Name: …………………………………..

Matrikel-Nr.: ……………………………

Hinweise:

- Diese Klausur enthält 2 Aufgaben.
- Die Unterlagen bestehen aus 10 Seiten inkl. Deckblatt.
- Die Dauer der Klausur beträgt 120 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel:
  - Schriftliche Hilfsmittel
  - Zugewiesener Laborrechner
  - Taschenrechner
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und notieren Sie jeweils Ihren Namen und Matrikelnummer.
- Stellen Sie Ihren Lösungsweg ausführlich dar und begründen Sie Ihr Vorgehen.
- Geben Sie dieses Deckblatt, die Aufgabenstellung und alle bearbeiteten Blätter mit Ihrer Klausur ab.

Aufgabe	max. Punktzahl	Ist-Punktzahl
1		
2		
	Σ = 100	

Note	

1 Aufgabe

Für die Kalibrierung von Drucksensoren werden Prüfvorrichtungen verwendet. In einem Fertigungswerk befindet sich ein Referenzprüfstand, der von der physikalisch technischen Bundesanstalt freigegeben ist. Alle Prüfvorrichtungen müssen an diesen Prüfstand angeglichen werden.

Für den Angleich werden 5 Sensoren zunächst an dem Referenzprüfstand und anschließend an der Prüfvorrichtung vermessen. Von den Messungen wird jeweils der Mittelwert gebildet. Die Messung am Referenzprüfstand weist eine Standardabweichung σ_R = 0.2 mbar und die Prüfvorrichtung einer Standardabweichung σ_P = 0.5 mbar auf. Beide Messergebnisse weisen eine Normalverteilung auf.

In dieser Aufgabe soll ein Hypothesentest definiert und bewertet werden. Es soll geprüft werden, ob der Referenzprüfstand und die Prüfvorrichtung dieselben Messergebnisse aufweisen.

a) Formulieren Sie einen Hypothesentest, mit dem geprüft wird, ob die Messergebnisse der beiden Prüfstände voneinander abweichen. Erläutern Sie, welche Zufallsvariable Sie dem Test zugrunde legen.

b) Bestimmen Sie die Eingriffsgrenzen Δp_1 und Δp_2, die sich bei einem Signifikanzniveau von α = 5 % ergeben.

c) Bestimmen Sie die Gütefunktion des Hypothesentests.

d) Stellen Sie die Gütefunktion des Hypothesentests grafisch dar.

e) Wie groß ist bei dem Test die Abweichung Δp, die mit einer Sicherheit von 95 % erkannt werden kann.

f) Wie viele Teile werden benötigt, um eine Abweichung von $\Delta p = \pm$ 0.5 mbar mit einer Sicherheit von 95 % erkennen zu können? Lösen Sie diese Aufgabe numerisch.

g) Welche Eingriffsgrenzen Δp_1 und Δp_2 ergeben sich in diesem Fall?

2 Aufgabe

Bei der Fertigung von Glühstiftkerzen werden Keramikteile gesintert. Bei dem Sinterprozess sollen folgende Parameteränderungen bewertet werden:

- Sintertemperatur (Temp): 0 … 100 °C
- Sinterzeit (Time): 5 … 35 Min.
- Sinterdruck (Pres): 20 … 60 bar

In einem Versuch wird die Schwindung der Keramikteile während des Sinterprozesses untersucht. Der Versuch wird über die MATLAB-Funktion *Schwindung.p* simuliert. Sie ist in Ihrem Arbeitsverzeichnis gespeichert und wird in dem Format

S = Schwindung([Temp,Time,Pres]);

aufgerufen.

a) Erstellen Sie einen vollfaktoriellen 3^k-Versuchsplan und bestimmen Sie die Regressionskoeffizienten für ein vollquadratisches Modell der Schwindung mit den Größen Sintertemperatur (Temp), Sinterzeit (Time) und Sinterdruck (Pres).

b) Berechnen Sie mit diesen Daten den Konfidenzbereich für den Center-Point mit Temp = 50 °C, Time = 20 Min. und Pres = 40 bar.

c) Reduzieren Sie das Modell, in dem Sie nicht signifikante Terme entfernen und bestimmen Sie die Regressionskoeffizienten für dieses Modell (α = 5 %).

d) Mit dem Vorwissen, welche Terme in dem Modell signifikant sind, können Sie Versuchspläne mit geringerem Versuchsaufwand entwerfen. Stellen Sie einen D-optimalen Versuchsplan auf und bestimmen Sie die Regressionskoeffizienten der signifikanten Modellterme.

e) Welchen Arbeitspunkt würden Sie wählen, um eine minimale Schwindung zu bekommen?

Zur Bewertung einer zukünftigen Fertigungsstreuung wird für diesen Arbeitspunkt eine Toleranzanalyse durchgeführt. Es wird davon ausgegangen, dass die eingestellten Prozessparameter normalverteilt sind und die Standardabweichungen σ_{Temp} = 0.5 °C, σ_{Time} = 0.1 Min. und σ_{Pres} = 1 bar besitzen.

f) Bestimmen Sie für den Center-Point den Prognosebereich (γ = 99.73 %) für zukünftige Schwindungswerte mit Hilfe einer Monte-Carlo-Simulation, die einen Stichprobenumfang N = 10000 besitzt.

g) Welcher Parameter trägt am meisten zur Toleranz der Schwindung bei.

h) Plausibilisieren Sie die Ergebnisse der Aufgabenteile f) und g).

Musterlösung Aufgabe 1:

a) Das Ergebnis des Referenzprüfstands kann über die standardnormalverteilte Zufallsvariable p_R

$$p_R = \frac{\bar{p}_R - \mu_R}{\frac{\sigma_R}{\sqrt{5}}} = \sqrt{5} \cdot \frac{\bar{p}_R - \mu_R}{\sigma_R}$$

beschrieben werden. Ebenso gilt für die Prüfvorrichtung

$$p_P = \frac{\bar{p}_P - \mu_P}{\frac{\sigma_P}{\sqrt{5}}} = \sqrt{5} \cdot \frac{\bar{p}_P - \mu_P}{\sigma_P}$$

Die Abweichung der beiden Prüfstände wird durch die Differenz p_R - p_P beschrieben. Da beide Zufallsvariablen normalverteilt sind, ist auch die Differenz normalverteilt mit den Mittelwert

$$\Delta\mu = \mu_P - \mu_R$$

und der Standardabweichung

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\sigma_P^2 + \sigma_R^2\right)$$

Damit ist die Größe

$$z = \sqrt{5} \cdot \frac{\bar{p}_P - \bar{p}_R - \mu_P + \mu_R}{\sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_R^2}} = \sqrt{5} \cdot \frac{\Delta\bar{p} - \Delta\mu}{\sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_R^2}}$$

standardnormalverteilt. Für die Größe z wird folgender Hypothesentest aufgestellt:

H_0: Die Prüfstände weichen nicht voneinander ab, $\Delta\mu = 0$
H_0: Die Prüfstände weichen voneinander ab, $\Delta\mu \neq 0$

b) Die Eingriffsgrenzen ergeben sich unter Annahme der Nullhypothese $\Delta\mu = 0$ aus der Bedingung

$$c_1 = F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) =$$

und

$$c_1 = F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) =$$

Umrechnen in den Druckbereich führt zu

$$\Delta p_1 = c_1 \cdot \frac{\sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_R^2}}{\sqrt{5}}$$

und

$$\Delta p_2 = c_2 \cdot \frac{\sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_R^2}}{\sqrt{5}}$$

c) Die Gütefunktion gibt die Wahrscheinlichkeit für eine richtige Verwerfung der Nullhypothese als Funktion der wirklichen Abweichung $\Delta\mu$ an. Sie ergibt sich aus der Gleichung

$$1-\beta(\Delta\mu) = \int_{-\infty}^{\Delta p_1} f(\Delta p)\,\Delta p + 1 - \int_{-\infty}^{\Delta p_2} f(\Delta p)\,\Delta p$$

Dabei ist $f(\Delta p)$ eine Normalverteilung mit dem oben berechneten Mittelwert $\Delta\mu$ und der oben berechneten Standardabweichung σ.

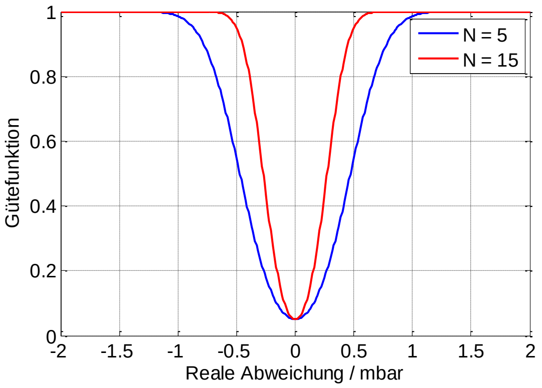
d) Die Gütefunktion kann mit folgendem MATLAB-Programm dargestellt werden:

```
% Definition der Eingriffsgrenzen
n = 5;
sigR = 0.2;
sigP = 0.5;
sig = sqrt(sigP^2+sigR^2)/sqrt(n);
alpha = 0.05;
c1 = norminv(alpha/2,0,1)
c2 = norminv(1-alpha/2,0,1)
p1 = c1 *sig
p2 = c2 *sig

% Berechnung der Gütefunktion
dmu = -2:0.01:2;
G = normcdf(p1,dmu,sig) + 1 - normcdf(p2,dmu,sig);

% Definition des Grafikfensters
f = figure(1);
set(f,'Position',[100 100 600 400]);
plot(dmu,G,'b','Linewidth',2);
axis([-2 2 0 1]);
set(gca,'XTick',-2:0.5:2,'YTick',0:0.2:1);
set(gca,'XTickLabel',-
2:0.5:2,'YTickLabel',0:0.2:1,'FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14
);
xlabel('Reale Abweichung / mba-
r','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Gütefunktion','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
grid on;
box on;
```

Es ergibt sich die blaue Kurve in dem folgenden Diagramm:



e) Die Grenze ergibt sich aus dem ersten Wert der Gütefunktion, der eine Wahrscheinlichkeit $p \leq 0.95$ aufweist.

```
% Berechnung des ersten Wertes, der eine Wahrscheinlichkeit <= 0.95 besitzt
bin = find(G<=0.95,1,'first');
dp = abs(dmu(bin))
```

Es ergibt sich ein Wert $\Delta p = 0.8680$ mbar.

f) Bei der Erhöhung des Stichprobenumfangs ändert sich im Wesentlichen die Standardabweichung. Durch eine Iteration kann der erforderliche Stichprobenumfang bestimmt werden. Es werden N = 16 Teile benötigt, um die erforderliche Aussagesicherheit zu bekommen. Die Gütefunktion ist in der Abbildung bereits rot eingezeichnet.

```
% Erhöhung des Stichprobenumfangs, bis eine Wahrscheinlichkeit = 0.95 bei dp = 0.5
vorliegt
while dp > 0.5
    n = n + 1;
    sig = sqrt(sigP^2+sigR^2)/sqrt(n);
    c1 = norminv(alpha/2,0,1);
    c2 = norminv(1-alpha/2,0,1);
    p1 = c1 *sig;
    p2 = c2 *sig;
    G = normcdf(p1,dmu,sig) + 1 - normcdf(p2,dmu,sig);
    bin = find(G<=0.95,1,'first');
    dp = abs(dmu(bin));
end;
```

g) Die Eingriffsgrenzen ergeben sich in dem Fall zu $p_1 = -0.2725$ mbar und $p_2 = 0.2725$ mbar.

Musterlösung Aufgabe 2:

a) Erstellen des vollfaktoriellen Versuchsplans und Umrechnen in die gegebenen Werte

```
% Definition und Berechnung des vollfaktoriellen Versuchsplans
ff_design = fullfact([3 3 3])
Xff = [ff_design(:,1)*50-50, ff_design(:,2)*15-10, ff_design(:,3)*20];
Sff = Schwindung(Xff);
```

Berechnung des vollquadratischen Regressionsmodells und Ausgabe der Koeffizienten

```
% Vollquadratisches Regressionsmodell
model = [0 0 0; 1 0 0; 0 1 0; 0 0 1; 1 1 0; 1 0 1; 0 1 1; 2 0 0; 0 2 0; 0 0 2];
reg = regstats(Sff,Xff,model,{'tstat','adjrsquare','r'});
Koeffizienten = reg.tstat.beta
```

b) Definition des Center Points und Berechnung des Konfidenzbereichs

```
% Berechnung des Konfidenzbereiches
r = reg.r;
Xk = [ones(size(Xff(:,1))) Xff(:,1) Xff(:,2) Xff(:,3) ...
      Xff(:,1).*Xff(:,2) Xff(:,1).*Xff(:,3) Xff(:,2).*Xff(:,3) ...
      Xff(:,1).^2 Xff(:,2).^2 Xff(:,3).^2];
b = reg.tstat.beta;
xp = [1 50 20 40 50*20 50*40 20*40 50^2 20^2 40^2]'
FG = (length(Xk(:,1))-length(b));
Sk = b'*xp
Smin = b'*xp - tinv(0.975,FG)*sqrt(1/FG*r'*r)*sqrt(xp'*inv(Xk'*Xk)*xp)
Smax = b'*xp - tinv(0.025,FG)*sqrt(1/FG*r'*r)*sqrt(xp'*inv(Xk'*Xk)*xp)
```

führt zu dem Mittelwert S = 3.7163 % und einem Konfidenzbereich mit S_{min} = 3.1342 % und S_{max} = 4.2983. Dabei können die absoluten Zahlen wegen des Rauschens bei dem Versuch *Schwindung.p* variieren.

c) Es werden zunächst die Terme höherer Ordnung entfernt, dann Terme erster Ordnung. Die Reihenfolge beim Entfernen von Termen kann aufgrund unterschiedlicher Datensätze im Detail anders aussehen, das Endergebnis wird gleich sein.

```
% Entfernen von Termen kann aufgrund unterschiedlicher Datensätze im Detail
% anders aussehen, beginnen mit Termen höherer Ordnung
reg.tstat.pval
model = [0 0 0; 1 0 0; 0 1 0; 0 0 1; 1 1 0; 1 0 1; 0 1 1; 2 0 0; 0 2 0];
reg = regstats(Sff,Xff,model,{'tstat','adjrsquare','r'});
reg.tstat.pval
model = [0 0 0; 1 0 0; 0 1 0; 0 0 1; 1 1 0; 1 0 1; 2 0 0; 0 2 0];
reg = regstats(Sff,Xff,model,{'tstat','adjrsquare','r'});
reg.tstat.pval
model = [0 0 0; 1 0 0; 0 1 0; 0 0 1; 1 1 0; 1 0 1; 2 0 0];
reg = regstats(Sff,Xff,model,{'tstat','adjrsquare','r'});
reg.tstat.pval
model = [0 0 0; 1 0 0; 0 1 0; 0 0 1; 1 0 1; 2 0 0];
reg = regstats(Sff,Xff,model,{'tstat','adjrsquare','r'});
reg.tstat.pval
Koeffizienten_Reduziert = reg.tstat.beta
```

Es ergibt sich eine Regressionsfunktion der Form

$$S = 0.3199 + 5.0477 \cdot 10^{-2} \cdot \mathrm{Temp} + 1.2113 \cdot 10^{-2} \cdot \mathrm{Time} + 4.5024 \cdot 10^{-2} \cdot \mathrm{Pres}$$
$$- 2.8601 \cdot 10^{-4} \cdot \mathrm{Temp} \cdot \mathrm{Pres} - 2.4569 \cdot 10^{-4} \cdot \mathrm{Temp}^2$$

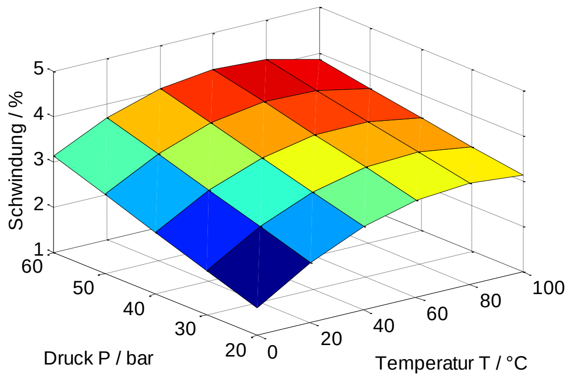
d) Konstruktion des D-optimalen Versuchsplans für das reduzierte Modell mit $N = 1.5 \cdot M = 9$ Versuchen

```
% D-optimaler Versuchsplan mit 6 Termen soll 1.5 x 6 = 9 Versuche aufweisen
model = [0 0 0; 1 0 0; 0 1 0; 0 0 1; 1 0 1; 2 0 0];
AnzahlVariable = 3;
AnzahlVersuche = 9;
[d_design,Xd] = cordexch(AnzahlVariable,AnzahlVersuche,model,'tries',10);
Xd = [d_design(:,1)*50+50, d_design(:,2)*15+20, d_design(:,3)*20+40];
Sd = Schwindung(Xd);
reg = regstats(Sd,Xd,model,{'tstat','adjrsquare','r'});
Koeffizienten_DOptimal = reg.tstat.beta
```

e) Nach der Regressionsgleichung geht die Variable Time linear mit positiver Steigung ein. Um die Schwindung zu minimieren, muss Time = 5 gewählt werden. Dann ist die Funktion nur noch von den Variablen Temp und Pres abhängig. Sie kann deshalb als Surface-Plot dargestellt werden.

```
% Berechnung des Punktes minimaler Schwindung, Sinterzeit muss minimal
% sein, da beta(2) > 0, grafische Darstellung zu Identifikation des Optimums
b = reg.tstat.beta
temp = 0:20:100;
pres = 20:10:60;
[Temp,Pres] = meshgrid(temp,pres);
Sreg = (b(1) + b(2)*Temp + b(3)*5 + b(4)*Pres + b(5)*Temp.*Pres + b(6)*Temp.^2);
surf(Temp, Pres,Sreg);
axis([0 100 20 60 1 5]);
set(gca,'XTick',0:20:100,'YTick',20:10:60,'ZTick',1:1:5);
set(gca,'FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
xlabel('Temperatur T / °C','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Druck P / bar','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
zlabel('Schwindung / %','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
grid on;
box off;
```

Es ergibt sich folgende Grafik



Eine minimale Schwindung wird bei xopt = [0 5 20] erreicht.

f) Durchführen einer Monte-Carlo-Simulation mit einem Stichprobenumfang N = 10000, dem Center-Point als Arbeitspunkt und Normalverteilungen mit den angegebenen Standardabweichungen.

```
% Monte-Carlo-Simulation im Center-Point
N = 10000;
X = zeros(N,3);
gamma = 0.9973;
Xmc = [normrnd(50,0.5,1000,1) normrnd(20,0.1,1000,1) normrnd(40,1,1000,1)];
Smc = Schwindung(Xmc);
```

Berechnung des Prognosebereiches über die t-Verteilung, da die Varianz unbekannt ist.

```
% Prognosebereich im Center Point
Smean = mean(Smc)
Smin = Smean + tinv((1-gamma)/2,N-1)*std(Smc)*sqrt(1+1/N)
Smax = Smean + tinv((1+gamma)/2,N-1)*std(Smc)*sqrt(1+1/N)
```

Simulation führt zu dem Mittelwert S = 3.7150 % und dem Prognosebereich S_{min} = 3.1310 % und S_{max} = 4.2990 %. Dabei können die absoluten Zahlen wegen des Rauschens bei dem Versuch *Schwindung.p* variieren.

g) Aus dem Ansatz zur Tolerierung unkorrelierter Größen ergibt sich in dem Arbeitspunkt

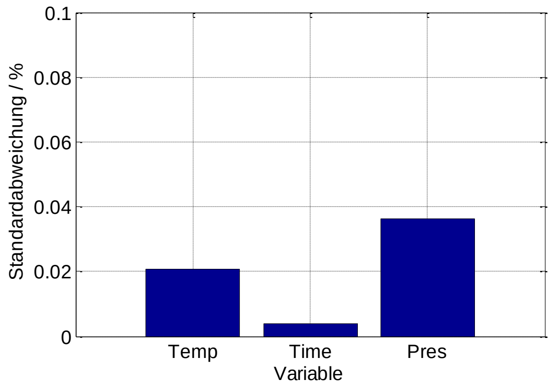
$$\sigma_S^2 = E_{Temp}^2 \cdot \sigma_{Temp}^2 + E_{Time}^2 \cdot \sigma_{Time}^2 + E_{Pres}^2 \cdot \sigma_{Pres}^2$$

Numerische Berechnung der Empfindlichkeiten über die linearen Regressionskoeffizienten, anschließend statistische Tolerierung bei normalverteilten Einflussgrößen

```
% Anteile an der Varianz
reg = regstats(Smc,Xmc,'linear','tstat');
Sig = [0.5 0.1 1];
Var = reg.tstat.beta(2:4).^2.*Sig'.^2;
```

Darstellung der entsprechenden Standardabweichungen als Säulendiagramm

```
% Darstellung Anteile der Varianz
bar(1:3,sqrt(Var));
axis([0 4 0 0.1]);
set(gca,'XTick',1:3,'YTick',0:0.02:0.1);
set(gca,'XTickLabel',{'Temp','Time','Pres'},'FontWeight','normal','FontName','Arial
','FontSize',14);
xlabel('Variable','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Standardabweichung /
%','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
grid on;
box on;
```



Wesentliche Toleranzursache ist die Variation des Sinterdruckes. Dabei können die absoluten Zahlen wegen des Rauschens bei dem Versuch *Schwindung.p* variieren.

h) Die Toleranzrechnung berücksichtigt nur die Toleranzquellen Sintertemperatur, Sinterzeit und Sinterdruck. Bei dem Versuch existieren jedoch weitere Toleranzquellen, was zum Beispiel an dem Konfidenzbereich im Center-Point abgelesen werden kann, bei dem die Variablen Temp, Time und Pres konstant gehalten werden. Daraus ergeben sich starke Abweichungen zwischen Prognosebereich und Sensitivitätsanalyse.

```
% Vergleich der beiden Rechnungen
Toleranzrechnung = 6*sqrt(sum(Var))
Prognosebereich = Smax - Smin
```

Richtig wäre eine Toleranzrechnung

$$\sigma_S^2 = E_{Temp}^2 \cdot \sigma_{Temp}^2 + E_{Time}^2 \cdot \sigma_{Time}^2 + E_{Pres}^2 \cdot \sigma_{Pres}^2 + \sigma_{Sunbekannt}^2$$

Wird die interne Toleranzquelle beseitigt, stimmen die Rechnungen überein.