 + \frac{1}{N_B} \cdot \sigma_x^2$$

6.4 Kalibrierung von Drucksensoren

a) Das Ergebnis des Referenzprüfstands kann über die standardnormalverteilte Zufallsvariable p_R

$$p_R = \frac{\bar{p}_R - \mu_R}{\frac{\sigma_R}{\sqrt{5}}} = \sqrt{5} \cdot \frac{\bar{p}_R - \mu_R}{\sigma_R}$$

beschrieben werden. Ebenso gilt für die Prüfvorrichtung

$$p_P = \frac{\bar{p}_P - \mu_P}{\frac{\sigma_P}{\sqrt{5}}} = \sqrt{5} \cdot \frac{\bar{p}_P - \mu_P}{\sigma_P}$$

Die Abweichung der beiden Prüfstände wird durch die Differenz $p_R - p_P$ beschrieben. Da beide Zufallsvariablen normalverteilt sind, ist auch die Differenz normalverteilt mit den Mittelwert

$$\Delta\mu = \mu_P - \mu_R$$

und der Standardabweichung

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_R^2}$$

Damit ist die Größe

$$z = \sqrt{5} \cdot \frac{\bar{p}_P - \bar{p}_R - \mu_P + \mu_R}{\sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_R^2}} = \sqrt{5} \cdot \frac{\Delta\bar{p} - \Delta\mu}{\sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_R^2}}$$

standardnormalverteilt. Für die Größe z wird folgender Hypothesentest aufgestellt:

H_0 : Die Prüfstände weichen nicht voneinander ab, $\Delta\mu = 0$

H_1 : Die Prüfstände weichen voneinander ab, $\Delta\mu \neq 0$

b) Die Eingriffsgrenzen ergeben sich unter Annahme der Nullhypothese $\Delta\mu = 0$ aus der Bedingung

$$c_1 = F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -1.96$$

und

$$c_2 = F^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = 1.96$$

Umrechnen in den Druckbereich führt zu

$$\Delta p_1 = c_1 \cdot \frac{\sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_R^2}}{\sqrt{5}} = -0.472 \text{ mbar}$$

und

$$\Delta p_2 = c_2 \cdot \frac{\sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_R^2}}{\sqrt{5}} = 0.472 \text{ mbar}$$

c) Die Gütefunktion gibt die Wahrscheinlichkeit für eine richtige Verwerfung der Nullhypothese als Funktion der wirklichen Abweichung $\Delta\mu$ an. Sie ergibt sich aus der Gleichung

$$1 - \beta(\Delta\mu) = \int_{-\infty}^{\Delta p_1} f(\Delta p) \Delta p + 1 - \int_{-\infty}^{\Delta p_2} f(\Delta p) \Delta p$$

Dabei ist $f(\Delta p)$ eine Normalverteilung mit dem oben berechneten Mittelwert $\Delta\mu$ und der oben berechneten Standardabweichung σ .

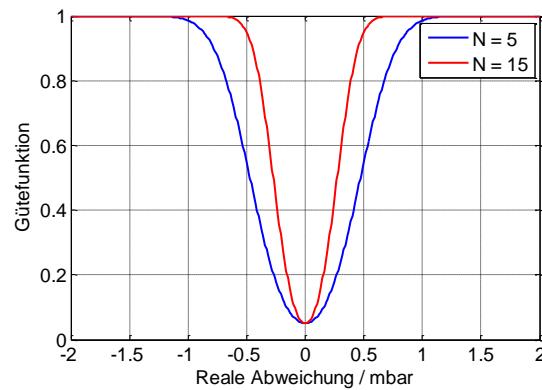
d) Die Gütefunktion kann mit folgendem MATLAB-Programm dargestellt werden:

```
% Definition der Eingriffsgrenzen
n = 5;
sigR = 0.2;
sigP = 0.5;
sig = sqrt(sigP^2+sigR^2)/sqrt(n);
alpha = 0.05;
c1 = norminv(alpha/2,0,1)
c2 = norminv(1-alpha/2,0,1)
p1 = c1 * sig
p2 = c2 * sig

% Berechnung der Gütefunktion
dmu = -2:0.01:2;
G = normcdf(p1,dmu,sig) + 1 - normcdf(p2,dmu,sig);

% Definition des Grafikfensters
f = figure(1);
set(f,'Position',[100 100 600 400]);
plot(dmu,G,'b','Linewidth',2);
axis([-2 2 0 1]);
set(gca,'XTick',-2:0.5:2,'YTick',0:0.2:1);
set(gca,'XTickLabel',-2:0.5:2,'YTickLabel',0:0.2:1,'FontWeight','normal','Font-
Name','Arial','FontSize',14);
xlabel('Reale Abweichung / mbar','FontWeight','normal','FontName','Arial','Font-
Size',14);
ylabel('Gütefunktion','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
grid on;
box on;
```

Es ergibt sich die blaue Kurve in dem folgenden Diagramm:



e) Die Grenze ergibt sich aus dem ersten Wert der Gütefunktion, der eine Wahrscheinlichkeit $p \leq 0.95$ aufweist. Es ergibt sich ein Wert $\Delta p = 0.8600$ mbar.

```
% Berechnung des ersten Wertes, der eine Wahrscheinlichkeit <= 0.95 besitzt
bin = find(G<=0.95,1,'first');
dp = abs(dmu(bin))
```

f) Bei der Erhöhung des Stichprobenumfangs ändert sich im Wesentlichen die Standardabweichung. Durch eine Iteration kann der erforderliche Stichprobenumfang bestimmt werden. Es werden $N = 15$ Teile benötigt, um die erforderliche Aussagesicherheit zu bekommen. Die Gütefunktion ist in der Abbildung bereits rot eingezeichnet.

```
% Erhöhung des Stichprobenumfangs, bis eine Wahrscheinlichkeit = 0.95 bei dp = 0.5
vorliegt
while dp > 0.5
    n = n + 1;
    sig = sqrt(sigP^2+sigR^2)/sqrt(n);
    c1 = norminv(alpha/2,0,1);
    c2 = norminv(1-alpha/2,0,1);
    p1 = c1 *sig;
    p2 = c2 *sig;
    G = normcdf(p1,dmu,sig) + 1 - normcdf(p2,dmu,sig);
    bin = find(G<=0.95,1,'first');
    dp = abs(dmu(bin));
end;
```

g) Die Eingriffsgrenzen ergeben sich in dem Fall zu $p_1 = -0.2725$ mbar und $p_2 = 0.2725$ mbar.

7 Beschreibende Statistik multivariater Daten

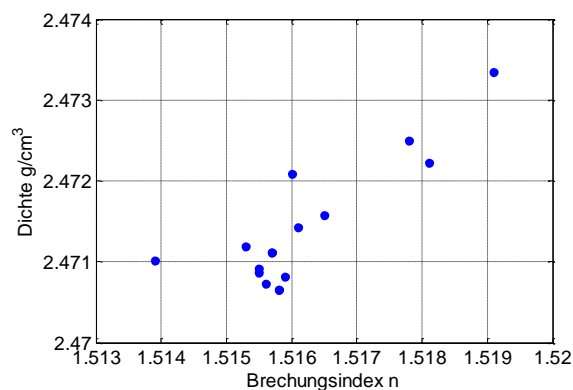
7.1 Brechungsindex und Dichte von Glas

a) Die Stichprobe kann mit folgender Programmsequenz als Streudiagramm dargestellt werden.

```
% Laden der Daten
load Glasuntersuchung.mat
n = values(:,1);
roh = values(:,2);

% Grafische Darstellung
scatter(n,roh,'bo','filled');
xlabel('Brechungsindex n','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Dichte g/cm^3','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
grid on;
box on;
```

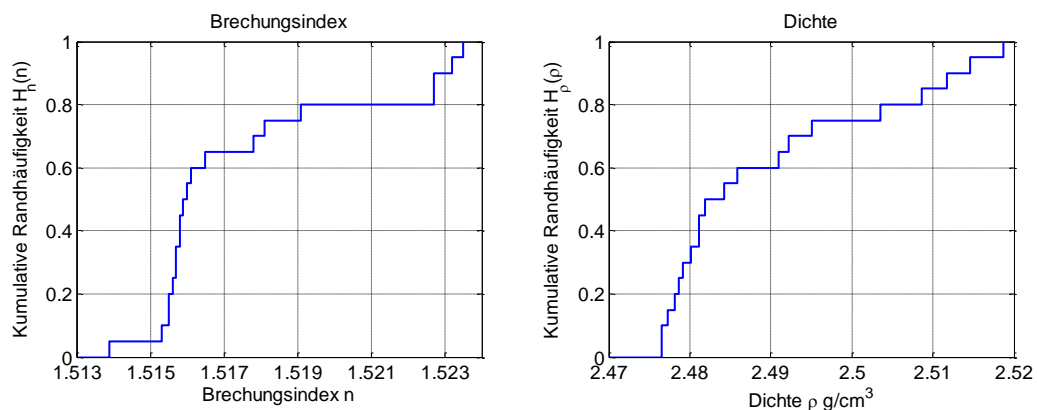
Es ergibt sich folgendes Streudiagramm.



b) Die kumulativen Randhäufigkeiten ergeben sich durch Sortieren des jeweiligen Datenvektors. Die Wahrscheinlichkeit p_0 beträgt bei einem Stichprobenumfang $N = 10$ für jeden einzelnen Wert

$$p_0 = \frac{1}{10} = 0.1$$

Damit ergeben sich die im folgenden Bild dargestellten kumulativen Randhäufigkeiten.



Es wurde folgender MATLAB-Code eingesetzt.

```
% Kumulative Randhäufigkeiten
nsort = [0; sort(n)];
rohsort = [0; sort(roh)];
H = [0; cumsum(1/length(n)*ones(size(n)))];
```

c) Die Stichprobe wird über den Mittelwertsvektor

$$\bar{\underline{x}}^T = (\bar{n} \quad \bar{\rho}) = (1.5175 \quad 2.4898)$$

und die Kovarianzmatrix

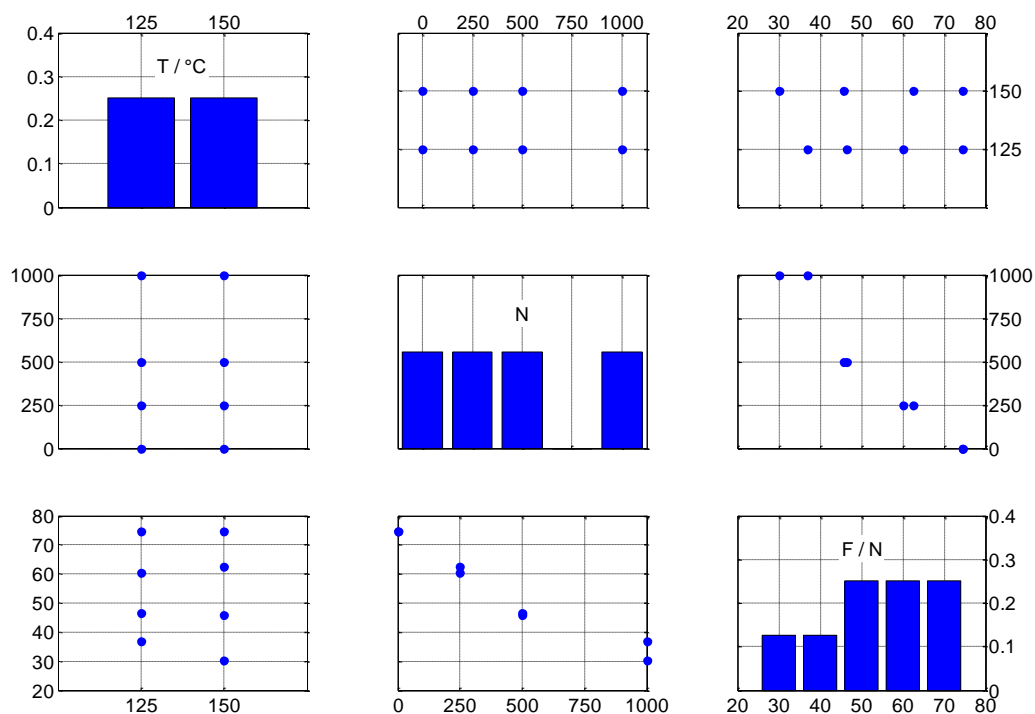
$$\begin{pmatrix} s_n^2 & s_{np} \\ s_{pn} & s_p^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{N-1} \cdot (\underline{x} - \bar{\underline{x}}) \cdot (\underline{x} - \bar{\underline{x}})^T = \begin{pmatrix} 9.2 & 40.9 \\ 40.9 & 197.2 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6}$$

charakterisiert. Auf der Hauptdiagonalen sind die Varianzen von Brechungsindex n und Dichte ρ , die beiden übrigen Elemente der Matrix geben die Kovarianz der beiden Größen an. Die Werte wurden mit folgender MATLAB -Sequenz berechnet.

```
% Berechnung von Mittelwert und Kovarianzmatrix
mean(values)
cov(values)
```

7.2 Scherfestigkeit von Lötverbindungen

a) Die Stichprobe kann als Streudiagramm dargestellt werden.



Es wurde folgender MATLAB-Code verwendet:

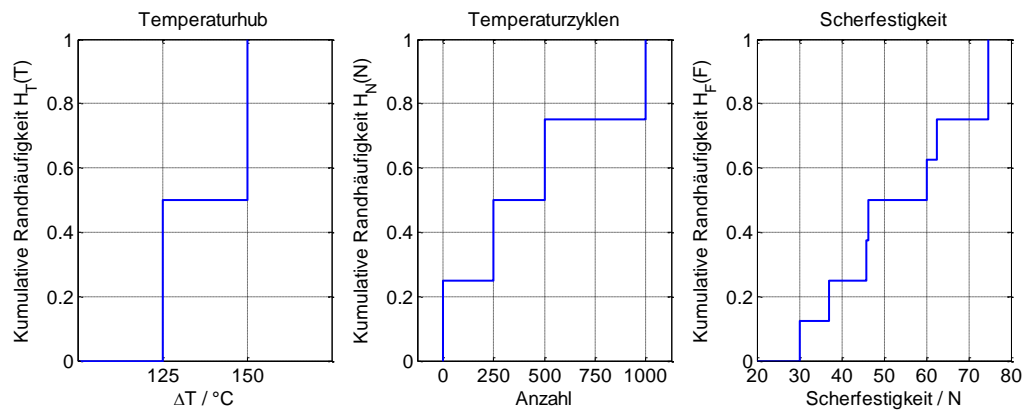
```
% Laden der Daten
load LoetenScherfestigkeit.mat
T = values(:,1);
N = values(:,2);
F = values(:,3);

gplotmatrix(values)
```

b) Die kumulativen Randhäufigkeiten werden mit folgender MATLAB-Sequenz berechnet:

```
% Kumulative Randhäufigkeiten
Tsort = [0; sort(T)];
Nsort = [0; sort(N)];
Fsort = [0; sort(F)];
H = [0; cumsum(1/length(T)*ones(size(T)))];
```

Sie können als Liniendiagramm dargestellt werden.



c) Die Stichprobe wird über den Mittelwertsvektor

$$\bar{\mathbf{x}}^T = (\bar{T} \quad \bar{N} \quad \bar{F}) = (137.5 \quad 437.5 \quad 53.8906)$$

und die Kovarianzmatrix

$$\begin{pmatrix} s_T^2 & S_{TN} & S_{TF} \\ S_{NT} & s_N^2 & S_{NF} \\ S_{FT} & S_{FN} & s_F^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{N-1} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T = \begin{pmatrix} 0.1786 & 0 & -0.0094 \\ 0 & 156.25 & -6.3932 \\ -0.0094 & -6.3932 & 0.2774 \end{pmatrix} \cdot 10^3$$

d) Die Temperaturhübe und die Anzahl von Temperaturzyklen sind unabhängig voneinander, ihre Kovarianz ist null.

8 Multivariate Wahrscheinlichkeitstheorie

8.1 Reihenschaltung von Widerständen

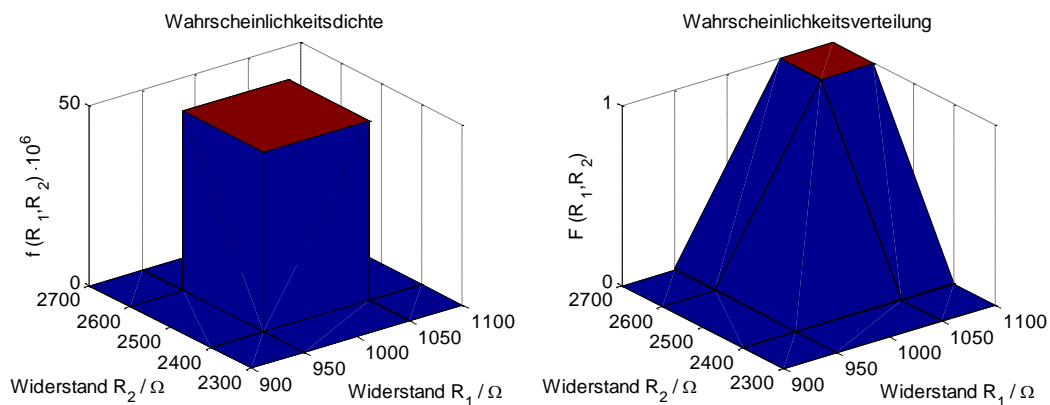
a) Der Bereich, für den die Wahrscheinlichkeit P_0 gilt, hat in der R_1 Dimension eine Breite von 100 Ω , in der Dimension R_2 eine Breite von 200 Ω . Da die Wahrscheinlichkeit für das sichere Ereignis 1 ist, gilt

$$1 = \int_{950}^{1050} \int_{2400}^{2600} P_0 \, dR_2 \, dR_1 = 100 \cdot 200 \cdot P_0 = 20000 \cdot P_0$$

Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit zu

$$P_0 = \frac{1}{20000} = 50 \cdot 10^{-6}$$

b) Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist in dem ausgezeichneten Bereich konstant. Es ergibt sich folgendes Diagramm.



c) Die Verteilungsfunktion ergibt sich für den Bereich $950 \, \Omega \leq R_1 \leq 1050 \, \Omega$ und $2400 \, \Omega \leq R_2 \leq 2600 \, \Omega$ aus dem Integral

$$F(R_1, R_2) = \int_{950}^{R_1} \int_{2400}^{R_2} P_0 \, dR_2 \, dR_1 = P_0 \cdot (R_1 - 950) \cdot (R_2 - 2400)$$

Es ist in dem Diagramm oben bereits darstellt.

d) Die Randverteilungen sind gleichverteilt. Damit kann die Wahrscheinlichkeitsdichte der Randverteilung von R_1 im Bereich $950 \, \Omega \leq R_1 \leq 1050 \, \Omega$ über das sichere Ereignis

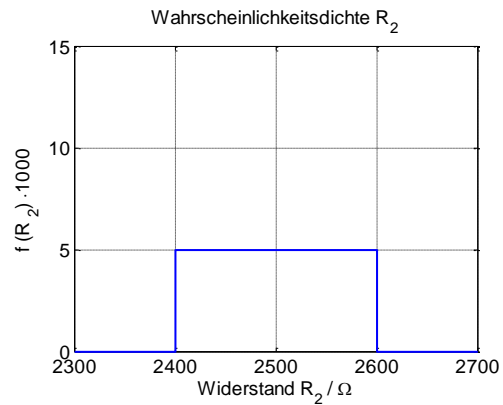
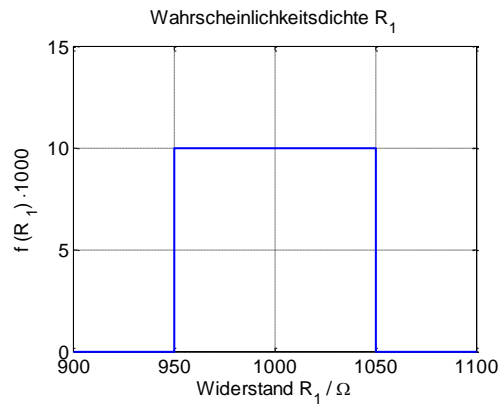
$$1 = \int_{950}^{1050} P_1 \, dR_1 = 100 \cdot P_1$$

berechnet werden zu

$$P_1 = \frac{1}{100}$$

Für R_2 ergibt sich im Bereich $2400 \, \Omega \leq R_2 \leq 2600 \, \Omega$ analog

$$P_2 = \frac{1}{200}$$

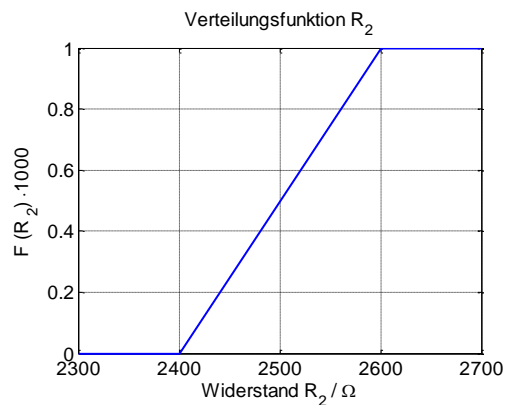
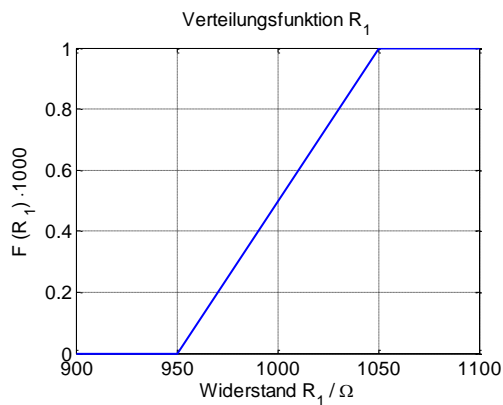


e) Die kumulativen Randverteilung von R_1 ergibt sich über die Gleichung

$$F_{R_1}(R_1) = \int_{950}^{R_1} \int_{2400}^{2600} P_0 \, dR_2 \, dR_1 = P_0 \cdot (R_1 - 950) \cdot (2600 - 2400) = P_0 \cdot 200 \cdot (R_1 - 950)$$

und für R_2 über

$$F_{R_2}(R_2) = \int_{950}^{1050} \int_{2400}^{R_2} P_0 \, dR_2 \, dR_1 = P_0 \cdot (1050 - 950) \cdot (R_2 - 2400) = P_0 \cdot 100 \cdot (R_2 - 2400)$$



g) Damit zwei Zufallsvariablen unabhängig sind, muss die Bedingung

$$F(R_1, R_2) = F_{R_1}(R_1) \cdot F_{R_2}(R_2)$$

erfüllt sein. Nach den Rechnungen oben gilt

$$F(R_1, R_2) = P_0 \cdot (R_1 - 950) \cdot (R_2 - 2400)$$

und

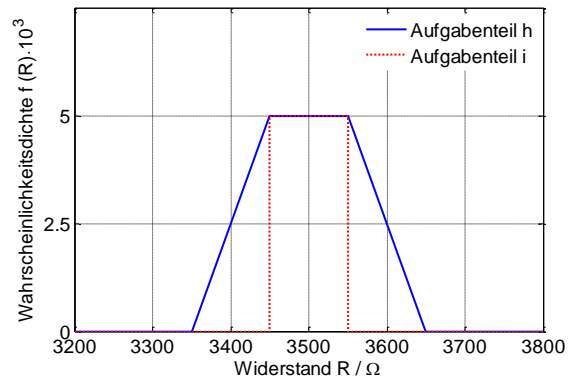
$$\begin{aligned} F_{R_1}(R_1) \cdot F_{R_2}(R_2) &= P_0 \cdot 200 \cdot (R_1 - 950) \cdot P_0 \cdot 100 \cdot (R_2 - 2400) \\ &= \frac{1}{20000} \cdot 200 \cdot (R_1 - 950) \cdot P_0 \cdot 100 \cdot (R_2 - 2400) \\ &= (R_1 - 950) \cdot P_0 \cdot 100 \cdot (R_2 - 2400) \end{aligned}$$

Beide Werte stimmen überein, die beiden Zufallsvariablen R_1 und R_2 sind statistisch unabhängig.

h) Weil die beiden Zufallsvariablen unabhängig sind, ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(R)$ aus der Faltung der beiden Wahrscheinlichkeitsdichten $f(R_1)$ und $f(R_2)$.

$$f(R) = f_{R_1}(R_1) \cdot f_{R_2}(R_2)$$

Mithilfe der grafischen Faltung ergibt sich die folgende Wahrscheinlichkeitsdichte.



i) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit entspricht der Fläche, die über die rote Linie begrenzt wird.

$$P = 100 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 0.5$$

9 Korrelationsanalyse

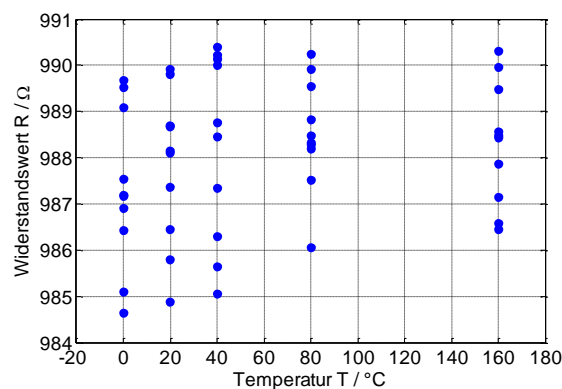
9.1 Drift von Widerständen

a) Die Daten werden als Scatter-Plot dargestellt. Dazu müssen sie zunächst in ein entsprechendes Format gebracht werden.

```
% Laden der Daten
load Widerstandsdrift.mat
y = [values(2:end,2)' values(2:end,3)' values(2:end,4)' values(2:end,5)' ...
     values(2:end,6)']';
xhelp = meshgrid(values(1,2:end),ones(length(values)-1,1));
x = [xhelp(:,1)' xhelp(:,2)' xhelp(:,3)' xhelp(:,4)' xhelp(:,5)']';

% Grafische Darstellung der Messwerte
scatter(x,y,'filled');
xlabel('Temperatur T / °C','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Widerstandswert R / \Omega','FontWeight','normal','FontName','Arial');
```

Es ergibt sich das folgende Streudiagramm.



b) Der Korrelationskoeffizient wird direkt mit der MATLAB-Funktion `corrcoef` berechnet. Es ergibt sich ein Korrelationskoeffizient $r = 0.1945$. Mit dem Befehl wird gleichzeitig der Hypothesentest auf $\rho = 0$ durchgeführt und das Konfidenzintervall für den Korrelationskoeffizienten angegeben. Diese Daten werden verwendet, um die selbst berechneten Ergebnisse in den folgenden Aufgabenteilen zu validieren.

```
% Korrelationskoeffizient r der Stichprobe
% 95%-Konfidenzbereich des Korrelationskoeffizienten der Grundgesamtheit
[R,P,RLO,RUP] = corrcoef([x y])
```

c) Zur Berechnung des Konfidenzbereich wird die standardnormalverteilte Zufallsvariable z verwendet.

$$z = \left(\tanh^{-1}(r) - \tanh^{-1}(\rho) \right) \cdot \sqrt{N-3}$$

Der Konfidenzbereich der Korrelation der Grundgesamtheit ρ ergibt sich aus der Gleichung

$$\tanh\left(\tanh^{-1}(r) - \frac{c_2}{\sqrt{N-3}}\right) < \rho \leq \tanh\left(\tanh^{-1}(r) - \frac{c_1}{\sqrt{N-3}}\right)$$

Die Grenzen c_1 und c_2 ergeben sich mit der inversen Standardnormalverteilung und $\gamma = 95\%$ zu

$$c_1 = F^{-1}\left(\frac{1-\gamma}{2}\right) = -1.9600$$

und

$$c_2 = F^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) = 1.9600$$

Damit lautet der Konfidenzbereich des Korrelationskoeffizienten

$$-0.0886 < \rho \leq 0.4486$$

Er stimmt mit dem Ergebnis der MATLAB-Funktion überein.

d) Zur Signifikanzbewertung des Korrelationskoeffizienten wird ein Hypothesentest durchgeführt. Die Zufallsvariable

$$t = r \cdot \sqrt{\frac{N-2}{1-r^2}}$$

besitzt $N - 2$ Freiheitsgrade. Ist die Korrelation $\rho = 0$, weist die Zufallsvariable t den Wert null auf. Zur Berechnung der Annahmegrenzen werden die Konstanten c_1 und c_2 berechnet. Sie ergeben sich dabei aus der inversen t -Verteilung mit $N - 2$ Freiheitsgraden zu

$$c_1 = F^{-1}\left(\frac{1-\gamma}{2}\right) = F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -2.0106$$

und

$$c_2 = F^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) = F^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = 2.0106$$

Die Stichprobe liegt mit dem Wert

$$t_0 = r \cdot \sqrt{\frac{N-2}{1-r^2}} = 1.3739$$

Die Berechnung wird mit folgendem MATLAB-Code durchgeführt.

```
% Bewertung des Korrelationskoeffizienten
alpha = 0.05;
N = length(values);
c1 = tinv(alpha/2,N-2)
c2 = tinv(1-alpha/2,N-2)
t0 = r*sqrt((N-2)/(1-r^2))
```

Das Ergebnis wird mit der MATLAB-Funktion bestätigt.

9.2 Schwindung bei Gussteilen

a) Die Daten werden als Scatter-Plot dargestellt. Dazu müssen sie zunächst in ein entsprechendes Format gebracht werden.

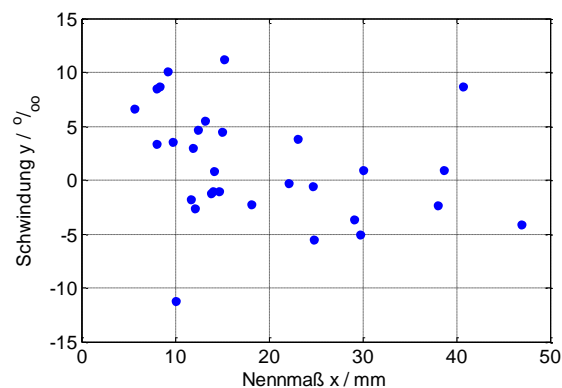
```
% Laden der Daten
load Gussteile.mat
x = data(:,1);
y = data(:,2);

% Grafische Darstellung der Messwerte

f=figure(1);
set(f,'Position',[100 100 600 400]);

scatter(x,y,'filled');
set(gca,'FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
hold on;
hold off;
xlabel('Nennmaß x / mm','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Schwindung y / ^o/_oo','FontWeight','normal','FontName','Arial');
```

Es ergibt sich das folgende Streudiagramm.



b) Der Korrelationskoeffizient wird direkt mit der MATLAB-Funktion `corrcoef` berechnet. Die manuelle Berechnung ist in der Übungsaufgabe 9.1 dargestellt.

```
% Korrelationskoeffizient r der Stichprobe
% 95%-Konfidenzbereich des Korrelationskoeffizienten der Grundgesamtheit
[R,P,RLO,RUP] = corrcoef([x y])
```

Es ergibt sich ein Korrelationskoeffizient der Stichprobe von

$$r = -0.2982$$

und das Konfidenzintervall für den Korrelationskoeffizienten von

$$-0.5946 < \rho \leq 0.0696$$

c) Die Zufallsvariable

$$z = \left(\tanh^{-1}(r) - \tanh^{-1}(\rho) \right) \cdot \sqrt{N-3}$$

vereinfacht sich unter der Hypothese, dass der Korrelationskoeffizienten $\rho = 0$ ist, zu

$$z = \tanh^{-1}(r) \cdot \sqrt{N-3}$$

Aus den Grenzen für den Annahmebereich von z

$$c_1 = F^{-1}\left(\frac{1-\gamma}{2}\right) = -1.9600$$

und

$$c_2 = F^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) = 1.9600$$

ergeben sich die entsprechenden Grenzen für den Annahmebereich von dem Regressionskoeffizienten

$$r_{C1} = \tanh\left(\frac{c_1}{\sqrt{N-3}}\right) = -0.3603$$

und

$$r_{C2} = \tanh\left(\frac{c_2}{\sqrt{N-3}}\right) = 0.3603$$

Die Zufallsvariable t kann analytisch nicht nach r aufgelöst werden. Deshalb werden die Hypothesentests so ausgeführt, dass bei berechnetem Regressionskoeffizient r_0 die Variable

$$t_0 = r_0 \cdot \sqrt{\frac{N-2}{1-r_0^2}}$$

bestimmt wird. Liegt sie zwischen den Grenzen c_1 und c_2 , wird die Nullhypothese angenommen. Die Grenzen ergeben sich dabei aus der inversen t -Verteilung mit $N - 2$ Freiheitsgraden zu

$$c_1 = F^{-1}\left(\frac{1-\gamma}{2}\right) = -2.0484$$

und

$$c_2 = F^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) = 2.0484$$

d) Für einen Vergleich werden die Grenzen r_{C1} und r_{C2} in die Gleichung für die Zufallsvariable t eingesetzt und mit den Grenzen verglichen, die sich aus der t -Verteilung ergeben.

$$t_{RC1} = r_{C1} \cdot \sqrt{\frac{N-2}{1-r_{C1}^2}} = -2.0436 > -2.0484$$

$$t_{RC2} = r_{C2} \cdot \sqrt{\frac{N-2}{1-r_{C2}^2}} = 2.0436 < 2.0484$$

Der engere Annahmebereich zeigt, dass der Hypothesentest mit der standardnormalverteilten Zufallsvariable z strenger ist als der Test mit der t -verteilten Variable t .

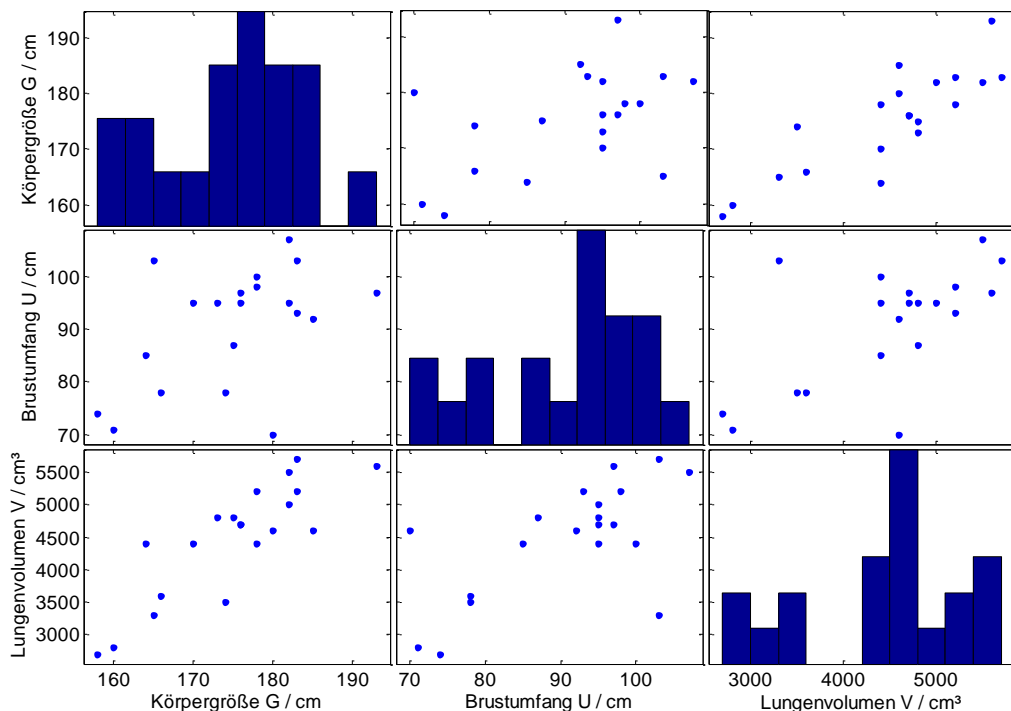
9.3 Lungenvolumen von Sportlern

a) Aufgabe wird über den Befehl `gplotmatrix` gelöst.

```
% Laden der Daten
load Sportuntersuchung.mat

% Grafische Darstellung der Messwerte
f = figure(1);
set(f, 'Position', [100 100 1200 800]);
namen = {'Körpergröße G / cm' 'Brustumfang U / cm' 'Lungenvolumen V / cm³'};
gplotmatrix(data, [], [], [], [], [], 'off', 'hist', namen)
```

Es ergibt sich folgendes Diagramm.



Die grafische Darstellung macht deutlich, dass alle Größen paarweise zueinander korreliert sind. Die statistische Bewertung des Datensatzes wird mit folgender Befehlssequenz durchgeführt.

```
% Berechnung der Korrelationsmatrix, Auswertung des Hypothesentests und
% Angabe des Konfidenzintervalls
[R,P,RLO,RUP] = corrcoef(data)
```

b) Die Korrelationsmatrix berechnet sich damit zu

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5065 & 0.8508 \\ 0.5065 & 1 & 0.6475 \\ 0.8508 & 0.6475 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Der Hypothesentest für die Hypothese $\rho = 0$ ergibt eine Matrix von p-Werten.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0.0227 & 0 \\ 0.0227 & 1 & 0.002 \\ 0 & 0.002 & 1 \end{pmatrix}$$

Alle p-Werte liegen unterhalb von $\alpha = 5\%$. Demnach weisen alle Größen untereinander eine signifikante Korrelation auf.

d) Der Konfidenzbereich der Korrelationsmatrix wird von MATLAB angegeben zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.0825 & 0.6548 \\ 0.0825 & 1 & 0.2874 \\ 0.6548 & 0.2874 & 1 \end{pmatrix} \leq \mathbf{P} \leq \begin{pmatrix} 1 & 0.7753 & 0.9396 \\ 0.7753 & 1 & 0.8473 \\ 0.9396 & 0.8473 & 1 \end{pmatrix}$$

Keiner der Konfidenzbereich schließt $\rho = 0$ ein, auch das ist ein Hinweis auf die signifikante Korrelation von jeweils zwei Größen zueinander.

10 Varianzanalyse

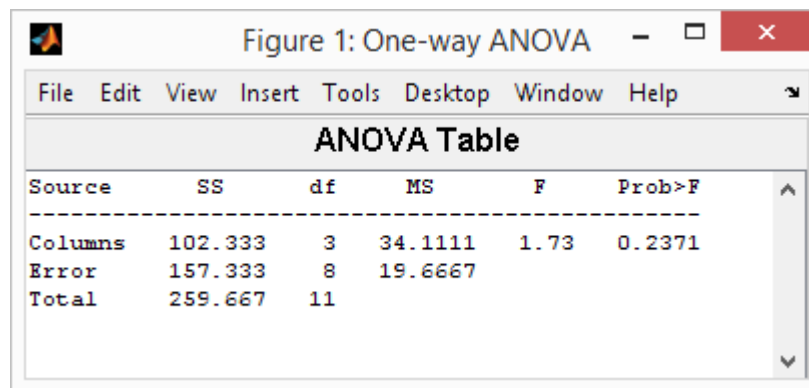
10.1 Waschmitteltest

a) Es handelt sich um einen Test, bei dem verschiedene Waschmittel bewertet werden sollen. Die Ausführung auf verschiedene Waschmaschinen wird als Varianz innerhalb der Gruppe interpretiert. Damit handelt es sich bei der Aufgabe um eine eindimensionale Varianzanalyse. MATLAB erwartet die Daten in Spaltenform, deshalb muss der Datensatz nach dem Laden transponiert werden.

```
% Laden der Messwerte
load('Waschmitteltest.mat');

% Berechnung der Anova-Tabelle
anova1(Testergebnis')
```

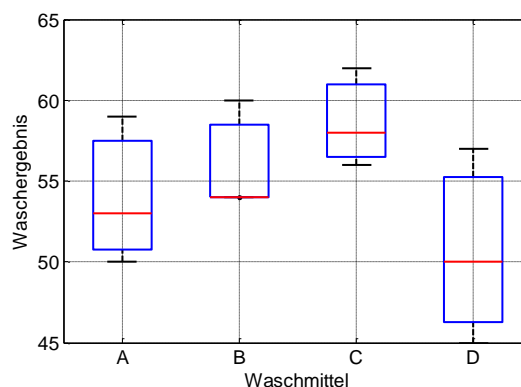
Es ergibt sich folgende ANOVA-Tabelle:



Die Wahrscheinlichkeit, dass alle Datensätze denselben Mittelwert haben, liegt bei 23.71 %. Da der Wert größer als 5 % ist, wird die Nullhypothese gleicher Mittelwerte nicht verworfen.

Als Bewertungsmaß wird das Verhältnis von der Varianz innerhalb der Gruppen und der Varianz von Gruppe zu Gruppe herangezogen. Das Verhältnis zweier Varianzen ist eine F-verteilte Variable F, die Basis für den statistischen Test ist.

b) Die Plausibilisierung ergibt sich durch den Box-Plot, der in der folgenden Abbildung dargestellt ist.



Dadurch, dass sich die einzelnen Boxes überlappen, bestätigt der Box-Plot die Aussage der ANOVA-Tabelle.

10.2 Lebensdauer von Generatoren

a) Es handelt sich um eine zweidimensionale Varianzanalyse. Jeder Versuchspunkt wurde viermal gemessen. Es ergeben sich damit vier unterschiedliche Varianzen:

- Varianz durch Änderung der Umgebungstemperatur
- Varianz durch Änderung des Materials
- Wechselwirkung zwischen Temperatur und Material
- Varianz innerhalb der Gruppen

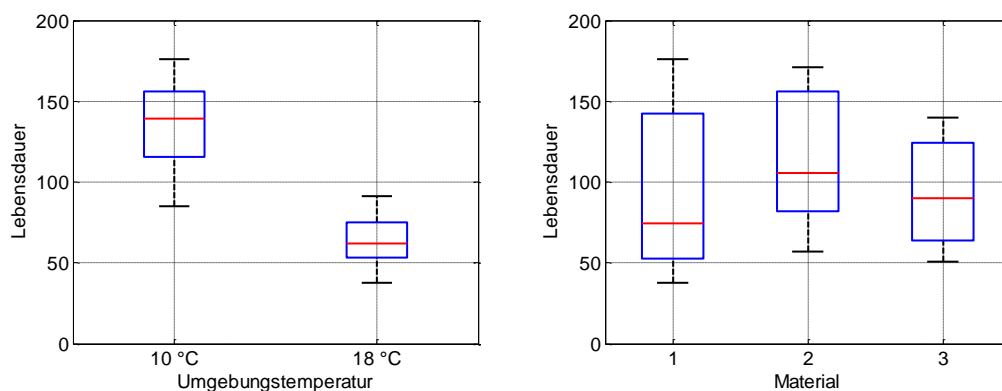
In der ANOVA-Tabelle werden die drei ersten Varianzgründe mit der Varianz innerhalb der Gruppe zueinander in Verhältnis gesetzt. Es ergeben sich F-verteilte Zufallsvariable, die statistisch bewertet werden können.

Figure 1: Two-way ANOVA

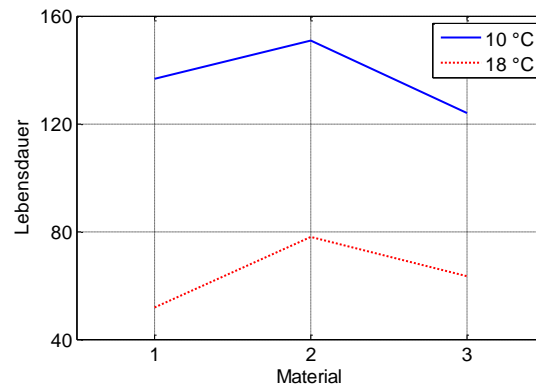
Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Columns	31682.7	1	31682.7	69.63	0
Rows	2256.6	2	1128.3	2.48	0.1119
Interaction	588.1	2	294	0.65	0.5357
Error	8190	18	455		
Total	42717.3	23			

Die ANOVA-Tabelle zeigt, dass nur die unterschiedlichen Säulen signifikant voneinander abweichen. Die Säulen entsprechen den unterschiedlichen Umgebungstemperaturen. Sowohl das Material als auch die Wechselwirkung zwischen Umgebungstemperatur und Material haben keinen signifikanten Einfluss auf das Ergebnis.

b) Zur Plausibilisierung werden wieder Box-Plots eingesetzt. Bei den unterschiedlichen Umgebungstemperaturen überlappen sich die Boxes nicht, die Einflussgröße ist auch nach der ANOVA-Tabelle signifikant. Der zweite Box-Plot zeigt, dass sich das Material nicht signifikant auf die Lebensdauer auswirkt, die einzelnen Boxes überlappen stark.



Die Wechselwirkung kann mithilfe von Box-Plots nicht bewertet. Stattdessen wird ein Wechselwirkungsdiagramm erstellt, bei dem die Ausgangsgröße als Funktion einer Eingangsgröße dargestellt wird. Für jede Eingangsstufe der zweiten Größe werden zusätzliche Kurven eingezeichnet.



Der weitgehend parallele Verlauf der Kurven zeigt, dass die Wechselwirkung nicht signifikant ist.

```
% Laden der Daten
load Lebensdauer.mat

% Durchführung ANOVA
anova2(Data1,4);

% Vergleich mit Boxplot
figure(2);
boxplot(Data1);

figure(3);
boxplot(Data2');

% Vergleich Wechselwirkung
figure(4);
plot(mean(Data2(:,1:4))','b','Linewidth',2);
hold on;
plot(mean(Data2(:,5:8))','r','Linewidth',2);
hold off;
```


11 Regression zweidimensionaler Datensätze

11.1 Scherfestigkeit von Schweißverbindungen

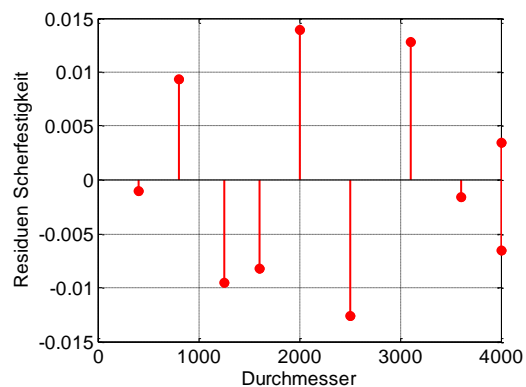
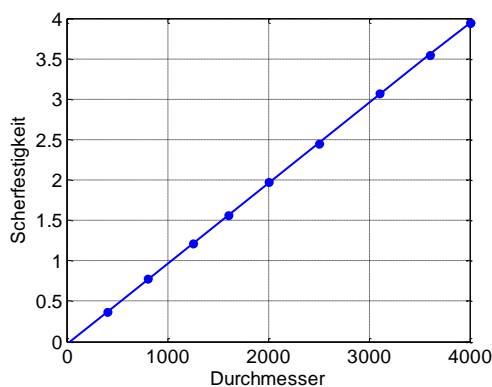
a) Nach der Initialisierung werden die Daten eingelesen. Mithilfe des Befehls `polyfit` wird ein Regressionspolynom zweiten Grades berechnet und grafisch dargestellt.

```
% Initialisierung
clear all;
close all;
clc;

% Laden der Daten
load('ScherfestigkeitSchweissen');
S = data(:,1);
D = data(:,2);

% Erzeugen der Regressionsfunktion
[b,s] = polyfit(D,S,2);
[S_reg,DEL] = polyval(b,D,s);

% grafische Ausgabe der Messpunkte und der Regressionsfunktion
figure(1);
subplot(1,2,1);
scatter(D,S,'b','filled');
hold on; grid on;
plot(D,S_reg,'red');
xlabel('D / \mum');
ylabel('S / MPa');
```



b) Die Residuen ergeben sich aus der Differenz von Datensatz und Regression an den entsprechenden Stellen. Sie können direkt in ein Diagramm eingezeichnet werden. Es ergibt sich die Abbildung oben rechts.

```
% Berechnung der Residuen
res = S - S_reg;

% grafische Ausgabe der Residuen
subplot(1,2,2);
stem(D,res,'black','filled');
xlabel('D / \mum');
ylabel('Residuen');
grid on;
```

Es ist keine Struktur der Reststreuung zu erkennen, die auf einen systematischen Regressionsfehler schließen lässt.

c) Die Regression wird auf Basis der Reststreuung, des adjungierten Bestimmtheitsmaßes sowie der Signifikanz der einzelnen Regressionskoeffizienten bewertet. Das adjungierte Bestimmtheitsmaß ist mit $R_{\text{ADJ}} = 0.9999$ sehr hoch. Offensichtlich wird die Streuung des Datensatzes mit der Regression gut abgebildet. Die Reststreuungsanalyse hat ebenfalls gezeigt, dass die Regressionsfunktion sinnvoll gewählt ist. Der t-Test zeigt, dass nicht alle Koeffizienten signifikant sind. Deshalb wird in den folgenden Aufgabenteilen eine Reduktion der Regressionsterme durchgeführt.

d) Ausgehend von dem vollquadratischen Modell werden einzelne Regressionsterme eliminiert. Dabei ist wesentlich, dass nach jedem Streichen eines Regressionsterms eine erneute Bewertung der Signifikanz durchgeführt wird.

```
% Statistische Bewertung
model = [0; 1; 2];
Rstat2 = regstats(S,D,model,{ 'beta', 'adjrsquare', 'fstat', 'tstat'})

% Reduktion des Modells
model = [0; 1];
Rstat1 = regstats(S,D,model,{ 'beta', 'adjrsquare', 'fstat', 'tstat'})
```

Es zeigt sich, dass nur die Koeffizienten β_0 und β_1 signifikant sind. Das adjungierte Bestimmtheitsmaß und die P-Werte der einzelnen Koeffizienten sind in folgender Tabelle zusammengefasst.

Modell	P-Wert b_0	P-Wert b_1	P-Wert b_2	R_{ADJ}
[0; 1; 2]	0.0569	0.0000	0.5305	0.9999
[0; 1]	0.0128	0.0000	-	0.9999

Durch die Eliminierung der nicht signifikanten Terme verschlechtert sich das adjungierte Bestimmtheitsmaß nicht.

e) Mit dem Befehl `polconf` kann der Konfidenz- und Prognosebereich nur bestimmt werden, wenn alle Koeffizienten bis zur angegebenen Ordnung signifikant verwendet werden. Die Rechnung für ein lineares Modell mit Konstante b_0 wird mit folgendem MATLAB-Code ausgeführt:

```
% Berechnung des Konfidenz- und Prognoseintervalls der Regressionsfunktion
[P, St] = polyfit(D,S,1);
[S_reg, S_deltaProg] = polyconf(P, D, St, 'predopt', 'observation');
[S_reg, S_deltaKonf] = polyconf(P, D, St, 'predopt', 'curve');

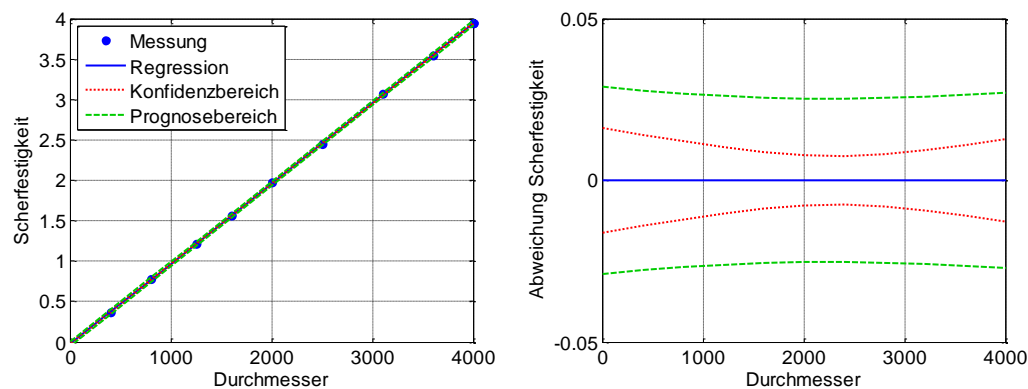
% Grafische Darstellung
figure(2);

% grafische Ausgabe der Messpunkte und der Regressionsfunktion
subplot(1,2,1);
scatter(D,S,'b','filled');
hold on; grid on;
plot(D,stats.yhat,'red');
plot(D,S_reg-S_deltaKonf,'green--');
plot(D,S_reg-S_deltaProg,'black--');
plot(D,S_reg+S_deltaKonf,'green--');
plot(D,S_reg+S_deltaProg,'black--');
xlabel('D / \mu m');
ylabel('S / MPa');
legend('Messpunkte','Regressionsfunktion','Konfidenzbereich \gamma = 0.95','Prognosebereich \gamma = 0.95','Location','NorthWest');

% grafische Ausgabe der Abweichungen
subplot(1,2,2);
delta_S = S-S; % Bezugspunkt

plot(D,delta_S,'blue');
hold on;
plot(D,-S_deltaKonf,'green--');
plot(D,-S_deltaProg,'black--');
plot(D,S_deltaKonf,'green--');
plot(D,S_deltaProg,'black--');
xlabel('D / \mu m');
ylabel('Abweichungen');
```

Es ergibt sich folgende Darstellung:



11.2 Kennlinie von Luftmassenmessern

a) Der Datensatz wird zunächst eingelesen

```
% Einlesen der Messwerte
load Messwerte.mat;
m = Messwerte(1,:);
U = Messwerte(2,:);
```

Anschließend wird ein Regressionsmodell aufgebaut.

```
% Regression
model = [0; 1; 2; 3];
stats = regstats(U,m,model,{'beta','r','adjrsquare','tstat'})
Radj1 = stats.adjrsquare;
```

b) Die Signifikanzbewertung zeigt, dass die Konstante entfernt werden kann. Das adjungierte Bestimmtheitsmaß reduziert sich unwesentlich von 0.9887 auf 0.9883. Weitere Terme können nicht entfernt werden.

```
% Modellreduktion um Konstante
model = [1; 2; 3];
stats = regstats(U,m,model,{'beta','r','adjrsquare','tstat'})
Radj1 = [Radj1 stats.adjrsquare];
betal = stats.beta;
```

c) Zur Bestimmung der Regressionsfunktion von dem inversen Zusammenhang müssen die beiden Variablen m und U ausgetauscht werden.

```
% Regression der inversen Funktion
model = [0; 1; 2; 3];
stats = regstats(m,U,model,{'beta','r','adjrsquare','tstat'})
Radj2 = stats.adjrsquare;
```

d) Die Analyse der Terme auf Signifikanz zeigt, dass die alle Terme nicht signifikant sind, außer dem quadratischen Term. Das Bestimmtheitsmaß steigt durch die Reduktion der Regressionsfunktion von 0.9991 auf 0.9993 geringfügig an.

```
% Modellreduktion um kubischen Term
model = [0; 1; 2];
stats = regstats(m,U,model,{'beta','r','adjrsquare','tstat'})
Radj2 = [Radj2 stats.adjrsquare];

% Modellreduktion um linearen Term
model = [0; 2];
stats = regstats(m,U,model,{'beta','r','adjrsquare','tstat'})
Radj2 = [Radj2 stats.adjrsquare];

% Modellreduktion um Konstante
model = [2];
stats = regstats(m,U,model,{'beta','r','adjrsquare','tstat'})
Radj2 = [Radj2 stats.adjrsquare];
beta2 = stats.beta;
```

Der Regressionskoeffizient ist beta2 ist 18.1703. Damit ergibt sich die Gleichung

$$m = 18.1703 \cdot U^2$$

Auflösen nach U ergibt

$$U = \sqrt{\frac{m}{18.1703}}$$

e) Nach Auflösen der Gleichung können alle die Stichprobenwerte und die beiden Regressionsfunktionen dargestellt werden.

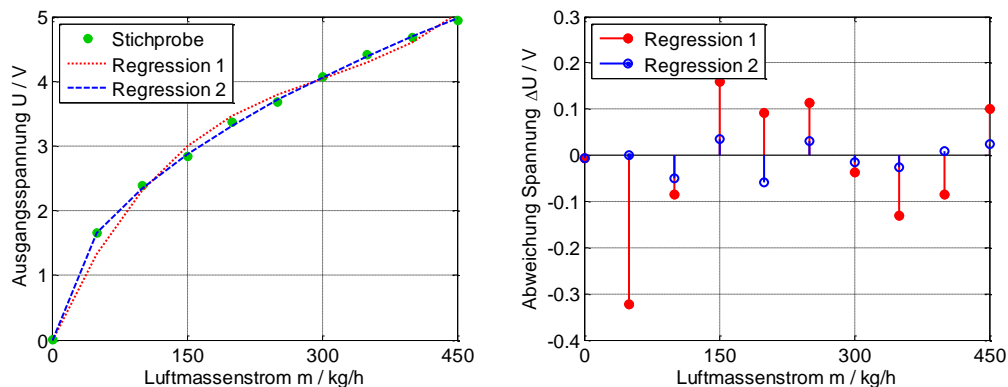
```
% Berechnung der Funktionswerte
U1 = betal(1)*m + betal(2)*m.^2 + betal(3)*m.^3;
U2 = sqrt(m/beta2);

% Grafische Darstellung
scatter(m,U,'g','filled');
hold on;
plot(m,U1,'r:','linewidth',2);
plot(m,U2,'b--','linewidth',2);
hold off;
```

f) Die Residuen errechnen sich aus der Differenz von Stichprobenwert und Regressionswert.

```
% Darstellung der Residuen
subplot(1,2,2);
stem(m,U1-U,'r','filled','linewidth',2);
hold on;
stem(m,U2-U,'b','linewidth',2);
hold off;
```

Beide Darstellungen führen zu folgender Grafik



Für diesen direkten Vergleich der beiden Regressionsfunktionen wird die Summe der Fehlerquadrate berechnet. Bei der ersten Regression ergibt sich $a_1 = 0.1928$ und bei der zweiten Regressionsfunktion ergibt sich $a_2 = 0.0099$. Damit ist in diesem Fall die Regression der inversen Funktion erheblich genauer als bei der Funktion selbst. Das Ergebnis wird auch grafisch bestätigt.

```
% Berechnung der Fehlerquadrate
a1 = sum((U1-U).^2)
a2 = sum((U2-U).^2)
```

g) Wenn ein funktionaler Zusammenhang zweier Größen bekannt ist, sich aber nicht durch ein Polynom darstellen lässt, kann es zielführend sein, die Regressionsfunktion der Umkehrfunktion zu berechnen und dann nach der Zielgröße aufzulösen. Dazu darf die Regressionsfunktion eine Ordnung von maximal 2 aufweisen. Alternativ kann es sinnvoll sein, eine Achse zu transformieren, um ein Polynom als Regressionsfunktion zu bekommen.

11.3 Messung eines Diodenstroms

a) Der Datensatz wird zunächst eingelesen

```
% Einlesen der Messwerte
% Diodenstrom id, Diodenspannung ud
load Diodenstrom.mat;
```

Anschließend wird ein Regressionsmodell aufgebaut.

```
% Regression
model = [0; 1; 2; 3];
stats = regstats(id,ud,model,{'beta','r','adjrsquare','tstat'})
```

b) Die Signifikanzbewertung zeigt, dass keine Terme entfernt werden können.

```
% Modellbewertung
stats.tstat.pval
```

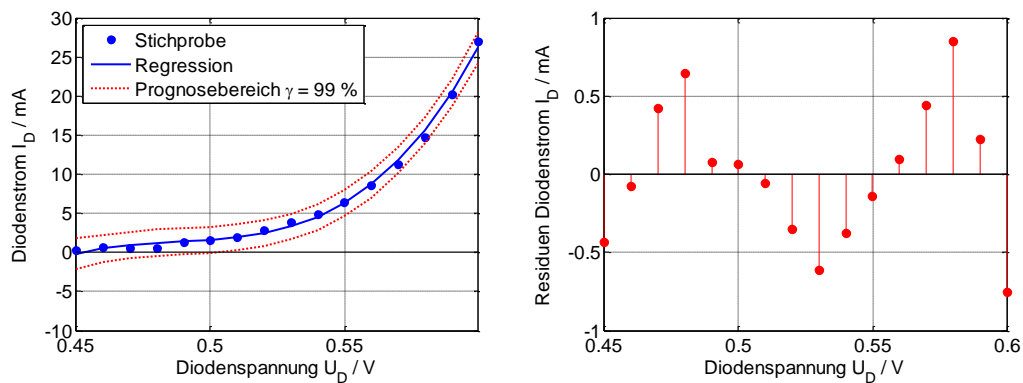

c) Zur Darstellung der Konfidenzbereiche wird `polyfit` verwendet, da alle Terme bis zur Ordnung 3 vorkommen.

```
% Berechnung der Konfidenzbereiche mit polyfit und polyconf, da alle
% Terme bis zur Ordnung 3 erforderlich sind
[P,S] = polyfit(ud,id,3);
[i,iDelta] = polyconf(P,ud,S,'alpha',0.01,'predopt','observation');

% Grafische Darstellung
scatter(ud,id,'b','filled');
hold on;
plot(ud,i,'b','linewidth',2);
plot(ud,i-iDelta,'r:','linewidth',2);
plot(ud,i+iDelta,'r:','linewidth',2);
hold off;
h = legend('Stichprobe','Regression','Prognosebereich \gamma = 99 %');

% Grafische Darstellung der Residuen
stem(ud,i-id,'r','filled');
```

Es ergeben sich folgende Abbildungen



d) Zur Bestimmung der Regressionsfunktion von dem Zusammenhang zwischen Diodenspannung u_D und dem Logarithmus des Diodenstroms i_D wird identisch vorgegangen.

```
% Regression des Logarithmus von dem Diodenstrom
model = [0; 1; 2; 3];
stats = regstats(log(id),ud,model',{'beta','r','adjrsquare','tstat'})
```

e) Die Analyse der Terme auf Signifikanz zeigt, dass alle Terme bis auf den konstanten und linearen Term entfernt werden können.

```
% Modellreduktion um kubischen Term
model = [0; 1; 2];
stats = regstats(log(id),ud,model',{'beta','r','adjrsquare','tstat'})

% Modellreduktion um quadratischen Term
model = [0; 1];
stats = regstats(log(id),ud,model',{'beta','r','adjrsquare','tstat'})

% Beide Terme sind signifikant, keine weitere Reduktion von Termen möglich
stats.tstat.pval
```

Zur Bestimmung des Diodenstroms i_D muss die Exponentialfunktion der über die Regressionsfunktion berechneten Werte bestimmt werden.

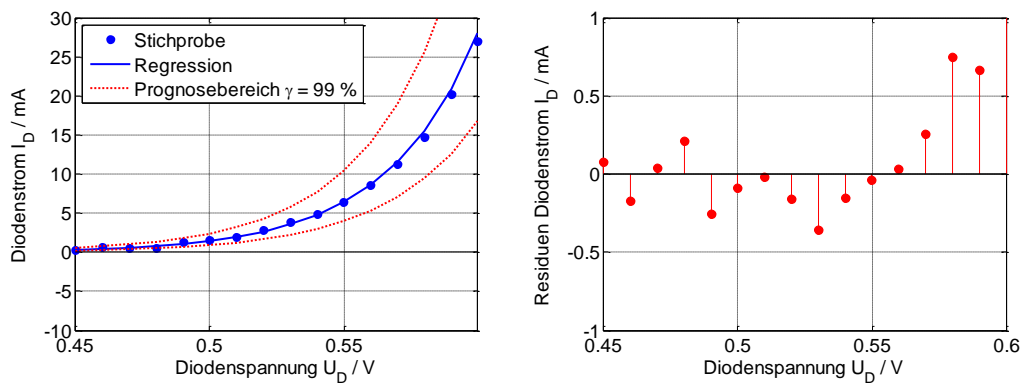
f) Zur Darstellung der Konfidenzbereiche wird wieder polyfit verwendet, da alle Terme bis zur Ordnung 1 signifikant sind.

```
% Berechnung der Funktionswerte wieder mit polyfit und polyconf
[P,S] = polyfit(ud,log(id),1);
[i,iDelta] = polyconf(P,ud,S,'alpha',0.01,'predopt','observation');

% Grafische Darstellung
scatter(ud,id,'b','filled');
hold on;
plot(ud,exp(i),'b','linewidth',2);
plot(ud,exp(i-iDelta),'r:','linewidth',2);
plot(ud,exp(i+iDelta),'r:','linewidth',2);
hold off;
h = legend('Stichprobe','Regression','Konfidenzbereich \gamma = 99 %');

% Grafische Darstellung der Residuen
stem(ud,exp(i)-id,'r','filled');
```

Es ergeben sich folgende Abbildungen:



g) Die Summe der Fehlerquadrate ist im Falle der Transformation ($A = 2.5$) kleiner als im Fall ohne Transformation ($A = 3$). Das liegt daran, dass die Funktion nach der Transformation praktisch eine Gerade ist, die sehr gut approximiert werden kann.

Allerdings ergeben sich im Fall der Transformation bei großen Diodenspannungen sehr große Prognoseintervalle bis zu 10 mA. Sie sind deutlich größer als im nicht transformierten Fall.

Außerdem sind die ursprünglich normalverteilten Messfehler nach der Transformation der Messwerte mit der Logarithmusfunktion nicht mehr normalverteilt. Deshalb ist eine Annahme, die bei der Berechnung der Prognoseintervalle gemacht wird, verletzt.

12 Regression mehrdimensionaler Datensätze

12.1 Ausbeute eines chemischen Prozesses

a) Nach der Initialisierung werden die Daten eingelesen. Mithilfe des Befehls `regstats` wird eine Regressionsfunktion für ein vollquadratisches Modell berechnet und das Ergebnis grafisch dargestellt. Mit dem MATLAB-Code

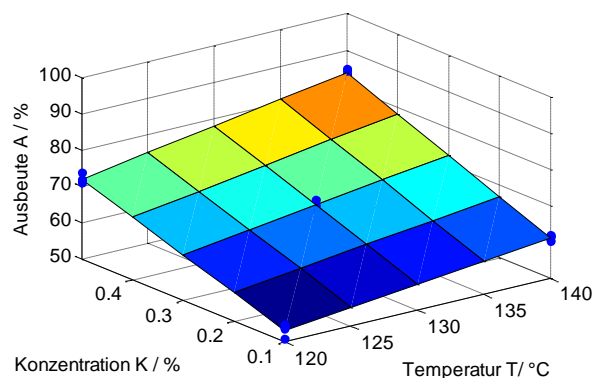
```
% Laden der Daten
load ChemischeAusbeute.mat
T = data(:,1);
K = data(:,2);
A = data(:,3);

% Lineares Modell mit Wechselwirkungen anlegen
model = [0 0; 1 0; 0 1; 1 1];
Rstat = regstats(A,[T K],model,{ 'yhat','r','beta','adjrsquare','fstat','tstat' })
b = Rstat.beta;

% Regressionsfunktion als Grid berechnen
tplot = 120:5:140;
kplot = 0.1:0.1:0.5;
[Tplot,Kplot] = meshgrid(tplot, kplot);
Aplot = b(1) + b(2)*Tplot + b(3)*Kplot + b(4)*Tplot.*Kplot;

% Grafische Darstellung
figure(1);
scatter3(T,K,A,'bo','filled');
hold on;
surf(Tplot,Kplot,Aplot);
hold off;
xlabel('Temperatur T/ °C','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Konzentration K / %','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
zlabel('Ausbeute A / %','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
```

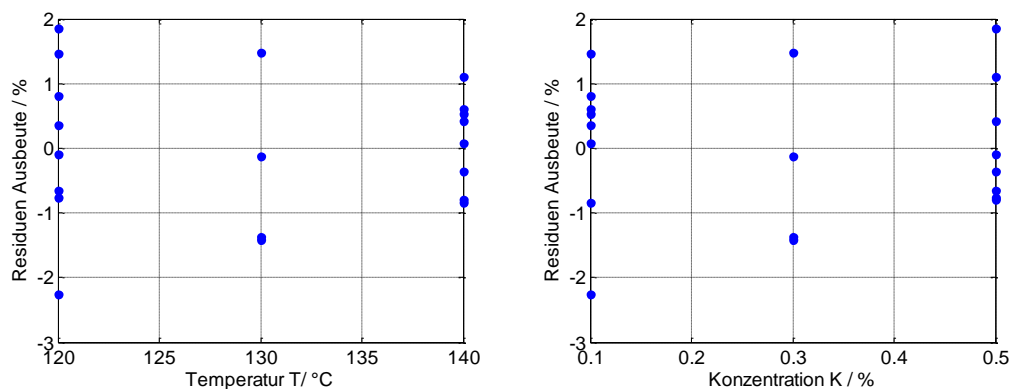
ergibt sich folgende Darstellung:



b) Die Residuen ergeben sich aus der Abweichung von Messwert zu Regressionswert. Sie werden direkt von der Funktion `regstats` übernommen.

```
% Grafische Darstellung der Residuen
figure(2);
subplot(1,2,1);
scatter(T,Rstat.r,'bo','filled');
xlabel('Temperatur T/ °C','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Residuen Ausbeute / %','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);

subplot(1,2,2);
scatter(K,Rstat.r,'bo','filled');
xlabel('Konzentration K / %','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Residuen Ausbeute / %','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
```



Es ist keine Struktur der Reststreuung zu erkennen, die auf einen systematischen Regressionsfehler schließen lässt.

c) Zur Bewertung der Güte wird das adjungierte Bestimmtheitsmaß herangezogen.

```
% Bewertung der Regression
Rstat.adjrsquare
Rstat.tstat.pval
```

Es beträgt $R_{\text{ADJ}} = 0.9877$, was auf eine sehr gute Regression hinweist. Die Residuen lassen, wie in Aufgabenteil b festgestellt, keinen strukturierten Fehler erkennen. Der t-Test zeigt, dass nicht alle Terme signifikant sind, deshalb wird in der folgende Teilaufgabe eine Reduktion der Regressionsterme vorgenommen.

d) Ausgehend von dem linearen Modell mit Wechselwirkungen werden nicht signifikante Terme eliminiert.

```
% Reduktion des Modells
model = [0 0; 1 0; 1 1];
Rstat = regstats(A,[T K],model,{ 'yhat','r','beta','adjrsquare','fstat','tstat'})
Rstat.tstat.pval

model = [1 0; 1 1];
Rstat = regstats(A,[T K],model,{ 'yhat','r','beta','adjrsquare','fstat','tstat'})
Rstat.tstat.pval

b = Rstat.tstat.beta;
r = Rstat.r;
```

Durch die Reduktion des Regressionsmodells steigt das adjungierte Bestimmtheitsmaß von $R_{ADJ} = 0.9877$ geringfügig auf $R_{ADJ} = 0.9883$ an. Anschließend sind alle Terme signifikant.

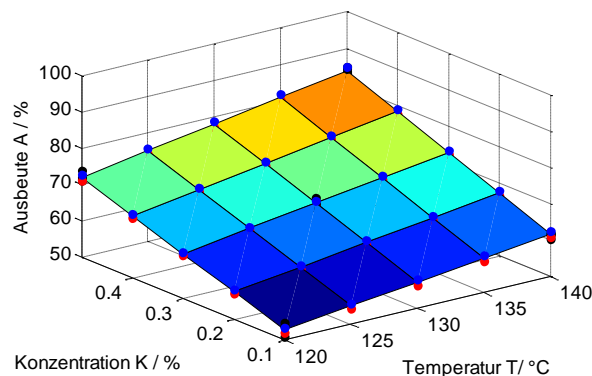
e) Mit den hergeleiteten Gleichungen wird das Konfidenzintervall berechnet.

```
% Berechnung des Konfidenzbereichs
PSI = inv([T T.*K]'*[T T.*K]);
FG = (length(T) - length(b));
Sr = sqrt(1/FG*r'*r);

for n = 1:length(Tplot)
    for m = 1:length(Kplot)
        x0 = [Tplot(n,m) Tplot(n,m)*Kplot(n,m)];
        Amin(n,m) = b'*x0' - tinv(0.975,FG)*Sr*sqrt(x0*PSI*x0');
        Amax(n,m) = b'*x0' + tinv(0.025,FG)*Sr*sqrt(x0*PSI*x0');
    end;
end;
Aplot = b(1)*Tplot + b(2)*Tplot.*Kplot;

figure(3);
surf(Tplot,Kplot,Aplot);
hold on;
scatter3(T,K,A,'ko','filled');
scatter3(Tplot(:),Kplot(:),Amin(:),'ro','filled');
scatter3(Tplot(:),Kplot(:),Amax(:),'bo','filled');
hold off;
xlabel('Temperatur T/ °C','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Konzentration K / %','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
zlabel('Ausbeute A / %','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
```

Es ergibt sich folgende Darstellung.



f) Die Länge des 95 % - Prognosebereichs für zukünftige Stichprobenwerte bei einer Temperatur $T = 125^\circ\text{C}$ und einer Konzentration $K = 0.4\%$ berechnet sich mit folgendem MATLAB-Code:

```
% Berechnung Prognoseintervall
x0 = [125 125*0.4];
APmin = b'*x0' - tinv(0.975,FG)*Sr*sqrt(1+x0*PSI*x0')
APmax = b'*x0' + tinv(0.025,FG)*Sr*sqrt(1+x0*PSI*x0')
```

Es ergibt sich eine Ausbeute, die zwischen 67.4677 und 72.4262 % liegt.

12.2 Lebensdauer von Maschinenkomponenten

a) Nach der Initialisierung werden die Daten eingelesen. Mithilfe des Befehls `regstats` wird eine Regressionsfunktion für ein vollquadratisches Modell berechnet und das Ergebnis grafisch dargestellt. Mit dem MATLAB-Code

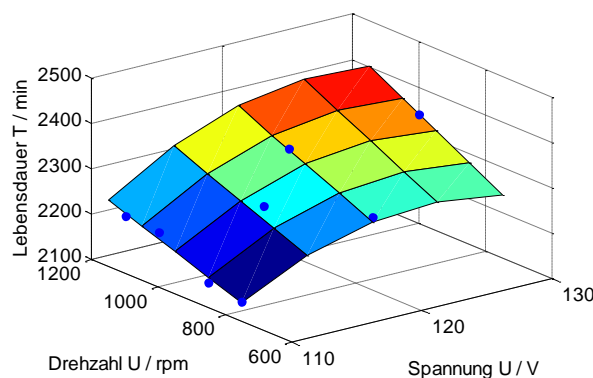
```
% Laden der Daten
load LebensdauerMaschinenkomponenten.mat
D = values(:,3);
U = values(:,2);
T = values(:,1);

% Vollquadratisches Modell anlegen
model = [0 0; 1 0; 0 1; 1 1; 2 0; 0 2];
Rstat = regstats(T,[U D],model,{'yhat','r','beta','adjrsquare','fstat','tstat'});
b = Rstat.beta;

% Regressionsfunktion als Grid berechnen
uplot = 110:5:130;
dplot = 750:100:1150;
[Uplot,Dplot] = meshgrid(uplot, dplot);
Tplot = b(1) + b(2)*Uplot + b(3)*Dplot + b(4)*Uplot.*Dplot + b(5)*Uplot.^2 +
b(6)*Dplot.^2;

% Grafische Darstellung
scatter3(U,D,T,'bo','filled');
hold on;
surf(Uplot,Dplot,Tplot);
hold off;
xlabel('Spannung U / V','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Drehzahl U / rpm','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
zlabel('Lebensdauer T / min','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
```

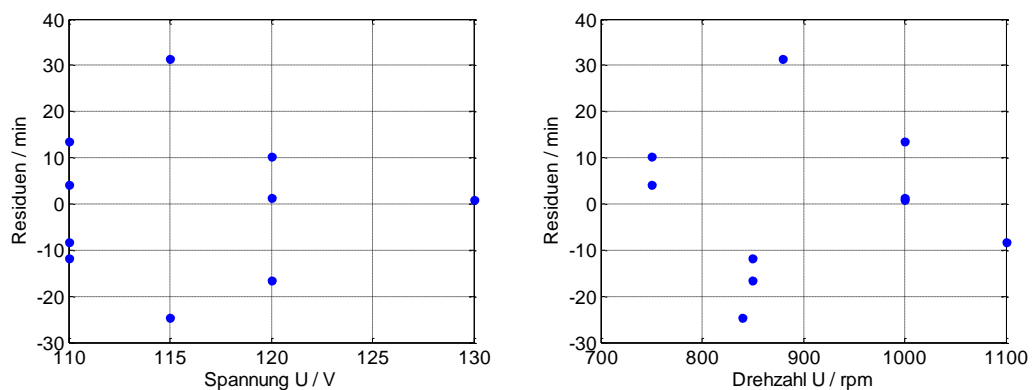
ergibt sich folgende Darstellung:



b) Die Residuen ergeben sich aus der Abweichung von Messwert zu Regressionswert. Sie werden direkt von der Funktion `regstats` übernommen.

```
% Grafische Darstellung der Residuen
subplot(1,2,1);
scatter(U,Rstat.r,'bo','filled');
xlabel('Spannung U / V','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Residuen / min','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);

subplot(1,2,2);
scatter(D,Rstat.r,'bo','filled');
xlabel('Drehzahl U / rpm','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Residuen / min','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
```



Es ist keine Struktur der Reststreuung zu erkennen, die auf einen systematischen Regressionsfehler schließen lässt.

c) Zur Bewertung der Güte wird das adjungierte Bestimmtheitsmaß herangezogen.

```
% Bewertung der Regression
Rstat.adjrsquare
Rstat.tstat.pval
```

Es beträgt $R_{\text{ADJ}} = 0.8621$, was auf eine mäßige Regression hinweist. Die Residuen lassen aber, wie in Aufgabenteil b festgestellt, keinen strukturierten Fehler erkennen. Der t-Test zeigt, dass nicht alle Terme signifikant sind, deshalb wird in der folgende Teilaufgabe eine Reduktion der Regressionsterme vorgenommen.

d) Ausgehend von dem vollquadratischen Modell werden nicht signifikante Terme eliminiert.

```
%% Reduktion des Modells
model = [0 0; 1 0; 0 1; 1 1; 2 0; 0 2];
Rstat = regstats(T,[U D],model,{'yhat','r','beta','adjrsquare','fstat','tstat'})
Rstat.tstat.pval

model = [0 0; 1 0; 0 1; 1 1; 2 0];
Rstat = regstats(T,[U D],model,{'yhat','r','beta','adjrsquare','fstat','tstat'})
Rstat.tstat.pval

model = [0 0; 1 0; 0 1; 2 0];
Rstat = regstats(T,[U D],model,{'yhat','r','beta','adjrsquare','fstat','tstat'})
Rstat.tstat.pval
b = Rstat.tstat.beta;
r = Rstat.r;
```

Durch die Reduktion des Regressionsmodells steigt das adjungierte Bestimmtheitsmaß von $R_{\text{ADJ}} = 0.8621$ auf $R_{\text{ADJ}} = 0.9039$ an. Anschließend sind alle Terme signifikant.

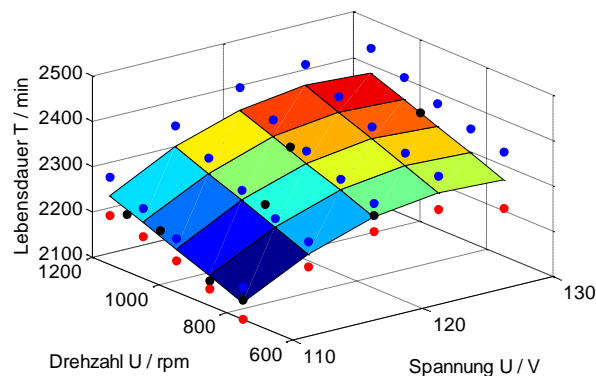
e) Mit den hergeleiteten Gleichungen wird das Konfidenzintervall berechnet.

```
% Berechnung des Konfidenzbereichs
PSI = inv([ones(size(U)) U D U.^2] * [ones(size(U)) U D U.^2]);
FG = (length(T) - length(b));
Sr = sqrt(1/FG*r'*r);

for n = 1:length(Uplot)
    for m = 1:length(Dplot)
        x0 = [1 Uplot(n,m) Dplot(n,m) Uplot(n,m).^2];
        Tmin(n,m) = b'*x0 - tinv(0.975,FG)*Sr*sqrt(x0*PSI*x0');
        Tmax(n,m) = b'*x0 + tinv(0.025,FG)*Sr*sqrt(x0*PSI*x0');
    end;
end;
Tplot = b(1) + b(2)*Uplot + b(3)*Dplot + b(4)*Uplot.^2;

figure(3);
surf(Uplot,Dplot,Tplot);
hold on;
scatter3(U,D,T,'ko','filled');
scatter3(Uplot(:),Dplot(:),Tmin(:),'ro','filled');
scatter3(Uplot(:),Dplot(:),Tmax(:),'bo','filled');
hold off;
xlabel('Spannung U / V','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Drehzahl U / rpm','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
zlabel('Lebensdauer T / min','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
```

Es ergibt sich folgende Darstellung.



f) Die Länge des 95 % - Konfidenzbereich für zukünftige Stichprobenwerte bei 925 Umdrehung pro Minute und einer Betriebsspannung von 120 V berechnet sich mit folgendem MATLAB-Code:

```
% Berechnung Prognoseintervall
x0 = [1 120 925 120^2];
Tmin(n,m) = b'*x0 - tinv(0.975,FG)*Sr*sqrt(1+x0*PSI*x0')
Tmax(n,m) = b'*x0 + tinv(0.025,FG)*Sr*sqrt(1+x0*PSI*x0')
```

Es ergibt sich eine Lebensdauer, die zwischen 2249 und 2362 Minuten liegt.

12.3 Einspritzmenge bei einem Common-Rail-System

a) Nach der Initialisierung werden die Daten eingelesen. Mithilfe des Befehls `regstats` wird eine Regressionsfunktion für ein vollquadratisches Modell berechnet und das Ergebnis grafisch dargestellt. Mit dem MATLAB-Code

```
% Laden der Daten
load Einspritzmenge.mat
P = data(:,1);
T = data(:,2);
M = data(:,3);

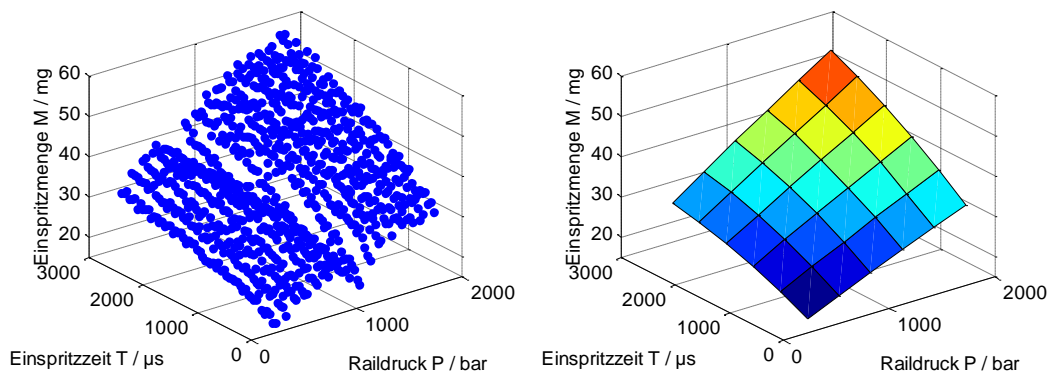
% Vollquadratisches Modell anlegen
model = [0 0; 1 0; 0 1; 1 1; 2 0; 0 2];
Rstat = regstats(M,[P T],model,{ 'yhat','r','beta','adjrsquare','fstat','tstat'})
b = Rstat.beta;

% Regressionsfunktion als Grid berechnen
pplot = 300:300:1800;
tplot = 150:500:3000;
[Pplot,Tplot] = meshgrid(pplot, tplot);
Mplot = b(1) + b(2)*Pplot + b(3)*Tplot + b(4)*Pplot.*Tplot + b(5)*Pplot.^2 +
b(6)*Tplot.^2;

% Grafische Darstellung
figure(1);
subplot(1,2,1);
scatter3(P,T,M,'bo','filled');
xlabel('Raildruck P / bar','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSi-
ze',14);
ylabel('Einspritzzeit T / µs','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSi-
ze',14);
zlabel('Einspritzmenge M / mg','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSi-
ze',14);

subplot(1,2,2);
surf(Pplot,Tplot,Mplot);
xlabel('Raildruck P / bar','FontWeight','normal','FontName','Arial','Font-
Size',14);
ylabel('Einspritzzeit T / µs','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSi-
ze',14);
zlabel('Einspritzmenge M / mg','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSi-
ze',14);
```

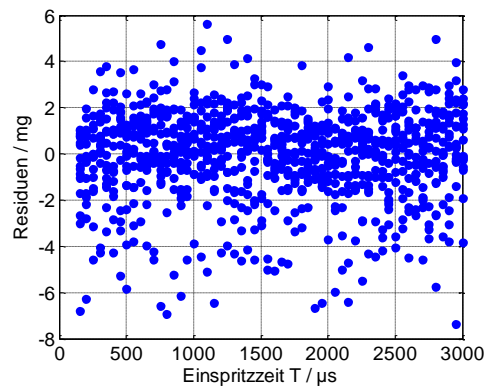
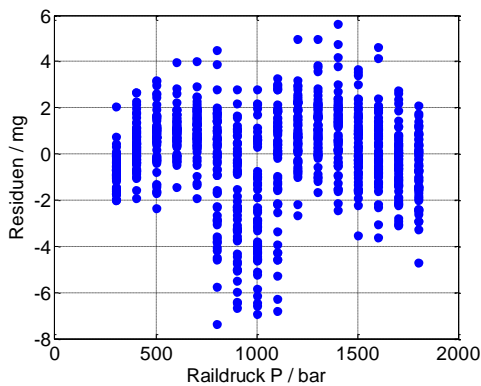
ergibt sich folgende Darstellung:



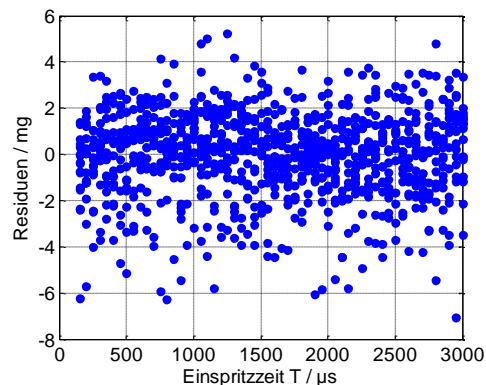
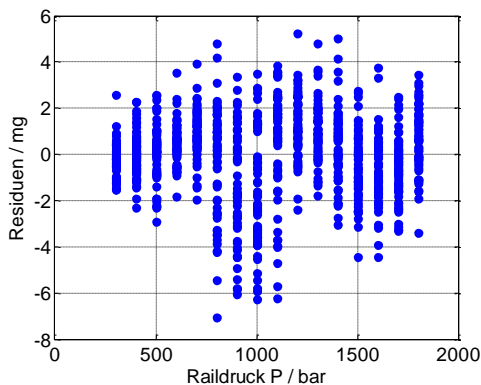
b) Die Residuen ergeben sich aus der Abweichung von Messwert zu Regressionswert. Sie werden direkt von der Funktion `regstats` übernommen.

```
% Grafische Darstellung der Residuen
subplot(1,2,1);
scatter(P,Rstat.r,'bo','filled');
xlabel('Raildruck P / bar','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Residuen / mg','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);

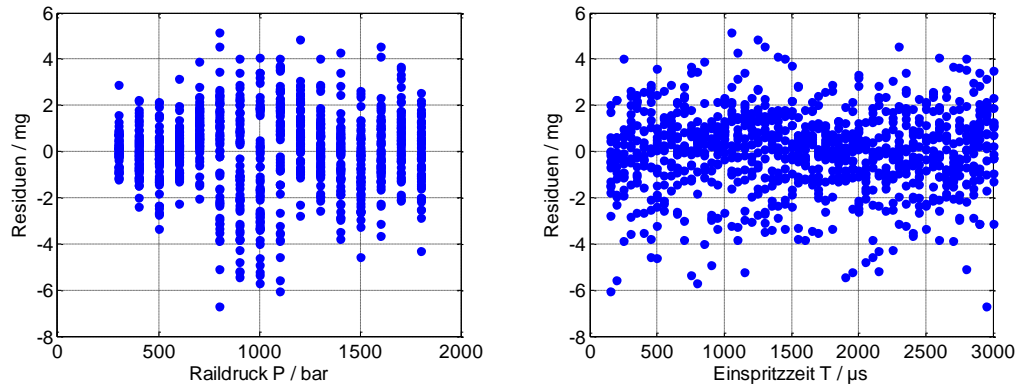
subplot(1,2,2);
scatter(T,Rstat.r,'bo','filled');
xlabel('Einspritzzeit T / µs','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Residuen / mg','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
```



c) Es zeigt sich, dass die Residuen bei Raildrücken im Bereich von 1000 bar eine systematische Abweichung besitzen. Deshalb wird versucht, die Regression zu verbessern, indem die Ordnung des Regressionspolynoms für den Raildruck erhöht wird. Für Terme bis zur Ordnung $M = 4$ ergibt sich folgendes Bild:



Wird die Ordnung auf $M = 6$ gesteigert, ergibt sich:



Mit steigender Ordnung kann die systematische Abweichung reduziert werden. Deshalb wird von einem modifizierten Modell ausgegangen.

```
% Vollquadratisches Modell anlegen und erweitern
% model = [0 0; 1 0; 0 1; 1 1; 2 0; 0 2];
% model = [0 0; 1 0; 0 1; 1 1; 2 0; 0 2; 3 0; 4 0];
model = [0 0; 1 0; 0 1; 1 1; 2 0; 0 2; 3 0; 4 0; 5 0; 6 0];
Rstat = regstats(M, [P T], model, {'yhat', 'r', 'beta', 'adjrsquare', 'fstat', 'tstat'})
b = Rstat.beta
```

Zur Bewertung der Güte wird das adjungierte Bestimmtheitsmaß herangezogen. Es steigt von $R_{ADJ} = 0.953$ für $M = 2$ auf 0.9614 für $M = 6$ an. Die Regression erklärt damit einen sehr großen Anteil der Streuungen im Datensatz. Die hohe Ordnung des Regressionspolynoms wird mithilfe von Signifikanztests bewertet.

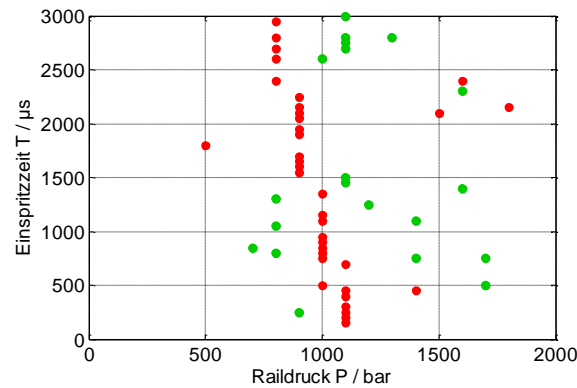
d) Ausgehend von dem erarbeiteten Modell werden nicht signifikante Terme eliminiert.

```
% Reduktion des Modells
model = [0 0; 1 0; 0 1; 1 1; 2 0; 0 2; 3 0; 4 0; 5 0; 6 0];
Rstat = regstats(M, [P T], model, {'yhat', 'r', 'beta', 'adjrsquare', 'fstat', 'tstat'})
Rstat.tstat.pval

model = [0 0; 0 1; 1 1; 2 0; 0 2; 3 0; 4 0; 5 0; 6 0];
Rstat = regstats(M, [P T], model, {'yhat', 'r', 'beta', 'adjrsquare', 'fstat', 'tstat'})
Rstat.tstat.pval
b = Rstat.beta
```

Es bestätigt sich die Vermutung, dass die Terme höherer Ordnung den systematischen Fehler reduzieren. Der lineare Term für den Raildruck ist nicht signifikant und wird deshalb eliminiert. Durch die Reduktion des Regressionsmodells ändert sich das adjungierte Bestimmtheitsmaß $R_{ADJ} = 0.9614$ nicht.

e) Für jeden Stichprobenwert wird das Prognoseintervall berechnet und es wird geprüft, ob der Stichprobenwert innerhalb der Stichprobe liegt. Liegt er unterhalb, wird er als rote Markierung in ein Diagramm aufgenommen, liegt er oberhalb, wird er als grüne Markierung in ein Diagramm aufgenommen.



Es zeigt sich, dass insgesamt 56 der 928 Stichprobenwerte nicht im Prognoseintervall liegen. Die Abweichungen nach unten liegen fast ausschließlich im Bereich der Raildrücke von 1000 bar.

Die Berechnung erfolgt mit dem folgenden MATLAB-Code:

```
% Berechnung des Konfidenzbereichs und Prüfung der Stichprobe
gamma = 0.95;
PSI = inv([ones(size(P)) T P.*T P.^2 T.^2 P.^3 P.^4 P.^5 P.^6 ]'*[ones(size(P)) T
P.*T P.^2 T.^2 P.^3 P.^4 P.^5 P.^6 ]);
FG = (length(P) - length(b));
Sr = sqrt(1/FG*r'*r);

figure(3);
hold on;
m = 0;
for n = 1:length(P)
    x0 = [1 T(n) P(n).*T(n) P(n).^2 T(n).^2 P(n).^3 P(n).^4 P(n).^5 P(n).^6 ];
    Mmin(n) = b'*x0' + tinvc((1-gamma)/2,FG)*Sr*sqrt(1+x0*PSI*x0');
    Mmax(n) = b'*x0' + tinvc((1+gamma)/2,FG)*Sr*sqrt(1+x0*PSI*x0');
    if (M(n)<Mmin(n))
        scatter(P(n),T(n),'ro','filled');
        m = m + 1;
    end;
    if (M(n) > Mmax(n))
        scatter(P(n),T(n),'go','filled');
        m = m + 1;
    end;
end;
hold off;
m = m
xlabel('Raildruck P / bar','FontWeight','normal','FontName','Arial','Font-Size',14);
ylabel('Einspritzzeit T / μs','FontWeight','normal','FontName');
```

13 Statistische Versuchsplanung

13.1 Fertigung von Blattfedern

Die Daten werden zunächst eingelesen.

```
% Einlesen der Messwerte
load Versuchsplan.mat;
TetaOfen = Data(:,1);
ZeitOfen = Data(:,2);
TetaOel = Data(:,3);
Elas = Data(:,4);
```

a) Es handelt sich um einen vollfaktoriellen 2^3 -Versuchsplan. Mit dem Versuchsplan können der konstanter Term, die linearen Terme und der Wechselwirkungsterm bestimmt werden. Da die Temperatur des Ölbads nicht gezielt beeinflusst werden kann, ergibt sich eine Funktion der Form

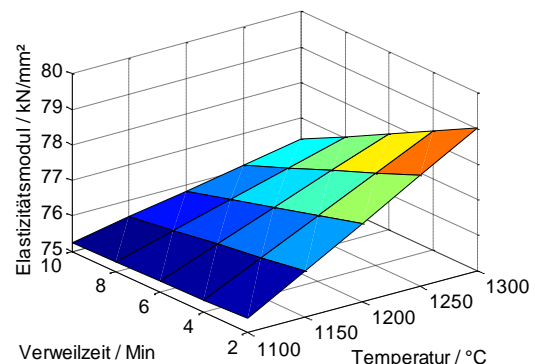
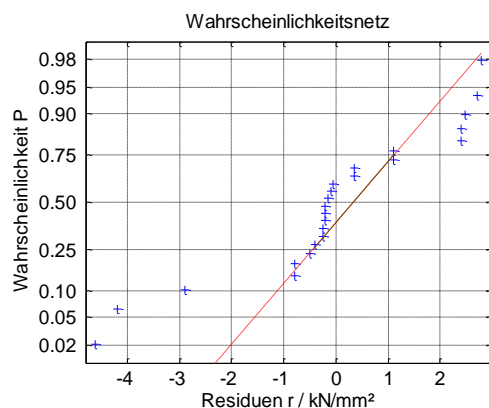
$$E = b_0 + b_1 \cdot \vartheta_{\text{OFEN}} + b_2 \cdot T_{\text{OFEN}} + b_3 \cdot \vartheta_{\text{OFEN}} \cdot T_{\text{OFEN}}$$

b) Mithilfe des Befehls regstats kann eine Regressionsfunktion berechnet werden.

```
% Regressionsansatz
model = [0 0; 1 0; 0 1; 1 1];
stats = regstats(Elas, [TetaOfen ZeitOfen], model, {'beta', 'r', 'adjrsquare', 'tstat'})
stats.tstat.beta
stats.tstat.pval
stats.adjrsquare

normplot(stats.r)
```

Es ergibt sich $a_0 = 52.1542$, $a_1 = 0.0212$, $a_2 = 1.6771$ und $a_3 = -0.0015$. Die Güte der Regressionsfunktion ist nicht hoch. Das adjungierte Bestimmtheitsmaß beträgt 0.3011, ist also deutlich kleiner als 1. Ein Normplot zeigt, dass die Residuen nicht normalverteilt sind. Außerdem deuten die hohen p-Values beim Signifikanztest darauf hin, dass das Modell nicht signifikante Terme aufweist. Das Modell wird trotzdem weiterverwendet.



c) Die Parameterkombinationen, mit denen der Zielwert erreicht werden kann, sind über die Regressionsgleichung gegeben.

$$E = a_0 + a_1 \cdot \vartheta_{\text{OFEN}} + a_2 \cdot T_{\text{OFEN}} + a_3 \cdot \vartheta_{\text{OFEN}} \cdot T_{\text{OFEN}}$$

Für eine gegebene Temperatur ϑ_{OFEN} kann die Verweilzeit T_{OFEN} über

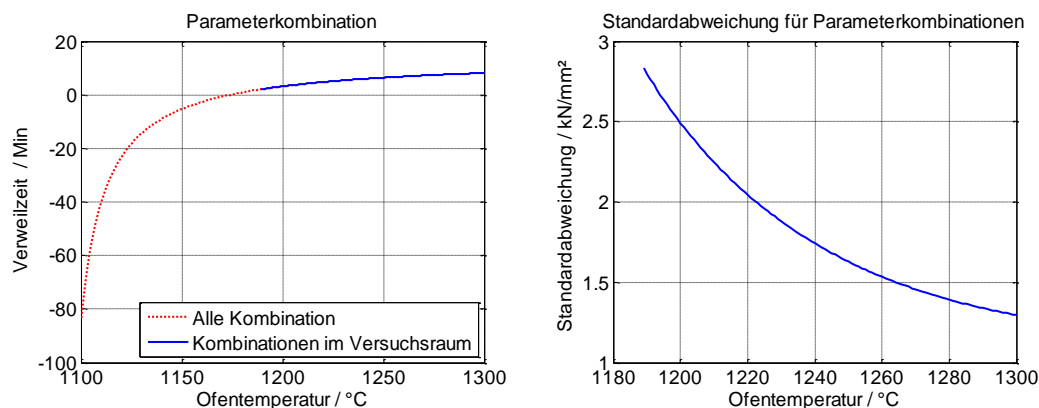
$$E - a_0 - a_1 \cdot \vartheta_{\text{OFEN}} = (a_2 + a_3 \cdot \vartheta_{\text{OFEN}}) \cdot T_{\text{OFEN}}$$

berechnet werden zu

$$T_{\text{OFEN}} = \frac{E - a_0 - a_1 \cdot \vartheta_{\text{OFEN}}}{a_2 + a_3 \cdot \vartheta_{\text{OFEN}}} = \frac{77 - 52.1542 - 0.0212 \cdot \vartheta_{\text{OFEN}}}{1.6771 - 0.0015 \cdot \vartheta_{\text{OFEN}}} = \frac{24.8458 - 0.0212 \cdot \vartheta_{\text{OFEN}}}{1.6771 - 0.0015 \cdot \vartheta_{\text{OFEN}}}$$

```
% Zielgröße
Teta = 1100:1:1300;
Zeit = (77-stats.beta(1)-stats.beta(2)*Teta)./(stats.beta(3)+stats.beta(4)*Teta);
bins = find((Zeit>2)&(Zeit<10));
TetaZiel = Teta(bins);
ZeitZiel = Zeit(bins);
```

Es ergibt sich der in folgender Grafik dargestellte Zusammenhang.



Da die Verweilzeit in dem Parameterraum liegen muss, werden die Parameterkombinationen auf den blauen Bereich eingeschränkt.

d) Um eine gute Reproduzierbarkeit des Prozesses zu bekommen, muss die Standardabweichung des Fertigungsprozesses minimiert werden. Sie ergibt sich maßgeblich aus der variablen Öltemperatur. Die durch die Öltemperatur hervorgerufene Standardabweichung wird für jeden Versuchspunkt bestimmt und über eine Regressionsfunktion abgeschätzt.

$$\text{Sig} = b_0 + b_1 \cdot \vartheta_{\text{OFEN}} + b_2 \cdot T_{\text{OFEN}} + b_3 \cdot \vartheta_{\text{OFEN}} \cdot T_{\text{OFEN}}$$

```
% Berechnung der Standardabweichung an jedem Versuchspunkt
EMatrix = [Elas(1:6) Elas(7:12) Elas(13:18) Elas(19:24)];
StdElas = std(EMatrix);

% Regressionsmodell
model = [0 0; 1 0; 0 1; 1 1];
stats = regstats(StdElas,[TetaOfen([1 7 13 19]) ZeitOfen([1 7 13 19])],model,{ 'beta', 'r', 'adjrsquare', 'tstat' });
stats.beta
RegStd =
stats.beta(1)+stats.beta(2)*TetaZiel+stats.beta(3)*ZeitZiel+stats.beta(4)*TetaZiel.*ZeitZiel
```

Es ergibt sich $b_0 = 6.8623$, $b_1 = -0.0029$, $b_2 = -0.9930$ und $b_3 = 0.0006$. Für die Parameterkombinationen aus Aufgabenteil c) ergibt sich eine Standardabweichung als Funktion der Ofen-Temperatur. Sie ist in dem Bild oben bereits grafisch dargestellt.

Die Standardabweichung ist am kleinsten, wenn der Betriebspunkt mit $\vartheta_{\text{OFEN}} = 1300 \text{ }^\circ\text{C}$ und $T_{\text{OFEN}} = 8.1656 \text{ Min.}$ eingehalten wird.

13.2 Reaktives-Ionen-Ätzen

a) Bei dem Versuchsplan handelt es sich um einen vollfaktoriellen 2^3 -Versuchsplan. Mit ihm können konstante, lineare und Wechselwirkungsterme bestimmt werden.

b) Zunächst werden die Daten eingelesen

```
% Einlesen der Messwerte
load Versuchsplan.mat;
A = Versuchsplan(:,1);
V = Versuchsplan(:,2);
P = Versuchsplan(:,3);
R = Versuchsplan(:,4);
SR = Versuchsplan(:,5);
```

Durchführen der Regression und Reduzierung um die nicht signifikanten Terme

```
% Regressionsansatz
model = [0 0 0; 1 0 0; 0 1 0; 0 0 1; 1 1 0; 1 0 1; 0 1 1];
stats = regstats(R,[A V P],model,{ 'beta', 'r', 'adjrsquare', 'tstat' });
stats.tstat.pval
Radj = stats.adjrsquare;

% Reduktion letzter Term
model = [0 0 0; 1 0 0; 0 1 0; 0 0 1; 1 1 0; 1 0 1];
stats = regstats(R,[A V P],model,{ 'beta', 'r', 'adjrsquare', 'tstat' });
stats.tstat.pval
Radj = [Radj stats.adjrsquare];

% Reduktion zweitletzter Term
model = [0 0 0; 1 0 0; 0 1 0; 0 0 1; 1 0 1];
stats = regstats(R,[A V P],model,{ 'beta', 'r', 'adjrsquare', 'tstat' });
stats.tstat.pval
Radj = [Radj stats.adjrsquare];

% Reduktion dritter Term
model = [0 0 0; 1 0 0; 0 0 1; 1 0 1];
stats = regstats(R,[A V P],model,{ 'beta', 'r', 'adjrsquare', 'tstat' });
stats.tstat.pval
Radj = [Radj stats.adjrsquare];
stats.beta
```

Wenn alle nicht signifikanten Terme eliminiert werden, ergibt sich folgende Regressionsfunktion

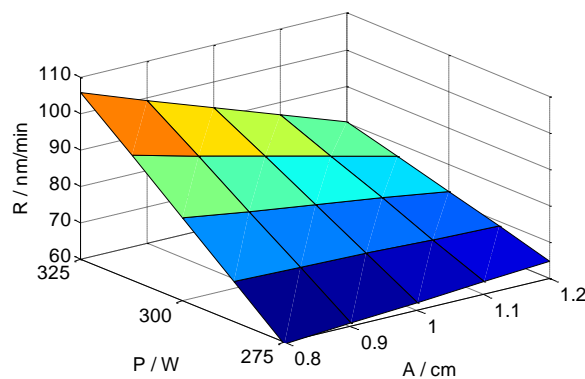
$$R = -541.5375 + 435.4688 \cdot A + 2.1485 \cdot P - 1.5363 \cdot A \cdot P$$

Die Ätzrate ist demnach nur von dem Abstand der Elektroden und der elektrischen Leistung P abhängig.

c) Da die Funktion nur noch von zwei Faktoren abhängt, kann sie z.B. als Surface-Plot dargestellt werden.

```
% Berechnung der Größen
a = 0.8:0.1:1.2;
p = 275:12.5:325;
[Ap,Pp] = meshgrid(a,p);
Rp = stats.beta(1)+stats.beta(2)*Ap+stats.beta(3)*Pp+stats.beta(4)*Ap.*Pp;

% Surface-Plot mit Beschriftung
surf(Ap,Pp,Rp);
```



d) Da bei dem Versuch der Volumenstrom keinen signifikanten Einfluss besitzt, muss er auch im Versuchsplan nicht variiert werden. Damit wäre ein geeigneter Versuchsplan ein vollfaktorieller 2^2 -Versuchsplan

Nr.	A	P	R1	R2
1	0.8	275		
2	1.2	275		
3	0.8	325		
4	1.2	325		

e) Eine geeignete Faktorkombination ergibt sich aus der Forderung, dass das Ziel erreicht wird und die Streuung minimal wird. Das Ziel einer Ätzrate von 75 nm/min kann durch unterschiedliche Parameterkombinationen erreicht werden. Deshalb wird die Streuung des Prozesses als Funktion von Elektrodenabstand A und Leistung P berechnet.

```
% Berechnung der Streuung
SR = std([R(1:8),R(9:16)]')';
Ared = A(1:8);
Vred = V(1:8);
Pred = P(1:8);

% Regressionsmodell der Streuung
model = [0 0 0; 1 0 0; 0 0 1; 1 0 1];
```



```

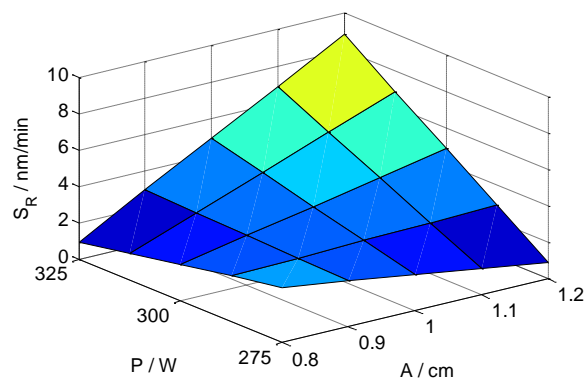
stats = regstats(SR,[Ared Vred Pred],model,{'beta','r','adjrsquare','tstat'})
stats.tstat.pval
Radj = [Radj stats.adjrsquare];
stats.beta

% Berechnung der Größen
SRp = stats.beta(1)+stats.beta(2)*Ap+stats.beta(3)*Pp+stats.beta(4)*Ap.*Pp;

% Surface-Plot mit Beschriftung
surf(Ap,Pp,SRp);

```

Es ergibt sich der im folgenden Bild dargestellte Zusammenhang.

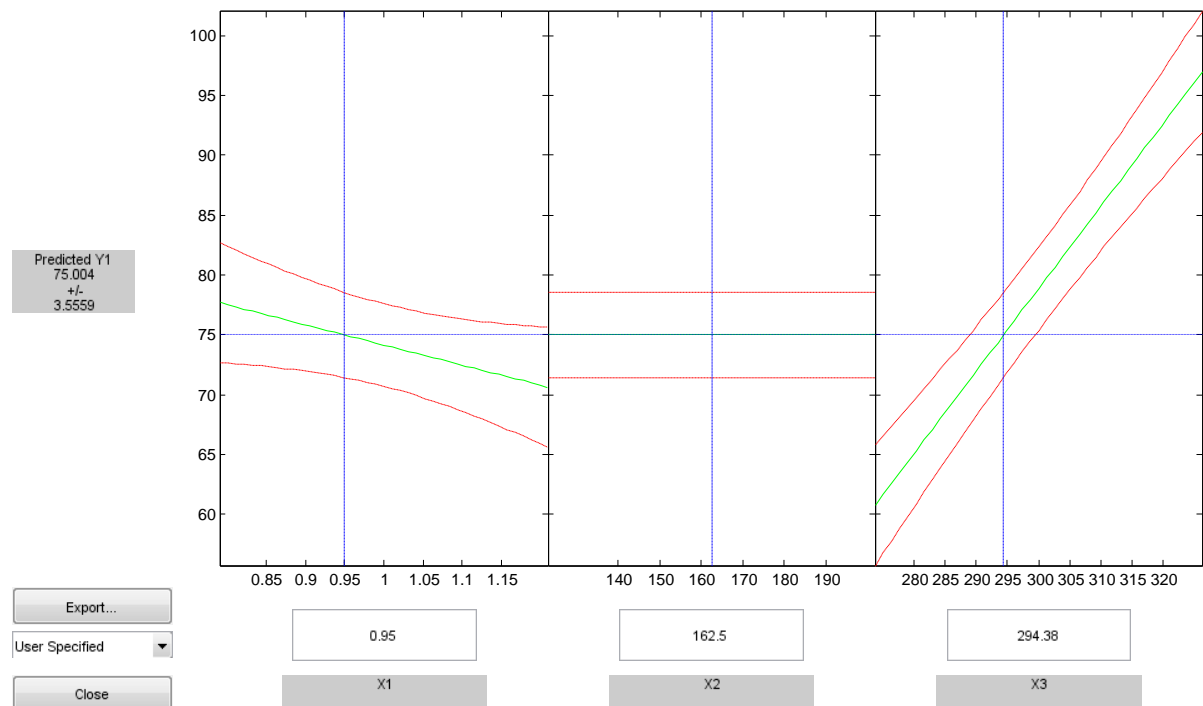


Mit dem RS-Tool können Parameterkombination gefunden werden, die zu dem Zielwert von 75 nm/min führen.

```

% Suche nach Zielwert mit rstool
rstool([A V P],R,model)

```



Eine geringe Streuung wird im Bereich mittleren Elektrodenabstands ($A = 0.95$) und mittlerer Leistung ($P = 294.38$) erreicht. In diesem Punkt ist die Standardabweichung der Ätzrate $S_R = 2.8909$ nm/min.

```
% Berechnung der Streuung
Aopt = 0.95;
Popt = 294.38;
SRp = stats.beta(1)+stats.beta(2)*Aopt+stats.beta(3)*Popt+stats.beta(4)*Aopt.*Popt
```

13.3 Optimierung von Glühstiftkerzen

a) Erstellen des vollfaktoriellen Versuchsplans und Umrechnen in die gegebenen Werte

```
% Definition und Berechnung des vollfaktoriellen Versuchsplans
ff_design = fullfact([3 3 3])
Xff = [ff_design(:,1)*50-50, ff_design(:,2)*15-10, ff_design(:,3)*20];
Sff = Schwindung(Xff);
```

Berechnung des vollquadratischen Regressionsmodells und Ausgabe der Koeffizienten

```
% Vollquadratisches Regressionsmodell
model = [0 0 0; 1 0 0; 0 1 0; 0 0 1; 1 1 0; 1 0 1; 0 1 1; 2 0 0; 0 2 0; 0 0 2];
reg = regstats(Sff,Xff,model,{'tstat','adjrsquare','r'});
Koeffizienten = reg.tstat.beta
```

b) Definition des Center Points und Berechnung des Konfidenzbereichs

```
% Berechnung des Konfidenzbereichs
r = reg.r;
Xk = [ones(size(Xff(:,1))) Xff(:,1) Xff(:,2) Xff(:,3) ...
      Xff(:,1).*Xff(:,2) Xff(:,1).*Xff(:,3) Xff(:,2).*Xff(:,3) ...
      Xff(:,1).^2 Xff(:,2).^2 Xff(:,3).^2];
b = reg.tstat.beta;
xp = [1 50 20 40 50*20 50*40 20*40 50^2 20^2 40^2]';
FG = (length(Xk(:,1))-length(b));
Sk = b'*xp;
Smin = b'*xp - tinv(0.975,FG)*sqrt(1/FG*r'*r)*sqrt(xp'*inv(Xk'*Xk)*xp);
Smax = b'*xp + tinv(0.025,FG)*sqrt(1/FG*r'*r)*sqrt(xp'*inv(Xk'*Xk)*xp);
```

führt zu dem Mittelwert $S = 3.7163$ % und einem Konfidenzbereich mit $S_{\min} = 3.1342$ % und $S_{\max} = 4.2983$. Dabei können die absoluten Zahlen wegen des Rauschens bei dem Versuch *Schwindung.p* variieren.

c) Es werden zunächst die Terme höherer Ordnung entfernt, dann Terme erster Ordnung. Die Reihenfolge beim Entfernen von Termen kann aufgrund unterschiedlicher Datensätze im Detail anders aussehen, das Endergebnis wird gleich sein.

```
% Entfernen von Termen kann aufgrund unterschiedlicher Datensätze im Detail
% anders aussehen, beginnen mit Termen höherer Ordnung
reg.tstat.pval
model = [0 0 0; 1 0 0; 0 1 0; 0 0 1; 1 1 0; 1 0 1; 0 1 1; 2 0 0; 0 2 0];
reg = regstats(Sff,Xff,model,{'tstat','adjrsquare','r'});
reg.tstat.pval
model = [0 0 0; 1 0 0; 0 1 0; 0 0 1; 1 1 0; 1 0 1; 2 0 0; 0 2 0];
```

```
reg = regstats(Sff,Xff,model,{'tstat','adjrsquare','r'});
reg.tstat.pval
model = [0 0 0; 1 0 0; 0 1 0; 0 0 1; 1 1 0; 1 0 1; 2 0 0];
reg = regstats(Sff,Xff,model,{'tstat','adjrsquare','r'});
reg.tstat.pval
model = [0 0 0; 1 0 0; 0 1 0; 0 0 1; 1 0 1; 2 0 0];
reg = regstats(Sff,Xff,model,{'tstat','adjrsquare','r'});
reg.tstat.pval
Koeffizienten_Reduziert = reg.tstat.beta
```

Es ergibt sich eine Regressionsfunktion der Form

$$S = 0.3199 + 5.0477 \cdot 10^{-2} \cdot \text{Temp} + 1.2113 \cdot 10^{-2} \cdot \text{Time} + 4.5024 \cdot 10^{-2} \cdot \text{Pres} \\ - 2.8601 \cdot 10^{-4} \cdot \text{Temp} \cdot \text{Pres} - 2.4569 \cdot 10^{-4} \cdot \text{Temp}^2$$

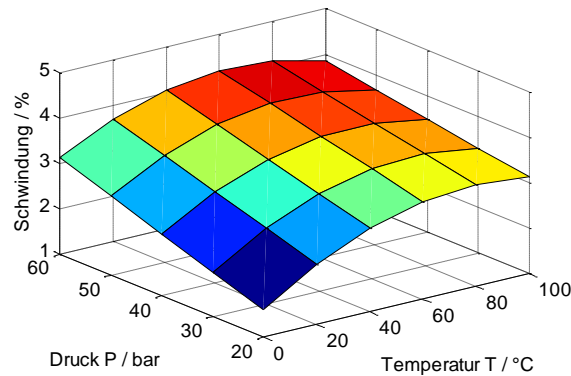
d) Konstruktion des D-optimalen Versuchsplans für das reduzierte Modell mit $N = 1.5 \cdot M = 9$ Versuchen

```
% D-optimaler Versuchsplan mit 6 Termen soll 1.5 x 6 = 9 Versuche aufweisen
model = [0 0 0; 1 0 0; 0 1 0; 0 0 1; 1 0 1; 2 0 0];
AnzahlVariable = 3;
AnzahlVersuche = 9;
[d_design,Xd] = cordexch(AnzahlVariable,AnzahlVersuche,model,'tries',10);
Xd = [d_design(:,1)*50+50, d_design(:,2)*15+20, d_design(:,3)*20+40];
Sd = Schwindung(Xd);
reg = regstats(Sd,Xd,model,{'tstat','adjrsquare','r'});
Koeffizienten_DOptimal = reg.tstat.beta
```

e) Nach der Regressionsgleichung geht die Variable Time linear mit positiver Steigung ein. Um die Schwindung zu minimieren, muss Time = 5 gewählt werden. Dann ist die Funktion nur noch von den Variablen Temp und Pres abhängig. Sie kann deshalb als Surface-Plot dargestellt werden.

```
% Berechnung des Punktes minimaler Schwindung, Sinterzeit muss minimal
% sein, da beta(2) > 0, grafische Darstellung zu Identifikation des Optimums
b = reg.tstat.beta
temp = 0:20:100;
pres = 20:10:60;
[Temp,Pres] = meshgrid(temp,pres);
Sreg = (b(1) + b(2)*Temp + b(3)*5 + b(4)*Pres + b(5)*Temp.*Pres + b(6)*Temp.^2);
surf(Temp, Pres,Sreg);
axis([0 100 20 60 1 5]);
set(gca,'XTick',0:20:100,'YTick',20:10:60,'ZTick',1:1:5);
set(gca,'FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
xlabel('Temperatur T / °C','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Druck P / bar','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
zlabel('Schwindung / %','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
grid on;
box off;
```

Es ergibt sich folgende Grafik



Eine minimale Schwindung wird bei $x_{opt} = [0 \ 5 \ 20]$ erreicht.

f) Durchführen einer Monte-Carlo-Simulation mit einem Stichprobenumfang $N = 10000$, dem Center-Point als Arbeitspunkt und Normalverteilungen mit den angegebenen Standardabweichungen.

```
% Monte-Carlo-Simulation im Center-Point
N = 10000;
X = zeros(N,3);
gamma = 0.9973;
Xmc = [normrnd(50,0.5,1000,1) normrnd(20,0.1,1000,1) normrnd(40,1,1000,1)];
Smc = Schwindung(Xmc);
```

Berechnung des Prognosebereiches über die t-Verteilung, da die Varianz unbekannt ist.

```
% Prognosebereich im Center Point
Smean = mean(Smc)
Smin = Smean + tinv((1-gamma)/2,N-1)*std(Smc)*sqrt(1+1/N)
Smax = Smean + tinv((1+gamma)/2,N-1)*std(Smc)*sqrt(1+1/N)
```

Simulation führt zu dem Mittelwert $S = 3.7150 \%$ und dem Prognosebereich $S_{\min} = 3.1310 \%$ und $S_{\max} = 4.2990 \%$. Dabei können die absoluten Zahlen wegen des Rauschens bei dem Versuch *Schwindung.p* variieren.

g) Aus dem Ansatz zur Tolerierung unkorrelierter Größen ergibt sich in dem Arbeitspunkt

$$\sigma_S^2 = E_{\text{Temp}}^2 \cdot \sigma_{\text{Temp}}^2 + E_{\text{Time}}^2 \cdot \sigma_{\text{Time}}^2 + E_{\text{Pres}}^2 \cdot \sigma_{\text{Pres}}^2$$

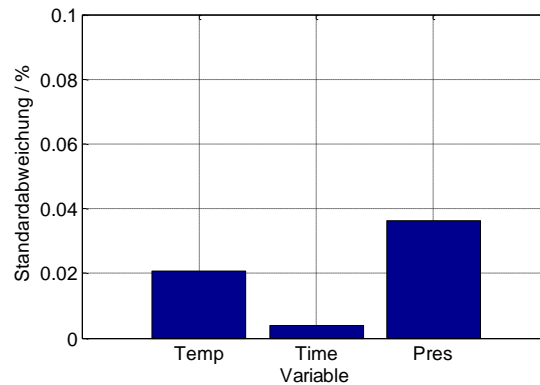
Numerische Berechnung der Empfindlichkeiten über die linearen Regressionskoeffizienten, anschließend statistische Tolerierung bei normalverteilten Einflussgrößen

```
% Anteile an der Varianz
reg = regstats(Smc,Xmc,'linear','tstat');
Sig = [0.5 0.1 1];
Var = reg.tstat.beta(2:4).^2.*Sig.^2;
```

Darstellung der entsprechenden Standardabweichungen als Säulendiagramm

```
% Darstellung Anteile der Varianz
bar(1:3,sqrt(Var));
axis([0 4 0 0.1]);
set(gca,'XTick',1:3,'YTick',0:0.02:0.1);
set(gca,'XTickLabel',{'Temp','Time','Pres'},'FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
```

```
xlabel('Variable','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Standardabweichung / %','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
grid on;
box on;
```



Wesentliche Toleranzursache ist die Variation des Sinterdruckes. Dabei können die absoluten Zahlen wegen des Rauschens bei dem Versuch *Schwindung.p* variieren.

h) Die Toleranzrechnung berücksichtigt nur die Toleranzquellen Sintertemperatur, Sinterzeit und Sinterdruck. Bei dem Versuch existieren jedoch weitere Toleranzquellen, was zum Beispiel an dem Konfidenzbereich im Center-Point abgelesen werden kann, bei dem die Variablen Temp, Time und Pres konstant gehalten werden. Daraus ergeben sich starke Abweichungen zwischen Prognosebereich und Sensitivitätsanalyse.

```
% Vergleich der beiden Rechnungen
Toleranzrechnung = 6*sqrt(sum(Var))
Prognosebereich = Smax - Smin
```

Richtig wäre eine Toleranzrechnung

$$\sigma_S^2 = E_{\text{Temp}}^2 \cdot \sigma_{\text{Temp}}^2 + E_{\text{Time}}^2 \cdot \sigma_{\text{Time}}^2 + E_{\text{Pres}}^2 \cdot \sigma_{\text{Pres}}^2 + \sigma_{\text{Sunbekannt}}^2$$

Wird die interne Toleranzquelle beseitigt, stimmen die Rechnungen überein.

14 Statistische Tolerierung

14.1 Durchflussmessung mit Wirkdruckverfahren

a) Zur Herleitung wird vom Analog-Digital-Wandler ausgegangen, Referenzspannung und Messgröße werden eingesetzt. Auflösen der Gleichung in die Summanden ergibt

$$N = \frac{m \cdot p \cdot U_{\text{REF}} + U_A}{U_{\text{ADC}}} = \frac{m \cdot \frac{Q^2}{k^2} \cdot (U_{\text{ADC}} + U_{\text{OFF}}) + U_A}{U_{\text{ADC}}} = m \cdot \frac{Q^2}{k^2} + m \cdot \frac{Q^2}{k^2} \cdot \frac{U_{\text{OFF}}}{U_{\text{ADC}}} + N_A$$

Definition der Größen, Berechnung der Kennlinie und Darstellung in MATLAB

```
% Definition der Sollwerte und Toleranzen
```

```
k = 0.2;
```

```
m = 0.04;
```

```
UADC0 = 5;
```

```
dUADC = 250e-3;
```

```
sigUADC = dUADC/3;
```

```
Uoff0 = 10e-3;
```

```
dUoff = 20e-3;
```

```
sigUoff = dUoff/sqrt(12);
```

```
NA0 = 0;
```

```
dNA = 2/2048;
```

```
sigNA = dNA/sqrt(12);
```

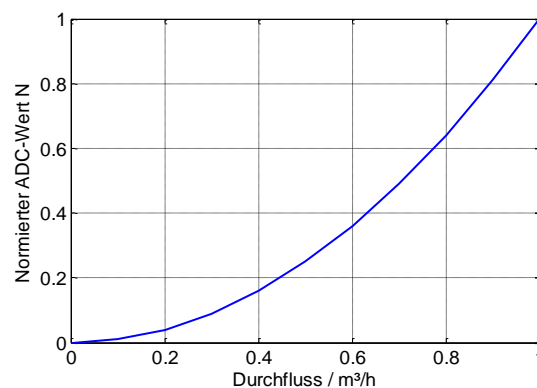
```
% Berechnung der Kennlinie
```

```
Q = 0:0.1:1;
```

```
N0 = m*Q.^2/k^2*(UADC0+Uoff0)+NA0;
```

```
% Grafische Darstellung
```

```
plot(Q,N0,'b','LineWidth',2);
```



b) Die linearisierte Maßkette ergibt sich aus dem vollständigen Fehlerdifferential

$$\Delta N = \frac{\partial N}{\partial U_{\text{ADC}}} \cdot \Delta U_{\text{ADC}} + \frac{\partial N}{\partial U_{\text{OFF}}} \cdot \Delta U_{\text{OFF}} + \frac{\partial N}{\partial N_A} \cdot \Delta N_A$$

mit

$$E_{\text{UADC}} = \frac{\partial N}{\partial U_{\text{ADC}}} = -m \cdot \frac{Q^2}{k^2} \cdot \frac{U_{\text{OFF}}}{U_{\text{ADC}}^2} - \frac{U_A}{U_{\text{ADC}}^2}$$

$$E_{\text{UOFF}} = \frac{\partial N}{\partial U_{\text{OFF}}} = m \cdot \frac{Q^2}{k^2} \cdot \frac{1}{U_{\text{ADC}}}$$

$$E_{NA} = \frac{\partial N}{\partial N_A} = 1$$

Berechnung in MATLAB

```
% Berechnung der Sensitivitäten im Arbeitspunkt Q0
Q0 = 0.5;
EUADC = -m*Q0^2/k^2*Uoff0/UADC0^2 - UA0/UADC0^2
EUoff = m*Q0^2/k^2/UADC0
ENA = 1
```

c) Zur Verifikation werden Zufallszahlen erzeugt, die der definierten Verteilung entsprechen. Mit diesen Zufallszahlen wird eine statistische Simulation der Größe N durchgeführt. Mit dem Befehl polyfit kann der lineare Koeffizient des Polynoms bestimmt werden, er entspricht der oben berechneten Empfindlichkeit.

```
% Vergleich mit statistischer Simulation
M = 1000000;
UADCsim = normrnd(UADC0, sigUADC, M, 1);
NASim = unifrnd(NA0-dNA/2, NA0+dNA/2, M, 1);
Uoffsim = unifrnd(Uoff0-dUoff/2, Uoff0+dUoff/2, M, 1);
Nsim = m*Q0^2/k^2 + m*Q0^2/k^2*Uoffsim./UADCsim + NASim;
pUADC = polyfit(UADCsim, Nsim, 1);
EUADCsim = pUADC(1)
pUoff = polyfit(Uoffsim, Nsim, 1);
EUoffsim = pUoff(1)
pNA = polyfit(NAsim, Nsim, 1);
ENAsim = pNA(1)
```

Vergleich der Zahlenwerte bestätigt die analytische Rechnung

Größe	Analytische Rechnung	Statistische Simulation
EUADC	- 1·10 ⁻⁴	- 1.0795·10 ⁻⁴
EUOFF	0.0500	0.0501
ENA	1	1.0008

d) Berechnung der Toleranzen bei arithmetischer Tolerierung

$$T_{ARI} = |E_{UADC} \cdot \Delta U_{ADC}| + |E_{UOFF} \cdot \Delta U_{OFF}| + |E_{NA} \cdot \Delta N_A|$$

Um die Toleranz ΔQ zu berechnen wird durch die Steigung der Kennlinie dividiert.

```
% Arithmetische Tolerierung im Arbeitspunkt Q0
EN = k^2*UADC0/(2*m*Q0*(UADC0+Uoff0));
dNari = abs(EUADC*dUADC) + abs(ENA*dNA) + abs(EUoff*dUoff)
dQari = EN*dNari
```

Es ergibt sich eine Toleranz von $\Delta Q_{ARI} = 0.002 \text{ m}^3/\text{s}$.

e) Berechnung der Standardabweichung bei statistischer Tolerierung

$$\sigma_{STA} = \sqrt{(E_{UADC} \cdot \sigma_{UADC})^2 + (E_{UOFF} \cdot \sigma_{UOFF})^2 + (E_{NA} \cdot \sigma_{NA})^2}$$

Um die Toleranz ΔQ zu berechnen wird wieder durch die Steigung der Kennlinie dividiert. Die Aussagesicherheit von 99.73 % entspricht der $\pm 3\sigma$ Toleranz, das Ergebnis muss deshalb mit 6 multipliziert werden.

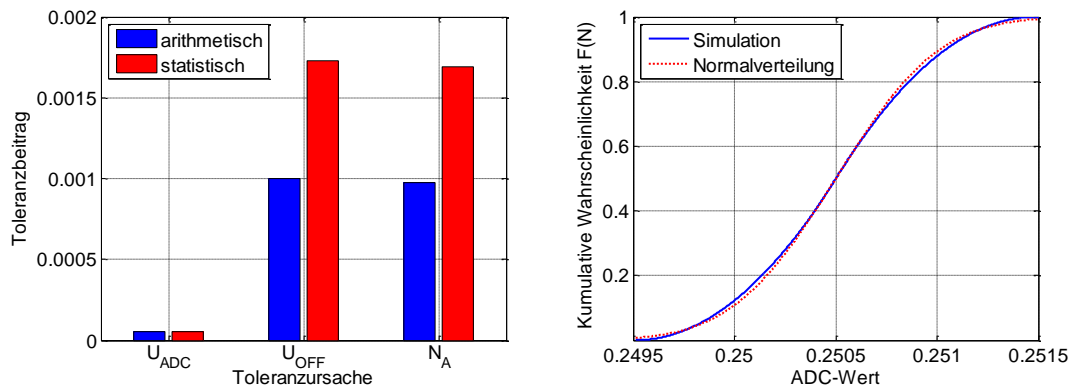
```
% Statistische Tolerierung im Arbeitspunkt Q0
EN = k^2*UADC0/(2*m*Q0*(UADC0+Uoff0));
dNsta = sqrt(EUADC^2*sigUADC^2 + EUA^2*sigUA^2 + EUoff^2*sigUoff^2)
dQsta = EN*6*dNsta
```

Es ergibt sich eine Toleranz von $\Delta Q_{STA} = 0.0024 \text{ m}^3/\text{s}$. Sie ist größer als die Toleranz bei arithmetischer Tolerierung.

f) Für die statistische Simulation wird der bereits berechnete Datensatz verwendet. Er wird sortiert und die relative kumulative Häufigkeit F bestimmt. Die Toleranzen ergeben sich aus den Bedingungen $F_{MIN} = (1 - \gamma)/2$ und $F_{MAX} = (1 + \gamma)/2$.

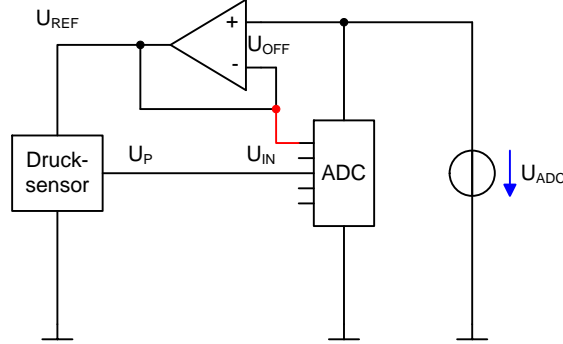
```
% Prüfung der Toleranz über statistische Simulation mit berechneten Daten
f = 1/M*ones(size(Nsim));
F = cumsum(f);
Nsort = sort(Nsim);
mmin = find(F < (1-0.9973)/2,1,'last');
mmax = find(F >= (1+0.9973)/2,1,'first');
dQsim = (Nsort(mmax)-Nsort(mmin))/EN
```

Das Simulationsergebnis liegt mit einer Toleranz von $\Delta Q_{SIM} = 0.0019 \text{ m}^3/\text{s}$ unterhalb von dem Wert der arithmetisch berechneten Toleranz $\Delta Q_{ARI} = 0.002 \text{ m}^3/\text{s}$. Zur Erklärung wird eine Darstellung der einzelnen Toleranzursachen und der Verteilungsfunktion bei der Simulation herangezogen.



Durch die Umrechnung der Rechteckverteilung bei Offset-Spannung und Auflösung auf eine äquivalente Standardabweichung wird der Toleranzbereich mit $\gamma = 99.73 \%$ vergrößert. Da nur wenige Maße überlagert werden, ist der Gewinn der statistischen Tolerierung gering. Damit ist die Toleranz bei statistischer Tolerierung größer als bei arithmetischer Tolerierung. Die Simulation zeigt, dass die analytisch berechnete statistische Tolerierung nicht der Realität entspricht.

g) Zur Verbesserung der Toleranz kann das Ergebnis durch die gemessene Referenzspannung geteilt werden. Allerdings muss dazu die Spannung U_{REF} vom ADC gemessen werden. Beide Messungen haben eine voneinander unabhängigen Auflösungsfehler.



$$N = \frac{m \cdot \frac{Q^2}{k^2} \cdot \left(\frac{U_{ADC} + U_{OFF}}{U_{ADC}} + NA_2 \right) - m \cdot \frac{Q^2}{k^2} \cdot NA_2 + NA_1}{\frac{U_{ADC} + U_{OFF}}{U_{ADC}} + NA_2} = m \cdot \frac{Q^2}{k^2} - \frac{m \cdot \frac{Q^2}{k^2} \cdot NA_2 - NA_1}{U_{ADC} + U_{OFF} + NA_2 \cdot U_{ADC}} \cdot U_{ADC}$$

Es ergibt sich eine lineare Maßkette von

$$\Delta N = \frac{\partial N}{\partial U_{ADC}} \cdot \Delta U_{ADC} + \frac{\partial N}{\partial U_{OFF}} \cdot \Delta U_{OFF} + \frac{\partial N}{\partial NA_1} \cdot \Delta NA_1 + \frac{\partial N}{\partial NA_2} \cdot \Delta NA_2$$

mit den Empfindlichkeiten

$$\begin{aligned} E_{U_{ADC}} &= \frac{\partial N}{\partial U_{ADC}} = - \frac{\left(m \cdot \frac{Q^2}{k^2} \cdot NA_2 - NA_1 \right) \cdot (U_{ADC} + U_{OFF} + NA_2 \cdot U_{ADC}) - (1 + NA_2) \cdot \left(m \cdot \frac{Q^2}{k^2} \cdot NA_2 - NA_1 \right) \cdot U_{ADC}}{(U_{ADC} + U_{OFF} + NA_2 \cdot U_{ADC})^2} \\ &= - \frac{\left(m \cdot \frac{Q^2}{k^2} \cdot NA_2 - NA_1 \right) \cdot U_{OFF}}{(U_{ADC} + U_{OFF} + NA_2 \cdot U_{ADC})^2} \\ E_{U_{OFF}} &= \frac{\partial N}{\partial U_{OFF}} = \frac{m \cdot \frac{Q^2}{k^2} \cdot NA_2 - NA_1}{(U_{ADC} + U_{OFF} + NA_2 \cdot U_{ADC})^2} \cdot U_{ADC} \\ E_{NA_1} &= \frac{\partial N}{\partial NA_1} = \frac{U_{ADC} \cdot (U_{ADC} + U_{OFF} + NA_2 \cdot U_{ADC})}{(U_{ADC} + U_{OFF} + NA_2 \cdot U_{ADC})^2} = \frac{U_{ADC}}{U_{ADC} + U_{OFF} + NA_2 \cdot U_{ADC}} \\ E_{NA_2} &= \frac{\partial N}{\partial NA_2} = - \frac{m \cdot \frac{Q^2}{k^2} \cdot (U_{ADC} + U_{OFF} + NA_2 \cdot U_{ADC}) - U_{ADC} \cdot \left(m \cdot \frac{Q^2}{k^2} \cdot NA_2 - NA_1 \right)}{(U_{ADC} + U_{OFF} + NA_2 \cdot U_{ADC})^2} \cdot U_{ADC} \\ &= - \frac{m \cdot \frac{Q^2}{k^2} \cdot (U_{ADC} + U_{OFF}) + U_{ADC} \cdot NA_1}{(U_{ADC} + U_{OFF} + NA_2 \cdot U_{ADC})^2} \cdot U_{ADC} \end{aligned}$$

Im Arbeitspunkt gilt $NA_1 = 0$, $NA_2 = 0$, $U_{OFF} = 10 \text{ mV}$, $U_{ADC} = 5 \text{ V}$. Damit gilt:

$$E_{U_{ADC}} = - \frac{\left(m \cdot \frac{Q^2}{k^2} \cdot NA_2 - NA_1 \right) \cdot U_{OFF}}{(U_{ADC} + U_{OFF} + NA_2 \cdot U_{ADC})^2} = 0$$

$$E_{U_{OFF}} = \frac{m \cdot \frac{Q^2}{k^2} \cdot NA_2 - NA_1}{(U_{ADC} + U_{OFF} + NA_2 \cdot U_{ADC})^2} \cdot U_{ADC} = 0$$

$$E_{NA1} = \frac{U_{ADC}}{U_{ADC} + U_{OFF} + NA_2 \cdot U_{ADC}} = \frac{5 \text{ V}}{5.01 \text{ V}} = 0.9980$$

$$E_{NA2} = - \frac{m \cdot \frac{Q^2}{k^2} \cdot (U_{ADC} + U_{OFF})}{(U_{ADC} + U_{OFF} + NA_2 \cdot U_{ADC})^2} \cdot U_{ADC} = - \frac{m \cdot \frac{Q^2}{k^2} \cdot U_{ADC}^2}{(U_{ADC} + U_{OFF})^2} = - m \cdot \frac{Q^2}{k^2} \cdot 0.9960$$

Berechnung der Toleranzen bei arithmetischer Tolerierung

$$T_{KOM} = |E_{NA1} \cdot \Delta NA_1| + |E_{NA2} \cdot \Delta NA_2|$$

Um die Toleranz ΔQ zu berechnen wird durch die Steigung der Kennlinie dividiert.

```
% Kompensation Offsetfehler
% Arithmetische Tolerierung im Arbeitspunkt Q0
ENA1 = UADC0/(UADC0+Uoff0)
ENA2 = (UADC0/(UADC0+Uoff0))^2
dNkom = abs(ENA1*dNA) + abs(ENA2*dNA)
dQkom = EN*dNkom
```

Es ergibt sich eine Toleranz von $\Delta Q_{KOM} = 0.0019 \text{ m}^3/\text{s}$. Sie ist geringfügig kleiner als die Toleranz bei arithmetischer Tolerierung ohne Rückmessung der Versorgungsspannung. Der Vorteil steigt, wenn die Offsetspannung zunimmt.

14.2 Kompensation von Temperatureinflüssen bei Pendeluhren

a) Die Maßkette für die Pendellänge L ergibt sich zu

$$L = A - B + C$$

b) Für eine Periodendauer $T = 1\text{ s}$ muss das Pendel eine Länge L_0 von 0.2485 m aufweisen.

$$L_0 = \frac{T^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot g = 0.2485 \text{ m}$$

c) Damit keine Längenänderung stattfindet, muss gelten:

$$L(\vartheta) = (A + C) \cdot (1 + \alpha_S \cdot \Delta\vartheta) - B \cdot (1 + \alpha_M \cdot \Delta\vartheta) = L_0$$

Für die Längenänderung gilt

$$(A + C) \cdot \alpha_S \cdot \Delta\vartheta - B \cdot \alpha_M \cdot \Delta\vartheta = 0$$

beziehungsweise

$$(A + C) \cdot \frac{\alpha_S}{\alpha_M} = B$$

Einsetzen in die Maßkette führt zu

$$L_0 = A + C - (A + C) \cdot \frac{\alpha_S}{\alpha_M} = (A + C) \cdot \left(1 - \frac{\alpha_S}{\alpha_M}\right)$$

Die Summe der Längen A und C berechnet sich zu

$$A + C = \frac{L_0}{1 - \frac{\alpha_S}{\alpha_M}} = 0.5332 \text{ m}$$

und die Länge B beträgt

$$B = (A + C) \cdot \frac{\alpha_S}{\alpha_M} = 0.2847 \text{ m}$$

```
% Länge des Pendels
T0 = 1;
g = 9.81;
L0 = 1/(4*pi^2)*T0^2*g

% Dimensionierung A, B und C
alphaS0 = 11.8e-6;
alphaM0 = 22.1e-6;
AC0 = L0/(1-alphaS0/alphaM0)
B0 = alphaS0/alphaM0*AC0
```

d) Die Periodendauer errechnet sich zu

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{(A_0 + C_0) \cdot (1 + \alpha_S \cdot \Delta\vartheta) - B_0 \cdot (1 + \alpha_M \cdot \Delta\vartheta)}{g}}$$

Bei Variation der thermischen Ausdehnungskoeffizienten und einer festen Temperaturänderung $\Delta\vartheta_0$ kann die Änderung der Periodendauer durch Fehlerfortpflanzung berechnet werden zu

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial \alpha_s} \cdot \Delta \alpha_s + \frac{\partial T}{\partial \alpha_m} \cdot \Delta \alpha_m$$

mit

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha_s} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(A_0 + C_0) \cdot (1 + \alpha_{s0} \cdot \Delta \vartheta_0) - B_0 \cdot (1 + \alpha_{m0} \cdot \Delta \vartheta_0)}{g}}} \cdot \frac{\pi \cdot (A_0 + C_0) \cdot \Delta \vartheta_0}{g}$$

und

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha_m} = - \frac{1}{\sqrt{\frac{(A_0 + C_0) \cdot (1 + \alpha_{s0} \cdot \Delta \vartheta_0) - B_0 \cdot (1 + \alpha_{m0} \cdot \Delta \vartheta_0)}{g}}} \cdot \frac{\pi \cdot B_0 \cdot \Delta \vartheta_0}{g}$$

```
% Berechnung der Empfindlichkeiten
% Maßkette definieren
syms T g A B C alpha_s alpha_m dv
L = A+C-B + alpha_s*dv*(A+C) - alpha_m*B*dv;
T = 2*pi*sqrt(L/g);

% Empfindlichkeiten berechnen
E_alpha_s = diff(T,alpha_s);
E_alpha_m = diff(T,alpha_m);

% Werte definieren
names = [g A B C alpha_s alpha_m dv];
B = 0.28449; dv = 10; alpha_s = 11.8*10^-6; alpha_m = 22.1*10^-6; A = 0.43317; C = 0.100; g = 9.81;
values = [g A B C alpha_s alpha_m dv];

E_alpha_s = eval(subs(E_alpha_s,names,values));
E_alpha_m = eval(subs(E_alpha_m,names,values));
```

e) Die Abweichung ΔT wird über eine lineare Maßkette beschrieben. Damit überlagern sich die Varianzen zur Gesamtvarianz.

$$\sigma_T^2 = \left(\frac{\partial T}{\partial \alpha_s} \right)^2 \cdot \sigma_{\alpha_s}^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial \alpha_m} \right)^2 \cdot \sigma_{\alpha_m}^2$$

Die Standardabweichung des thermischen Ausdehnungskoeffizienten von Stahl ergibt sich wegen der zugrunde liegenden Normalverteilung zu

$$\sigma_{\alpha_s} = \frac{0.1 \cdot \alpha_{s0}}{6}$$

und die des thermischen Ausdehnungskoeffizienten von Messing ergibt sich wegen der zugrunde liegenden Gleichverteilung zu

$$\sigma_{\alpha_m} = \frac{0.2 \cdot \alpha_{m0}}{\sqrt{12}}$$

Damit weist die Periodendauer der Pendelbewegung bei statistischer Tolerierung einen Konfidenzbereich von

$$\Delta T_{ST} = 6 \cdot \sigma_T = 45.598 \mu s$$

auf.

```
% Tolerierung nach dem Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeit
Salphas = 0.1/6*alphaS0
SalphasM = 0.2/sqrt(12)*alphaM0
TolT = 6*sqrt(Ealphas^2*Salphas^2 + EalphasM^2*SalphasM^2)
```

f) Der numerischen Berechnung der Toleranz über Faltung liegt die Vorstellung zugrunde, dass sich die Toleranz aus der Summe

$$\Delta T = \Delta T_S + \Delta T_M$$

ergibt. Damit ergibt sich die Verteilungsfunktion der Gesamttoleranz aus der Faltung

$$f(\Delta T) = f(\Delta T_S) * f(\Delta T_M)$$

Die Größe ΔT_S ist normalverteilt mit dem Mittelwert $\mu_S = 0$ und der Standardabweichung

$$\sigma_S = \frac{\partial T}{\partial \alpha_S} \cdot \sigma_{\alpha_S}$$

Die Größe ΔT_M ist gleichverteilt mit den Grenzen

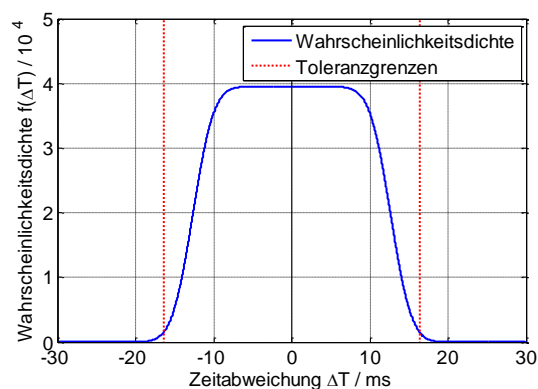
$$-\frac{\partial T}{\partial \alpha_M} \cdot 0.1 \cdot \alpha_{M0} \leq \Delta T_M \leq \frac{\partial T}{\partial \alpha_M} \cdot 0.1 \cdot \alpha_{M0}$$

Mit diesen Annahmen ergibt sich mit dem folgenden MATLAB-Code

```
% Toleranzrechnung über Faltung
dT = -1e-6:1e-10:1e-6;
fS = normpdf(dT,0,Ealphas*Salphas);
fM = unifpdf(dT,-EalphasM*0.1*alphaM0,EalphasM*0.1*alphaM0);
fdT = conv(fS,fM)*1e-10;
dTconv = -2e-6:1e-10:2e-6;

% Grafische Darstellung
plot(dTconv*1e9,fdT*1e-6,'b','LineWidth',2)
axis([-1500 1500 0 1.2]);
set(gca,'FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
xlabel('Zeitabweichung \Delta T / ns',...
'FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Wahrscheinlichkeitsdichte f(\Delta T) \cdot 10^{-6}',...
'FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
grid on;
box on;
```

Die in folgender Abbildung dargestellte Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Toleranz der Periodendauer.



Das 99.73%-Konfidenzintervall wird mit dem MATLAB-Code

```
Tmin = dTconv(find(cumsum(fdT*tstep)>(1-0.9973)/2,1,'first'))
Tmax = dTconv(find(cumsum(fdT*tstep)<(1+0.9973)/2,1,'last'))
TolTCON = Tmax - Tmin
```

numerisch bestimmt zu

$$\Delta T_{\text{CON}} = 32.686 \mu\text{s}$$

g) Durch die Umrechnung der Rechteckverteilung bei Messing auf eine äquivalente Standardabweichung wird der Toleranzbereich mit $\gamma = 99.73 \%$ vergrößert. Da nur wenige Maße überlagert werden, ist der Gewinn der statistischen Tolerierung gering. Damit ist die Toleranz bei statistischer Tolerierung größer als bei arithmetischer Tolerierung. Die Simulation zeigt, dass die analytisch berechnete statistische Tolerierung nicht der Realität entspricht.

14.3 Wärmemessung in Fernwärme-Übergabestationen

a) Aus den Messwerten R_1

$$R_1 = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot (T_1 - T_0))$$

und R_2

$$R_2 = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot (T_2 - T_0))$$

sowie T_1 und T_2 ergeben sich die Konstanten der Kennlinie

$$\alpha = \frac{R_1 - R_2}{R_2 \cdot (T_1 - T_0) - R_1 \cdot (T_2 - T_0)}$$

und

$$R_0 = \frac{R_1}{1 + \alpha \cdot (T_1 - T_0)} = \frac{R_1}{1 + \frac{R_1 - R_2}{R_2 \cdot (T_1 - T_0) - R_1 \cdot (T_2 - T_0)} \cdot (T_1 - T_0)} = \frac{R_2 \cdot (T_1 - T_0) - R_1 \cdot (T_2 - T_0)}{T_1 - T_2}$$

Aus diesen Messgrößen ergibt sich die Temperatur T zu

$$\begin{aligned} T &= T_0 + \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{R}{R_0} - 1 \right) = T_0 + \frac{R_2 \cdot (T_1 - T_0) - R_1 \cdot (T_2 - T_0)}{R_1 - R_2} \cdot \left(\frac{R}{\frac{R_2 \cdot (T_1 - T_0) - R_1 \cdot (T_2 - T_0)}{T_1 - T_2}} - 1 \right) \\ &= T_0 + \frac{R \cdot (T_1 - T_2) - R_2 \cdot (T_1 - T_0) + R_1 \cdot (T_2 - T_0)}{R_1 - R_2} \end{aligned}$$

Das Ergebnis kann numerisch überprüft werden:

```
% Definition der Kenngrößen
T0 = 25;
T1 = 25;
T2 = 70;
sigT12 = 10e-3;
alpha = 4e-3;
R0 = 100;
R1 = 100*(1+alpha*(T1-T0));
R2 = 100*(1+alpha*(T2-T0));
sigR = 1e-3;
```

```
% Temperaturabhängigkeit des Widerstands
T = 0:1:100;
R = 100*(1+alpha*(T-T0));

% Überprüfen der berechneten Temperatur
Tref = T0 + (R*(T1-T2)-R2*(T1-T0)+R1*(T2-T0))/(R1-R2);
```

b) Für die statistische Tolerierung muss eine lineare Maßkette erstellt werden. Dazu werden die partielle Ableitungen berechnet und der Widerstand R als Funktion von T eingesetzt.

$$E_{T1} = \frac{\partial T}{\partial T_1} = \frac{R - R_2}{R_1 - R_2} = \frac{R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot (T - T_0)) - R_2}{R_1 - R_2}$$

$$E_{T2} = \frac{\partial T}{\partial T_2} = \frac{-R + R_1}{R_1 - R_2} = \frac{-R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot (T - T_0)) + R_1}{R_1 - R_2}$$

$$E_R = \frac{\partial T}{\partial R} = \frac{T_1 - T_2}{R_1 - R_2}$$

$$E_{R1} = \frac{\partial T}{\partial R_1} = \frac{T_2 \cdot (R_1 - R_2) - R \cdot (T_1 - T_2) + R_2 \cdot T_1 - R_1 \cdot T_2}{(R_1 - R_2)^2}$$

$$= \frac{T_2 \cdot R_1 - T_2 \cdot R_2 - R \cdot (T_1 - T_2) + R_2 \cdot T_1 - R_1 \cdot T_2}{(R_1 - R_2)^2}$$

$$= \frac{(R_2 - R) \cdot (T_1 - T_2)}{(R_1 - R_2)^2} = \frac{(R_2 - R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot (T - T_0))) \cdot (T_1 - T_2)}{(R_1 - R_2)^2}$$

$$E_{R2} = \frac{\partial T}{\partial R_2} = \frac{-T_1 \cdot (R_1 - R_2) + R \cdot (T_1 - T_2) - R_2 \cdot T_1 + R_1 \cdot T_2}{(R_1 - R_2)^2}$$

$$= \frac{-T_1 \cdot R_1 + T_1 \cdot R_2 + R \cdot (T_1 - T_2) - R_2 \cdot T_1 + R_1 \cdot T_2}{(R_1 - R_2)^2}$$

$$= \frac{(R - R_1) \cdot (T_1 - T_2)}{(R_1 - R_2)^2} = \frac{(R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot (T - T_0)) - R_1) \cdot (T_1 - T_2)}{(R_1 - R_2)^2}$$

Unter der Annahme normalverteilter und unkorrelierter Größen ergibt sich für die Varianz

$$\sigma_T^2 = E_{R1}^2 \cdot \sigma_{R1}^2 + E_{R2}^2 \cdot \sigma_{R2}^2 + E_R^2 \cdot \sigma_R^2 + E_{T1}^2 \cdot \sigma_{T1}^2 + E_{T2}^2 \cdot \sigma_{T2}^2$$

$$= (E_{R1}^2 + E_{R2}^2 + E_R^2) \cdot \sigma_R^2 + (E_{T1}^2 + E_{T2}^2) \cdot \sigma_{T12}^2$$

beziehungsweise für die Standardabweichung

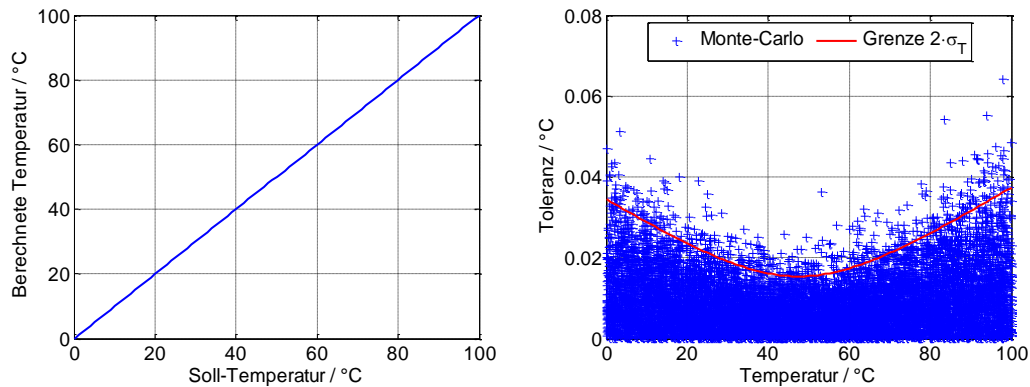
$$\sigma_T = \sqrt{(E_{R1}^2 + E_{R2}^2 + E_R^2) \cdot \sigma_R^2 + (E_{T1}^2 + E_{T2}^2) \cdot \sigma_{T12}^2}$$

```
% Berechnen der Empfindlichkeiten
ET1 = (R-R2)/(R1-R2)
ET2 = (R1-R)/(R1-R2)
ER = (T1-T2)/(R1-R2)
ER1 = (R2-R)*(T1-T2)/(R1-R2)^2
ER2 = (R-R1)*(T1-T2)/(R1-R2)^2

% Berechnen der Standardabweichung
sigT = sqrt((ER1.^2+ER2.^2+ER.^2)*sigR^2 + (ET1.^2+ET2.^2)*sigT12^2)
```

c) Der Messfehler ist von der Temperatur abhängig, weil die Empfindlichkeiten vom Widerstand R und damit von der Temperatur T abhängen. Das wurde bei der Programmierung oben bereits berücksichtigt, indem T und R als Vektoren definiert sind.

d) Der Messfehler ist in folgendem Diagramm als $2 \cdot \sigma_T$ Grenzen eingezeichnet. Zusätzlich ist die unter e) geforderte Monte-Carlo-Simulation und im Bild links die unter a) berechnete Temperatur als Funktion der realen Temperatur dargestellt.



e) Bei der Monte-Carlo-Simulation werden für die Größen R_1 , R_2 , T_1 und T_2 Zufallszahlen generiert. Sie sind alle normalverteilt und besitzen die angegebenen Sollwerte. Die Größe T_0 ist fest definiert. Die Größe R entspricht ihrem Sollwert als Funktion der Temperatur und besitzt die angegebenen Standardabweichung. Die Zufallszahlen werden in die Formel

$$T = T_0 + \frac{R \cdot (T_1 - T_2) - R_2 \cdot (T_1 - T_0) + R_1 \cdot (T_2 - T_0)}{R_1 - R_2}$$

eingesetzt. Die bereits oben gezeigten Simulationswerte bestätigen die berechnete Toleranz.

```
% Monte Carlo Simulation, Generieren der Zufallsgrößen
N = 10000;
T0V = T0*ones(N,1);
T1V = normrnd(T1,sigT12,N,1);
T2V = normrnd(T2,sigT12,N,1);
R1V = normrnd(R1,sigR,N,1);
R2V = normrnd(R2,sigR,N,1);
TV = unifrnd(0,100,N,1);
RV = 100*(1+alpha*(TV-T0)) + normrnd(0,sigR,N,1);
TrefV = T0V + (RV.*(T1V-T2V)-R2V.*(T1V-T0V)+R1V.*(T2V-T0V))./(R1V-R2V);
plot(TV,abs(TrefV-TV),'b+');
hold on;
plot(T,2*sigT,'r');
hold off;
```

f) Im Fall unkorrelierter Größen addieren sich die Varianzen der einzelnen Temperaturmessungen zur Gesamtvarianz. Allerdings muss berücksichtigt werden, dass die beiden Temperaturmessungen an unterschiedlichen Temperaturen T_E und T_A bestimmt werden.

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta T_U}^2 &= \sigma_{T_E}^2 + \sigma_{T_A}^2 \\ &= (E_{R1E}^2 + E_{R1E}^2 + E_{RE}^2) \cdot \sigma_R^2 + E_{T1E}^2 \cdot \sigma_{T12}^2 + E_{T2E}^2 \cdot \sigma_{T12}^2 \\ &\quad + (E_{R1A}^2 + E_{R1A}^2 + E_{RA}^2) \cdot \sigma_R^2 + E_{T1A}^2 \cdot \sigma_{T12}^2 + E_{T2A}^2 \cdot \sigma_{T12}^2 \end{aligned}$$

15 Mess-System-Analyse

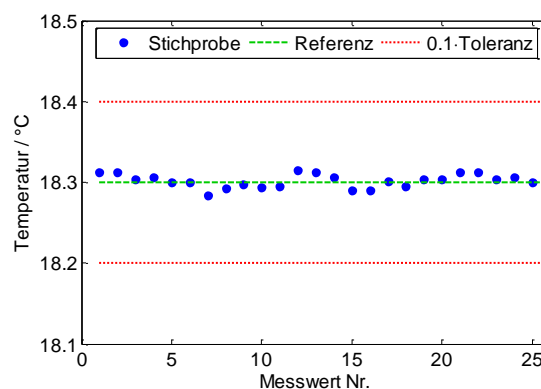
15.1 Temperaturmessung

a) Eine Auflösung mit 4 Nachkommastellen entspricht $10^{-4} \text{ }^{\circ}\text{C}$. Ein Vergleich mit der angegebenen Toleranz ergibt

$$\frac{\Delta y_A}{T} = \frac{10^{-4}}{1} \leq 5\%$$

Die Auflösung ist damit erheblich besser als gefordert.

b) Zur Bewertung der systematischen Messabweichung wird die Stichprobe mit dem Referenzwert grafisch dargestellt.



Die Messwerte sind um den Referenzwert verteilt. Aus der Grafik lässt sich kein systematischer Messfehler erkennen. Diesen Eindruck bestätigen die Qualitätskennzahlen:

$$C_g = \frac{0.2 \cdot T}{6 \cdot s} = \frac{0.1 \cdot T}{3 \cdot s} = 4.2347$$

$$C_{gk} = \frac{0.1 \cdot T - |\Delta y|}{3 \cdot s} = 4.2232$$

Auch der Hypothesentest auf einen Mittelwert von $18.3 \text{ }^{\circ}\text{C}$ mit einem p-Wert von $80.81 \% > 5 \%$ zeigt, dass kein systematischer Fehler vorliegt.

Die Auswertung wurde mit folgendem MATLAB-File durchgeführt:

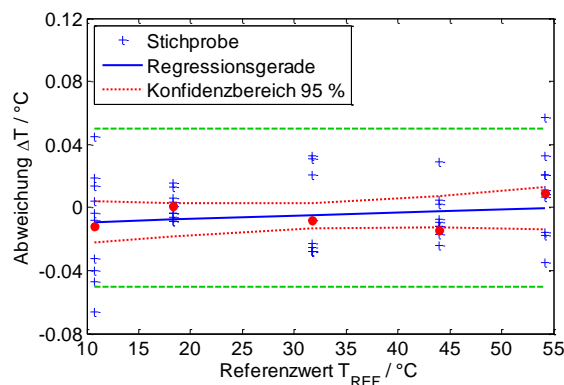
```
% Laden der Daten
load MSATemperatur.mat;

% Systematische Mesabweichung
Messwerte = Temperaturmessung.Verfahren1.data;
Referenz = Temperaturmessung.Verfahren1.ref;
Toleranz = 1;
n = 1:length(Messwerte);

% Definition des Grafikfensters
scatter(n,Messwerte,'bo','filled');
hold on;
plot(n,Referenz*ones(size(n)), 'g--', 'linewidth', 2);
plot(n, (Referenz+Toleranz/10)*ones(size(n)), 'r:', 'linewidth', 2);
plot(n, (Referenz-Toleranz/10)*ones(size(n)), 'r:', 'linewidth', 2);
hold off;
xlabel('Messwert Nr.', 'FontWeight', 'normal', 'FontName', 'Arial', 'FontSize', 14);
ylabel('Temperatur / °C', 'FontWeight', 'normal', 'FontName', 'Arial', 'FontSize', 14);

% Berechnung Qualitätskenngrößen
Cg = 0.2*Toleranz/6/std(Messwerte)
Cgk = (0.1*Toleranz-abs(mean(Messwerte)-Referenz))/3/std(Messwerte)
[h,p]= ttest(Messwerte,Referenz)
```

c) Zur Bewertung der Linearität wird die Stichprobe sowie die zugehörige Regressionsgerade mit Konfidenzbereich grafisch dargestellt.



Der Konfidenzbereich der Abweichungen schließt die Achse $\Delta T = 0$ ein. Deshalb liegt keine systematische Abweichung vor. Die Mittelwerte der Messungen liegen im Bereich

$$-5\% \cdot T \leq \Delta T_m \leq 5\% \cdot T$$

Auch diese Bedingung für ein lineares Messsystem ist erfüllt. Zur Absicherung der Aussage wird mit der Funktion `regstats` ein Hypothesentest für die Regressionskoeffizienten β_0 und β_1 durchgeführt. Dabei ist die Nullhypothese, dass die Regressionskoeffizienten den Wert β_0 und β_1 0 aufweisen, also nicht signifikant sind. Der Hypothesentest führt zu p-Werten von 20.14 % für β_0 und 42.01 % für β_1 . Beiden Hypothesen werden nicht verworfen, das Messsystem ist damit linear.

Die Auswertung wurde mit folgendem MATLAB-File durchgeführt:

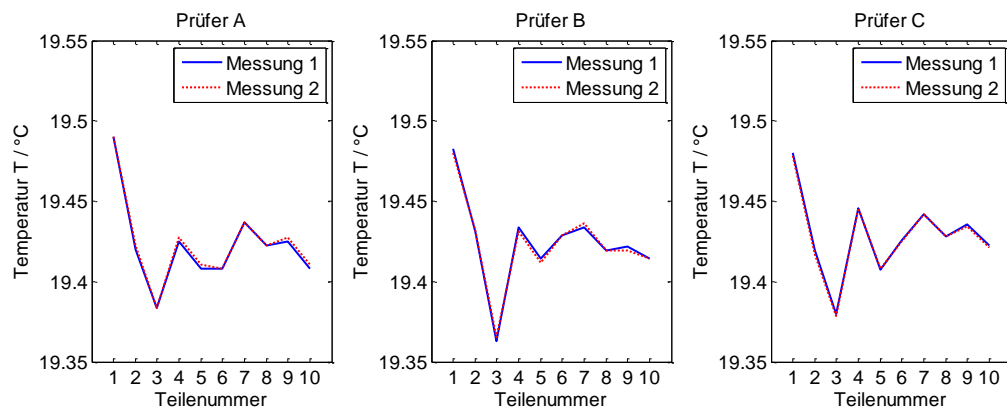
```
% Linearität
Messwerte = Temperaturmessung.Verfahren4.data;
ReferenzVektor = Temperaturmessung.Verfahren4.ref;
Referenz = ones(10,1)*ReferenzVektor;
Abweichung = Messwerte - Referenz;
Toleranz = 1;

% Regression der Abweichungen
[p,s] = polyfit(Referenz,Abweichung,1);
[fit,del] = polyconf(p,ReferenzVektor,s,'predopt','curve','alpha',0.05);

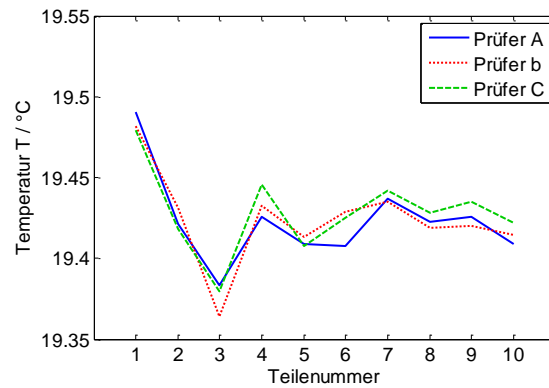
% Grafische Darstellung
scatter(reshape(Referenz,1,50),reshape(Abweichung,1,50),'+');
hold on;
plot(ReferenzVektor,fit,'b','Linewidth',2);
plot(ReferenzVektor,fit+del,'r','Linewidth',2);
plot(ReferenzVektor,fit-del,'r','Linewidth',2);
scatter(ReferenzVektor,mean(Abweichung),'ro','filled');
plot(ReferenzVektor,0.05*Toleranz*ones(size(ReferenzVektor)),'g--','Lin-
ewidth',2);
plot(ReferenzVektor,-0.05*Toleranz*ones(size(ReferenzVektor)),'g--','Lin-
ewidth',2);
hold off;
axis([10 55 -0.08 0.12]);
set(gca,'XTick',10:5:55,'YTick',-0.08:0.04:0.12);
set(gca,'XTickLabel',10:5:55,'YTickLabel',-0.08:0.04:0.12,'FontWeight','nor-
mal','FontName','Arial');
xlabel('Referenzwert T_{REF} / °C','FontWeight','normal','FontName','Arial');
ylabel('Abweichung \Delta T / °C','FontWeight','normal','FontName','Arial');
legend('Stichprobe','Regressionsgerade','Konfidenzbereich 95 %');

% Hypothesentest der Regressionskoeffizienten
tstat = regstats(reshape(Abweichung,50,1),reshape(Referenz,50,1),[0; 1],'tstat');
tstat.tstat.pval
```

d) Zur Bewertung der Streuung werden die Daten grafisch dargestellt. Dabei werden zunächst die Messwerte für jeden Prüfer visualisiert.



Die Streuung von Teil zu Teil ist erheblich größer als die Streuung bei der Wiederholung der Messung. Zum Vergleich der Prüfer untereinander werden die Mittelwerte jedes Prüfers als Funktion des Teils dargestellt.



Die Messergebnisse weichen voneinander ab, aber die Streuung von Prüfer zu Prüfer ist kleiner als die Streuung der Teile. Zur numerischen Bewertung werden die Qualitätskenngrößen berechnet. Dazu wird zunächst die ANOVA-Tabelle bestimmt.

Figure 3: Two-way ANOVA

ANOVA Table					
Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Columns	0.03904	9	0.00434	3210.88	0
Rows	0.00029	2	0.00015	107.79	0
Interaction	0.00192	18	0.00011	78.96	0
Error	0.00004	30	0		
Total	0.04129	59			

Der p-Wert zeigt, dass alle Einflussgrößen signifikant sind. Mit den normierten Quadratsummen MS werden die erforderlichen Standardabweichungen bestimmt.

$$\sigma_{\varepsilon} = \sqrt{M_{\varepsilon}} = 0.0012 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$\sigma_{\alpha} = \sqrt{\frac{M_{\alpha} - M_{\alpha\beta}}{K \cdot N}} = 0.0014 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$\sigma_{\beta} = \sqrt{\frac{M_{\beta} - M_{\alpha\beta}}{J \cdot N}} = 0.0266 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{M_{\alpha\beta} - M_{\varepsilon}}{N}} = 0.0073 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$\sigma_{\text{GRR}} = \sqrt{\sigma_{\alpha}^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 + \sigma_{\varepsilon}^2} = 0.0075 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

Damit ergeben sich die Qualitätskenngrößen zu

$$\% \text{GRR} = \frac{6 \cdot \sigma_{\text{GRR}}}{T} = 4.49 \%$$

$$\text{ndc} = 1.41 \cdot \frac{6 \cdot \sigma_{\beta}}{6 \cdot \sigma_{\text{GRR}}} = 1.41 \cdot \frac{\sigma_{\beta}}{\sigma_{\text{GRR}}} = 5.0055$$

Die Forderungen mit $\% \text{GRR} \leq 10 \%$ und $\text{ndc} \geq 5$ sind erfüllt. Das Messsystem ist hinsichtlich seiner Streuung voll messfähig. Die Anzahl vom Messprozess unterscheidbarer Klassen liegt genau an der Forderungsgrenze von 5. Da eine geringe Veränderung der einzelnen Streuungen sich negativ auf den

ndc-Wert auswirken kann, muss dieser Wert kontinuierlich beobachtet werden, oder es muss versucht werden, den Messprozess hinsichtlich seiner Gesamtstreuung zu verbessern.

Die Auswertung wurde mit folgendem MATLAB-File durchgeführt:

```
% Streuungsanalyse mit Anova-Tabelle
Daten = Temperaturmessung.Verfahren2.data;
[p, anovatab] = anova2(Daten',2)
K = 10;
J = 3;
N = 2;

% Ergebnisse der Varianzanalyse
malpha = anovatab{3,4};
mbeta = anovatab{2,4};
malphabeta = anovatab{4,4};
mepsilon = anovatab{5,4};

% Berechnung Qualitätskenngrößen
sigepsilon = sqrt(mepsilon)
sigalpha = sqrt((malpha-malphabeta)/K/N)
sigbeta = sqrt((mbeta-malphabeta)/J/N)
sigalphabeta = sqrt((malphabeta-mepsilon)/N)
sigGRR = sqrt(sigalpha^2+sigalphabeta^2+sigepsilon^2)
GRR = 6*sigGRR/1
ndc = 1.41*sigbeta/sqrt(sigalpha^2+sigalphabeta^2+sigepsilon^2)

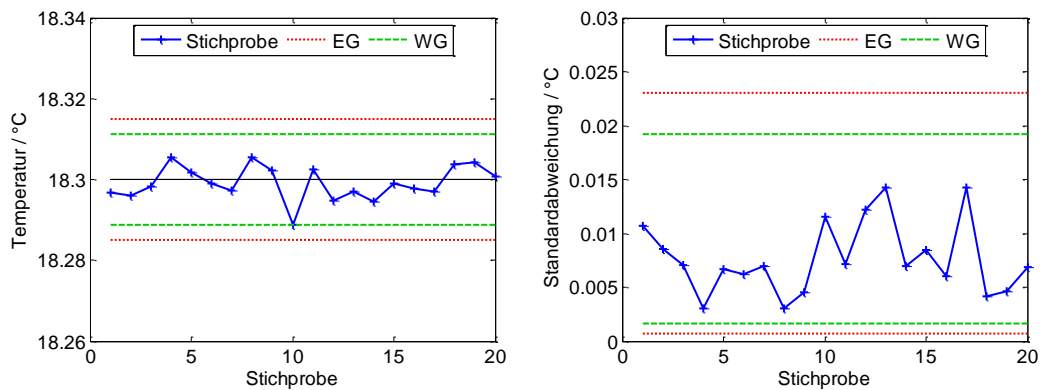
% Grafische Darstellung für jeden Prüfer
subplot(1,3,1);
plot(1:K,Daten(:,1),'b','Linewidth',2);
hold on;
plot(1:K,Daten(:,2),'r','Linewidth',2);
plot([-10 100],[0 0],'k','Linewidth',1);
hold off;
axis([0 11 19.35 19.55]);
set(gca,'XTick',1:1:10,'YTick',19.35:0.05:19.55);
set(gca,'FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
title('Prüfer A','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
xlabel('Teilenummer','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Temperatur T / °C','FontWeight','normal','FontName','Arial');

subplot(1,3,2);
plot(1:K,Daten(:,3),'b','Linewidth',2);
hold on;
plot(1:K,Daten(:,4),'r','Linewidth',2);
plot([-10 100],[0 0],'k','Linewidth',1);
hold off;
axis([0 11 19.35 19.55]);
set(gca,'XTick',1:1:10,'YTick',19.35:0.05:19.55);
set(gca,'FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
title('Prüfer B','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
xlabel('Teilenummer','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Temperatur T / °C','FontWeight','normal','FontName','Arial');

subplot(1,3,3);
plot(1:K,Daten(:,5),'b','Linewidth',2);
hold on;
plot(1:K,Daten(:,6),'r','Linewidth',2);
plot([-10 100],[0 0],'k','Linewidth',1);
hold off;
axis([0 11 19.35 19.55]);
set(gca,'XTick',1:1:10,'YTick',19.35:0.05:19.55);
set(gca,'XTickLabel',1:1:10,'YTickLabel',19.35:0.05:19.55);
set(gca,'FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
title('Prüfer C','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
xlabel('Teilenummer','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Temperatur T / °C','FontWeight','normal','FontName','Arial');
```

```
% Grafischer Vergleich der Prüfer
f = figure(4);
set(f,'Position',[100 100 600 400]);
plot(1:K,mean(Daten(:,1:2)), 'b', 'Linewidth',2);
hold on;
plot(1:K,mean(Daten(:,3:4)), 'r', 'Linewidth',2);
plot(1:K,mean(Daten(:,5:6)), 'gr--', 'Linewidth',2);
plot([-10 100],[0 0], 'k', 'Linewidth',1);
hold off;
axis([0 11 19.35 19.55]);
set(gca,'XTick',1:1:10,'YTick',19.35:0.05:19.55);
set(gca,'XTickLabel',1:1:10,'YTickLabel',19.35:0.05:19.55);
set(gca,'FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
xlabel('Teilenummer','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Temperatur T / °C','FontWeight','normal','FontName','Arial');
h = legend('Prüfer A','Prüfer b','Prüfer C');
```

e) Zur Bewertung der Langzeitstabilität wird eine Shewhart Regelkarte mit Eingriffsgrenze ($\gamma=99\%$) und eine Warngrenze ($\gamma=95\%$) erstellt. Die Grafik zeigt, dass sich Mittelwert und Standardabweichung innerhalb der Warngrenzen liegen. Das System ist nach diesem Kriterium also langzeitstabil.



Die Auswertung wurde mit folgendem MATLAB-File durchgeführt:

```

%% Langzeitstabilität
% Daten laden
Messwerte = Temperaturmessung.Verfahren5.data;
muMesswerte = mean(Messwerte);
muref = 18.3;
stdMesswerte = std(Messwerte);
sref = 0.01;
M = length(Messwerte(1,:));

% Konstanten bestimmen
cmw = norminv(0.975,0,1);
cme = norminv(0.995,0,1);
cseu = 0.0708
cswu = 0.1591
cswu = 1.9206
cseo = 2.3018

% Grafische Darstellung
f = figure(5);
set(f,'Position',[100 100 1200 400]);

subplot(1,2,1);
plot(1:M,muMesswerte,'b+-','linewidth',2);
hold on;
plot(1:M,ones(1,M)*(muref-cme*sref/sqrt(3)),'r:','linewidth',2);
plot(1:M,ones(1,M)*(muref-cmw*sref/sqrt(3)),'g--','linewidth',2);
plot(1:M,ones(1,M)*(muref+cme*sref/sqrt(3)),'r:','linewidth',2);
plot(1:M,ones(M)*muref,'k','linewidth',1);
plot(1:M,ones(1,M)*(muref+cmw*sref/sqrt(3)),'g--','linewidth',2);
set(h,'Color',[0 0.8 0]);
hold off;
axis([0 20 18.26 18.34]);
set(gca,'XTick',0:5:20,'YTick',18.26:0.02:18.34);
xlabel('Stichprobe','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Temperatur / °C','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
grid off;
box on;
h = legend('Stichprobe','EG','WG');
set(h,'location','north','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);

subplot(1,2,2);
plot(1:M,stdMesswerte,'b+-','linewidth',2);
hold on;
plot(1:M,ones(1,M)*cseu*sref,'r:','linewidth',2);
plot(1:M,ones(1,M)*cswu*sref,'g--','linewidth',2);
plot(1:M,ones(1,M)*cseo*sref,'r:','linewidth',2);
plot(1:M,ones(1,M)*cswu*sref,'g--','linewidth',2);
hold off;
axis([0 20 0 0.03]);
set(gca,'XTick',0:5:20,'YTick',0:0.005:0.03);
xlabel('Stichprobe','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Standardabweichung / °C','FontWeight','normal','FontName','Arial');
grid off;
box on;
h = legend('Stichprobe','EG','WG');
set(h,'location','north','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);

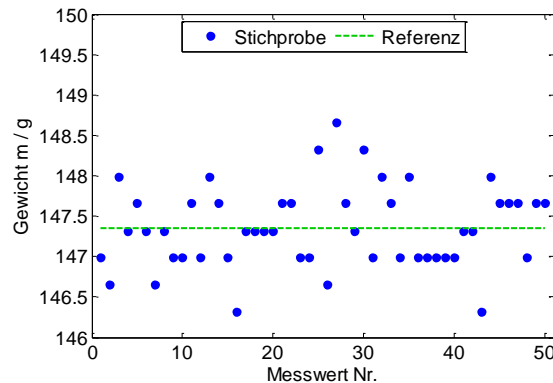
```

15.2 Gewichtsmessung

a) Die Auflösung mit 2 Nachkommastellen entspricht einer physikalischen Größe von 0.01 g. Daraus ergibt sich eine Toleranzgrenze von

$$T_A = \frac{\Delta y_A}{5\%} = \frac{0.01 \text{ g}}{0.05} = 0.2 \text{ g}$$

b) Zur Bewertung werden die Daten grafisch dargestellt.



Der Hypothesentest bestätigt den grafischen Eindruck, dass kein systematischer Fehler vorliegt. Aus den Grenzen für C_g - und C_{gk} -Wert ergeben sich die Toleranzgrenzen von

$$T_{CG} = \frac{C_g \cdot 3 \cdot s}{0.1} = 20.0248 \text{ g}$$

und

$$T_{CGk} = \frac{C_{gk} \cdot 3 \cdot s + |\Delta y|}{0.1} = 20.0868 \text{ g}$$

Die Auswertung wurde mit folgendem MATLAB-File durchgeführt:

```
% Laden der Daten
load MSAGewicht.mat;

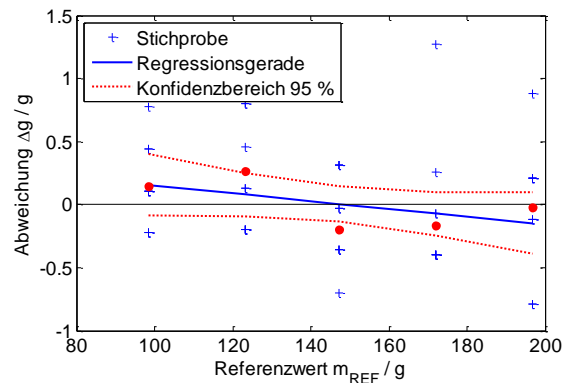
% Systematische Mesabweichung
Messwerte = reshape(Gewichtsmessung.Verfahren1.data,50,1);
Referenz = Gewichtsmessung.Verfahren1.ref;
n = 1:length(Messwerte);

% Definition des Grafikfensters
figure(1);
scatter(n,Messwerte,'bo','filled');
hold on;
plot(n,Referenz*ones(size(n)),'g--','linewidth',2);
hold off;
axis([0 51 146 150]);
set(gca,'XTick',0:10:50,'YTick',146:0.5:150);
xlabel('Messwert Nr.','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Gewicht m / g','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
grid off;
box on;

% Hypothesentest
[h,p]= ttest(Messwerte,Referenz)

% Berechnung Qualitätskenngrößen
TCg = 1.33*6*std(Messwerte)/0.2
TCgk = (1.33*3*std(Messwerte)+abs(mean(Messwerte)-Referenz))/0.1
```


c) Für den Linearitätsnachweis werden die Abweichungen der Stichprobe zur Referenz dargestellt. Mit Hilfe einer Regressionsfunktion und ihrem Konfidenzbereich wird die Linearität des Systems bestätigt.



Der Hypothesentest führt zu p-Werten von 13.54 % für β_0 und 12.93 % für β_1 . Beiden Hypothesen werden nicht verworfen, das Messsystem ist damit linear.

Die Toleranzgrenze, die sich aus der Linearitätsbewertung ergibt, berechnet sich aus der größten Abweichung des Stichprobenmittelwertes von $\Delta m_2 = 0.2650$ g zu

$$T_L = \frac{\Delta m}{5\%} \cdot 2 = \frac{0.2650 \text{ g}}{5\%} \cdot 2 = 10.6000 \text{ g}$$

Die Auswertung wurde mit folgendem MATLAB-File durchgeführt:

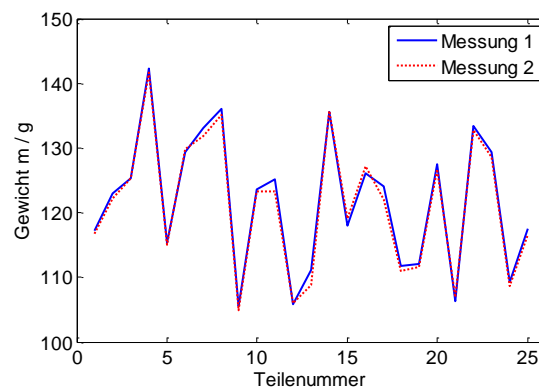
```
%% Linearität
Messwerte = Gewichtsmessung.Verfahren4.data;
ReferenzVektor = Gewichtsmessung.Verfahren4.ref;
Referenz = ones(10,1)*ReferenzVektor;
Abweichung = Messwerte - Referenz;

% Regression der Abweichungen
[p,s] = polyfit(Referenz,Abweichung,1);
[fit,del] = polyconf(p,ReferenzVektor,s,'predopt','curve','alpha',0.05);

% Grafische Darstellung
f = figure(2);
scatter(reshape(Referenz,1,50),reshape(Abweichung,1,50),'+');
hold on;
plot(ReferenzVektor,fit,'b','Linewidth',2);
plot(ReferenzVektor,fit+del,'r','Linewidth',2);
plot(ReferenzVektor,fit-del,'r','Linewidth',2);
plot([-100 1000],[0 0],'k','Linewidth',1);
scatter(ReferenzVektor,mean(Abweichung),'ro','filled');
hold off;
axis([80 200 -1 1.5]);
set(gca,'XTick',80:20:200,'YTick',-1:0.5:1.5);
xlabel('Referenzwert m_{REF} / g','FontWeight','normal','FontName','Arial');
ylabel('Abweichung \Delta g / g','FontWeight','normal','FontName','Arial');
grid off;
box on;
h = legend('Stichprobe','Regressionsgerade','Konfidenzbereich 95 %');
set(h,'location','northwest','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);

% Hypothesentest der Regressionskoeffizienten
tstat = regstats(reshape(Abweichung,50,1),reshape(Referenz,50,1),[0; 1],'tstat');
tstat.tstat.pval
```

d) Die Stichprobe zur Bewertung des Streuverhaltens wird zunächst grafisch dargestellt.



Das Diagramm zeigt, dass die Streuung von Stichprobe zu Stichprobe deutlich größer ist als die Streuung, die durch die Nachmessung entsteht. Für die Bewertung wird eine eindimensionale ANOVA-Tabelle erstellt.

Figure 3: One-way ANOVA

ANOVA Table					
Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Columns	5171.92	24	215.496	446.64	0
Error	12.06	25	0.482		
Total	5183.98	49			

Der Einfluss der Teile ist erwartungsgemäß signifikant. Mit den Quadratsummen der ANOVA-Tabelle ergeben sich die geschätzten Standardabweichungen

$$\sigma_{\text{GRR}} = \sigma_{\epsilon} = \sqrt{M_{\epsilon}} = 0.6949 \text{ g}$$

und

$$\sigma_{\beta} = \sqrt{\frac{M_{\beta} - M_{\epsilon}}{N}} = 2.9327 \text{ g}$$

Bei einem gerade noch zulässigen Wert %GRR = 30 % ergibt sich die entsprechende Toleranzgrenze zu

$$T_{\text{GRR}} = \frac{6 \cdot \sigma_{\text{GRR}}}{0.3} = 13.8923 \text{ g}$$

Der ndc-Wert ist mit

$$\text{ndc} = 1.41 \cdot \frac{6 \cdot \sigma_{\beta}}{6 \cdot \sigma_{\text{GRR}}} = 1.41 \cdot \frac{\sigma_{\beta}}{\sigma_{\text{GRR}}} = 5.9530$$

ausreichend groß.

Die Auswertung wurde mit folgendem MATLAB-File durchgeführt:

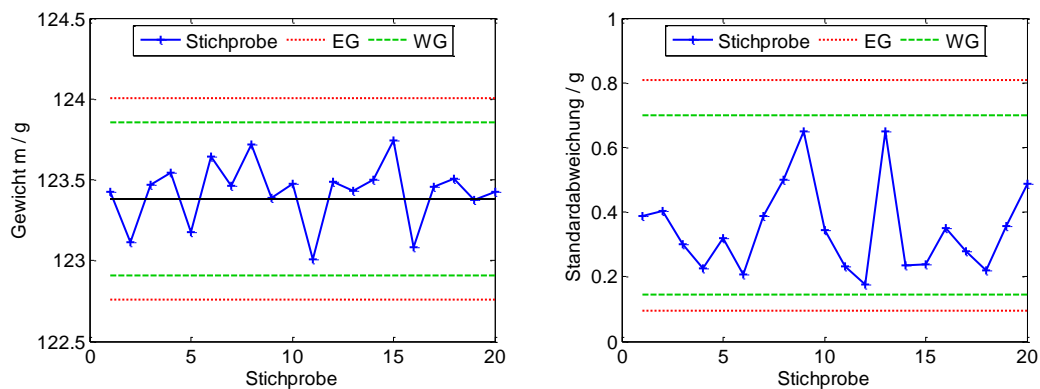
```
%% Streuungsanalyse
% Berechnung der Anova-Tabelle
Daten = Gewichtsmessung.Verfahren3.data;
[p, anovatab] = anova1(Daten')
K = 25;
N = 2;

% Ergebnisse der Varianzanalyse
mbeta = anovatab{2,4};
mepsilon = anovatab{3,4};

% Berechnug Qualitätskenngrößen
sigepsilon = sqrt(mepsilon)
sigbeta = sqrt((mbeta-mepsilon)/N)
sigGRR = sigepsilon
TGRR = 6*sigGRR/0.3
ndc = 1.41*sigbeta/sigGRR

% Grafische Darstellung
f = figure(4);
set(f,'Position',[100 100 600 400]);
plot(1:K,Daten(:,1),'b','LineWidth',2);
hold on;
plot(1:K,Daten(:,2),'r','LineWidth',2);
plot([-10 100],[0 0],'k','LineWidth',1);
hold off;
axis([0 26 100 150]);
set(gca,'XTick',0:5:25,'YTick',100:10:150);
set(gca,'XTickLabel',0:5:25,'YTickLabel',100:10:150);
set(gca,'FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
xlabel('Teilenummer','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Gewicht m / g','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
% box on;
h = legend('Messung 1','Messung 2');
set(h,'location','northeast','FontWeight','normal','FontName','Arial');
```

e) Auf Basis der Stichprobe für die Langezeitmessung wurde eine Shewhart-Regelkarte erstellt.



Das System ist nach dieser Untersuchung ausreichend stabil.

Die Auswertung wurde mit folgendem MATLAB-File durchgeführt:

```
%% Langzeitstabilität
% Daten laden
Messwerte = Gewichtsmessung.Verfahren5.data;
muMesswerte = mean(Messwerte);
muref = 123.38;
stdMesswerte = std(Messwerte);
sref = 0.419;
M = length(Messwerte(1,:));

% Konstanten bestimmen
cmw = norminv(0.975,0,1);
cme = norminv(0.995,0,1);
cseu = 0.2275
cswu = 0.3480
cswo = 1.6691
cseo = 1.9275

% Grafische Darstellung
f = figure(5);
set(f,'Position',[100 100 1200 400]);

subplot(1,2,1);
plot(1:M,muMesswerte,'b+-','linewidth',2);
hold on;
plot(1:M,ones(1,M)*(muref-cme*sref/sqrt(3)),'r:','linewidth',2);
plot(1:M,ones(1,M)*(muref-cmw*sref/sqrt(3)),'g--','linewidth',2);
plot(1:M,ones(1,M)*(muref+cme*sref/sqrt(3)),'r:','linewidth',2);
plot(1:M,ones(M)*muref,'k','linewidth',1);
plot(1:M,ones(1,M)*(muref+cmw*sref/sqrt(3)),'g--','linewidth',2);
hold off;
axis([0 20 122.5 124.5]);
set(gca,'XTick',0:5:20,'YTick',122.5:0.5:124.5);
xlabel('Stichprobe','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Gewicht m / g','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
grid off;
box on;
h = legend('Stichprobe','EG','WG');
set(h,'location','north','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);

subplot(1,2,2);
plot(1:M,stdMesswerte,'b+-','linewidth',2);
hold on;
plot(1:M,ones(1,M)*cseu*sref,'r:','linewidth',2);
plot(1:M,ones(1,M)*cswu*sref,'g--','linewidth',2);
plot(1:M,ones(1,M)*cseo*sref,'r:','linewidth',2);
plot(1:M,ones(1,M)*cswo*sref,'g--','linewidth',2);
hold off;
axis([0 20 0 1]);
set(gca,'XTick',0:5:20,'YTick',0:0.2:1);
xlabel('Stichprobe','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Standardabweichung / g','FontWeight','normal','FontName','Arial');
grid off;
box on;
h = legend('Stichprobe','EG','WG');
set(h,'location','north','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
```

f) Die gerade noch zulässige Zieltoleranz ergibt sich aus dem Maximum der berechneten Toleranzgrenzen. In diesem Beispiel ist das der Wert $T_{CGK} = 20.0868$ g.