Toleranzen in vernetzten Systemen EM1/2 — Klausur SS 2012

Name: …………………………………..

Matrikel-Nr.: ……………………………

Hinweise:

- Diese Klausur enthält 3 Aufgaben.
- Die Unterlagen bestehen aus 14 Seiten inkl. Deckblatt.
- Die Dauer der Klausur beträgt 120 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel:
  - Schriftliche Hilfsmittel
  - Zugewiesener Laborrechner
  - Taschenrechner
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und notieren Sie jeweils Ihren Namen und Matrikelnummer.
- Stellen Sie Ihren Lösungsweg ausführlich dar und begründen Sie Ihr Vorgehen.
- Geben Sie dieses Deckblatt, die Aufgabenstellung und alle bearbeiteten Blätter mit Ihrer Klausur ab.

Aufgabe	max. Punktzahl	Ist-Punktzahl
1	30	
2	33	
3	38	
	Σ = 100	

Note	

1 Aufgabe

Wiederholte Messungen der freigesetzten Wärme beim Übergang von Eis bei - 0.72 °C zu Wasser bei 0 °C ergaben die in der folgenden Tabelle dargestellten Werte. Die Daten sind in der Datei Schmelzwaerme.mat auf Ihrem Rechner verfügbar. Die Grundgesamtheiten weisen eine Normalverteilung auf. Die Varianz der entsprechenden Grundgesamtheiten ist unbekannt aber identisch.

Index	Verfahren A: Wärme in cal/g				
1 - 5	79.98	80.04	80.02	80.04	80.03
6 - 10	80.03	80.04	79.97	80.05	80.03
11 - 13	80.02	80.00	80.02		
Index	**Verfahren B: Wärme in cal/g**				
1 - 5	80.02	79.94	79.98	79.97	79.97
6 - 8	80.03	79.95	79.97		

a) Berechnen Sie für die Werte von Verfahren A den Mittelwert und geben Sie den 95% - Konfidenzbereich des Mittelwertes an.

b) Berechnen Sie für die Werte von Verfahren A die Varianz und geben Sie den 95% - Konfidenzbereich der Varianz an.

c) Stellen Sie die relative Häufigkeit der Stichprobe A und die geschätzte Wahrscheinlichkeitsdichte der Grundgesamtheit für die Werte von Verfahren A in einem Diagramm dar. Achten Sie auf eine maßstäbliche Darstellung.

d) Prüfen Sie mit Hilfe eines Hypothesentests, ob die Mittelwerte μ_A und μ_B identisch sind oder signifikant voneinander abweichen. Gehen Sie von einem Signifikanzniveau $\alpha = 5$ % aus.

e) Welche Möglichkeit sehen Sie alternativ zum Hypothesentest, die beiden Stichproben miteinander zu vergleichen? Führen Sie das zweite Verfahren durch und vergleichen Sie die Ergebnisse.

f) Leiten Sie eine Gleichung zur Berechnung der Varianz σ_y^2 der Größe

$$y = \frac{1}{n_A} \cdot \sum_{i=1}^{n_A} x_{Ai} - \frac{1}{n_B} \cdot \sum_{i=1}^{n_B} x_{Bi}$$

unter der Annahme her, dass die beiden Zufallsvariablen x_A und x_B voneinander unabhängig sind und aus Prozessen kommen, die dieselbe aber unbekannte Varianz σ_x^2 aufweisen.

2 Aufgabe

Bei der Messung eines Diodenstroms i_D als Funktion der Spannung u_D werden folgende Messwerte aufgenommen. Die Messwerte sind als Datei Diodenstrom.mat auf Ihrem Rechner verfügbar.

u_D / V	0.45	0.46	0.47	0.48	0.49	0.5	0.51	0.52
i_D / mA	0.2552	0.6203	0.5639	0.5991	1.3460	1.5567	1.9868	2.8039
u_D / V	0.53	0.54	0.55	0.56	0.57	0.58	0.59	0.6
i_D / mA	3.9081	4.9202	6.4437	8.5741	11.3041	14.7775	20.1936	26.9588

a) Berechnen Sie für den Diodenstrom i_D ein kubisches Regressionsmodell als Funktion der Diodenspannung u_D.

b) Prüfen Sie die Terme auf Signifikanz und reduzieren Sie ggf. das Modell.

c) Stellen Sie die Stichprobenwerte, die Regressionsfunktion sowie das Prognoseintervalle für zukünftige Messwerte mit γ = 99 % in einem Diagramm dar.

Aus der Physik ist bekannt, dass der Diodenstrom einen exponentiellen Verlauf

$$i_D(t) = I_S \cdot \left(e^{\frac{u_D(t)}{n \cdot U_T}} - 1 \right)$$

aufweist. Deshalb wird auch der Logarithmus des Diodenstroms i_D untersucht.

d) Berechnen Sie für den Logarithmus des Diodenstroms i_D ein kubisches Regressionsmodell als Funktion der Diodenspannung u_D.

e) Prüfen Sie die Terme auf Signifikanz und reduzieren Sie ggf. das Modell. Überführen Sie anschließend die Regressionswerte für den Logarithmus des Diodenstroms i_D in Regressionswerte für den Diodenstrom i_D.

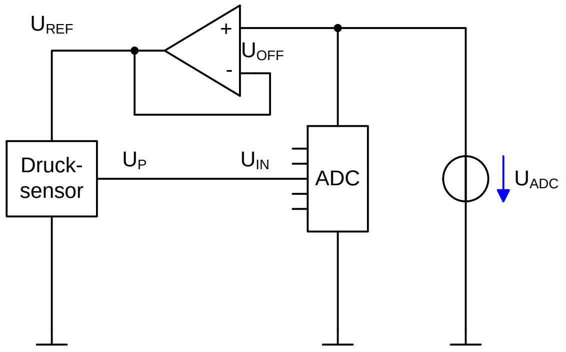
f) Stellen Sie auch für diesen Fall die Stichprobenwerte, die Regressionsfunktion sowie die Prognoseintervalle für zukünftige Messwerte mit γ = 99 % in einem Diagramm dar.

g) Diskutieren Sie die Ergebnisse, insbesondere die Summe der Fehlerquadrate und die Prognoseintervalle. Woraus ergeben sich die Unterschiede? Welche Annahmen gelten bei der Berechnung des Prognoseintervalls.

3 Aufgabe

1.1 Durchflussmessung mit Wirkdruckverfahren

Es gibt unterschiedliche Durchflusssensoren, die nach dem Differenzdruckverfahren arbeiten. Das folgende Schaltbild stellt den Schaltungsaufbau dar, der in dieser Aufgabe analysiert wird.



An einer Blende wird ein Druckabfall p erzeugt, der über einen Drucksensor gemessen wird. Der Durchfluss Q ergibt sich über die Gleichung

$$Q = k \cdot \sqrt{p}$$

Die Konstante k fasst unterschiedliche mechanische und aerodynamische Größen zusammen. Die Toleranzen der Größe k werden in dieser Aufgabe vernachlässigt. Der Drucksensor hat eine ratiometrische Ausgangsspannung

$$U_P = m \cdot p \cdot U_{REF}$$

Die Referenzspannung U_{REF} wird über einen Operationsverstärker erzeugt, der eine Offset-spannung U_{OFF} aufweist.

$$U_{REF} = U_{ADC} + U_{OFF}$$

Der Analog-Digital-Wandler (ADC) besitzt eine Auflösung von 10 bit und wird mit der Span-nung U_{ADC} betrieben. Er gibt einen diskreten Wert von

$$N = \frac{U_{IN}}{U_{ADC}}$$

aus.

Die Größen weisen folgende Toleranzen auf:

Größe	Mittelwert	Toleranz	Verteilung	Bemerkungen
U_{ADC}	5 V	- 250 … 250 mV	Normalverteilung	Toleranzangabe entspricht $\pm 3\cdot\sigma$
U_{OFF}	10 mV	-10 … 10 mV	Gleichverteilung	-
N_A	0	$\pm$ 1 / 2048	Gleichverteilung	-
k	$0.2\cdot\frac{m^3}{s\cdot\sqrt{mbar}}$	Toleranzen werden vernachlässigt		
m	$0.04\cdot\frac{1}{mbar}$	Toleranzen werden vernachlässigt		

a) Weisen Sie nach, dass zwischen dem Messwert N und dem Durchfluss Q der Zusammenhang

$$N = \frac{m\cdot Q^2}{k^2} + \frac{m\cdot Q^2}{k^2}\cdot\frac{U_{OFF}}{U_{ADC}} + \frac{U_A}{U_{ADC}} = \frac{m\cdot Q^2}{k^2} + \frac{m\cdot Q^2}{k^2}\cdot\frac{U_{OFF}}{U_{ADC}} + N_A$$

besteht und stellen Sie den Zusammenhang N(Q) als Soll-Kennlinie im Bereich $0 \le Q \le 1$ grafisch dar.

b) Bestimmen Sie die linearisierte Maßkette ΔN im Arbeitspunkt $Q_0 = 0.5\ m^3/s$ unter Berücksichtigung der oben aufgeführten Toleranzursachen. Berechnen Sie die Empfindlichkeiten E_{UADC}, E_{UA} und E_{UOFF}.

c) Verifizieren Sie die berechneten Empfindlichkeiten über eine statistische Simulation.

d) Führen Sie unter Berücksichtigung der oben aufgeführten Toleranzen eine arithmetische Tolerierung durch. Berechnen Sie die Toleranzen ΔQ im Arbeitspunkt $Q_0 = 0.5\ m^3/s$.

e) Führen Sie unter Berücksichtigung der oben aufgeführten Toleranzen eine statistische Tolerierung mit γ = 99.73 % durch. Berechnen Sie auch für die statistische Tolerierung die Toleranzen ΔQ im Arbeitspunkt $Q_0 = 0.5\ m^3/s$.

f) Vergleichen Sie die Ergebnisse der analytischen Tolerierung mit einer statistischen Simulation. Welche analytische Rechnung liegt näher an der statistischen Simulation? Worin sehen Sie die Ursache?

Musterlösung Aufgabe 1:

a) Der Datensatz wird zunächst eingelesen

```
% Laden des Datensatzes
load Schmelzwaerme.mat;
nA = length(VA);
nB = length(VB);
```

Mittelwert ergibt sich aus den entsprechenden Funktionen in MATLAB, Konfidenzbereiche werden mit den Gleichungen aus der Vorlesung abgeschätzt, Konfidenzbereich für den Mittelwert bei unbekannter Varianz, t-Verteilung mit n_A - 1 Freiheitsgraden

$$\bar{x} - \frac{c_2 \cdot s}{\sqrt{n}} < \mu \le \bar{x} - \frac{c_1 \cdot s}{\sqrt{n}}$$

```
% Mittelwert und Standardabweichung
VAquer = mean(VA)
SVA = std(VA)
VBquer = mean(VB);
SVB = std(VB);

% Konfidenzbereiche des Mittelwertes für Verfahren A
alpha = 0.05;
muA_min = VAquer - tinv(1 - alpha/2,nA-1)*SVA/sqrt(nA)
muA_max = VAquer - tinv(alpha/2,nA-1)*SVA/sqrt(nA)
```

Es ergibt sich ein Mittelwert von $\bar{x}_A$ = 80.0208 cal/g und ein Konfidenzbereich von

$$80.0063\ \text{cal}/\text{g} < \mu \le 80.0353\ \text{cal}/\text{g}$$

b) Standardabweichung ergibt sich aus den entsprechenden Funktionen in MATLAB, Konfidenzbereiche werden mit den Gleichungen aus der Vorlesung abgeschätzt, Konfidenzbereich für die Varianz, Chi^2-Verteiling mit n_A - 1 Freiheitsgraden

$$\frac{s^2 \cdot (n-1)}{c_2} < \sigma^2 \le \frac{s^2 \cdot (n-1)}{c_1}$$

Es ergibt sich eine Varianz von $s_A{}^2 = 5.7436 \cdot 10^{-4}$ cal²/g² und ein Konfidenzbereich von

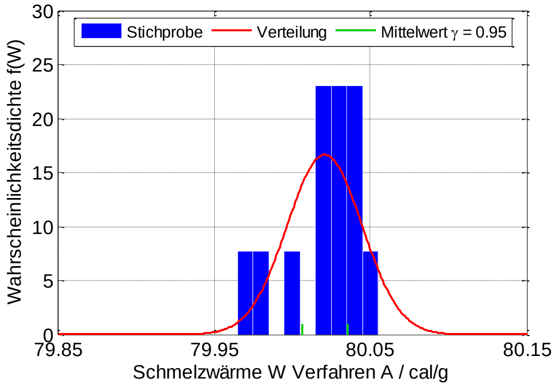
$$2.9534 \cdot 10^{-4}\ \text{cal}^2/\text{g}^2 < \sigma^2 \le 0.0016\ \text{cal}^2/\text{g}^2$$

```
% Konfidenzbereiche der Varianz für Verfahren A
varA_min = SVA^2*(nA-1)/chi2inv(1-alpha/2,nA-1)
varA_max = SVA^2*(nA-1)/chi2inv(alpha/2,nA-1)
```

c) Die Daten für das Histogramm können mit dem MATLAB-Befehl hist erzeugt werden. Die Verteilung ist eine t-Verteilung mit $n_A - 1$ Freiheitsgraden. Um die beiden Grafiken aufeinander abzubilden, muss eine der beiden Grafiken skaliert werden. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Flächen unter beiden Kurven gleich groß sind.

```
% Berechnung des entsprechenden Histogramms
dVAh = 0.01;
VAh = 79:dVAh:81;
h = hist(VA,VAh)/nA/dVAh;

% Berechnung der entsprechenden Verteilung
dVAf = 0.001;
VAf = 79:dVAf:81;
f = normpdf(VAf,VAquer,SVA);
```



d) Die Prüfung auf gleiche Mittelwerte $\mu_A = \mu_B$ erfolgt über die Variable

$$t = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}} \cdot s}$$

mit

$$s = \sqrt{\frac{(n_A - 1) \cdot s_A^2 + (n_B - 1) \cdot s_B^2}{n_A + n_B - 2}}$$

Sie besitzt eine t-Verteilung mit ($n_A + n_B - 2$) Freiheitsgraden. Sind die beiden Mittelwerte μ_A und μ_B gleich, muss die Stichprobe in dem Intervall

$$c_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}} \cdot s < \bar{x}_A - \bar{x}_B \le c_2 \cdot \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}} \cdot s$$

liegen. Es kann auch der p-Wert des Hypothesentests bestimmt werden. Beide Ergebnisse sind äquivalent.

```
% Vergleich der Mittelwerte über einen t-Test mit zwei Stichproben
% Berechnung des Annahmebereiches
```

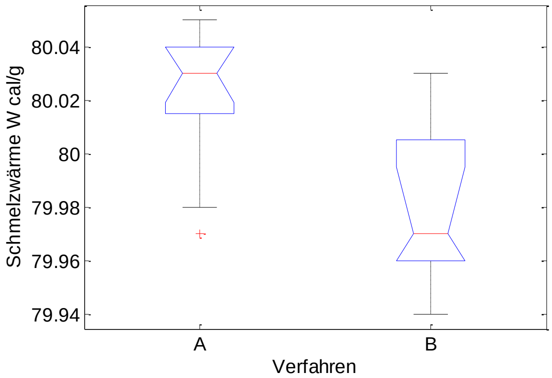
```
Vquer = VAquer - VBquer
S = sqrt(((nA-1)*SVA^2+(nB-1)*SVB^2)/(nA+nB-2));
V1 = tinv(alpha/2,nA+nB-2)*sqrt(1/nA+1/nB)*S
V2 = tinv(1-alpha/2,nA+nB-2)*sqrt(1/nA+1/nB)*S

% Berechnung des P-Wertes
P = tcdf(Vquer/sqrt(1/nA+1/nB)/S,nA+nB-2)
```

e) Alternativ kann eine Varianzanalyse durchgeführt werden.

```
% Alternativ kann eine Varianzanalyse durchgeführt werden
Waerme = [VA;VB]';
V = {'A','A','A','A','A','A','A','A','A','A','A','A','A',…
     'B','B','B','B','B','B','B','B'};
p = anova1(Waerme,V)
```

Der Hypothesentest bestätigt mit einem P-Wert von 0.41 % < 5 %, dass die Stichproben einen unterschiedlichen Mittelwert aufweisen. Auch der Box-Plot zeigt, dass die Stichproben einen unterschiedlichen Mittelwert haben.



f) Nach den Rechenregeln zur Varianz ergibt sich für die Variable

$$y = \frac{1}{n_A} \cdot \sum_{i=1}^{n_A} x_{Ai} - \frac{1}{n_B} \cdot \sum_{i=1}^{n_B} x_{Bi}$$

die Varianz

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n_A^2} \cdot \sum_{i=1}^{n_A} \sigma_x^2 + \frac{1}{n_B^2} \cdot \sum_{i=1}^{n_B} \sigma_x^2 = \frac{1}{n_A} \cdot \sigma_x^2 + \frac{1}{n_B} \cdot \sigma_x^2$$

Musterlösung Aufgabe 2:

a) Der Datensatz wird zunächst eingelesen

```
% Einlesen der Messwerte
% Diodenstrom id, Diodenspannung ud
load Diodenstrom.mat;
```

Anschließend wird ein Regressionsmodell aufgebaut.

```
% Regression
model = [0; 1; 2; 3];
stats = regstats(id,ud,model,{'beta','r','adjrsquare','tstat'})
```

b) Die Signifikanzbewertung zeigt, dass keine Terme entfernt werden können.

```
% Modellbewertung
stats.tstat.pval
```

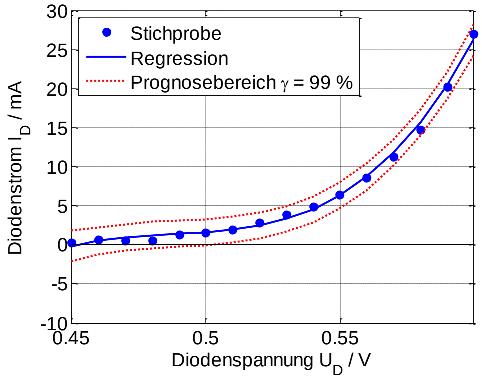
c) Zur Darstellung der Konfidenzbereiche wird polyfit verwendet, da alle Terme bis zur Ordnung 3 vorkommen.

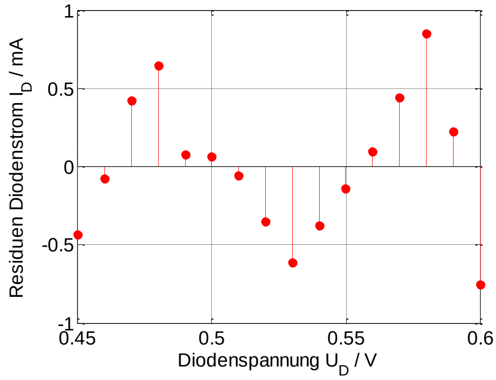
```
% Berechnung der Konfidenzbereiche mit polyfit und polyconf, da alle
% Terme bis zur Ordnung 3 erforderlich sind
[P,S] = polyfit(ud,id,3);
[i,iDelta] = polyconf(P,ud,S,'alpha',0.01,'predopt','observation');

% Grafische Darstellung
scatter(ud,id,'b','filled');
hold on;
plot(ud,i,'b','linewidth',2);
plot(ud,i-iDelta,'r:','linewidth',2);
plot(ud,i+iDelta,'r:','linewidth',2);
hold off;
h = legend('Stichprobe','Regression','Prognosebereich \gamma = 99 %');

% Grafische Darstellung der Residuen
stem(ud,i-id,'r','filled');
```

Es ergeben sich folgende Abbildungen





d) Zur Bestimmung der Regressionsfunktion von dem Zusammenhang zwischen Diodenspannung u_D und dem Logarithmus des Diodenstroms i_D wird identisch vorgegangen.

```
% Regression des Logarithmus von dem Diodenstrom
model = [0; 1; 2; 3];
stats = regstats(log(id),ud,model,{'beta','r','adjrsquare','tstat'})
```

e) Die Analyse der Terme auf Signifikanz zeigt, dass alle Terme bis auf den konstanten und linearen Term entfernt werden können.

```
% Modellreduktion um kubischen Term
model = [0; 1; 2];
stats = regstats(log(id),ud,model,{'beta','r','adjrsquare','tstat'})

% Modellreduktion um quadratischen Term
model = [0; 1];
stats = regstats(log(id),ud,model,{'beta','r','adjrsquare','tstat'})

% Beide Terme sind signifikant, keine weitere Reduktion von Termen möglich
stats.tstat.pval
```

Zur Bestimmung des Diodenstroms i_D muss die Exponentialfunktion der über die Regressionsfunktion berechneten Werte bestimmt werden.

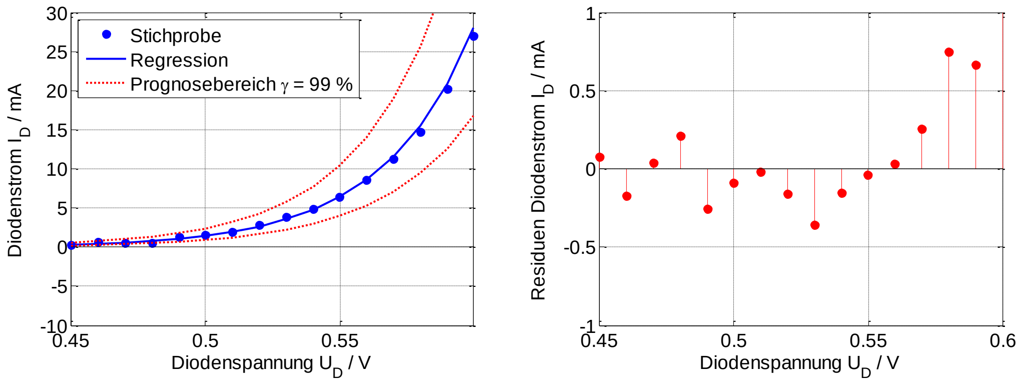
f) Zur Darstellung der Konfidenzbereiche wird wieder polyfit verwendet, da alle Terme bis zur Ordnung 1 signifikant sind.

```
% Berechnung der Funktionswerte wieder mit polyfit und polyconf
[P,S] = polyfit(ud,log(id),1);
[lni,lniDelta] = polyconf(P,ud,S,'alpha',0.01,'predopt','observation');

% Grafische Darstellung
scatter(ud,id,'b','filled');
hold on;
plot(ud,exp(lni),'b','linewidth',2);
plot(ud,exp(lni-lniDelta),'r:','linewidth',2);
plot(ud,exp(lni+lniDelta),'r:','linewidth',2);
plot([0 0],[-1000 1000],'k','Linewidth',1);
plot([-1000 1000],[0 0],'k','Linewidth',1);
hold off;
h = legend('Stichprobe','Regression','Konfidenzbereich \gamma = 99 %');

% Grafische Darstellung
stem(ud,exp(lni)-id,'r','filled');
```

Es ergeben sich folgende Abbildungen:



g) Die Summe der Fehlerquadrate ist im Falle der Transformation a = 2.5261 und ohne Transformation a = 3. Das liegt daran, dass die Funktion nach der Transformation praktisch eine Gerade ist, die sehr gut approximiert werden kann.

Allerdings ergeben sich im Fall der Transformation bei großen Diodenspannungen sehr große Prognoseintervalle bis zu 10 mA. Sie sind deutlich größer als im nicht transformierten Fall.

Außerdem sind die ursprünglich normalverteilten Messfehler nach der Transformation der Messwerte mit der Logarithmusfunktion nicht mehr normalverteilt. Deshalb ist eine Annahme, die bei der Berechnung der Prognoseintervalle gemacht wird, verletzt.

Musterlösung Aufgabe 3:

a) Zur Herleitung wird vom Analog-Digital-Wandler ausgegangen, Referenzspannung und Messgröße werden eingesetzt. Auflösen der Gleichung in die Summanden ergibt

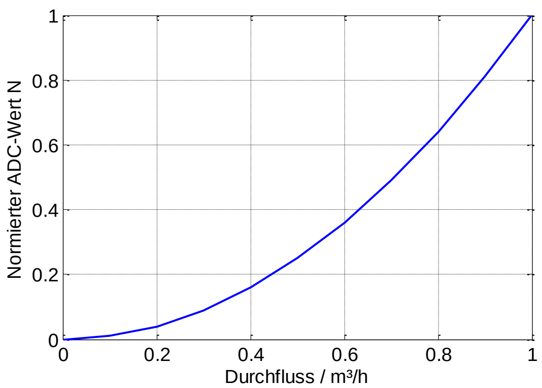
$$N = \frac{m \cdot p \cdot U_{REF} + U_A}{U_{ADC}} = \frac{m \cdot \frac{Q^2}{k^2} \cdot \left(U_{ADC} + U_{OFF}\right) + U_A}{U_{ADC}} = m \cdot \frac{Q^2}{k^2} + m \cdot \frac{Q^2}{k^2} \cdot \frac{U_{OFF}}{U_{ADC}} + N_A$$

Definition der Größen, Berechnung der Kennlinie und Darstellung in MATLAB

```
% Definition der Sollwerte und Toleranzen
k = 0.2;
m = 0.04;
UADC0 = 5;
dUADC = 500e-3;
sigUADC = dUADC/6;
Uoff0 = 10e-3;
dUoff = 20e-3;
sigUoff = dUoff/sqrt(12);
NA0 = 0;
dNA = 2/2048;
sigNA = dNA/sqrt(12);

% Berechnung der Kennlinie
Q = 0:0.1:1;
N0 = (m*Q.^2/k^2*(UADC0+Uoff0)+NA0;

% Grafische Darstellung
plot(Q,N0,'b','Linewidth',2);
```



b) Die linearisierte Maßkette ergibt sich aus dem vollständigen Fehlerdifferential

$$\Delta N = \frac{\partial N}{\partial U_{ADC}} \cdot \Delta U_{ADC} + \frac{\partial N}{\partial U_{OFF}} \cdot \Delta U_{OFF} + \frac{\partial N}{\partial N_A} \cdot \Delta N_A$$

mit

$$E_{UADC} = \frac{\partial N}{\partial U_{ADC}} = -m \cdot \frac{Q^2}{k^2} \cdot \frac{U_{OFF}}{U_{ADC}^2} - \frac{U_A}{U_{ADC}^2}$$

$$E_{UOFF} = \frac{\partial N}{\partial U_{OFF}} = m \cdot \frac{Q^2}{k^2} \cdot \frac{1}{U_{ADC}}$$

$$E_{NA} = \frac{\partial N}{\partial N_A} = 1$$

Berechnung in MATLAB

```
% Berechnung der Sensitivitäten im Arbeitspunkt Q0
Q0 = 0.5;
EUADC = -m*Q0^2/k^2*Uoff0/UADC0^2 - UA0/UADC0^2
EUoff = m*Q0^2/k^2/UADC0
ENA = 1
```

c) Zur Verifikation werden Zufallszahlen erzeugt, die der definierten Verteilung entsprechen. Mit diesen Zufallszahlen wird eine statistische Simulation der Größe N durchgeführt. Mit dem Befehl polyfit kann der lineare Koeffizient des Polynoms bestimmt werden, er entspricht der oben berechneten Empfindlichkeit.

```
% Vergleich mit statistischer Simulation
M = 1000000;
UADCsim = normrnd(UADC0,sigUADC,M,1);
NAsim = unifrnd(NA0-dNA,NA0+dNA,M,1);
Uoffsim = unifrnd(Uoff0-dUoff,Uoff0+dUoff,M,1);
Nsim = m*Q0^2/k^2 + m*Q0^2/k^2*Uoffsim./UADCsim + NAsim;
pUADC = polyfit(UADCsim,Nsim,1);
EUADCsim = pUADC(1)
pUoff = polyfit(Uoffsim,Nsim,1);
EUoffsim = pUoff(1)
pNA = polyfit(NAsim,Nsim,1);
ENAsim = pNA(1)
```

Vergleich der Zahlenwerte bestätigt die analytische Rechnung

Größe	Analytische Rechnung	Statistische Simulation
E_{UADC}	$-1\cdot10^{-4}$	$-1.0795\cdot10^{-4}$
E_{UOFF}	0.0500	0.0501
E_{NA}	1	1.0008

d) Berechnung der Toleranzen bei arithmetischer Tolerierung

$$T_{ARI} = \left|E_{UADC} \cdot \Delta U_{ADC}\right| + \left|E_{UOFF} \cdot \Delta U_{OFF}\right| + \left|E_{NA} \cdot \Delta N_A\right|$$

Um die Toleranz ΔQ zu berechnen wird durch die Steigung der Kennlinie dividiert.

```
% Arithmetische Tolerierung im Arbeitspunkt Q0
EN = k^2*UADC0/(2*m*Q0*(UADC0+Uoff0));
dNari = abs(EUADC*dUADC) + abs(ENA*dNA) + abs(EUoff*dUoff)
dQari = EN*dNari
```

Es ergibt sich eine Toleranz von $\Delta Q_{ARI} = 0.002\ m^3/s$.

e) Berechnung der Standardabweichung bei statistischer Tolerierung

$$\sigma_{STA} = \sqrt{\left(E_{UADC} \cdot \sigma_{UADC}\right)^2 + \left(E_{UOFF} \cdot \sigma_{UOFF}\right)^2 + \left(E_{NA} \cdot \sigma_{NA}\right)^2}$$

Um die Toleranz ΔQ zu berechnen wird wieder durch die Steigung der Kennlinie dividiert. Die Aussagesicherheit von 99.73 % entspricht der $\pm 3 \cdot \sigma$ Toleranz, das Ergebnis muss deshalb mit 6 multipliziert werden.

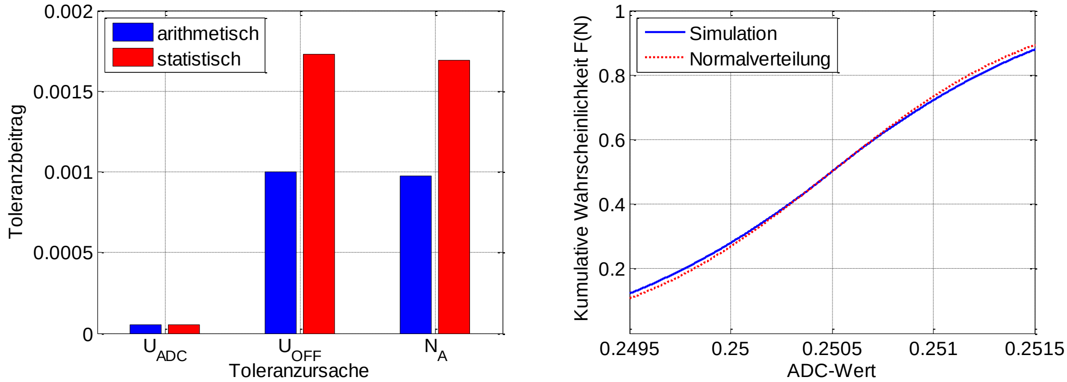
```
% Statistische Tolerierung im Arbeitspunkt Q0
EN = k^2*UADC0/(2*m*Q0*(UADC0+Uoff0));
dNsta = sqrt(EUADC^2*sigUADC^2 + EUA^2*sigUA^2 + EUoff^2*sigUoff^2)
dQsta = EN*6*dNsta
```

Es ergibt sich eine Toleranz von ΔQ_{STA} = 0.0024 m³/s. Sie ist größer als die Toleranz bei arithmetischer Tolerierung.

f) Für die statistische Simulation wird der bereits berechnete Datensatz verwendet. Er wird sortiert und die relative kumulative Häufigkeit F bestimmt. Die Toleranzen ergeben sich aus den Bedingungen
$F_{MIN} = (1 - \gamma)/2$ und $F_{MAX} = (1 + \gamma)/2$.

```
% Prüfung der Toleranz über statistische Simulation mit berechneten Daten
f = 1/M*ones(size(Nsim));
F = cumsum(f);
Nsort = sort(Nsim);
mmin = find(F <(1-0.9973)/2,1,'last');
mmax = find(F >=(1+0.9973)/2,1,'first');
dQsim = (Nsort(mmax)-Nsort(mmin))/2/EN
```

Das Simulationsergebnis liegt mit einer Toleranz von ΔQ_{SIM} = 0.0019 m³/s unterhalb von dem Wert der arithmetisch berechneten Toleranz ΔQ_{ARI} = 0.002 m³/s. Zur Erklärung wird eine Darstellung der einzelnen Toleranzursachen und der Verteilungsfunktion bei der Simulation herangezogen.



Durch die Umrechnung der Rechteckverteilung bei Offset-Spannung und Auflösung auf eine äquivalente Standardabweichung wird der Toleranzbereich mit γ = 99.73 % vergrößert. Da nur wenige Maße überlagert werden, ist der Gewinn der statistischen Tolerierung gering. Damit ist die Toleranz bei statistischer Tolerierung größer als bei arithmetischer Tolerierung. Die Simulation zeigt, dass die analytisch berechnete statistische Tolerierung nicht der Realität entspricht.