Name: …………………………………..

Matrikel-Nr.: ……………………………

Hinweise:

- Diese Klausur enthält 3 Aufgaben.
- Die Unterlagen bestehen aus 4 Seiten inkl. Deckblatt.
- Die Dauer der Klausur beträgt 1.5 Stunden.
- Erlaubte Hilfsmittel:
    a. Schriftliche Hilfsmittel
    b. Zugewiesener Laborrechner
    c. Taschenrechner
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und notieren Sie jeweils Ihren Namen und Matrikelnummer.
- Stellen Sie den Lösungsweg ausführlich dar.
- Geben Sie dieses Deckblatt, die Aufgabenstellung und alle bearbeiteten Blätter mit Ihrer Klausur ab.

Aufgabe	max. Punktzahl	Ist-Punktzahl
1	33	
2	33	
3	34	
Σ	100	
Note		

1 Aufgabe

Der Hersteller von Solarmodulen untersucht seine Solarzellen auf Ertrag. Dazu werden 40 Module vermessen. Es ergeben sich die in der Tabelle dargestellten Daten. Sie sind als Datei „Solarmodul.mat“ auf ihrem Rechner verfügbar. Die Grundgesamtheit der Leistungen kann als normalverteilt angesehen werden.

Leistung P / W									
219.20	228.51	223.40	220.27	226.59	228.68	225.88	226.21	222.61	224.55
224.71	224.31	227.20	222.68	224.03	223.66	226.25	228.78	230.33	231.27
221.99	222.81	230.83	226.13	223.34	229.20	220.34	223.61	222.19	228.36
230.87	227.23	229.49	229.69	227.09	223.47	227.72	225.99	221.64	223.32
219.20	228.51	223.40	220.27	226.59	228.68	225.88	226.21	222.61	224.55

a) Berechnen Sie Mittelwert und Standardabweichung der Stichprobe und geben Sie zu den beiden Kenngrößen die Konfidenzbereiche an. Gehen Sie von einer Konfidenzzahl $\gamma = 95$ % aus.

b) Stellen Sie die Stichprobe als Histogramm dar. Zeichnen Sie den Konfidenzbereich des Mittelwertes ein.

c) Erklären Sie, warum die Stichprobe durch die t-verteilte Zufallsvariable

$$t = \frac{x - \bar{x}}{s \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}$$

mit n - 1 Freiheitsgraden beschrieben werden muss.

d) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Stichprobe in demselben Diagramm wie das Histogramm dar. Führen Sie eine entsprechende Normierung durch.

e) In welchem Intervall erwarten Sie einen zukünftigen Stichprobenwert? Gehen Sie wieder von einer Konfidenzzahl $\gamma = 95$ % aus.

f) Auf Basis der Stichprobenverteilung, des geschätzten Mittelwertes und der geschätzten Standardabweichung soll die Ausbeute geschätzt werden, wenn die Nennleistung $P \geq 220$ W spezifiziert ist und jedes Modul, das diese Spezifikation nicht erfüllt, ausgesondert wird.

2 Aufgabe

Die Kennlinie eines Luftmassenmessers soll durch eine Messung an einem Prüfstand ermittelt werden. Bei vorgegebenem Luftmassenstrom m ergeben sich folgende Messwerte für die Ausgangsspannung U. Die Messwerte sind in der Datei „Messwerte.mat“ auf Ihrem Rechner verfügbar.

m / kg/h	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450
U / V	0.007	1.658	2.397	2.839	3.377	3.678	4.078	4.416	4.683	4.952

a) Berechnen Sie für die Ausgangsspannung U ein kubisches Regressionsmodell als Funktion des Luftmassenstroms m.

b) Prüfen Sie die Terme auf Signifikanz und reduzieren Sie ggf. das Modell.

Aus der Physik ist bekannt, dass die Ausgangsspannung einen wurzelförmigen Verlauf

$$U = k \cdot \sqrt{m}$$

aufweist. Deshalb wird auch die inverse Funktion untersucht.

c) Berechnen Sie für den Luftmassenstrom m ein kubisches Regressionsmodell als Funktion der Ausgangsspannung U.

d) Prüfen Sie die Terme auf Signifikanz und reduzieren Sie ggf. das Modell. Lösen Sie die resultierende Gleichung nach U auf.

e) Stellen Sie die Stichprobenwerte sowie die Regressionsfunktion von Aufgabenteil b) und Aufgabenteil d) in einem Diagramm dar.

f) Stellen Sie für beide Regressionsfunktionen die Residuen in einem Diagramm dar. Welche Regression ist die bessere?

g) Welche generellen Schlussfolgerungen können aus dem Ergebnis gezogen werden?

3 Aufgabe

Bei der Fertigung mikromechanischer Produkte muss eine Silizium-Nitrit-Schicht in einem Reaktiven-Ionen-Ätzprozess strukturiert werden. Die Ätzrate R wird in nm/min angegeben und ist von folgenden Faktoren abhängig:

Abstand Elektroden	A / cm	0.8	1.2
Volumenstrom C_2F_6-Gas	V / cm³/s	125	200
Leistung RF-Elektrode	P / W	275	325

Der durchgeführte Versuch zur Untersuchung der Ätzrate ist in folgender Tabelle zusammengestellt und unter der Datei „VersuchsplanRIE.mat“ auf Ihrem Rechner verfügbar. Jeder Versuch wurde zweimal ausgeführt, es liegen Mittelwert und Standardabweichung vor.

Nr.	A	V	P	R_{mittel}	S_R
1	0.8	125	275	57.70	3.818
2	1.2	125	275	65.95	1.344
3	0.8	200	275	61.70	2.263
4	1.2	200	275	63.85	0.495
5	0.8	125	325	104.45	1.061
6	1.2	125	325	80.85	8.415
7	0.8	200	325	106.90	0.849
8	1.2	200	325	79.45	9.263

a) Welcher Versuchsplan wurde bei diesem Experiment verwendet? Welche funktionalen Abhängigkeiten lassen sich mit diesem Versuchsplan beschreiben?

b) Beschreiben Sie die Ätzrate als Regressionsfunktion der Faktoren A, V und P. Reduzieren Sie das Modell auf die signifikanten Terme.

c) Stellen Sie die Ätzrate als Funktion der signifikanten Faktoren grafisch dar.

d) Mit dem Vorwissen von Aufgabenteil b) kann ein Versuchsplan erstellt werden, der einen reduzierten Umfang aufweist. Geben Sie einen geeigneten Versuchsplan an.

e) Für einen Fertigungsprozess wird eine Ätzrate von R_0 = 75 nm/s benötigt. Welche Faktorkombination würde Sie verwenden, um diese Ätzrate möglichst robust einzustellen? Begründen Sie Ihr Vorgehen.

Musterlösung Aufgabe 1

a) Der Datensatz wird zunächst eingelesen

```
% Laden des Datensatzes
load Solarmodul.mat;
n = length(p);
```

Mittelwert und Standardabweichung ergeben sich aus den entsprechenden Funktionen in Matlab, Konfidenzbereiche werden mit den Formeln der Vorlesung abgeschätzt.

Konfidenzbereich für den Mittelwert bei unbekannter Varianz

$$\bar{x} - \frac{c_2 \cdot s}{\sqrt{n}} < \mu \le \bar{x} - \frac{c_1 \cdot s}{\sqrt{n}}$$

Konfidenzbereich für die Varianz

$$\frac{s^2 \cdot (n-1)}{c_2} < \sigma^2 \le \frac{s^2 \cdot (n-1)}{c_1}$$

```
% Mittelwert und Standardabweichung
pquer = mean(p)
s = std(p)

% Konfidenzbereiche der Kenngrößen
alpha  = 0.05;
mu_min = pquer - tinv(1 - alpha/2,n-1)*s/sqrt(n)
mu_max = pquer - tinv(alpha/2,n-1)*s/sqrt(n)
sig_min = sqrt(s^2*(n-1)/chi2inv(1-alpha/2,n-1))
sig_max = sqrt(s^2*(n-1)/chi2inv(alpha/2,n-1))
```

b) Die Daten für das Histogramm können mit dem Matlab-Befehl hist erzeugt werden.

```
% Berechnung des entsprechenden Histogramms
dph = 1;
ph = 215:dph:235;
h = hist(p,ph)/n;
plot([mu_min mu_min],[0 1],'g','Linewidth',2);
plot([mu_max mu_max],[0 1],'g','Linewidth',2);
```

c) Bei der Verteilung sind weder Mittelwert noch Varianz bekannt. Die Variable x weist eine Varianz von s^2 auf, die Variable x weist eine Varianz von s^2/n auf. Die Differenz beider Variablen weist damit eine Varianz von $s^2 \cdot (1 + 1/n)$ auf. Da die Varianz nicht bekannt ist, muss die t-Verteilung mit n - 1 Freiheitsgraden verwendet werden. Damit weist die Variable

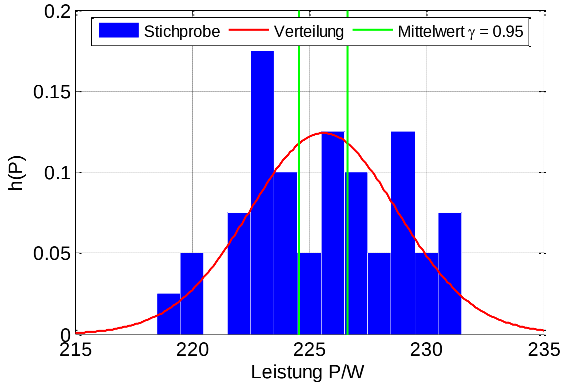
$$t = \frac{x_{n+1} - \bar{x}}{s \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}$$

eine t-Verteilung mit n - 1 Freiheitsgraden auf.

d) Bei der Darstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung muss berücksichtigt werden, dass sich die Flächen entsprechen. Deshalb wird die Wahrscheinlichkeitsdichte für eine einheitliche Darstellungsform normiert.

```
% Berechnung der entsprechenden Verteilung
dpf = 0.1;
pf = 215:dpf:235;
f = tpdf((pf- pquer)/s/sqrt(1+1/n),n-1);
fnorm = f/sum(f)/dpf;
```

Es ergibt sich folgende Grafik:



e) Das Prognoseintervall errechnet sich bei unbekannter Standardabweichung aus der t-Verteilung mit n - 1 Freiheitsgraden zu

$$\bar{x} + c_1 \cdot s \cdot \sqrt{1+\frac{1}{n}} < x_{n+1} \leq \bar{x} + c_2 \cdot s \cdot \sqrt{1+\frac{1}{n}}$$

```
% Prognoseintervall zukünftige Stichprobenwerte
pr_min = pquer + tinv(alpha/2,n-1)*s*sqrt(1+1/n)
pr_max = pquer + tinv(1 - alpha/2,n-1)*s*sqrt(1+1/n)
```

f) Als Verteilung wird wieder die t-Verteilung verwendet, die der Verteilung zukünftiger Stichprobenwerte entspricht. Mit dieser Verteilung und den berechneten Kenngrößen kann die Wahrscheinlichkeit berechnet werden

$$P(P \geq 220W) = 1 - P(P < 220W) = 1 - F\left(\frac{220 - \bar{p}}{s \cdot \sqrt{1+\frac{1}{n}}}\right) = 95.41\,\%$$

```
% Ausbeute ergibt sich aus der Wahrscheinlichkeit, dass die Leistung
% größer gleich dem Spezifikationswert ist
Ausbeute = 1 - tcdf((220-pquer)/s/sqrt(1+1/n),n-1)
```

Musterlösung Aufgabe 2

a) Der Datensatz wird zunächst eingelesen

```
% Einlesen der Messwerte
load Messwerte.mat;
m = Messwerte(1,:);
U = Messwerte(2,:);
```

Anschließend wird ein Regressionsmodell aufgebaut.

```
% Regression
model = [0; 1; 2; 3];
stats = regstats(U,m,model,{'beta','r','adjrsquare','tstat'})
Radj1 = stats.adjrsquare;
```

b) Die Signifikanzbewertung zeigt dass die Konstante entfernt werden kann. Das adjungierte Bestimmtheitsmaß reduziert sich unwesentlich von 0.9887 auf 0.9883. Weitere Terme können nicht entfernt werden.

```
% Modellreduktion um Konstante
model = [1; 2; 3];
stats = regstats(U,m,model,{'beta','r','adjrsquare','tstat'})
Radj1 = [Radj1 stats.adjrsquare];
beta1 = stats.beta;
```

c) Zur Bestimmung der Regressionsfunktion von dem inversen Zusammenhang müssen die beiden Variablem m und U ausgetauscht werden.

```
% Regression der inversen Funktion
model = [0; 1; 2; 3];
stats = regstats(m,U,model,{'beta','r','adjrsquare','tstat'})
Radj2 = stats.adjrsquare;
```

d) Die Analyse der Terme auf Signifikanz zeigt, dass die alle Terme nicht signifikant sind, außer dem quadratischen Term. Das Bestimmtheitsmaß steigt durch die Reduktion der Regressionsfunktion von 0.9991 auf 0.9993 geringfügig an.

```
% Modellreduktion um kubischen Term
model = [0; 1; 2];
stats = regstats(m,U,model,{'beta','r','adjrsquare','tstat'})
Radj2 = [Radj2 stats.adjrsquare];

% Modellreduktion um linearen Term
model = [0; 2];
stats = regstats(m,U,model,{'beta','r','adjrsquare','tstat'})
Radj2 = [Radj2 stats.adjrsquare];

% Modellreduktion um Konstante
model = [2];
stats = regstats(m,U,model,{'beta','r','adjrsquare','tstat'})
Radj2 = [Radj2 stats.adjrsquare];
beta2 = stats.beta;
```

Der Regressionskoeffizient beta2 ist 18.1703. Damit ergibt sich die Gleichung

$$m = 18.1703 \cdot U^2$$

Auflösen nach U ergibt

$$U = \sqrt{\frac{m}{18.1703}}$$

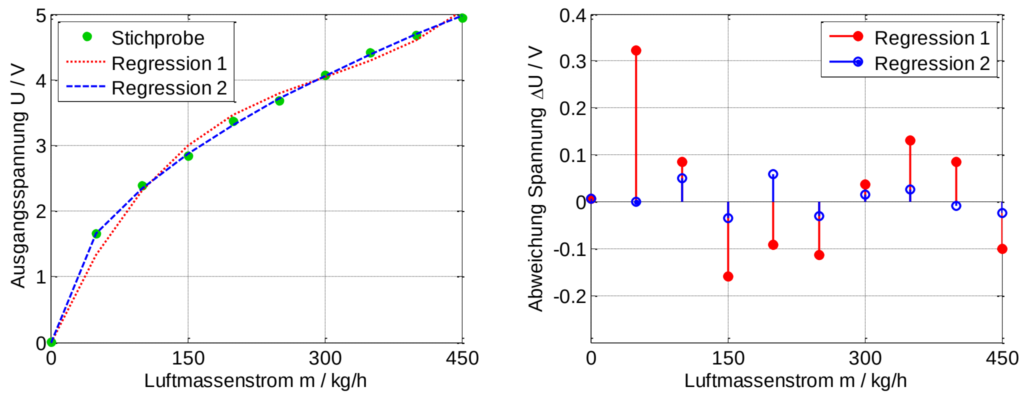
e) Nach Auflösen der Gleichung können alle die Stichprobenwerte und die beiden Regressionsfunktionen dargestellt werden.

```
% Berechnung der Funktionswerte
U1 = beta1(1)*m + beta1(2)*m.^2 + beta1(3)*m.^3;
U2 = sqrt(m/beta2);

% Grafische Darstellung
scatter(m,U,'g','filled');
hold on;
plot(m,U1,'r:','linewidth',2);
plot(m,U2,'b--','linewidth',2);
hold off;
```

f) Die Residuen errechnen sich aus der Differenz von Stichprobenwert und Regressionswert.

```
% Darstellung der Residuen
subplot(1,2,2);
stem(m,U1-U,'r','filled','linewidth',2);
hold on;
stem(m,U2-U,'b','linewidth',2);
hold off;
```

Beide Darstellungen führen zu folgender Grafik



Für diesen direkten Vergleich der beiden Regressionsfunktionen wird die Summe der Fehlerquadrate berechnet. Bei der ersten Regression ergibt sich $a_1 = 0.1928$ und bei der zweiten Regressionsfunktion ergibt sich $a_2 = 0.0099$. Damit ist in diesem Fall die Regression der inversen Funktion erheblich genauer als bei der Funktion selbst. Das Ergebnis wird auch grafisch bestätigt.

```
% Berechnung der Fehlerquadrate
a1 = sum((U1-U).^2)
a2 = sum((U2-U).^2)
```

g) Wenn ein funktionaler Zusammenhang zweier Größen bekannt ist, sich aber nicht durch ein Polynom darstellen lässt, kann es zielführend sein, die Regressionsfunktion der Umkehrfunktion zu berechnen und dann nach der Zielgröße aufzulösen. Dazu darf die Regressionsfunktion eine Ordnung von maximal 2 aufweisen.

Musterlösung Aufgabe 3

a) Bei dem Versuchsplan handelt es sich um einen vollfaktoriellen 2^3-Versuchsplan. Mit ihm können konstante, lineare und Wechselwirkungsterme bestimmt werden.

b) Zunächst werden die Daten eingelesen

```
% Einlesen der Messwerte
load VersuchsplanRIE.mat;
A = Versuchsplan(:,1);
V = Versuchsplan(:,2);
P = Versuchsplan(:,3);
R = Versuchsplan(:,4);
SR = Versuchsplan(:,5);
```

Durchführen der Regression und Reduzierung um die nicht signifikanten Terme

```
% Regressionsansatz
model = [0 0 0; 1 0 0; 0 1 0; 0 0 1; 1 1 0; 1 0 1; 0 1 1];
stats = regstats(R,[A V P],model,{'beta','r','adjrsquare','tstat'})
stats.tstat.pval
Radj = stats.adjrsquare;

% Reduktion letzter Term
model = [0 0 0; 1 0 0; 0 1 0; 0 0 1; 1 1 0; 1 0 1];
stats = regstats(R,[A V P],model,{'beta','r','adjrsquare','tstat'})
stats.tstat.pval
Radj = [Radj stats.adjrsquare];

% Reduktion zweitletzter Term
model = [0 0 0; 1 0 0; 0 1 0; 0 0 1; 1 0 1];
stats = regstats(R,[A V P],model,{'beta','r','adjrsquare','tstat'})
stats.tstat.pval
Radj = [Radj stats.adjrsquare];

% Reduktion dritter Term
model = [0 0 0; 1 0 0; 0 0 1; 1 0 1];
stats = regstats(R,[A V P],model,{'beta','r','adjrsquare','tstat'})
stats.tstat.pval
Radj = [Radj stats.adjrsquare];
stats.beta
```

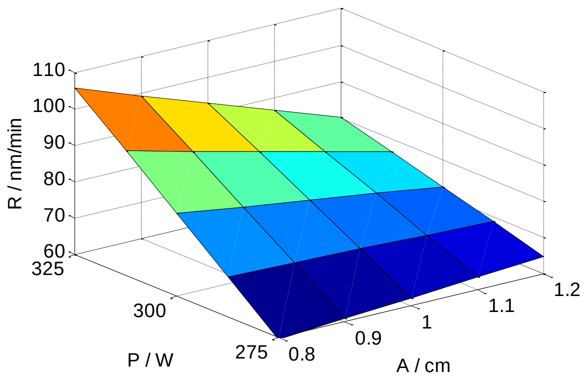
Wenn alle nicht signifikanten Terme eliminiert werden, ergibt sich folgende Regressionsfunktion

$$R = -541.5375 + 435.4688 \cdot A + 2.1485 \cdot P - 1.5363 \cdot A \cdot P$$

Die Ätzrate ist demnach nur von dem Abstand der Elektroden und der elektrischen Leistung P abhängig.

c) Da die Funktion nur noch von zwei Faktoren abhängt, kann sie z.B. als Surface-Plot dargestellt werden.

```
% Berechnung der Größen
a = 0.8:0.1:1.2;
p = 275:12.5:325;
[Ap,Pp] = meshgrid(a,p);
Rp = stats.beta(1)+stats.beta(2)*Ap+stats.beta(3)*Pp+stats.beta(4)*Ap.*Pp;

% Surface-Plot mit Beschriftung
surf(Ap,Pp,Rp);
```



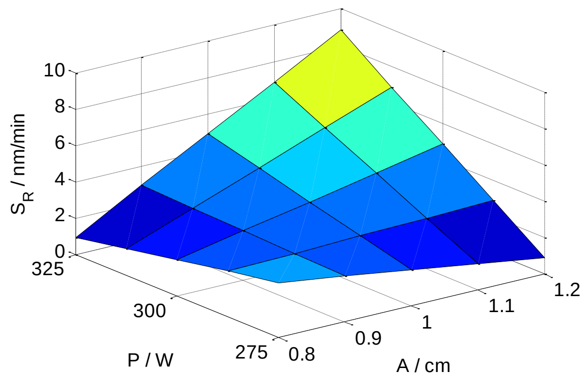
d) Da bei dem Versuch der Volumenstrom keinen signifikanten Einfluss besitzt, muss er auch im Versuchsplan nicht variiert werden. Damit wäre ein geeigneter Versuchsplan ein vollfaktorieller 2^2-Versuchsplan

Nr.	A	P	R_1	R_2
1	0.8	275		
2	1.2	275		
3	0.8	325		
4	1.2	325		

e) Eine geeignete Faktorkombination ergibt sich aus der Forderung, dass das Ziel erreicht wird und die Streuung minimal wird. Das Ziel einer Ätzrate von 75 nm/min kann durch unterschiedliche Parameterkombinationen erreicht werden Deshalb wird die Streuung des Prozesses als Funktion von Elektrodenabstand A und Leistung P berechnet.

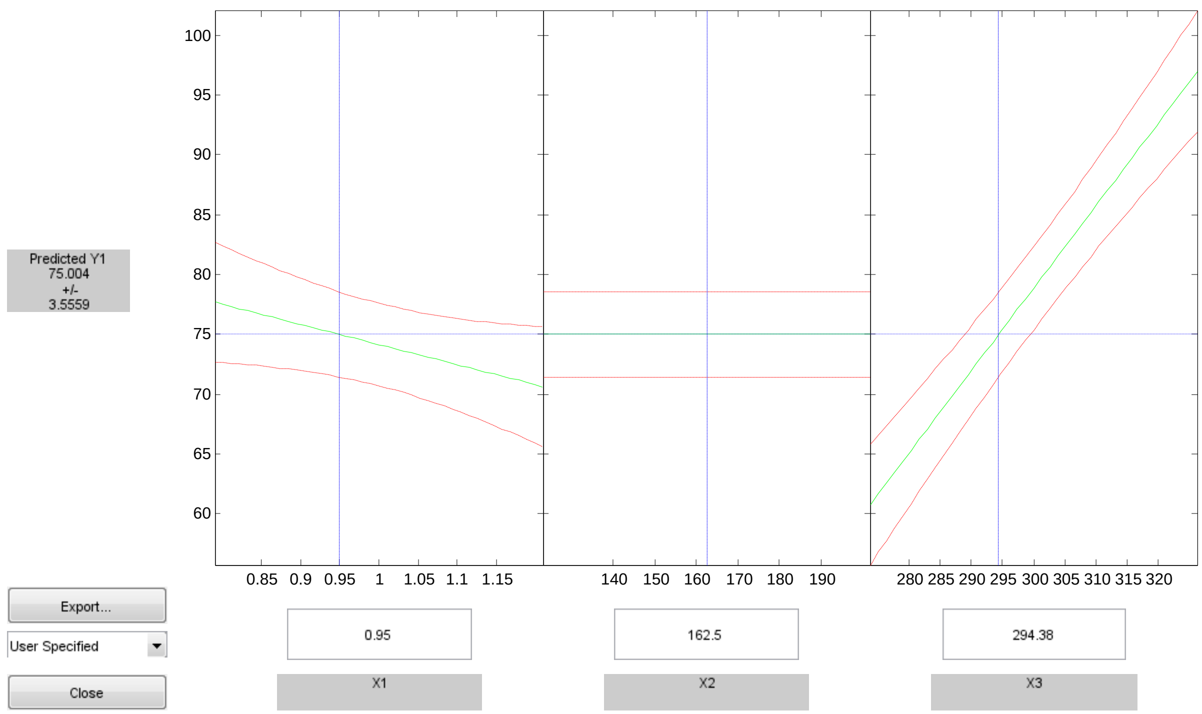
```
% Regression der Streuung
model = [0 0 0; 1 0 0; 0 0 1; 1 0 1];
stats = regstats(SR,[A V P],model,{'beta','r','adjrsquare','tstat'})
stats.beta

% Berechnung der Größen
SRp = stats.beta(1)+stats.beta(2)*Ap+stats.beta(3)*Pp+stats.beta(4)*Ap.*Pp;

% Surface-Plot mit Beschriftung
surf(Ap,Pp,SRp);
```

Es ergibt sich der im folgenden Bild dargestellte Zusammenhang.



Mit dem RS-Tool können Parameterkombination gefunden werden, die zu dem Zielwert von 75 nm/min führen.

```
% Suche nach Zielwert mit rstool
rstool([A V P],R,model)
```



Eine geringe Streuung wird im Bereich mittleren Elektrodenabstands (A = 0.95) und mittlerer Leistung (P = 294.38) erreicht. In diesem Punkt ist die Standardabweichung der Ätzrate S_R = 2.8909 nm/min.

```
% Berechnung der Streuung
Aopt = 0.95;
Popt = 294.38;
SRp = stats.beta(1)+stats.beta(2)*Aopt+stats.beta(3)*Popt+stats.beta(4)*Aopt.*Popt
```