Name: …………………………………..

Matrikel-Nr.: ……………………………

Hinweise:

- Diese Klausur enthält 1 Aufgabe.
- Die Unterlagen bestehen aus 17 Seiten inkl. Deckblatt.
- Die Dauer der Klausur beträgt 240 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel:
  - Vorlesungsskript, auch in Auszügen
  - Handschriftliche Formelsammlung
  - Zugewiesener Laborrechner
  - Taschenrechner
- Notieren Sie auf jedem Blatt Ihren Namen und Matrikelnummer.
- Stellen Sie Ihren Lösungsweg ausführlich dar und begründen Sie Ihr Vorgehen.
- Geben Sie dieses Deckblatt, die Aufgabenstellung und alle bearbeiteten Blätter mit Ihrer Klausur ab.

max. Punktzahl	Ist-Punktzahl
100	

Note	

Aufgabe

Bei thermisch arbeitenden Luftmassenmessern wird eine Temperaturregelung eingesetzt. Dabei wird zunächst auf einem Chip über einen Platinwiderstand R_U eine Umgebungstemperatur T_U erfasst. Ein zweiter Platinwiderstand R_R misst die geregelte Temperatur T_R. Als Stellgröße wird ein Strom durch einen Heizwiderstand R_H eingesetzt. Er erzeugt in dem geheizten Bereich eine Verlustleistung und heizt damit den Bereich auf.

Auf einem Wafer mit ersten Prototypen werden bei einer Referenztemperatur T_0 = 20 °C an 50 Chips die beiden Widerstände R_U und R_R vermessen. Toleranzen bei der Temperierung werden vernachlässigt. Die Daten sind in der Datei *Widerstandsmessung.mat* gespeichert.

a) Schätzen Sie die Mittelwerte μ_{RU} und μ_{RR} und geben Sie einen 95% - Konfidenzbereich an. Schätzen Sie die Varianzen und geben Sie auch zu diesen Größen ein 95% - Konfidenzintervall an. Gehen Sie dabei von normalverteilten Grundgesamtheiten aus.

b) Plausibilisieren Sie die geschätzten Größen in dem Sie die geschätzten Wahrscheinlichkeitsdichten zusammen mit einem Histogramm der Stichprobenwerte darstellen.

c) Liegt eine signifikante Korrelation ρ_R der Grundgesamtheit von den beiden Widerständen vor? Beantworten Sie diese Frage mithilfe eines Hypothesentests. Geben Sie zusätzlich den Konfidenzbereich der Korrelation ρ_R an. Welche Zufallsvariablen verwenden Sie? Visualisieren Sie die Korrelation der beiden Größen R_U und R_R.

Widerstand R_U / kΩ									
4.163	5.398	5.149	5.237	5.593	3.869	4.406	5.458	5.530	4.935
5.182	5.240	5.437	5.307	4.957	4.831	4.837	4.328	4.132	5.322
5.736	4.591	4.145	4.731	5.001	4.491	5.071	5.210	4.990	5.463
5.156	5.857	4.837	3.921	4.422	5.262	5.131	5.182	4.906	6.048
5.506	4.969	5.522	4.582	4.821	4.617	5.227	6.041	5.167	4.763

Widerstand R_R / kΩ									
8.631	10.615	9.401	10.008	11.079	8.922	8.582	10.734	10.582	9.608
9.821	11.025	10.881	9.934	10.203	9.860	9.505	8.485	7.953	10.965
11.446	9.169	8.950	8.446	10.318	8.871	10.132	10.423	10.029	10.770
9.921	11.997	9.405	8.529	8.988	11.181	9.900	9.355	9.202	11.536
11.156	9.707	10.132	9.103	8.900	9.108	9.688	11.878	9.959	9.411

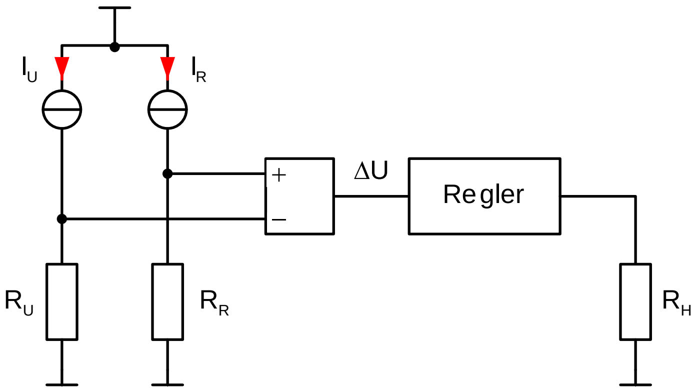
Für einen Testbetrieb werden die beiden Platin-Widerstände

$$R_U(T_U) = R_{U0} \cdot (1 + \alpha_R \cdot (T_U - T_0))$$

und

$$R_R(T_R) = R_{R0} \cdot (1 + \alpha_R \cdot (T_R - T_0))$$

mit Stromquellen I_U und I_R betrieben. Die Schaltungsanordnung ist in dem folgenden Ersatzschaltbild dargestellt. Die Regelung wird so durchgeführt, dass $\Delta U = 0$ wird.



d) Zeigen Sie, dass sich die geregelte Temperatur T_R berechnet zu

$$T_R = \frac{I_U \cdot R_{U0} \cdot (1 + \alpha_R \cdot (T_U - T_0)) - I_R \cdot R_{R0}(1 - T_0 \cdot \alpha_R)}{I_R \cdot R_{R0} \cdot \alpha_R}$$

Welche Temperatur ergibt sich für die Ströme $I_U = 50\ \mu A$, $I_R = 20\ \mu A$, $\alpha_R = 3000$ ppm/K, $R_{U0} = 5\ k\Omega$, $R_{R0} = 10\ k\Omega$ und $T_U = T_0 = 20\ °C$.

Über ein optisch arbeitendes System wird an einem Muster die Temperatur T_R des geheizten Bereichs gemessen. Dabei werden das Verhältnis der Stromquellen zueinander variiert. Die Messwerte sind in der Datei *Temperaturmessung.mat* gespeichert.

k_I	2.16	3.26	2.10	3.61	2.37	2.19	2.94	2.32	2.53	2.58
T_R / °C	70.0	206.0	37.3	295.2	92.8	57.8	191.0	84.9	120.6	138.5

k_I	3.39	2.72	3.58	3.72	3.56	2.91	2.30	3.07	2.97	2.37
T_R / °C	258.6	149.2	325.2	288.1	289.3	176.2	98.2	192.8	155.8	93.2

k_I	2.22	2.43	2.31	2.33	3.26	2.99	2.70	3.08	2.30	3.01
T_R / °C	48.0	122.0	68.8	48.2	217.1	165.8	135.4	152.3	52.0	192.1

e) Geben Sie ein Regressionspolynom mit der Ordnung M = 3 für die geregelte Temperatur T_R als Funktion des Stromverhältnisses

$$k_I = \frac{I_U}{I_R}$$

an. Stellen Sie das Ergebnis grafisch dar. Bestimmen Sie das 95% - Prognoseintervall und tragen Sie es in die Grafik ein.

f) Bewerten Sie die Regressionsfunktion mit den in der Vorlesung vorgestellten Verfahren. Sind alle Terme signifikant? Reduzieren Sie gegebenenfalls den Modellansatz, indem Sie nicht signifikante Terme ohne Rücksicht auf das adjungierte Bestimmtheitsmaß entfernen. Wie wirkt sich die Reduktion des Regressionsmodells auf die Kenngrößen aus? Welche Regressionsfunktion schlagen Sie schlussendlich vor und warum?

Die Genauigkeit der geregelten Temperatur soll mit einer statistischen Tolerierung berechnet werden. Für die einzelnen Parameter gelten die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Toleranzannahmen. Die Umgebungstemperatur beträgt fest T_U = 40 °C.

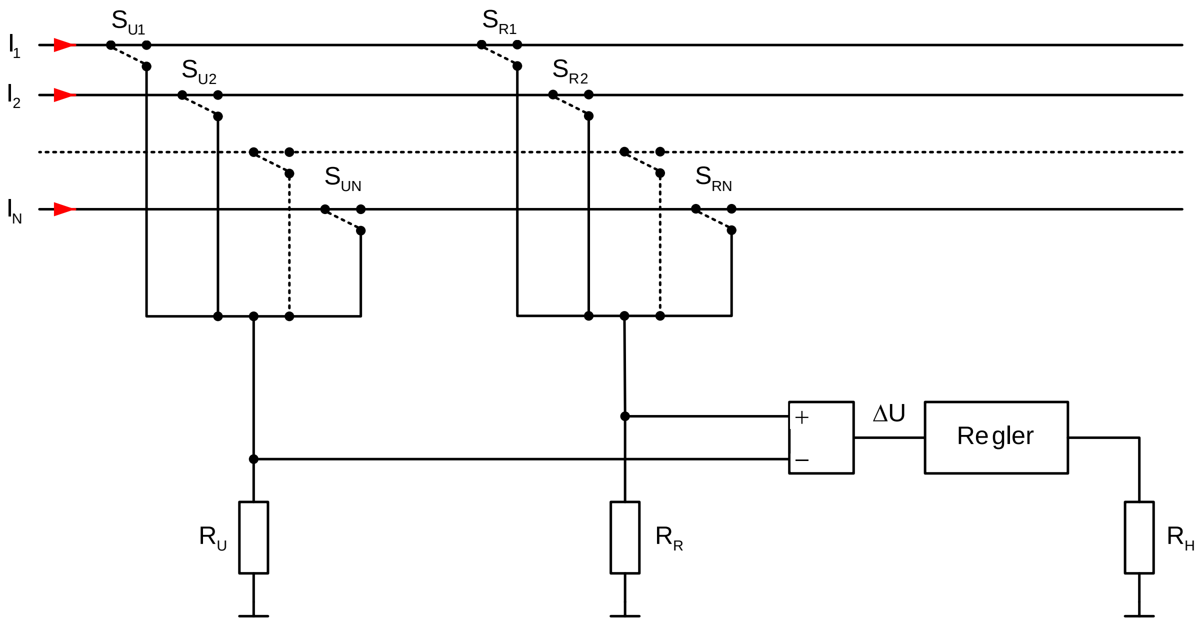
Größe	**Sollwert**	**Toleranz**	**Bemerkung**
I_U / µA	50	0.5	Gleichverteilung
I_R / µA	20	0.2	Gleichverteilung
R_{U0} / kΩ	5	0.5	Normalverteilung Angaben $\pm 3\cdot\sigma$
R_{R0} / kΩ	10	1	Normalverteilung Angaben $\pm 3\cdot\sigma$
α_R / ppm/K	3000	300	Normalverteilung Angaben $\pm 3\cdot\sigma$
ρ_R	0.9	-	-

g) Führen Sie für die Temperatur T_R eine statistische Tolerierung mit Linearisierung und Grenzwertsatz durch. Wie groß ist die Toleranz für γ = 99.73.

h) Vergleichen Sie das Ergebnis mit einer statistischen Simulation. Wie groß ist die Toleranz für γ = 99.73. Bestimmen Sie die Toleranz auf Basis eines Prognoseintervalls bei Normalverteilung und auf Basis der relativen Summenhäufigkeit.

i) Vergleichen Sie die Empfindlichkeiten, die sich aus der analytischen Rechnung und der statistischen Simulation ergeben. Was müssen Sie beachten, wenn Sie die beiden Werte miteinander vergleichen?

Für die spätere Realisierung der Schaltung werden sogenannte Stromspiegel eingesetzt. Dabei handelt es sich um Stromquellen I_1 … I_N , die von derselben Referenz abgeleitet und damit ein sehr ähnliches Verhalten aufweisen. Die Ströme I_n sind bei Normaltemperatur normalverteilt um einen Mittelwert μ_{I0} = 4 µA mit einer Standardabweichung von σ_{I0} = 0.0115 µA. Für den Strom I_R werden immer 5 Stromquellen parallel geschaltet. Für den Strom I_U werden 12 oder 13 Stromquellen parallel geschaltet.



j) Wie wirken sich die Quantisierungsstufen bei den Stromquellen für $T_U = T_0$ = 20 °C auf die Temperatur T_R aus? Wie genau kann sie eingestellt werden, wenn alle Bauelemente ihre Sollwerte aufweisen?

k) Führen Sie für diesen Ansatz und die Temperatur T_R eine statistische Tolerierung mit Linearisierung und Grenzwertsatz durch. Die Umgebungstemperatur beträgt fest $T_U = T_0$ = 20 °C. Für den Strom I_U werden 12 Stromquellen parallel geschaltet. Wie groß ist die Toleranz für γ = 99.73. Welcher grundsätzlicher Vorteil ergibt sich durch die Realisierung?

Musterlösung

a) Jede Gruppe weist eine Normalverteilung auf, die Standardabweichung ist unbekannt. Damit weist die Größe

$$t = \frac{x - \mu}{s / \sqrt{N}}$$

eine t-Verteilung mit N - 1 Freiheitsgraden auf. Der Konfidenzbereich für den Mittelwert bei unbekannter Varianz ergibt sich zu

$$\bar{x} - \frac{c_2 \cdot s}{\sqrt{N}} < \mu \leq \bar{x} - \frac{c_1 \cdot s}{\sqrt{N}}$$

Dabei berechnen sich die Grenzen c_1 und c_2 über die inverse t-Verteilung mit N - 1 Freiheitsgraden.

Für die Varianz ergibt sich der Konfidenzbereich

$$\frac{s^2 \cdot (N-1)}{c_2} < \sigma^2 \leq \frac{s^2 \cdot (N-1)}{c_1}$$

mit Berechnung der Grenzen c_1 und c_2 über die inverse chi^2-Verteilung mit N - 1 Freiheitsgraden.

Berechnung erfolgt mit folgendem MATLAB-Code:

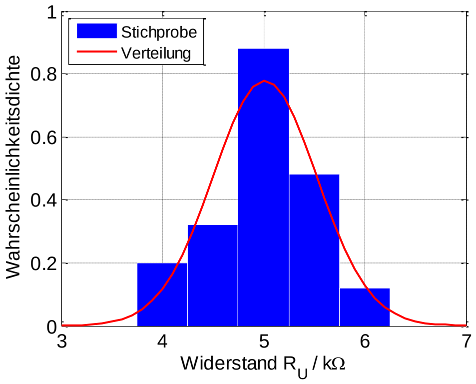
```
%% Initialisierung
clear all;
close all;
clc;

% Laden der Datensätze
load('Widerstandsmessung.mat');

%% Berechnen der charakteristischen Größen und der Konfidenzbereiche
N = length(RU);
gamma = 0.95;

muRU = mean(RU)
sRU = std(RU)
muRUmin = muRU - tinv((1+gamma)/2,N-1)*sRU/sqrt(N)
muRUmax = muRU - tinv((1-gamma)/2,N-1)*sRU/sqrt(N)
sigRUmin = sqrt(sRU^2*(N-1)/chi2inv((1+gamma)/2,N-1))
sigRUmax = sqrt(sRU^2*(N-1)/chi2inv((1-gamma)/2,N-1))

muRR = mean(RR)
sRR = std(RR)
muRRmin = muRR - tinv((1+gamma)/2,N-1)*sRR/sqrt(N)
muRRmax = muRR - tinv((1-gamma)/2,N-1)*sRR/sqrt(N)
sigRRmin = sqrt(sRR^2*(N-1)/chi2inv((1+gamma)/2,N-1))
sigRRmax = sqrt(sRR^2*(N-1)/chi2inv((1-gamma)/2,N-1))
```

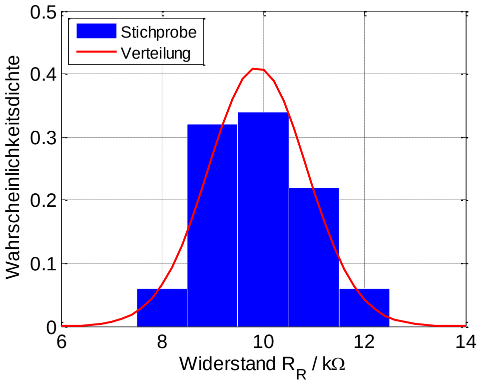
Es ergeben sich für die Datensätze R_U und R_H folgende Werte:

Größe	Schätzung	Untere Grenze	Obere Grenze
μ_{RU}	5.0135	4.8683	5.1588
σ_{RU}	0.5110	0.4269	0.6368
μ_{RR}	9.8881	9.6128	10.1633
σ_{RR}	0.9686	0.8091	1.2071

b) Stichprobe wird über eine Normalverteilung beschrieben, deren Mittelwert und Varianz geschätzt ist. Zum Vergleich wird die relative Häufigkeit als Balkendiagramm dargestellt. Dabei muss darauf geachtet werden, dass das sichere Ereignis mit die Wahrscheinlichkeit 1 aufweist. Berechnung und Darstellung mit folgendem MATLAB-Code:

```
%% Berechnung der relativen Häufigkeit und der Wahrscheinlichkeitsdichte
RUh = 3:0.5:7;
hRU = hist(RU,RUh)/N/0.5;
RUf = 3:0.1:7;
fRU = normpdf(RUf,mean(RU),std(RU));

RRh = 6:1:14;
hRR = hist(RR,RRh)/N/1;
RRf = 6:0.2:14;
fRR = normpdf(RRf,mean(RR),std(RR));

figure(1);

subplot(1,2,1);
bar(RUh,hRU,'b');
hold on;
plot(RUf,fRU,'r','Linewidth',2);
hold off;
xlabel('Widerstand R_U / k\Omega');
ylabel('Wahrscheinlichkeitsdichte');
h = legend('Stichprobe','Verteilung');

subplot(1,2,2);
bar(RRh,hRR,'b');
hold on;
plot(RRf,fRR,'r','Linewidth',2);
hold off;
xlabel('Widerstand R_R / k\Omega');
ylabel('Wahrscheinlichkeitsdichte');
h = legend('Stichprobe','Verteilung');
```





Die geschätzte Verteilung stimmt gut mit der relativen Häufigkeit überein.

c) Zur Signifikanzbewertung des Korrelationskoeffizienten wird ein Hypothesentest durchgeführt. Die Zufallsvariable

$$t = r \cdot \sqrt{\frac{N-2}{1-r^2}}$$

besitzt N - 2 Freiheitsgrade. Ist die Korrelation $\rho_R = 0$, weist die Zufallsvariable t den Wert null auf. Zur Berechnung der Annahmegrenzen werden die Konstanten c_1 und c_2 berechnet. Sie ergeben sich dabei aus der inversen t-Verteilung mit N - 2 Freiheitsgraden zu $c_{1,2} = \pm 2.0106$. Die Stichprobe liegt mit dem Wert

$$t_0 = r \cdot \sqrt{\frac{N-2}{1-r^2}} = 13.8845$$

deutlich außerhalb des Annahmebereiches für die Hypothese $\rho_R = 0$. Es liegt also eine signifikante Korrelation der Grundgesamtheit vor.

Die Stichprobe hat einen großen Korrelationskoeffizienten von r = 0.8948. Zur Berechnung des Konfidenzbereichs des Korrelationskoeffizienten ρ_R wird die standardnormalverteilte Variable

$$z = \left(\tanh^{-1}(r) - \tanh^{-1}(\rho_R)\right) \cdot \sqrt{N-3}$$

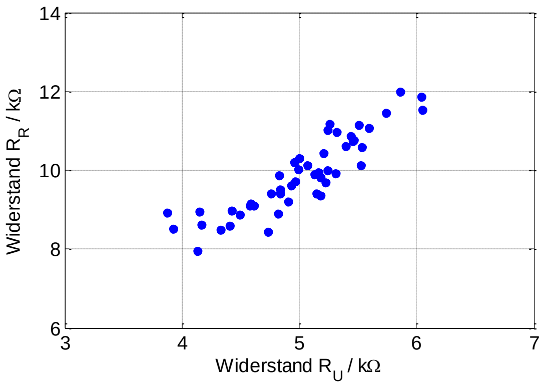
verwendet. Der Konfidenzbereich der Korrelation der Grundgesamtheit ρ_R ergibt sich aus der Gleichung

$$\tanh\left(\tanh^{-1}(r) - \frac{c_2}{\sqrt{N-3}}\right) < \rho_R \le \tanh\left(\tanh^{-1}(r) - \frac{c_1}{\sqrt{N-3}}\right)$$

Die Grenzen c_1 und c_2 ergeben sich mit der inversen Standardnormalverteilung und $\gamma = 95\ \%$ zu $c_{1,2} = \pm 1.96$. Damit ergibt sich ein Konfidenzbereich von

$$0.8209 < \rho_R \le 0.9392$$

Zur Visualisierung wird ein Scatter-Plot erstellt.



Die Lösung wird mit folgendem MATLAB-Code durchgeführt.

```
%% Berechnung, Auswertung und Darstellung der Korrelation

[RUR,P,RURLO,RURUP]  = corrcoef([RU RR])

figure(2);
scatter (RU,RR,'b','filled')
axis([3 7 6 14]);
xlabel('Widerstand R_U / k\Omega');
ylabel('Widerstand R_R / k\Omega');
```

d) Für den Fall, dass die Spannungsdifferenz null wird, gilt:

$$I_R \cdot R_R(T_R) = I_U \cdot R_U(T_U)$$

Mit den temperaturabhängigen Widerständen ergibt sich

$$I_R \cdot R_{R0} \cdot \left(1+\alpha_R \cdot (T_R - T_0)\right) = I_U \cdot R_{U0} \cdot \left(1+\alpha_R \cdot (T_U - T_0)\right)$$

Auflösen nach T_R erfolgt über Ausmultiplizieren

$$I_R \cdot R_{R0} + I_R \cdot R_{R0} \cdot \alpha_R \cdot T_R - I_R \cdot R_{R0} \cdot \alpha_R \cdot T_0 = I_U \cdot R_{U0} + I_U \cdot R_{U0} \cdot \alpha_R \cdot T_U - I_U \cdot R_{U0} \cdot \alpha_R \cdot T_0$$

Isolieren von T_R

$$I_R \cdot R_{R0} \cdot \alpha_R \cdot T_R = I_U \cdot R_{U0} + I_U \cdot R_{U0} \cdot \alpha_R \cdot T_U - I_U \cdot R_{U0} \cdot \alpha_R \cdot T_0 + I_R \cdot R_{R0} \cdot \alpha_R \cdot T_0 - I_R \cdot R_{R0}$$

und Division durch den Vorfaktor. Es ergibt sich das zu beweisende Ergebnis

$$T_R = \frac{I_U \cdot R_{U0} + I_U \cdot R_{U0} \cdot \alpha_R \cdot T_U - I_U \cdot R_{U0} \cdot \alpha_R \cdot T_0 + I_R \cdot R_{R0} \cdot \alpha_R \cdot T_0 - I_R \cdot R_{R0}}{I_R \cdot R_{R0} \cdot \alpha_R}$$

$$= \frac{I_U \cdot R_{U0} \cdot \left(1+\alpha_R \cdot (T_U - T_0)\right) - I_R \cdot R_{R0}\left(1 - T_0 \cdot \alpha_R\right)}{I_R \cdot R_{R0} \cdot \alpha_R}$$

In MATLAB wird die Berechnung wie folgt durchgeführt:

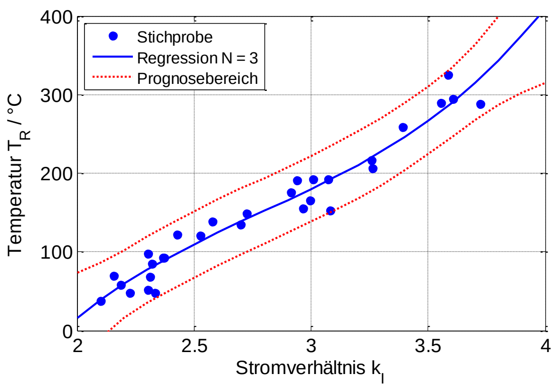
```
%% Berechnung der Temperatur TR
IU = 50e-6;
IR = 20e-6;
RU0 = 5e3;
RR0 = 10e3;
alphaR = 3000e-6;
T0 = 20;
TR = (IU*RU0 - IR*RR0*(1-T0*alphaR))/(IR*RR0*alphaR)
```

Für die angegebenen Zahlenwerte ergibt sich das Ergebnis T_R = 103.3 °C.

e) Es handelt sich um einen zweidimensionalen Datensatz, bei dem ein vollkubisches Modell verwendet werden soll. Damit können die Funktion polyfit und polyconf eingesetzt werden. Die Bearbeitung der Aufgabe erfolgt mit diesem MATLAB-Code:

```
%% Regeression der Messwerte für Temperatur
load Temperaturmessung.mat;

[P,S] = polyfit(kI,TR,3);
kIplot = 2:0.1:4;
[TRreg,dTRreg] = polyconf(P,kIplot,S);

% Definition des Grafikfensters
figure(3);
scatter(kI,TR,'b','filled');
hold on;
plot(kIplot,TRreg,'b','Linewidth',2);
plot(kIplot,TRreg + dTRreg,'r:','Linewidth',2);
plot(kIplot,TRreg - dTRreg,'r:','Linewidth',2);
hold off;
xlabel('Stromverhältnis k_I');
ylabel('Temperatur T_R / °C');
h = legend('Stichprobe','Regression N = 3', 'Prognosebereich');
```

Es ergibt sich folgende Darstellung:

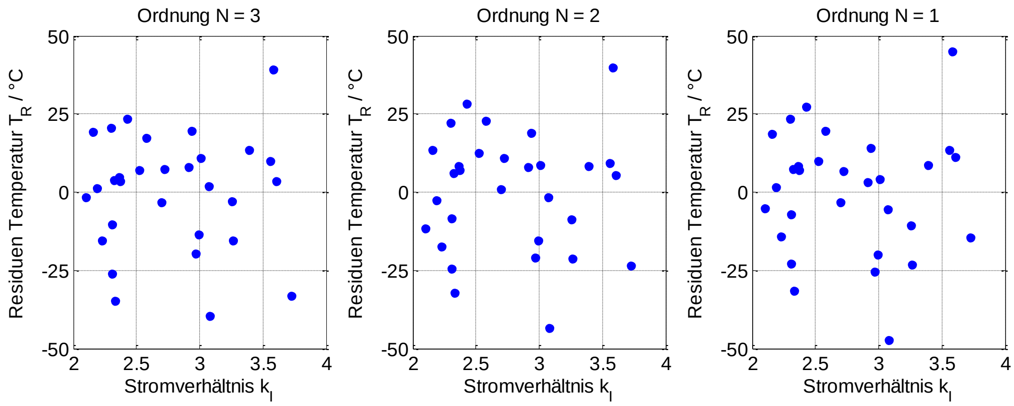


f) Zur Bewertung der Güte werden das adjungierte Bestimmtheitsmaß und die Signifikanz der Regressionskoeffizienten bewertet sowie eine Reststreuungsanalyse durchgeführt. Da mehrere Koeffizienten nicht signifikant sind, werden zunächst die Koeffizienten höherer Ordnung eliminiert.

Ordnung	$P(b_0)$	$P(b_1)$	$P(b_2)$	$P(b_3)$	R_{adj}
3	0.2017	0.2311	0.2668	0.2465	0.9434
2	0.3285	0.6220	0.2879	-	0.9425
1	$0.2674 \cdot 10^{-13}$	$4.4167 \cdot 10^{-19}$	-	-	0.9421

Es ergibt sich ein lineare Regressionsfunkton, deren adjungiertes Bestimmtheitsmaß gegenüber dem kubischen Modell leicht gesunken ist.

Die Restreuungsanalyse zeigt, dass durch das Entfernen nicht signifikanter Terme die Amplitude der Residuen leicht zunimmt, was sich mit der Aussage zum Bestimmtheitsmaß deckt. Es ist aber kein systematischer Zusammenhang zwischen der Größe k_I und den Residuen zu erkennen.



Die lineare Regressionsfunktion die richtige, weil das physikalische Modell ebenfalls linear ist. Dazu wird die Funktion für T_R umgeformt:

$$T_R = \frac{I_U \cdot R_{U0} \cdot \left(1+\alpha_R \cdot \left(T_U - T_0\right)\right) - I_R \cdot R_{R0}\left(1 - T_0 \cdot \alpha_R\right)}{I_R \cdot R_{R0} \cdot \alpha_R}$$

$$= \frac{k_I \cdot R_{U0} \cdot \left(1+\alpha_R \cdot \left(T_U - T_0\right)\right) - R_{R0}\left(1 - T_0 \cdot \alpha_R\right)}{R_{R0} \cdot \alpha_R}$$

$$= k_I \cdot \frac{R_{U0} \cdot \left(1+\alpha_R \cdot \left(T_U - T_0\right)\right)}{R_{R0} \cdot \alpha_R} - \frac{\left(1 - T_0 \cdot \alpha_R\right)}{\alpha_R}$$

Die Berechnung wird mit folgendem MATLAB-Code durchgeführt.

```
%% Bewertung der Regression der Messwerte für Temperatur
model = [0; 1; 2; 3];
reg = regstats(TR,kI, model,{'tstat','adjrsquare','r'});
reg.tstat.pval
reg.adjrsquare
res3 = reg.r;
model = [0; 1; 2];
reg = regstats(TR,kI, model,{'tstat','adjrsquare','r'});
reg.tstat.pval
reg.adjrsquare
res2 = reg.r;
model = [0; 1];
reg = regstats(TR,kI, model,{'tstat','adjrsquare','r'});
reg.tstat.pval
reg.adjrsquare
res1 = reg.r;

% Definition des Grafikfensters
hdl = figure(4);
set(hdl,'Position',[100 100 1200 400]);

subplot(1,3,1);
scatter(kI,res3,'b','filled');
xlabel('Stromverhältnis k_I');
ylabel('Residuen Temperatur T_R / °C');
title('Ordnung N = 3','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);

subplot(1,3,2);
scatter(kI,res2,'b','filled');
xlabel('Stromverhältnis k_I');
ylabel('Residuen Temperatur T_R / °C');
title('Ordnung N = 2','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);

subplot(1,3,3);
scatter(kI,res1,'b','filled');
xlabel('Stromverhältnis k_I');
ylabel('Residuen Temperatur T_R / °C');
title('Ordnung N = 1','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
```

g) Zur statistischen Tolerierung über den Grenzwertsatz wird eine Linearisierung durchgeführt.

$$T_R = \frac{I_U \cdot R_{U0} \cdot \left(1+\alpha_R \cdot \left(T_U - T_0\right)\right) - I_R \cdot R_{R0}\left(1 - T_0 \cdot \alpha_R\right)}{I_R \cdot R_{R0} \cdot \alpha_R}$$

Es ergeben sich die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial T_R}{\partial I_U} = \frac{R_{U0} \cdot \left(1+\alpha_R \cdot \left(T_U - T_0\right)\right)}{I_R \cdot R_{R0} \cdot \alpha_R} = E_{IU}$$

$$\frac{\partial T_R}{\partial I_R} = \frac{-R_{R0} \cdot \left(1 - T_0 \cdot \alpha_R\right) \cdot I_R \cdot R_{R0} \cdot \alpha_R - R_{R0} \cdot \alpha_R \cdot I_U \cdot R_{U0} \cdot \left(1+\alpha_R \cdot \left(T_U - T_0\right)\right) + R_{R0} \cdot \alpha_R \cdot I_R \cdot R_{R0}\left(1 - T_0 \cdot \alpha_R\right)}{I_R^2 \cdot R_{R0}^2 \cdot \alpha_R^2}$$

$$= -\frac{I_U \cdot R_{U0} \cdot \left(1+\alpha_R \cdot \left(T_U - T_0\right)\right)}{I_R^2 \cdot R_{R0} \cdot \alpha_R} = E_{IR}$$

$$\frac{\partial T_R}{\partial R_{U0}} = \frac{I_U \cdot \left(1+\alpha_R \cdot \left(T_U - T_0\right)\right)}{I_R \cdot R_{R0} \cdot \alpha_R} = E_{RU}$$

$$\frac{\partial T_R}{\partial R_{R0}} = \frac{-I_R \cdot (1-T_0 \cdot \alpha_R) \cdot I_R \cdot R_{R0} \cdot \alpha_R - I_R \cdot \alpha_R \cdot I_U \cdot R_{U0} \cdot (1+\alpha_R \cdot (T_U - T_0)) - I_R \cdot \alpha_R \cdot I_R \cdot R_{R0}(1-T_0 \cdot \alpha_R)}{I_R^2 \cdot R_{R0}^2 \cdot \alpha_R^2}$$

$$= \frac{-I_U \cdot R_{U0} \cdot (1+\alpha_R \cdot (T_U - T_0))}{I_R \cdot R_{R0}^2 \cdot \alpha_R} = E_{RR}$$

$$\frac{\partial T_R}{\partial \alpha_R} = \frac{I_U \cdot R_{U0} \cdot (T_U - T_0) \cdot I_R \cdot R_{R0} \cdot \alpha_R + I_R \cdot R_{R0} \cdot T_0 \cdot I_R \cdot R_{R0} \cdot \alpha_R}{I_R^2 \cdot R_{R0}^2 \cdot \alpha_R^2}$$

$$- \frac{I_R \cdot R_{R0} \cdot I_U \cdot R_{U0} \cdot (1+\alpha_R \cdot (T_U - T_0)) - I_R \cdot R_{R0} \cdot I_R \cdot R_{R0}(1-T_0 \cdot \alpha_R)}{I_R^2 \cdot R_{R0}^2 \cdot \alpha_R^2}$$

$$= \frac{-I_U \cdot R_{U0} + I_R \cdot R_{R0}}{I_R \cdot R_{R0} \cdot \alpha_R^2} = E_{\alpha R}$$

Damit ergibt sich ein vollständiges Fehlerdifferential von

$$\Delta T_R = E_{IU} \cdot \Delta I_U + E_{IR} \cdot \Delta I_R + E_{RU} \cdot \Delta R_{U0} + E_{RR} \cdot \Delta R_{R0} + E_{\alpha R} \cdot \Delta\alpha_R$$

Wegen der Korrelation der beiden Widerstandswerte R_{U0} und R_{R0} berechnet die Varianz zu

$$\sigma_{TR}^2 = E_{IU}^2 \cdot \sigma_{IU}^2 + E_{IR}^2 \cdot \sigma_{IR}^2 + E_{RU}^2 \cdot \sigma_{RU}^2 + E_{RR}^2 \cdot \sigma_{RR}^2 + 2 \cdot \rho \cdot E_{RR} \cdot E_{RU} \cdot \sigma_{RR} \cdot \sigma_{RU} + E_{\alpha R}^2 \cdot \sigma_{\alpha R}^2$$

Bei der Berechnung der Varianzen müssen die unterschiedlichen Verteilungen berücksichtigt werden. Bei der Gleichverteilung wird die Varianz über den Erwartungswert bestimmt.

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

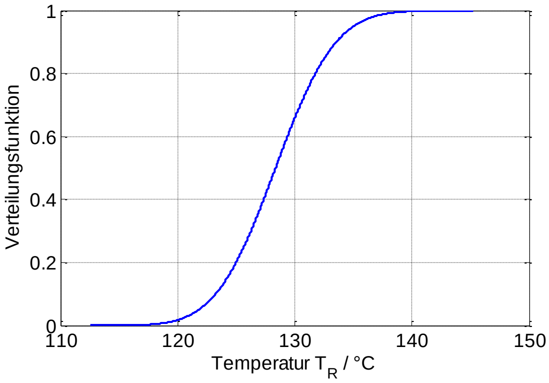
Die Varianz σ_{TR}^2 berechnet sich über folgenden MATLAB-Code:

```
% Berechnung der Empfindlichkeiten im Arbeitspunkt TU = 40 °C
TU = 40;
EIU = RU0*(1+alphaR*(TU-T0))/(IR*RR0*alphaR)
EIR = - IU*RU0*(1+alphaR*(TU-T0))/(IR^2*RR0*alphaR)
ERU = IU*(1+alphaR*(TU-T0))/(IR*RR0*alphaR)
ERR = - IU*RU0*(1+alphaR*(TU-T0))/(IR*RR0^2*alphaR)
EalphaR = (IR*RR0-IU*RU0)/(IR*RR0*alphaR^2)

% Bestimmung der Standardabweichungen und Korrelationen
SIU = 0.5e-6/sqrt(12);
SIR = 0.2e-6/sqrt(12);
SRU = 0.5e3/6;
SRR = 1e3/6;
SalphaR = 300e-6/6;
rho = 0.9;

% Berechnung der Varianz der Ausgangsgröße
STR2 = EIU^2*SIU^2 + EIR^2*SIR^2 + ERU^2*SRU^2 + ERR^2*SRR^2 +
2*rho*ERU*ERR*SRU*SRR + EalphaR^2*SalphaR^2;
TTRana = 6*sqrt(STR2)
```

Es ergibt sich ein Toleranz von

$$\Delta T_{R1} = 6 \cdot \sigma_{TR} = 24.0130\ °C$$

h) Für die statistische Toleranzsimulation werden unter Berücksichtigung der zugrunde liegenden Verteilung 10^6 Zufallsgrößen für alle Variablen bestimmt. Bei den Widerstandswerten muss wieder auf die Korrelation geachtet werden. Für diese Variablen wird die Temperatur T_R bestimmt. Es ergibt sich folgende kumulative Häufigkeit.



Mit dem Datensatz wird der Prognosebereich mit γ = 99.73 berechnet.

$$\bar{x} + c_1 \cdot s \cdot \sqrt{1+\frac{1}{N}} < T_R \leq \bar{x} + c_2 \cdot s \cdot \sqrt{1+\frac{1}{N}}$$

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt

$$116.2886\ °C < T_R \leq 140.4066\ °C$$

und der Toleranzbereich errechnet sich zu

$$\Delta T_{R2} = 24.0130\,°C$$

Der Wert P = (1 - γ)/2 wird für T_{R1} = 116.2766 °C erreicht, der Wert P = (1 + γ)/2 wird für T_{R2} = 140.4512 °C erreicht. Damit ergibt sich ein Toleranzbereich von

$$\Delta T_{R3} = 24.0129\,°C$$

Alle Werte entsprechen sich weitgehend, das Ergebnis ist also plausibel.

```
%% Statistische Tolerierung über Simulation
gamma = 0.9973;
N = 100000;
IUsim = unifrnd(49.75e-6,50.25e-6,N,1);
IRsim = unifrnd(19.9e-6,20.1e-6,N,1);
z1 = normrnd(0,1,N,1);
z2 = normrnd(0,1,N,1);
RU0sim = RU0 + SRU*z1;
% RR0sim = RR0 + SRR*z2;
RR0sim = RR0 + rho*SRR*z1 + sqrt(1-rho^2)*SRR*z2;
alphaRsim = normrnd(alphaR,SalphaR,N,1);
TRsim = (IUsim.*RU0sim.*(1+alphaRsim*(TU - T0)) - IRsim.*RR0sim.*(1-T0*alphaR-
sim))./(IRsim.*RR0sim.*alphaRsim);

% Schätzung Prognosebereich
TRmin2 = mean(TRsim) + tinv((1-gamma)/2,N-1)*std(TRsim)*sqrt(1 + 1/N)
TRmax2 = mean(TRsim) + tinv((1+gamma)/2,N-1)*std(TRsim)*sqrt(1 + 1/N)
TTR2 = abs(TRmax2 - TRmin2)

% Relative Summenhäufigkeit
FTR = (1:N)/N;
TRsort = sort(TRsim);

% Definition des Grafikfensters
figure(5);

plot(TRsort,FTR,'b','Linewidth',2);
xlabel('Temperatur T_R / °C');
ylabel('Verteilungsfunktion');

% Berechnung des Toleranzbereichs über die relative Summenhäufigkeit
gamma = 0.9973;
TRmin3 = TRsort(find(FTR<=(1-gamma)/2,1,'last'));
TRmax3 = TRsort(find(FTR>=(1+gamma)/2,1,'first'));
TTR3 = abs(TRmax3 - TRmin3)
```

i) Ein Vergleich der numerisch bestimmten Empfindlichkeiten und den analytisch bestimmten Empfindlichkeiten zeigt nur dann plausible Werte, wenn die Korrelation der beiden Widerstände zu null gesetzt wird. Ansonsten reduziert die Korrelation die Empfindlichkeit und die Werte sind nicht identisch.

```
% Statistische Simulation ohne Korrelation
…
RU0sim = RU0 + SRU*z1;
RR0sim = RR0 + SRR*z2;
…
% Vergleich dem Empfindlichkeiten
EIUsim = polyfit(IUsim,TRsim,1);
EIUsim = EIUsim(1)
EIU
EIRsim = polyfit(IRsim,TRsim,1);
EIRsim = EIRsim(1)
EIR
ERUsim = polyfit(RU0sim,TRsim,1);
ERUsim = ERUsim(1)
ERU
ERRsim = polyfit(RR0sim,TRsim,1);
ERRsim = ERRsim(1)
ERR
EalphaRsim = polyfit(alphaRsim,TRsim,1);
EalphaRsim = EalphaRsim(1)
EalphaR
```

j) Für die Ströme I_R = 20 µA und I_{U1} = 48 µA sowie I_{U2} = 52 µA werden die Temperaturen T_{R1} = 110.6667 °C und T_{R2} = 146 °C berechnet. Die Quantisierung führt demnach auf Temperatursprünge von ΔT_R = 35.3333 °C.

k) An der statistischen Tolerierung ändern sich nur die Toleranzangaben für die beiden Ströme I_U und I_R. Durch die Parallelschaltung addieren sich die Varianzen zur Gesamtvarianz. Da einmal 5 und einmal 12 Stromquellen parallel geschaltet werden gilt:

$$\sigma_{IR} = \sqrt{5} \cdot \sigma_{I0} = 0.0257\ \mu A$$

und

$$\sigma_{IU} = \sqrt{12} \cdot \sigma_{I0} = 0.0398\ \mu A$$

Die Varianz σ_{TR}^2 berechnet sich damit über folgenden MATLAB-Code:

```
%% Statistische Tolerierung
% Bestimmung der Standardabweichungen der Parallelschaltung
SI0 = 0.0115e-6;
SIR = sqrt(5)*SI0;
SIU = sqrt(12)*SI0;

% Berechnung der Varianz der Ausgangsgröße
STR2 = EIU^2*SIU^2 + EIR^2*SIR^2 + ERU^2*SRU^2 + ERR^2*SRR^2 +
2*rho*ERU*ERR*SRU*SRR + EalphaR^2*SalphaR^2;
TTR4 = 6*sqrt(STR2)
```

Es ergibt sich ein Toleranz von

$$\Delta T_{R4} = 20.4732\ °C$$

Sie ist trotz gleicher relativer Toleranz jeder Stromquelle kleiner, weil die Ströme statistisch unabhängig sind und sich damit zufällige Abweichungen kompensieren.