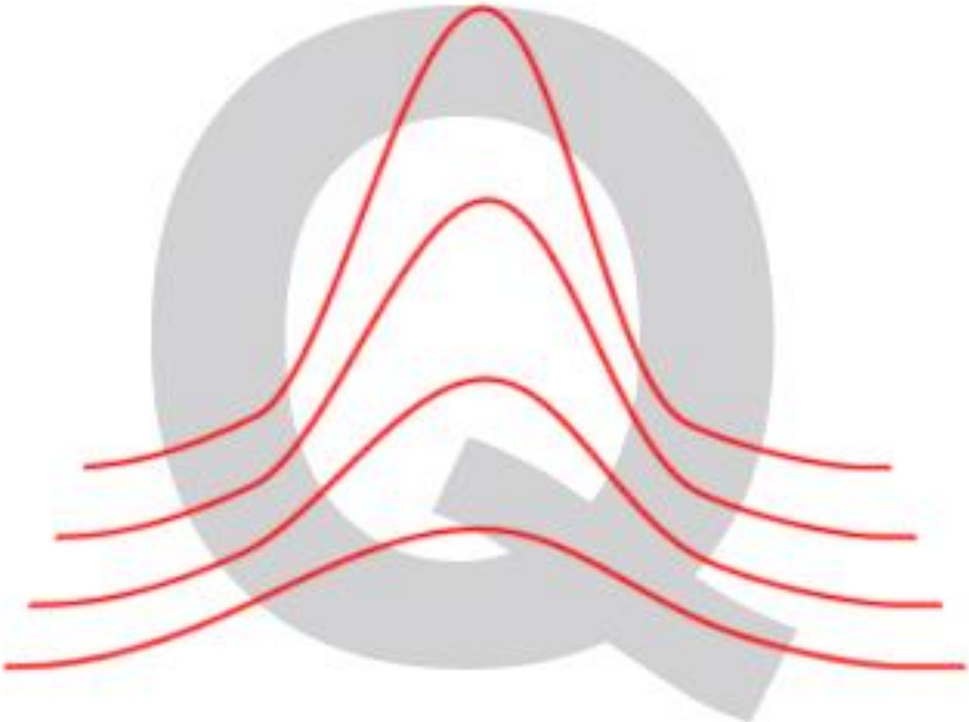


Design For Six Sigma

Teil B: Statistische Grundlagen

- Übungsaufgaben -

Manfred Strohrmann

Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Näher dran.

Änderungsindex

Datum	Verfasser	Änderungen
03.08.2016	M. Strohrmann	Korrigierte Ausgabe für Vorlesung SS 2017
26.06.2016	M. Strohrmann	Überarbeitung für Vorlesung SS 2016, Erstausgabe Statistische Tolerierung
15.03.2015	M. Strohrmann	Erstausgabe für Vorlesung SS 2015

1 Inhalt 1

2 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie 3

2.1 Auswahl Multimeter 3
2.2 System mit vier Teilsystemen 3
2.3 Ausschuss einer Spritzgussmaschine 3
2.4 Schnelltest für Messfühler 4
2.5 Fertigung von Drucksensoren 4

3 Beschreibende Statistik univariater Daten 5

3.1 Durchmesser einer Glasfaser 5
3.2 Verunreinigung von Halbleitermaterial 6

4 Univariate Wahrscheinlichkeitstheorie 7

4.1 Fertigung von Frästeilen 7
4.2 Erwarteter Ertrag einer Windkraftanlage 7
4.3 Rauschleistung eines Quantisierungsfehlers 8
4.4 Zeitverläufe und Verteilungsfunktionen 8
4.5 Generierung von Zufallszahlen mit beliebiger Verteilung 9

5 Schätzung von unbekannten Parametern einer Verteilung 11

5.1 Thermische Ausdehnung von Kunststoffen 11
5.2 Konfidenzintervall bei Temperaturmessungen 11
5.3 Maßabweichungen von Drehteilen 12

6 Hypothesentest 13

6.1 Statistische Prozesskontrolle 13
6.2 Zugversuche an Bond-Verbindungen 13
6.3 Messungen zur Schmelzwärme 15
6.4 Kalibrierung von Drucksensoren 16

7 Beschreibende Statistik multivariater Daten 17

7.1 Brechungsindex und Dichte von Glas 17
7.2 Scherfestigkeit von Lötverbindungen 18

8 Multivariate Wahrscheinlichkeitstheorie 19

8.1 Reihenschaltung von Widerständen 19

9 Korrelationsanalyse 21

9.1 Drift von Widerständen 21
9.2 Schwindung bei Gussteilen 22
9.3 Lungenvolumen von Sportlern 23

10 Varianzanalyse 25

10.1 Waschmitteltest 25
10.2 Lebensdauer von Generatoren 25

11 Regression zweidimensionaler Datensätze 27

11.1 Scherfestigkeit von Schweißverbindungen 27
11.2 Kennlinie von Luftmassenmessern 28
11.3 Messung eines Diodenstroms 29

12 Regression mehrdimensionaler Datensätze 31

12.1 Ausbeute eines chemischen Prozesses 31
12.2 Lebensdauer von Maschinenkomponenten 32
12.3 Einspritzmenge bei einem Common-Rail-System 33

13 Statistische Versuchsplanung 35

13.1 Fertigung von Blattfedern 35
13.2 Reaktives-Ionen-Ätzen 36
13.3 Optimierung von Glühstiftkerzen 37

14 Statistische Tolerierung 38

14.1 Durchflussmessung mit Wirkdruckverfahren 38
14.2 Kompensation von Temperatureinflüssen bei Pendeluhren 40
14.3 Wärmemessung in Fernwärme-Übergabestationen 42

15 Mess-System-Analyse 43

15.1 Temperaturmessung 43
15.2 Gewichtsmessung 45

2 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie

2.1 Auswahl Multimeter

In einer Schachtel liegen 10 Multimeter, darunter 3 defekte Multimeter.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, lauter brauchbare Multimeter zu bekommen, wenn zwei Multimeter nacheinander zufällig und ohne Zurücklegen entnommen werden?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, wenn die Packung 19 Multimeter enthält, 8 Multimeter defekt sind und 5 Artikel zufällig und ohne Zurücklegen herausgegriffen werden?

2.2 System mit vier Teilsystemen

System besteht aus vier Komponenten, von denen jede entweder funktioniert oder defekt ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass Komponente 1 defekt ist, liegt bei 5 %, die Wahrscheinlichkeit, dass Komponente 2 defekt ist, liegt bei 10 %. Für die Komponenten 3 und 4 gilt eine Fehlerwahrscheinlichkeit von 3 %. Das System ist gerade noch funktionsfähig, wenn mindestens 2 Komponenten fehlerfrei sind.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein System völlig einwandfrei ist? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das System gerade noch funktionsfähig ist?

b) Es werden 100 Systeme als Stichprobe analysiert. Mit wie vielen defekten Komponenten 1 rechnen Sie? Wie viele völlig einwandfreie und wie viele gerade noch funktionsfähigen Systeme erwarten Sie in Ihrer Stichprobe?

2.3 Ausschuss einer Spritzgussmaschine

In einer Kunststofffabrik werden Kleinteile im Spritzgussverfahren hergestellt. Die eingesetzte Maschine fertigt mit einer Wahrscheinlichkeit von 7 % Ausschuss. Um die Anzahl ausgelieferter Ausschussteile zu minimieren, durchlaufen alle Kleinteile eine automatisierte Prüfung. Durch die zweite Maschine zur Überprüfung werden Ausschussteile mit 78 % Wahrscheinlichkeit ausgesondert. Fehlerlose Kleinteile werden nur mit 1.5 % Wahrscheinlichkeit fälschlicherweise aussortiert.

a) Erstellen Sie einen Ereignisbau und bezeichnen die Sie unterschiedlichen Ereignisse.

b) Wie viel Prozent Ausschuss wird die Ware haben, die die Kontrolle mit positiver Prüfung durchlaufen hat?

c) Wie viel Prozent fehlerlose Teile enthält der Behälter, in dem die Maschine den Ausschuss sammelt?

d) Ein Unternehmen kauft zur Weiterverarbeitung die hergestellten Kleinteile. Bei der Eingangskontrolle werden 100 Teile überprüft. Mit wie vielen fehlerhaften Teilen rechnen Sie?

2.4 Schnelltest für Messfühler

Zum Test eines Messfühlers wurde ein Gerät entwickelt, dass für Schnelltests bei der Fertigung eingesetzt werden soll. Aus Erfahrung ist bekannt, dass ca. 15 von 10 000 Messfühlern fehlerhaft sind. Das Gerät zeigt bei einem defekten Messfühler mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % an, dass ein defekter Messfühler vorliegt. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% wird ein voll funktionsfähiger Messfühler als fehlerhaft angezeigt.

a) Erstellen Sie einen Ereignisbau und bezeichnen die Sie unterschiedlichen Ereignisse.

b) Wie sicher kann sich der Bediener sein, dass der getestete Messfühler tatsächlich defekt ist, wenn das Gerät dies anzeigt?

2.5 Fertigung von Drucksensoren

In einem Werk werden Drucksensoren gefertigt. Ob ein Teil die Qualitätskontrolle besteht, ist von den Neuteiltoleranzen bei der Druckmessung und der Stärke der Temperaturdrift abhängig. Beide Eigenschaften können als unabhängig angenommen werden. Als Neuteiltoleranz wird bei Raumtemperatur eine maximale Abweichung von ± 1 % akzeptiert. Bei Änderung der Temperatur im Bereich von - 20 … 120 °C darf der Messwert maximal um ± 2 % streuen. Nach der Fertigung durchlaufen Stichproben eine Qualitätskontrolle, in der die Neuteilcharakteristik des Drucksensors und das Temperaturverhalten getrennt ermittelt werden. Hierbei wird festgestellt, dass von 100 vermessenen Drucksensoren 4 außerhalb der Neuteiltoleranz liegen, 7 die Toleranzgrenzen der Temperaturdrift nicht einhalten. Ein Vergleich zeigt, dass nur bei einem Sensor beide Toleranzgrenzen verletzt wurden.

a) Erstellen Sie einen Ereignisbau und bezeichnen die Sie unterschiedlichen Ereignisse.

b) Es wird zufällig ein Drucksensor ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich bei dem Sensor um ein defektes Bauteil?

c) Es werden 25 Drucksensoren aus der Produktion entnommen. Mit wie vielen defekten Drucksensoren rechnen Sie in Ihrer Stichprobe? Wie viele Sensoren erwarten Sie, die ausschließlich auf Grund ihrer Neuteiltoleranzen aussortiert werden?

3 Beschreibende Statistik univariater Daten

3.1 Durchmesser einer Glasfaser

Gegeben sind Messwerte für den Durchmesser einer Glasfaser. Die Messwerte sind als Daten verfügbar (Glasfaser.mat).

Glasfaserdurchmesser d / µm				
15.41	18.53	18.04	15.90	14.54
15.41	18.79	17.26	16.92	18.78
16.56	18.40	15.70	16.62	17.09
16.95	19.88	15.56	14.89	15.34
17.61	17.72	14.62	19.84	16.80
19.33	15.52	16.89	17.97	12.58
18.37	16.67	17.83	19.82	19.38
13.15	11.61	16.27	15.90	14.84

a) Geben Sie für die Messung alle Lage- und Streuungswerte an. Geben Sie für alle Kennwerte auch die entsprechende Formel an.

- Arithmetischer Mittelwert
- Median
- Spannweite
- Varianz
- Standardabweichung

b) Teilen Sie die Daten in 10 Klassen ein und erstellen Sie eine Tabelle mit absoluter Häufigkeit. Stellen Sie folgende die relative Häufigkeitsverteilung und die relative Summenhäufigkeit in MATLAB als Säulendiagramm dar.

c) Berechnen Sie die Quartile der Messwerte, also 25%, 50% und 75% Quartil. Geben Sie für alle Kennwerte auch die entsprechende Formel an und berechnen Sie den Quartilkoeffizient der Schiefe. Was können Sie über die Schiefe der Verteilung aussagen?

d) Stellen Sie den Box-Plot in MATLAB dar. Interpretieren Sie den Box-Plot. Was können Sie am Box-Plot ablesen?

3.2 Verunreinigung von Halbleitermaterial

Gegeben sind Messwerte für die Verunreinigung von Materialien zur Halbleiterfertigung. Die Messwerte sind als Daten verfügbar (Halbleitermaterial.mat).

Verunreinigung M / ppm				
501.96	502.10	502.04	503.36	502.84
501.79	502.75	502.25	502.59	501.24
502.08	503.71	501.73	501.15	501.49
501.90	502.50	501.66	501.91	501.74
501.61	502.43	501.77	502.30	502.27
501.02	502.85	502.69	501.66	503.04
501.87	502.44	502.21	502.09	503.43
501.15	503.01	500.96	502.38	502.64

a) Geben Sie für die Messung alle Lage- und Streuungswerte an. Geben Sie für alle Kennwerte auch die entsprechende Formel an.

- Arithmetischer Mittelwert
- Median
- Spannweite
- Varianz
- Standardabweichung

b) Stellen Sie die relative Summenhäufigkeit als Liniendiagramm dar. Eine Einteilung der Daten in Klassen soll dabei nicht durchgeführt werden.

c) Berechnen Sie die Quartile der Messwerte, also 25%, 50% und 75% Quartil. Tragen Sie die Werte in die Grafik aus Aufgabenteil b) ein. Berechnen Sie den Quartilkoeffizient der Schiefe. Was können Sie über die Schiefe der Verteilung aussagen?

4 Univariate Wahrscheinlichkeitstheorie

4.1 Fertigung von Frästeilen

In einer metallverarbeitenden Fabrik werden Frästeile mit einer mittleren Dicke von 2.5 mm hergestellt. Die Dicke kann als normalverteilte Zufallsvariable aufgefasst werden. Aus früheren Messungen ist bekannt, dass der Prozess normalverteilt ist mit einer Standardabweichung von 0.002 mm.

a) Mit wie viel Prozent Ausschuss muss der Produktionsbetrieb rechnen, wenn alle Teile mindestens 2.495 mm stark sein sollen.

b) Mit wie viel Prozent Ausschuss muss der Produktionsbetrieb rechnen, wenn alle Teile höchstens 2.506 mm stark sein dürfen.

c) Mit einem Kunden wurde eine Toleranzgrenze von ± 0.003 mm vereinbart. Mit wie viel Prozent Ausschuss ist bei dieser Vereinbarung zu rechnen?

Der Ausschuss der Produktion soll vermindert werden. Als maximaler Ausschuss soll eine Quote von 2 % bei einer Toleranzgrenze von ± 0.003 mm zugelassen werden.

d) Welchen Wert darf die Prozessstreuung maximal haben, um bei gleichbleibendem Erwartungswert die Zielvorgaben zu erreichen?

Durch Alterungserscheinungen am Fräswerkzeug kommt es in der Fertigung zu einer Verschiebung des Mittelwertes.

e) Wie ändert sich die Ausbeute bei einer definierten Toleranzgrenze von ± 0.003 mm, wenn sich der Erwartungswert auf 2.51 mm verändert? Gehen Sie von einer Prozessstandardabweichung von 0.002 mm aus.

4.2 Erwarteter Ertrag einer Windkraftanlage

Der natürliche Wind schwankt in seiner Geschwindigkeit. Um die Energieerzeugung durch eine Windkraftanlage vorhersagen zu können, muss daher bekannt sein, welche Häufigkeitsverteilung der Wind an einem Standort besitzt. Üblicherweise werden die zeitlichen Häufigkeiten der verschiedenen Geschwindigkeiten durch die zweiparametrische Weibull-Verteilung mit den Parametern β und η beschrieben.

$$f(x) = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}}$$

Der Parameter β ist der Weibull-Formfaktor und gibt die Form der Verteilung an, er nimmt einen Wert von $\beta = 1$ bis 3 an. Einen großen β-Wert gibt es für Winde mit geringen Schwankungen, wie zum Beispiel bei konstanten Passatwinden. In Europa ist ein β-Faktor von 2 üblich. Sehr variable Winde, wie zum Beispiel die Winde im Polargebiet werden durch ein kleines β beschrieben. Der Parameter β nimmt mit der Höhe leicht zu, da Turbulenzen und Schwankungen mit der Höhe sinken.

Der Parameter η ist der Weibull-Skalierungsfaktor in m/s. Er steht in einem bestimmten Verhältnis zum Mittelwert der Windgeschwindigkeit v der Verteilung und ist damit von dem Standort der Windkraftanlage abhängig. Der Parameter η beschreibt damit die Lage der Verteilung auf der Geschwindigkeitsachse.

a) Vergleichen Sie die Windgeschwindigkeitsverteilung von Europa ($\beta = 2$) mit der Windverteilung von Passatwinden ($\beta = 3$) für einen konstanten Skalierungsfaktor von $\eta = 10$. Stellen Sie die beiden Verteilungen grafich dar und diskutieren Sie Unterschiede.

Windkraftanlagen arbeiten in einem definierten Geschwindigkeitsintervall. Bei dieser Aufgabe wird eine Windkraftanlage zugrunde gelegt, die bei Geschwindigkeiten zwischen 5 und 15 m/s arbeitet, eine Fläche mit einen Rotorradius von 5 m abdeckt und einen als konstant angenommenen Leistungsbeiwert $c_p = 0.48$ besitzt.

Die Leistung P einer Windkraftanlage errechnet sich bei einer Dichte und $\rho = 1.2$ kg/m³ über die Gleichung

$$P(v) = c_p \cdot \rho \cdot A \cdot \frac{1}{2} \cdot v^3$$

b) Berechnen Sie die zu erwartenden mittlere Leistung über den Erwartungswert.

4.3 Rauschleistung eines Quantisierungsfehlers

Der Quantisierungsfehler eines schlechten 8-Bit Analog-Digital-Wandlers (ADC) ist gleichverteilt zwischen 0 und einem Least-Significant-Bit (LSB). Die Referenzspannung des ADC beträgt 5 V.

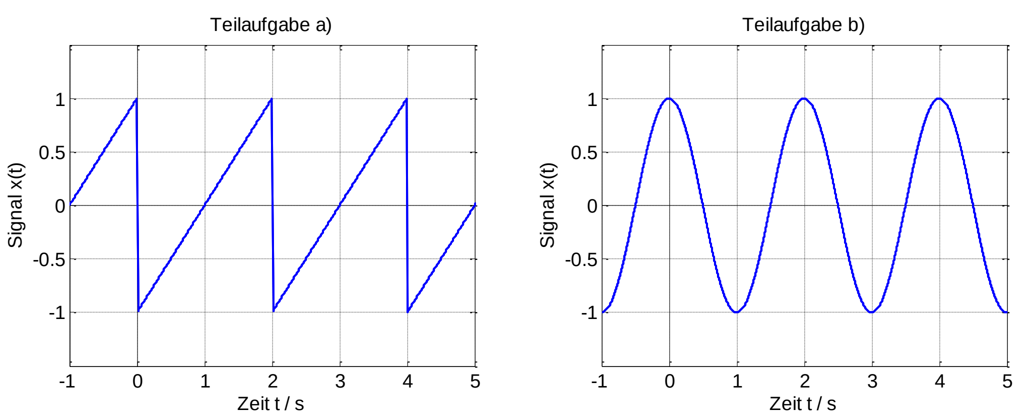
a) Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte des Spannungssignals und beschriften Sie die Achsen inklusive der Einheiten.

b) Berechnen Sie die mittlere Rauschleistung P des Quantisierungsfehlers über den Erwartungswert.

c) Wie lässt sich die mittlere Rauschleistung P einer mithilfe von Mittelwert μ und Standardabweichung σ berechnen. Leiten Sie eine Rechenvorschrift über den Erwartungswertoperator her.

4.4 Zeitverläufe und Verteilungsfunktionen

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte f(x) und Verteilungsfunktion F(x) für die angegebenen periodischen Signale x(t) und skizzieren Sie den Verlauf.



4.5 Generierung von Zufallszahlen mit beliebiger Verteilung

Für die Generierung von Zufallszahlen x stehen in einigen Simulationsprogrammen nur Generatoren zur Verfügung, die eine Gleichverteilung aufweisen.

a) Prüfen Sie, welche Verteilung die Zufallszahlen haben, die mit der inversen Standard-Normalverteilung abgebildet werden.

b) Wie können Zufallszahlen mit einer Weibull-Verteilung generiert werden, mit denen die Windverteilung in Europa ($\beta = 2$ und $\eta = 10$) simuliert wird?

5 Schätzung von unbekannten Parametern einer Verteilung

5.1 Thermische Ausdehnung von Kunststoffen

Gegeben sind Messwerte für die Ausdehnung eines Kunststoffes bei einer Temperaturdifferenz von 10 °C. Die Messwerte sind als Daten verfügbar (AusdehnungKunststoff.mat). Die Daten können als normalverteilt angenommen werden.

Ausdehnung Δx / mm				
21.38	21.52	20.88	20.35	22.75
15.36	19.62	18.52	20.24	19.37
23.27	17.28	19.68	21.14	22.73
15.61	19.26	20.64	18.12	20.08
22.23	17.58	20.01	21.69	16.05
16.83	15.48	20.16	19.95	19.17
20.47	17.34	24.59	21.60	18.30
21.88	20.96	13.99	21.87	15.32

a) Berechnen Sie ein zweiseitiges 95 % - Konfidenzintervall und ein 99 % - Konfidenzintervall für den Mittelwert μ der Messdaten.

b) Berechnen Sie ein zweiseitiges 95 % - Konfidenzintervall für die Standardabweichung σ.

c) Geben Sie für die Ausdehnung Δx einen Prognosebereich mit Sicherheit von 99.73 % an.

5.2 Konfidenzintervall bei Temperaturmessungen

Gegeben sind Messwerte für die Temperatur, bei der sich eine bestimmte Papiersorte selbst entzündet. Die Messwerte sind als Daten-File verfügbar (Selbstentzuendung.mat). Gehen Sie davon aus, dass die Messwerte zu eienr normalverteilten Grundgesamtheit gehören.

Selbstentzündungstemperatur T / °C									
313.69	329.76	315.36	340.46	335.89	327.04	327.97	323.13	325.28	335.56
333.15	331.03	334.11	333.90	329.45	328.42	345.67	322.89	331.68	340.72
336.19	331.20	333.49	331.80	322.79	334.82	332.55	324.14	320.84	339.15
332.92	334.81	338.23	335.51	338.09	324.90	325.26	339.39	337.49	336.06

a) Berechnen Sie Mittelwert und Standardabweichung der Stichprobe und geben Sie zu den beiden Kenngrößen die Konfidenzbereiche an. Gehen Sie von einer Konfidenzzahl γ = 95 % aus.

b) Stellen Sie die Stichprobe als Histogramm dar. Zeichnen Sie den Konfidenzbereich des Mittelwertes ein.

c) Stellen Sie die geschätzte Wahrscheinlichkeitsverteilung der Grundgesamtheit in demselben Diagramm wie das Histogramm dar. Führen Sie eine entsprechende Normierung durch.

d) In welchem Intervall erwarten Sie einen zukünftigen Stichprobenwert? Gehen Sie wieder von einer Konfidenzzahl γ = 95 % aus.

e) Auf Basis der Stichprobenverteilung, des geschätzten Mittelwertes und der geschätzten Standardabweichung soll für zukünftige Werte geschätzt werden, wie sicher das Papier sich nicht entzündet, wenn die Temperatur kleiner als 300 °C ist

5.3 Maßabweichungen von Drehteilen

Gegeben sind Messwerte für die Maßabweichung eines gedrehten Bauteils. Die Teile wurde zweimal gemessen. Die geordneten Messwerte beider Messungen sind als Daten verfügbar (Abweichungen-Soll.mat). Die Daten können als normalverteilt angenommen werden.

Messungen 1: Abweichungen Δx / µm				
0.49	0.86	0.28	0.30	- 0.34
- 0.87	- 0.35	- 0.02	0.04	- 0.02
-0.02	- 0.11	- 0.65	0.53	- 0.76

Messungen 2: Abweichungen Δx / µm				
0.44	0.28	- 0.53	- 0.32	- 0.53
- 0.22	0.08	0.08	0.23	- 0.11
- 0.93	- 0.24	- 0.72	0.61	- 0.82

Die Messungen können auf unterschiedliche Arten ausgewertet werden. Zunächst werden die Messungen als zwei unabhängige Datensätze betrachtet.

a) Bestimmen Sie ein zweiseitiges 99.73 % - Konfidenzintervall für die Differenz zweier Mittelwerte μ_1 - μ_2 bei unbekannter Varianz mit der Zufallsvariable

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{N} + \frac{1}{M}} \cdot s}$$

b) Berechnen Sie ein zweiseitiges 99.73 % - Konfidenzintervall des Verhältnisses der Varianzen bei Verwendung der Variable

$$f = \frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$$

Statt der separaten Auswertung der beiden Messungen kann die Differenz der beiden Messwerte jedes Teils charakterisiert werden.

c) Erstellen Sie einen Datensatz für die Differenz der beiden Messungen

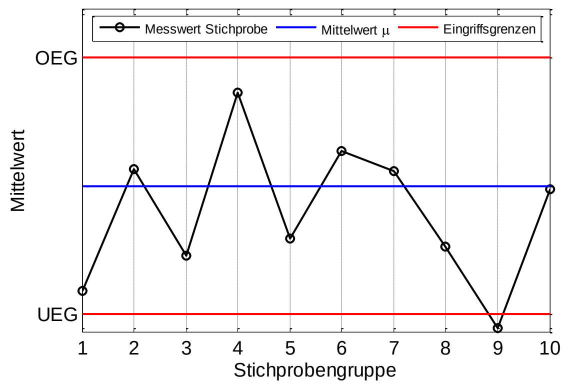
$$\Delta x = x_1 - x_2$$

d) Berechnen Sie ein zweiseitiges 99.73 % - Konfidenzintervall für den Mittelwert der Differenz. Vergleichen Sie die Ergebnisse. Welche Auswertung liefert das engere Konfidenzinterval und damit das präzisere Ergebnis?

6 Hypothesentest

6.1 Statistische Prozesskontrolle

Zur Überwachung von Fertigungsprozessen wird eine statistische Prozesskontrolle durchgeführt. Bei der statistischen Prozesskontrolle werden einem Fertigungsprozess in definierten Zeitabständen N = 5 Teile entnommen. Für die Bewertung des Prozesses wird der Mittelwert $\bar{x}$ der Stichprobe berechnet. Die Werte werden mit dem Sollverhalten der Grundgesamtheit verglichen. Der von Ihnen zu überwachende Prozess soll einen Mittelwert $\mu = 3$ haben und besitzt eine bekannte Standardabeichung $\sigma = 0.5$.



a) Stellen Sie einen Hypothesentest zur Überwachung des Mittelwertes auf. Gehen Sie von einem Signifikanzniveau $\alpha = 5$ % aus. Erläutern Sie die Nullhypothese und die Alternativhypothese.

b) Bestimmen Sie die Eingriffsgrenzen, die von den Stichproben-Mittelwerten eingehalten werden müssen, um die Nullhypothese zu bestätigen.

c) Stellen Sie eine Gleichung zur Berechnung der Gütefunktion des Hypothesentests auf und stellen Sie die Funktion grafisch dar.

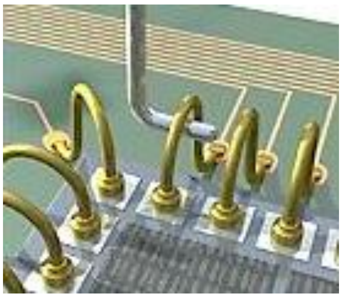
d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Abweichung von $\Delta\mu = 0.5$ erkannt?

e) Wie groß muss der Stichprobenumfang gewählt werden, damit eine Abweichung von $\Delta\mu = 0.5$ mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % erkannt wird?

f) Welche Eingriffsgrenzen ergeben sich in diesem Fall.

6.2 Zugversuche an Bond-Verbindungen

Bei der Kontaktierung elektromechanischer Systeme werden Bond-Verbindungen eingesetzt. Zum Nachweis der Stabilität werden bei Erprobungsteilen Zugversuche durchgeführt. Dabei ist die Kraft von Bedeutung, bei der eine Bond-Verbindungen reißt. Sie wird als Zugfestigkeit definiert. Ziel ist es, eine möglichst hohe Zugfestigkeit zu erzielen.



Um die Bauteil-Geometrie zu optimieren, werden Zugversuche an Bond-Verbindungen durchgeführt, die unterschiedliche Längen aufweisen. Es ergeben sich die unten dargestellten Zahlenwerte, die auch in der Datei *Zugversuch.mat* gespeichert sind. Aus vorhergehenden Untersuchungen ist bekannt, dass die Messwerte einen Standardabweichung von σ = 1.5 cN besitzen.

F / cN	2.8 mm	3 mm	3.2 mm	3.4 mm	3.6 mm
1	27.50	28.84	25.20	23.88	25.48
2	26.45	25.64	26.72	23.22	26.24
3	25.84	27.39	25.35	24.61	27.94
4	27.68	27.21	26.69	22.79	27.01
5	24.94	26.55	26.86	23.58	27.46
6	25.26	27.18	26.20	23.23	25.50
7	25.18	24.98	25.18	22.81	25.92
8	27.23	26.71	28.23	25.06	27.71
9	27.15	26.46	26.98	24.01	25.62
10	25.62	24.30	27.21	24.46	24.81

a) Geben Sie für jede Drahtlänge und γ = 95 % den Konfidenzbereich des Mittelwertes an und stellen Sie die Messergebnisse in geeigneter Form grafisch dar.

Beim Setzen der Bond-Verbindungen werden Ultraschall-Aktoren eingesetzt. Sie arbeiten mit einer Frequenz, die im Bereich der Eigenschwingungen der Bond-Verbindungen liegt. Es wird vermutet, dass die Eigenschwingung des Bond-Drahtes zu einer Vorschädigung und damit zu einer Reduzierung der Zugfestigkeit führt.

b) Bei welcher Drahtlänge würden Sie eine Übereinstimmung von Eigenschwingung und Anregungsfrequenz vermuten? Begründen Sie Ihre Aussage.

c) Definieren Sie einen Hypothesentest, mit dem Sie Ihre Vermutung prüfen können. Geben Sie bei Ihrer Lösung insbesondere auf

- Nullhypothese H0
- Alternativhypothese H1
- Definition der Zufallsvariable
- Verwerfungsbereich

ein. Verwenden Sie zunächst ein Signifikanzniveau von α_1 = 5 %.

d) Was ändert sich, wenn Sie das Signifikanzniveau auf α_2 = 1 % ändern? Begründen Sie Ihre Aussage. Gehen Sie verbal auf den Fehler 1. und 2. Art ein.

6.3 Messungen zur Schmelzwärme

Wiederholte Messungen der freigesetzten Wärme beim Übergang von Eis bei - 0.72 °C zu Wasser bei 0 °C ergaben die in der folgenden Tabelle dargestellten Werte. Die Daten sind in der Datei Schmelzwaerme.mat gespeichert. Die Grundgesamtheiten weisen eine Normalverteilung auf. Die Varianz der entsprechenden Grundgesamtheiten ist unbekannt aber identisch.

Index	**Verfahren A: Wärme in cal/g**				
1 - 5	79.98	80.04	80.02	80.04	80.03
6 - 10	80.03	80.04	79.97	80.05	80.03
11 - 13	80.02	80.00	80.02		
Index	**Verfahren B: Wärme in cal/g**				
1 - 5	80.02	79.94	79.98	79.97	79.97
6 - 8	80.03	79.95	79.97		

a) Berechnen Sie für die Werte von Verfahren A den Mittelwert und geben Sie den 95% - Konfidenzbereich des Mittelwertes an.

b) Berechnen Sie für die Werte von Verfahren A die Varianz und geben Sie den 95% - Konfidenzbereich der Varianz an.

c) Stellen Sie die relative Häufigkeit der Stichprobe A und die geschätzte Wahrscheinlichkeitsdichte der Grundgesamtheit für die Werte von Verfahren A in einem Diagramm dar. Achten Sie auf eine maßstäbliche Darstellung.

d) Prüfen Sie mit Hilfe eines Hypothesentests, ob die Mittelwerte μ_A und μ_B identisch sind oder signifikant voneinander abweichen. Gehen Sie von einem Signifikanzniveau $\alpha = 5$ % aus.

e) Leiten Sie eine Gleichung zur Berechnung der Varianz σ_y^2 der Größe

$$y = \frac{1}{N_A} \cdot \sum_{n=1}^{N_A} x_{An} - \frac{1}{N_B} \cdot \sum_{n=1}^{N_B} x_{Bn}$$

unter der Annahme her, dass die beiden Zufallsvariablen x_A und x_B voneinander unabhängig sind und aus Prozessen kommen, die dieselbe aber unbekannte Varianz σ_x^2 aufweisen.

6.4 Kalibrierung von Drucksensoren

Für die Kalibrierung von Drucksensoren werden Prüfvorrichtungen verwendet. In einem Fertigungswerk befindet sich ein Referenzprüfstand, der von der physikalisch technischen Bundesanstalt freigegeben ist. Alle Prüfvorrichtungen müssen an diesen Prüfstand angeglichen werden.

Für den Angleich werden 5 Sensoren zunächst an dem Referenzprüfstand und anschließend an der Prüfvorrichtung vermessen. Von den Messungen wird jeweils der Mittelwert gebildet. Die Messung am Referenzprüfstand weist eine Standardabweichung $\sigma_R = 0.2$ mbar und die Prüfvorrichtung einer Standardabweichung $\sigma_P = 0.5$ mbar auf. Beide Messergebnisse weisen eine Normalverteilung auf.

In dieser Aufgabe soll ein Hypothesentest definiert und bewertet werden. Es soll geprüft werden, ob der Referenzprüfstand und die Prüfvorrichtung dieselben Messergebnisse aufweisen.

a) Formulieren Sie einen Hypothesentest, mit dem geprüft wird, ob die Messergebnisse der beiden Prüfstände voneinander abweichen. Erläutern Sie, welche Zufallsvariable Sie dem Test zugrunde legen.

b) Bestimmen Sie die Eingriffsgrenzen Δp_1 und Δp_2, die sich bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5$ % ergeben.

c) Bestimmen Sie die Gütefunktion des Hypothesentests.

d) Stellen Sie die Gütefunktion des Hypothesentests grafisch dar.

e) Wie groß ist bei dem Test die Abweichung Δp, die mit einer Sicherheit von 95 % erkannt werden kann.

f) Wie viele Teile werden benötigt, um eine Abweichung von $\Delta p = \pm 0.5$ mbar mit einer Sicherheit von 95 % erkennen zu können? Lösen Sie diese Aufgabe numerisch.

g) Welche Eingriffsgrenzen Δp_1 und Δp_2 ergeben sich in diesem Fall?

7 Beschreibende Statistik multivariater Daten

7.1 Brechungsindex und Dichte von Glas

Ein Glas kann mit seiner Dichte und seinem Brechungsindex charakterisiert werden. Die genaue Messung der Dichte ist jedoch wesentlich einfacher als die des Brechungsindexes. Daher soll untersucht werden, ob die beiden physikalischen Größen korrelieren. Die hierzu erforderlichen Daten liegen als File (Glasuntersuchung.mat) vor.

Nr.	Brechungsindex n	Dichte ρ / g/cm^3	Nr.	Brechungsindex n	Dichte ρ / g/cm^3
1	2.17	2.84	**11**	2.17	2.82
2	2.24	2.53	**12**	1.84	2.65
3	2.4	2.96	**13**	2.41	2.69
4	2.49	2.67	**14**	1.63	3.4
5	2.28	2.6	**15**	2.5	3.16
6	2.09	2.68	**16**	2.05	2.97
7	2.44	2.62	**17**	2.22	3.42
8	2.09	2.66	**18**	2.52	2.61
9	1.53	2.53	**19**	1.81	3.26
10	1.63	3.11	**20**	1.93	3.25

a) Stellen Sie die Stichprobe als Streudiagramm grafisch dar.

b) Bestimmen Sie die kumulativen Randhäufigkeiten $H_N(N)$ und $H_\rho(\rho)$ und stellen Sie sie grafisch dar.

c) Charakterisieren Sie die Stichprobe über Mittelwerte, Varianzen und Kovarianz.

7.2 Scherfestigkeit von Lötverbindungen

Bei einem Experiment wurde die Scherfestigkeit von Lötverbindungen untersucht. Dazu wurden Leiterplatten Temperaturwechsel ausgesetzt, die einen definierten Temperaturhub aufwiesen. Nach einer unterschiedlichen Anzahl von Temperaturwechseln wurde die Scherfestigkeit der Lötverbindung gemessen. Es ergaben sich folgende Messergebnisse, die in dem File LoetenScherfestigkeit.mat gespeichert sind.

Temperaturhub ΔT / °C	Anzahl Temperaturzyklen N	Scherfestigkeit F / N
125	0	74.5711111
125	250	60.2376471
125	500	46.4044167
125	1000	36.9827778
150	0	74.5711111
150	250	62.4586667
150	500	45.7870588
150	1000	30.1116667

a) Stellen Sie die Stichprobe als Streudiagramm-Matrix grafisch dar.

b) Bestimmen Sie die kumulativen Randhäufigkeiten der Stichprobe und stellen Sie sie grafisch dar.

c) Charakterisieren Sie die Stichprobe über Mittelwertsvektor und Kovarianzmatrix.

d) Welche Größen sind voneinander unabhängig?

8 Multivariate Wahrscheinlichkeitstheorie

8.1 Reihenschaltung von Widerständen

Für die Realisierung eines 3.5 kΩ Widerstandes werden zwei Widerstände R_1 und R_2 in Reihe geschaltet. Zur Abschätzung der Verteilungsfunktion des Gesamtwiderstandes wird eine Gleichverteilung angenommen.

$$f(R_1, R_2) = \begin{cases} P_0 \text{ für } 950\ \Omega < R_1 \leq 1050\ \Omega \text{ und } 2400\ \Omega < R_2 \leq 2600\ \Omega \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

a) Berechnen Sie den Wert P_0.

b) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(R_1,R_2)$ grafisch dar.

c) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F(R_1,R_2)$ und stellen Sie die Verteilungsfunktion grafisch dar.

d) Berechnen Sie die Randverteilungen $f_{R1}(R_1)$ und $f_{R2}(R_2)$ und stellen Sie die Randverteilungen grafisch dar.

e) Berechnen Sie die kumulativen Randverteilungen $F_{R1}(R_1)$ und $F_{R2}(R_2)$ und stellen Sie die kumulativen Randverteilungen grafisch dar.

f) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegen die Werte im Bereich $990\ \Omega < R_1 \leq 1010\ \Omega$ und $2450\ \Omega < R_2 \leq 2550\ \Omega$?

g) Handelt es sich bei den beiden Zufallsvariablen R_1 und R_2 um unabhängige Variablen?

h) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte von der Summe der beiden Widerstände $R = R_1 + R_2$ an. Stellen Sie auch diese Funktion grafisch dar.

i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Summe im Bereich $3450\ \Omega < R \leq 3550\ \Omega$?

9 Korrelationsanalyse

9.1 Drift von Widerständen

An 10 Proben wurde die Drift von Widerständen untersucht. Die Widerstände wurden hierzu jeweils 10 h bei der entsprechenden Temperatur gelagert und anschließend ihr Widerstand gemessen. Er ist in der folgenden Tabelle als Widerstand in Ω dargestellt. Die Daten liegen als File (Widerstandsdrift.mat) vor.

Probe	Temperatur T / °C				
	0	20	40	80	160
1	986.91	986.46	986.31	988.2	986.58
2	985.1	984.88	985.05	987.53	987.15
3	989.69	989.82	988.76	989.54	989.49
4	989.09	988.15	990.39	988.29	988.48
5	989.53	988.68	990.22	990.25	990.32
6	984.64	985.79	985.64	986.07	986.46
7	987.55	989.91	990.01	988.48	989.96
8	987.2	988.12	988.45	988.83	987.87
9	986.43	988.71	987.35	989.92	988.44
10	987.18	987.38	990.14	988.32	988.57

a) Stellen Sie die Messwerte als Streudiagramm grafisch dar.

b) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten r der gegebenen Messwerte.

c) Berechnen Sie das Konfidenzintervall für den Korrelationskoeffizienten ρ der Grundgesamtheit für die Signifikanzzahl $\gamma = 95$ %.

d) Führen Sie einen Hypothesentest zur Überprüfung des Korrelationskoeffizienten durch. Testen Sie die Hypothese $\rho = 0$ gegen die Alternative $\rho \neq 0$ bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5$ %.

9.2 Schwindung bei Gussteilen

Nach dem Gießen verkleinern sich Werkstücke beim Abkühlen aufgrund der Volumenänderung bei der Kristallisation und der Wärmedehnung um einen bestimmten Prozentsatz ihres Volumens. Es findet eine Schwindung statt. Ein Hersteller von Gussteilen möchte untersuchen, ob es bei der Produktion von Formteilen mit einem Nennmaß zwischen 5 und 30 mm einen signifikanten Zusammenhang mit der Schwindung y gibt. Die folgende Tabelle stellt eine Stichprobe von 30 Gussteilen dar, bei der das Maß x / mm und die Schwindung y / ‰ von Feingussteilen analysiert wurde. Die Daten liegen als File (Gussteile.mat) vor.

Probe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
x / mm	5.64	14.05	10.10	22.15	8.00	38.63	13.13	29.12	8.31	14.66
y / ‰	6.67	-1.07	-11.24	-0.28	3.41	0.89	5.52	-3.65	8.65	-1.07
Probe	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
x / mm	9.23	24.67	14.18	46.98	11.64	24.75	38.02	7.99	40.65	13.79
y / ‰	10.05	-0.54	0.83	-4.08	-1.77	-5.55	-2.37	8.54	8.66	-1.25
Probe	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
x / mm	15.04	11.86	30	18.15	9.77	23.11	29.75	12.38	15.19	12.11
y / ‰	4.45	2.96	0.89	-2.28	3.54	3.86	-5.06	4.66	11.19	-2.65

a) Stellen Sie die Messwerte als Streudiagramm grafisch dar.

b) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten r der gegebenen Messwerte. Geben Sie das Konfidenzintervall für den Korrelationskoeffizienten ρ der Grundgesamtheit für die Signifikanzzahl $\gamma = 95\ \%$ an.

Ein Hypothesentest auf eine Korrelation $\rho = 0$ kann mit zwei unterschiedlichen Variablen durchgeführt werden. Die Variable

$$t = r \cdot \sqrt{\frac{N-2}{1-r^2}}$$

ist t-verteilt, die Variable

$$z = \left(\tanh^{-1}(r) - \tanh^{-1}(\rho)\right) \cdot \sqrt{N-3}$$

ist asymptotisch standard-normalverteilt.

c) Führen Sie mit beiden Variablen jeweils einen Hypothesentest zur Überprüfung des Korrelationskoeffizienten durch. Testen Sie die Hypothese $\rho = 0$ gegen die Alternative $\rho \neq 0$ bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\ \%$.

d) Vergleichen Sie die beiden Testergebnisse.

9.3 Lungenvolumen von Sportlern

Für die Sportmedizin soll untersucht werden, welchen Einfluss die Körpergröße / cm und der Brustumfang / cm eines Menschen auf das dessen Lungenvolumen hat. Die hierzu aufgenommenen Daten liegen als File (Sportuntersuchung.mat) vor.

Körpergröße G / cm	Brustumfang U / cm	Lungenvolumen V / cm^3
183	93	5200
178	98	5200
185	92	4600
166	78	3600
158	74	2700
175	87	4800
182	95	5000
183	103	5700
173	95	4800
174	78	3500
165	103	3300
182	107	5500
176	97	4700
170	95	4400
164	85	4400
176	95	4700
193	97	5600
160	71	2800
180	70	4600
178	100	4400

a) Stellen Sie die Messwerte als Streudiagramm-Matrix grafisch dar.

b) Berechnen Sie die Korrelationsmatrix **R** der gegebenen Messwerte.

c) Führen Sie einen Hypothesentest zur Überprüfung des Korrelationskoeffizienten durch. Testen Sie die Hypothese $\rho = 0$ gegen die Alternative $\rho \neq 0$ bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5$ %.

d) Berechnen Sie das Konfidenzintervall für die Korrelationsmatrix **R** der Grundgesamtheit für die Signifikanzzahl $\alpha = 5$ %.

10 Varianzanalyse

10.1 Waschmitteltest

Drei verschiedene Waschmaschinen wurden eingesetzt, um vier verschiedene Waschmittel zu testen. Die Reinheit der Wäschestücke wurde in einer Skala von 0 bis 100 bewertet. Die Daten liegen als MATLAB-File (Waschmitteltest.mat) vor.

	1	2	3
Waschmittel A	53	50	59
Waschmittel B	54	54	60
Waschmittel C	56	58	62
Waschmittel D	50	45	57

a) Berechnen Sie für das obige Beispiel die ANOVA-Tabelle und bewerten Sie Ihre Ergebnisse. Erläutern Sie dabei detailliert die einzelnen Werte der ANOVA-Tabelle. Gehen Sie dabei insbesondere auf den Wert F ein.

b) Welche zusätzlichen Möglichkeiten sehen Sie, Ihre Ergebnisse zu plausibilisieren? Erläutern Sie diese und wenden Sie diese für die obige Aufgabenstellung an.

10.2 Lebensdauer von Generatoren

Die Lebensdauer eines bestimmten Generatortyps soll von dem Material abhängen, aus dem er gebaut wurde, aber auch von der Umgebungstemperatur am Einsatzort. In der folgenden Tabelle finden sich Daten zur Lebensdauer von 24 Generatoren, die aus drei verschiedenen Materialien bestehen und bei zwei verschiedenen Temperaturen eingesetzt worden sind. Die Daten liegen als MATLAB-File (LebensdauerGeneratoren.mat) vor.

Material	**10 °C**		**18 °C**	
1	135	150	50	55
	176	85	64	38
2	150	162	76	88
	171	120	91	57
3	138	111	68	60
	140	106	74	51

a) Berechnen Sie für das obige Beispiel die ANOVA-Tabelle und bewerten Sie Ihre Ergebnisse. Erläutern Sie dabei detailliert die einzelnen Werte der ANOVA-Tabelle. Gehen Sie dabei insbesondere auf den Wert F ein.

b) Welche zusätzlichen Möglichkeiten sehen Sie, Ihre Ergebnisse zu plausibilisieren? Erläutern Sie diese und wenden Sie diese für die obige Aufgabenstellung an.

11 Regression zweidimensionaler Datensätze

11.1 Scherfestigkeit von Schweißverbindungen

Es ist relativ schwierig, die Scherfestigkeit einer Punktschweißung zu bestimmen, dagegen lässt sich der Durchmesser der Punktschweißung relativ einfach messen. Es wäre also vorteilhaft, wenn die Scherfestigkeit aus dem Durchmesser der Schweißstelle abgeleitet werden könnte. Um dies zu untersuchen, wurden folgenden Daten aufgenommen. Die Daten liegen als MATLAB-File (ScherfestigkeitSchweissen.mat) vor.

Scherfestigkeit / MPa	Durchmesser der Schweißstelle / μm
0.370	400
0.780	800
1.210	1250
1.560	1600
1.980	2000
2.450	2500
3.070	3100
3.550	3600
3.940	4000
3.950	4000

a) Berechnen Sie für das obige Beispiel die Regressionsfunktion 2. Grades. Stellen Sie die berechnete Regressionsfunktion zusammen mit den Messpunkten grafisch dar.

b) Bewerten Sie Ihre Regressionsfunktion anhand der Residuen. Wie verhält sich die durch die Regression nicht erklärte Reststreuung? Stellen Sie zur Beantwortung der Frage die Residuen grafisch dar.

c) Woran erkennen Sie, ob die Wahl der Regressionsfunktion richtig war? Berechnen Sie hierzu die in der Vorlesung eingeführten Kenngrößen zur Bewertung der Regressionsgüte und erläutern Sie diese.

d) Entfernen Sie aus dem vollquadratischen Modell nacheinander die einzelnen Terme. Wie wirkt sich die Reduktion der Regressionsfunktion auf

   - das adjungierte Bestimmtheitsmaß
   - die Signifikanz der übrigen Regressionskoeffizienten

   aus? Vergleichen Sie die Ergebnisse untereinander und erläutern Sie ggf. die Abweichungen.

e) Zeichnen Sie die gegebenen Stichprobenwerte zusammen mit der optimierten Regressionsfunktion und den 95 % - Konfidenzbereichen für den Mittelwert und für zukünftige Stichprobenwerte in ein Diagramm ein und erläutern Sie dieses.

11.2 Kennlinie von Luftmassenmessern

Die Kennlinie eines Luftmassenmessers soll durch eine Messung an einem Prüfstand ermittelt werden. Bei vorgegebenem Luftmassenstrom m ergeben sich folgende Messwerte für die Ausgangsspannung U. Die Messwerte sind in einer Datei (Messwerte.mat) auf Ihrem Rechner verfügbar.

m / kg/h	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450
U / V	0.007	1.658	2.397	2.839	3.377	3.678	4.078	4.416	4.683	4.952

a) Berechnen Sie für die Ausgangsspannung U ein kubisches Regressionsmodell als Funktion des Luftmassenstroms m.

b) Prüfen Sie die Terme auf Signifikanz und reduzieren Sie gegebenenfalls das Modell.

Aus der Physik ist bekannt, dass die Ausgangsspannung einen wurzelförmigen Verlauf

$$U = k \cdot \sqrt{m}$$

aufweist. Deshalb wird auch die inverse Funktion untersucht.

c) Berechnen Sie für den Luftmassenstrom m ein kubisches Regressionsmodell als Funktion der Ausgangsspannung U.

d) Prüfen Sie die Terme auf Signifikanz und reduzieren Sie ggf. das Modell. Lösen Sie die resultierende Gleichung nach U auf.

e) Stellen Sie die Stichprobenwerte sowie die Regressionsfunktion von Aufgabenteil b) und Aufgabenteil d) in einem Diagramm dar.

f) Stellen Sie für beide Regressionsfunktionen die Residuen in einem Diagramm dar. Welche Regression ist die bessere?

g) Welche generellen Schlussfolgerungen können aus dem Ergebnis gezogen werden?

11.3 Messung eines Diodenstroms

Bei der Messung eines Diodenstroms i_D als Funktion der Spannung u_D werden folgende Messwerte aufgenommen. Die Messwerte sind als Datei (Diodenstrom.mat) auf Ihrem Rechner verfügbar.

u_D / V	0.45	0.46	0.47	0.48	0.49	0.5	0.51	0.52
i_D / mA	0.2552	0.6203	0.5639	0.5991	1.3460	1.5567	1.9868	2.8039
u_D / V	0.53	0.54	0.55	0.56	0.57	0.58	0.59	0.6
i_D / mA	3.9081	4.9202	6.4437	8.5741	11.3041	14.7775	20.1936	26.9588

a) Berechnen Sie für den Diodenstrom i_D ein kubisches Regressionsmodell als Funktion der Diodenspannung u_D.

b) Prüfen Sie die Terme auf Signifikanz und reduzieren Sie ggf. das Modell.

c) Stellen Sie die Stichprobenwerte, die Regressionsfunktion sowie das Prognoseintervall für zukünftige Messwerte mit γ = 99 % in einem Diagramm dar.

Aus der Physik ist bekannt, dass der Diodenstrom einen exponentiellen Verlauf

$$i_D(t) = I_S \cdot \left(e^{\frac{u_D(t)}{n \cdot U_T}} - 1 \right)$$

aufweist. Deshalb wird auch der Logarithmus des Diodenstroms i_D untersucht.

d) Berechnen Sie für den Logarithmus des Diodenstroms i_D ein kubisches Regressionsmodell als Funktion der Diodenspannung u_D.

e) Prüfen Sie die Terme auf Signifikanz und reduzieren Sie ggf. das Modell. Überführen Sie anschließend die Regressionswerte für den Logarithmus des Diodenstroms i_D in Regressionswerte für den Diodenstrom i_D.

f) Stellen Sie auch für diesen Fall die Stichprobenwerte, die Regressionsfunktion sowie die Prognoseintervalle für zukünftige Messwerte mit γ = 99 % in einem Diagramm dar.

g) Diskutieren Sie die Ergebnisse, insbesondere die Summe der Fehlerquadrate und die Prognoseintervalle. Woraus ergeben sich die Unterschiede? Welche Annahmen gelten bei der Berechnung des Prognoseintervalls.

12 Regression mehrdimensionaler Datensätze

12.1 Ausbeute eines chemischen Prozesses

Zur Charakterisierung der Ausbeute eines chemischen Prozesses wird ein Datensatz analysiert, bei dem die Ausbeute als Funktion der Temperatur und der Katalysatorkonzentration dargestellt wird (ChemischeAusbeute.mat). Für die Messwertaufnahme wurden alle anderen Parameter konstant gehalten.

Nr.	Temperatur T / °C	Katalysatorkonzentration K / %	Ausbeute A / %
1	130	0.3	67.47
2	140	0.5	84.27
3	120	0.1	54.78
4	120	0.1	54.13
5	120	0.5	73.82
6	130	0.3	66.18
7	140	0.5	83.05
8	140	0.1	61.86
9	140	0.1	61.33
10	120	0.5	71.20
11	140	0.1	60.41
12	130	0.3	69.08
13	120	0.1	51.06
14	140	0.5	84.95
15	120	0.5	71.31
16	120	0.1	53.67
17	140	0.5	83.50
18	120	0.5	71.87
19	140	0.1	61.78
20	130	0.3	66.23

a) Berechnen Sie für das obige Beispiel und ein lineares Modell mit Wechselwirkungen die Regressionsfunktion. Stellen Sie die berechnete Regressionsfunktion zusammen mit den Messpunkten grafisch dar.

b) Bewerten Sie Ihre Regressionsfunktion anhand der Residuen. Wie verhält sich die durch die Regression nicht erklärte Reststreuung? Stellen Sie zur Beantwortung der Frage die Residuen grafisch dar.

c) Woran erkennen Sie, ob die Wahl der Regressionsfunktion richtig war? Berechnen Sie hierzu die in der Vorlesung eingeführten Kenngrößen zur Bewertung der Regressionsgüte und erläutern Sie diese.

d) Entfernen Sie aus dem vollquadratischen Modell nacheinander die einzelnen Terme. Wie wirkt sich die Reduktion der Regressionsfunktion auf

- das adjungierte Bestimmtheitsmaß
- die Summe der quadratischen Fehler
- die Signifikanz der übrigen Regressionskoeffizienten

aus? Vergleichen Sie die Ergebnisse untereinander und erläutern Sie ggf. die Abweichungen.

e) Zeichnen Sie die gegebenen Stichprobenwerte zusammen mit der optimierten Regressionsfunktion und den 95 % - Konfidenzbereichen für den Mittelwert in ein Diagramm ein und erläutern Sie dieses.

f) Geben Sie die Länge des 95 % - Prognosebereich für zukünftige Stichprobenwerte bei einer Temperatur T = 125 °C und einer Konzentration K = 0.4 % an.

12.2 Lebensdauer von Maschinenkomponenten

Die Lebensdauer von Maschinenkomponenten hängt von der Betriebsspannung in Volt und der Motordrehzahl in Umdrehungen pro Minute ab. In einem Forschungs- und Entwicklungslabor führt ein Experiment zu folgender Lebensdauer in Minuten. Die Daten liegen als MATLAB-File (LebensdauerMaschinenkomponenten.mat) vor.

Betriebsspannung / V	Drehzahl / min-1	Lebensdauer / min
110	750	2145
110	850	2155
110	1000	2220
110	1100	2225
120	750	2260
120	850	2266
120	1000	2334
130	1000	2340
115	840	2212
115	880	2280

a) Berechnen Sie für das obige Beispiel und ein vollquadratisches Modell die Regressionsfunktion. Stellen Sie die berechnete Regressionsfunktion zusammen mit den Messpunkten grafisch dar.

b) Bewerten Sie Ihre Regressionsfunktion anhand der Residuen. Wie verhält sich die durch die Regression nicht erklärte Reststreuung? Stellen Sie zur Beantwortung der Frage die Residuen grafisch dar.

c) Woran erkennen Sie, ob die Wahl der Regressionsfunktion richtig war? Berechnen Sie hierzu die in der Vorlesung eingeführten Kenngrößen zur Bewertung der Regressionsgüte und erläutern Sie diese.

d) Entfernen Sie aus dem vollquadratischen Modell nacheinander die einzelnen Terme. Wie wirkt sich die Reduktion der Regressionsfunktion auf

- das adjungierte Bestimmtheitsmaß
- die Signifikanz der übrigen Regressionskoeffizienten

aus? Vergleichen Sie die Ergebnisse untereinander und erläutern Sie ggf. die Abweichungen.

e) Zeichnen Sie die gegebenen Stichprobenwerte zusammen mit der optimierten Regressionsfunktion und den 95 % - Konfidenzbereichen für den Mittelwert und für zukünftige Stichprobenwerte in ein Diagramm ein und erläutern Sie dieses.

f) Geben Sie die Länge des 95 % - Konfidenzbereich für zukünftige Stichprobenwerte bei 925 Umdrehung pro Minute und einer Betriebsspannung von 120 V an.

12.3 Einspritzmenge bei einem Common-Rail-System

Auf Basis einer aufgenommenen Messreihe soll die Einspritzmenge eines Common-Rail-Systems als Funktion des Rail-Drucks sowie der Einspritzdauer bestimmt werden. Die Daten liegen als Excel-File (Einspritzmenge.mat) vor. Der Datensatz ist sehr umfangreich, die ersten 10 Stichproben sind in der folgenden Tabelle dargestellt.

Raildruck P / bar	Einspritzzeit T / µs	Einspritzmenge M / mg
300	150	16.0090758
300	200	15.52098
300	250	17.4767921
300	300	17.989462
300	350	16.8362257
300	400	17.4501887
300	450	21.0370855
300	500	19.4002117
300	550	19.0890813
300	600	19.4352677
…	…	…

a) Berechnen Sie für das obige Beispiel und ein vollquadratisches Modell die Regressionsfunktion. Stellen Sie die berechnete Regressionsfunktion zusammen mit den Messpunkten grafisch dar.

b) Bewerten Sie Ihre Regressionsfunktion anhand der Residuen. Wie verhält sich die durch die Regression nicht erklärte Reststreuung? Stellen Sie zur Beantwortung der Frage die Residuen grafisch dar.

c) Versuchen Sie die Regressionsfunktion so zu erweitern, dass das adjungierte Bestimmtheitsmaß steigt und die maximalen Beträge der Residuen sinken.

d) Entfernen Sie aus dem so gewonnenen Modell nacheinander die einzelnen Terme.

e) Prüfen Sie, ob alle Messwerte innerhalb des 95 % - Prognoseintervalls für zukünftige Stichprobenwerte liegen.

13 Statistische Versuchsplanung

13.1 Fertigung von Blattfedern

Bei der Fertigung von Blattfedern wird das Material in einem Ofen für eine Zeit T_{OFEN} bei einer Temperatur ϑ_{OFEN} getempert. Anschließend wird das Material in einem Ölbad der Temperatur ϑ_{OEL} abgeschreckt. Ziel der Fertigung ist ein Bandmaterial mit einem Elastizitätsmodul von E = 77 kN/mm².

Bei der Fertigung können die Ofen-Temperatur und die Verweilzeit im Ofen gezielt eingestellt werden. Die Werte bewegen sich in folgenden Intervallen:

- Ofen-Temperatur (ϑ_{OFEN}): 1100 … 1300 °C
- Verweilzeit (T_{OFEN}): 2 … 10 Min.

Die Temperatur des Ölbades kann in der Fertigung weder eingestellt noch konstant gehalten werden, da der Wärmeeintrag beim Abschrecken dazu zu groß ist. Die Ölbad-Temperatur ϑ_{OEL} schwankt in dem Bereich von 20 bis 120 °C. Für die Bestimmung eines optimalen Arbeitspunktes wurde folgender Versuchsplan durchgeführt. Jeder Versuch wird dreifach ausgeführt. Für jeden Punkt im Versuchsraum ergeben sich drei Elastizitätsmoduln E_1, E_2 und E_3.

Die Daten sind auf Ihrem Rechner unter VersuchsplanBlattfedern.mat abgespeichert. Bitte beachten Sie das abweichende Datenformat.

ϑ_{OFEN} °C	T_{OFEN} Min.	ϑ_{OEL} °C	E_1 kN/mm²	E_2 kN/mm²	E_3 kN/mm²
1100	2	20	77.8	77.8	78.1
1100	2	120	75.0	72.5	71.2
1100	10	20	75.2	75.6	75.0
1100	10	120	75.0	75.6	75.1
1300	2	20	81.5	81.8	78.8
1300	2	120	78.8	78.8	74.4
1300	10	20	75.9	75.6	77.5
1300	10	120	76.3	77.5	75.6

a) Um was für einen Versuchsplan handelt es sich? Was folgt daraus für die Regressionsfunktion des Elastizitätsmodul E als Funktion von Ofen-Temperatur und Verweilzeit im Ofen $E(\vartheta_{OFEN}, T_{OFEN})$?

b) Bestimmen Sie die Regressionsfunktion $E(\vartheta_{OFEN}, T_{OFEN})$. Diskutieren Sie die Güte.

Arbeiten Sie mit der unveränderten Regressionsfunktion weiter, führen Sie keine Vereinfachung durch.

c) Mit welchen Parameterkombinationen von Ofentemperatur und Verweilzeit kann der gewünschte Elastizitätsmodul von E = 77 kN/mm² erreicht werden? Geben Sie eine analytische Gleichung für die Verweilzeit T_{OFEN} als Funktion der Ofentemperatur ϑ_{OFEN} an.

Durch die variable Öltemperatur ergibt sich eine Fertigungsstreuung. Sie soll minimiert werden.

d) Welchen der Punkte würden Sie als idealen Betriebspunkt wählen? Begründen Sie Ihr Vorgehen.

13.2 Reaktives-Ionen-Ätzen

Bei der Fertigung mikromechanischer Produkte muss eine Silizium-Nitrit-Schicht in einem Reaktiven-Ionen-Ätzprozess strukturiert werden. Die Ätzrate R wird in nm/min angegeben und ist von folgenden Faktoren abhängig:

	Einheit	Minimum	Maximum
Abstand Elektroden	A / cm	0.8	1.2
Volumenstrom C2F6-Gas	V / cm³/s	125	200
Leistung RF-Elektrode	P / W	275	325

Der durchgeführte Versuch zur Untersuchung der Ätzrate ist in folgender Tabelle zusammengestellt und unter der Datei „VersuchsplanRIE.mat" auf Ihrem Rechner verfügbar. Jeder Versuch wurde zweimal ausgeführt.

Nr.	A	V	P	R_1	R_2
1	0.8	125	275	55.0	60.4
2	1.2	125	275	66.9	65.0
3	0.8	200	275	63.3	60.1
4	1.2	200	275	64.2	63.5
5	0.8	125	325	103.7	105.2
6	1.2	125	325	74.9	86.8
7	0.8	200	325	107.5	106.3
8	1.2	200	325	72.9	86.0

a) Welcher Versuchsplan wurde bei diesem Experiment verwendet? Welche funktionalen Abhängigkeiten lassen sich mit diesem Versuchsplan beschreiben?

b) Beschreiben Sie die Ätzrate als Regressionsfunktion der Faktoren A, V und P. Reduzieren Sie das Modell auf die signifikanten Terme.

c) Stellen Sie die Ätzrate als Funktion der signifikanten Faktoren grafisch dar.

d) Mit dem Vorwissen von Aufgabenteil b) kann ein Versuchsplan erstellt werden, der einen reduzierten Umfang aufweist. Geben Sie einen geeigneten Versuchsplan an.

e) Für einen Fertigungsprozess wird eine Ätzrate von R_0 = 75 nm/min benötigt. Welche Faktorkombination würde Sie verwenden, um diese Ätzrate möglichst robust einzustellen? Begründen Sie Ihr Vorgehen.

13.3 Optimierung von Glühstiftkerzen

Bei der Fertigung von Glühstiftkerzen werden Keramikteile gesintert. Bei dem Sinterprozess sollen folgende Parameteränderungen bewertet werden:

- Sintertemperatur (Temp): 0 … 100 °C
- Sinterzeit (Time): 5 … 35 Min.
- Sinterdruck (Pres): 20 … 60 bar

In einem Versuch wird die Schwindung der Keramikteile während des Sinterprozesses untersucht. Der Versuch wird über die MATLAB-Funktion *Schwindung.p* simuliert. Sie ist in Ihrem Arbeitsverzeichnis gespeichert und wird in dem Format

S = Schwindung([Temp,Time,Pres]);

aufgerufen.

a) Erstellen Sie einen vollfaktoriellen 3^k-Versuchsplan und bestimmen Sie die Regressionskoeffizienten für ein vollquadratisches Modell der Schwindung mit den Größen Sintertemperatur (Temp), Sinterzeit (Time) und Sinterdruck (Pres).

b) Berechnen Sie mit diesen Daten den 95%-Konfidenzbereich für den Center-Point mit Temp = 50 °C, Time = 20 Min. und Pres = 40 bar.

c) Reduzieren Sie das Modell, in dem Sie nicht signifikante Terme entfernen und bestimmen Sie die Regressionskoeffizienten für dieses Modell (α = 5 %).

d) Mit dem Vorwissen, welche Terme in dem Modell signifikant sind, können Sie Versuchspläne mit geringerem Versuchsaufwand entwerfen. Stellen Sie einen D-optimalen Versuchsplan auf und bestimmen Sie die Regressionskoeffizienten der signifikanten Modellterme.

e) Welchen Arbeitspunkt würden Sie wählen, um eine minimale Schwindung zu bekommen?

Zur Bewertung einer zukünftigen Fertigungsstreuung wird für diesen Arbeitspunkt eine Toleranzanalyse durchgeführt. Es wird davon ausgegangen, dass die eingestellten Prozessparameter normalverteilt sind und die Standardabweichungen σ_{Temp} = 0.5 °C, σ_{Time} = 0.1 Min. und σ_{Pres} = 1 bar besitzen.

f) Bestimmen Sie für den Center-Point den Prognosebereich (γ = 99.73 %) für zukünftige Schwindungswerte mit Hilfe einer Monte-Carlo-Simulation, die einen Stichprobenumfang N = 10000 besitzt.

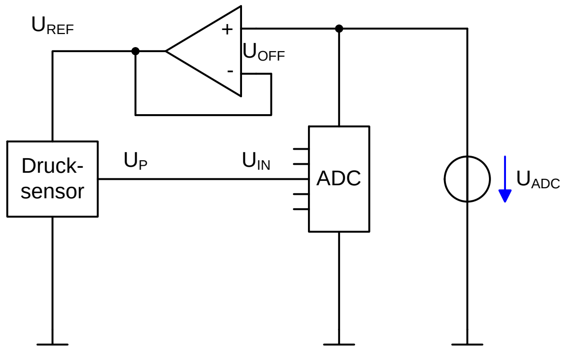
g) Welcher Parameter trägt am meisten zur Toleranz der Schwindung bei.

h) Plausibilisieren Sie die Ergebnisse der Aufgabenteile f) und g).

14 Statistische Tolerierung

14.1 Durchflussmessung mit Wirkdruckverfahren

Es gibt unterschiedliche Durchflusssensoren, die nach dem Differenzdruckverfahren arbeiten. Das folgende Schaltbild stellt den Schaltungsaufbau dar, der in dieser Aufgabe analysiert wird.



An einer Blende wird ein Druckabfall p erzeugt, der über einen Drucksensor gemessen wird. Der Durchfluss Q ergibt sich über die Gleichung

$$Q = k \cdot \sqrt{p}$$

Die Konstante k fasst unterschiedliche mechanische und aerodynamische Größen zusammen. Die Toleranzen der Größe k werden in dieser Aufgabe vernachlässigt. Der Drucksensor hat eine ratiometrische Ausgangsspannung

$$U_P = m \cdot p \cdot U_{REF}$$

Die Referenzspannung U_{REF} wird über einen Operationsverstärker erzeugt, der eine Offsetspannung U_{OFF} aufweist.

$$U_{REF} = U_{ADC} + U_{OFF}$$

Der Analog-Digital-Wandler (ADC) besitzt eine Auflösung von 10 bit und wird mit der Spannung U_{ADC} betrieben. Er gibt einen diskreten Wert von

$$N = \frac{U_{IN}}{U_{ADC}}$$

aus.

Die Größen weisen folgende Toleranzen auf:

Größe	Mittelwert	Toleranz	Verteilung	Bemerkungen
U_{ADC}	5 V	- 250 … 250 mV	Normalverteilung	Toleranzangabe entspricht $\pm 3\cdot\sigma$
U_{OFF}	10 mV	-10 … 10 mV	Gleichverteilung	-
N_A	0	± 1 / 2048	Gleichverteilung	-
k	$0.2\cdot\frac{m^3}{s\cdot\sqrt{mbar}}$	Toleranzen werden vernachlässigt		
m	$0.04\cdot\frac{1}{mbar}$	Toleranzen werden vernachlässigt		

a) Weisen Sie nach, dass zwischen dem Messwert N und dem Durchfluss Q der Zusammenhang

$$N=\frac{m\cdot Q^2}{k^2}+\frac{m\cdot Q^2}{k^2}\cdot\frac{U_{OFF}}{U_{ADC}}+\frac{U_A}{U_{ADC}}=\frac{m\cdot Q^2}{k^2}+\frac{m\cdot Q^2}{k^2}\cdot\frac{U_{OFF}}{U_{ADC}}+N_A$$

besteht und stellen Sie den Zusammenhang N(Q) als Soll-Kennlinie im Bereich $0 \le Q \le 1$ grafisch dar.

b) Bestimmen Sie die linearisierte Maßkette ΔN im Arbeitspunkt Q_0 = 0.5 m³/s unter Berücksichtigung der oben aufgeführten Toleranzursachen. Berechnen Sie die Empfindlichkeiten E_{UADC}, E_{NA} und E_{UOFF}.

c) Verifizieren Sie die berechneten Empfindlichkeiten über eine statistische Simulation.

d) Führen Sie unter Berücksichtigung der oben aufgeführten Toleranzen eine arithmetische Tolerierung durch. Berechnen Sie die Toleranzen ΔQ im Arbeitspunkt Q_0 = 0.5 m³/s.

e) Führen Sie unter Berücksichtigung der oben aufgeführten Toleranzen eine statistische Tolerierung mit γ = 99.73 % durch. Berechnen Sie auch für die statistische Tolerierung die Toleranzen ΔQ im Arbeitspunkt Q_0 = 0.5 m³/s.

f) Vergleichen Sie die Ergebnisse der analytischen Tolerierung mit einer statistischen Simulation. Welche analytische Rechnung liegt näher an der statistischen Simulation? Worin sehen Sie die Ursache?

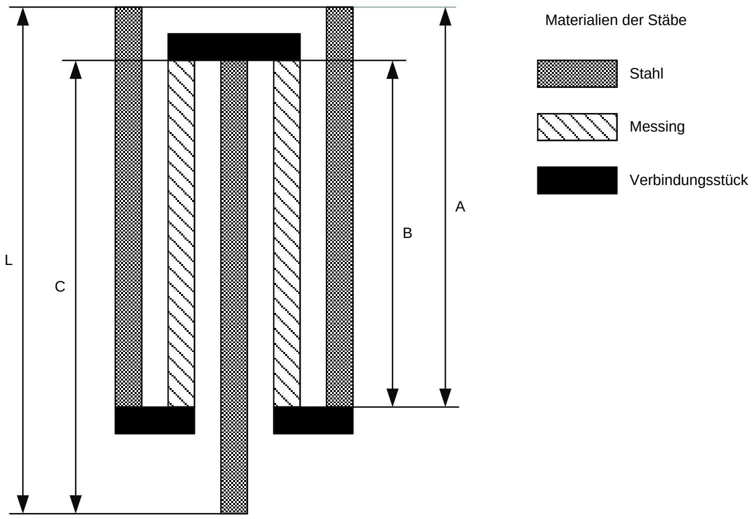
g) Welche Möglichkeit sehen Sie, die Toleranz der Messgrößen durch einen modifizierten Schaltungsaufbau zu verbessern? Wie wirkt sich dieser Ansatz bei statistischer Tolerierung auf die Toleranz ΔQ im Arbeitspunkt Q_0 aus?

14.2 Kompensation von Temperatureinflüssen bei Pendeluhren

Bei klassischen Pendeluhren ist die Schwingungsdauer T der Pendelbewegung bestimmend für die Genauigkeit der Uhr. Die Schwingungsdauer berechnet sich bei einer Pendellänge L und der Erdbeschleunigung g aus

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Damit präzise Uhren produziert werden können, wird der Konstruktion des Pendels große Aufmerksamkeit geschenkt. Zur Kompensation von Temperatureinflüssen werden Stäbe mit unterschiedlichen Ausdehnungskoeffizienten so kombiniert, dass die Gesamtlänge L des Pendels bei Temperaturänderungen weitgehend konstant bleibt. Das folgende Bild zeigt das Prinzip eines sogenannten Rostpendels.



Die eingesetzten Materialien Stahl und Messung besitzen einen thermischen Ausdehnungskoeffizient α, der Fertigungsstreuungen unterworfen ist.

Material	Spezifikation			
	Sollwert	Minimum	Maximum	Bemerkungen zur Verteilung
Stahl	$\alpha_S = 11.8 \cdot 10^{-6}$ / K	- 5 %	+ 5 %	Normalverteilung, Minimum und Maximum $\pm$ 3·σ-Grenzen
Messing	$\alpha_M = 22.1 \cdot 10^{-6}$ / K	- 10 %	+ 10 %	Gleichverteilung

Es wird bei allen Längen von einer linearen Temperaturabhängigkeit ausgegangen, sodass für eine Länge X mit Ausdehnungskoeffizient α_x gilt:

$$X(\vartheta) = X_0 \cdot \left(1 + \alpha_X \cdot \left(\vartheta - \vartheta_0\right)\right)$$

a) Stellen Sie eine Maßkette für die Pendellänge L mit dem Maßen A, B und C auf.

b) Welche Länge muss das Pendel für eine Periodendauer von $T_0 = 1$ s haben?

c) Wie dimensionieren Sie die Längen A, B und C, damit die Pendellänge bei Einhalten der Sollwerte für α_S und α_M von der Temperatur unabhängig ist und eine Periodendauer von $T_0 = 1$ s aufweist?

Im Folgenden wird untersucht, wie sich die Materialparameter auf die Genauigkeit der Uhr auswirken. Dabei wird vereinfachend davon ausgegangen, dass die Längen A, B und C keinen Fertigungsschwankungen unterworfen sind.

d) Geben Sie eine Gleichung zur Berechnung der Abweichung ΔT bei beliebigen Abweichungen thermischen Ausdehnungskoeffizienten $\Delta\alpha_S$ und $\Delta\alpha_M$ und einer festen Temperatur $\vartheta - \vartheta_0 = 10$ K an.

e) Berechnen Sie die Toleranz von der Schwingungsdauer T bei einer Temperatur $\vartheta - \vartheta_0 = 10$ K mithilfe des Grenzwertsatzes der Wahrscheinlichkeit. Geben Sie ein 99.73%-Konfidenzbereich für die Schwingungsdauer T an.

f) Alternativ kann die Toleranz von der Schwingungsdauer T bei einer Temperatur $\vartheta - \vartheta_0 = 10$ K mithilfe der Faltung berechnet werden. Bestimmen Sie dazu die Verteilung der Schwingungsdauer T. Geben Sie ein 99.73%-Konfidenzbereich für die Schwingungsdauer T an.

g) Vergleichen Sie die Ergebnisse von e) und f). Woher resultieren Sie Unterschiede. Welche Voraussetzungen zur Rechnung mit dem Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeit werden bei der Rechnung von Teilaufgabe e) verletzt?

14.3 Wärmemessung in Fernwärme-Übergabestationen

In Fernwärme-Übergabestationen wird die genutzte Energie über die Temperaturdifferenz von der einströmenden Wassermenge T_E und der ausströmenden Wassermenge T_A bestimmt. In dieser Aufgabe wird in vereinfachter Form die Temperaturdifferenz $\Delta T = T_E - T_A$ hinsichtlich ihrer Toleranz analysiert.

Im ersten Aufgabenteil wird der Abgleich der Temperatursensoren betrachtet. Bei den Temperatursensoren handelt es sich um PT100 Widerstände, für die vereinfachend folgende Kennlinie angenommen wird.

$$R = R_0 \cdot \left(1 + \alpha \cdot \left(T - T_0\right)\right)$$

Die Kennlinie hat die Sollwerte T_0 = 25 °C, R_0 = 100 Ω und $\alpha = 4 \cdot 10^{-3}$ 1/°C.

Die Sensoren werden an zwei Soll-Temperaturen T_{10} = 25 °C und T_{20} = 70 °C abgeglichen, die Sensoren weisen an diesen Temperaturen die Widerstandswerte $R_1 = R(T_1)$ und $R_2 = R(T_2)$ auf.

a) Zeigen Sie, dass die Temperatur T über den Widerstand R und die Funktion

$$T = T_0 + \frac{R \cdot \left(T_1 - T_2\right) - R_2 \cdot \left(T_1 - T_0\right) + R_1 \cdot \left(T_2 - T_0\right)}{R_1 - R_2}$$

bestimmt werden kann.

b) Geben Sie eine Formel für die Standardabweichung σ_T der Temperatur T unter der Annahme an, dass alle Widerstandswerte einen normalverteilten Messfehler mit σ_R = 1 mΩ und die Temperaturen T_1 und T_2 einen normalverteilten Messfehler mit σ_{T12} = 10 mK aufweisen.

c) Warum ist die Standardabweichung σ_T von der zu messenden Temperatur abhängig?

d) Stellen Sie die 2-fache Standardabweichung σ_T als Funktion von T im Bereich von 0 ... 100 °C als MATLAB-Plot dar.

e) Verifizieren Sie Ihre Rechnung mit einer Monte-Carlo-Simulation. Zeichnen Sie das Simulationsergebnis ebenfalls in den Plot von Aufgabenteil e) ein.

Im zweiten Aufgabeteil wird die Temperaturdifferenz zwischen der einströmenden und der ausströmenden Wassermenge analysiert.

f) Führen Sie eine Toleranzbetrachtung für die Temperaturdifferenz $\Delta T = T_E - T_A$ durch. Gehen Sie von unkorrelierten Messgrößen aus. Geben Sie eine Formel für $\sigma_{\Delta T}$ an.

15 Mess-System-Analyse

15.1 Temperaturmessung

Für die Messung einer Medientemperatur wird ein Temperatursensor PT100 eingesetzt. Die Toleranz der Messung ist auf 1 °C spezifiziert. Die Einrichtung zur Temperaturmessung wird mithilfe der Mess-System-Analyse auf ihre Fähigkeit geprüft. Die Daten für die gesamte Aufgabe finden Sie in der Datei *MSATemperatur.mat.*

a) Die Einrichtung besitzt eine Auflösung von 4 Nachkommastellen. Bewerten Sie, ob die Auflösung für die angegebene Toleranz ausreichend ist.

Zur Bewertung des systematischen Messfehlers wird bei einer Referenz von T_{REF} = 18.3000 °C eine Messreihe mit N = 50 Stichprobenwerten aufgenommen.

Nr.	Temperaturmesswerte T / °C									
1 - 10	18.3124	18.3119	18.3039	18.3066	18.2998	18.2998	18.2837	18.2925	18.2971	18.2934
11 – 20	18.2951	18.3146	18.3126	18.3066	18.2903	18.2900	18.3015	18.2951	18.3039	18.3041
21 - 30	18.3124	18.3119	18.3039	18.3066	18.2998	18.2908	18.2837	18.2925	18.2971	18.2934
31 - 40	18.2951	18.3002	18.2978	18.2876	18.2927	18.2925	18.2968	18.3053	18.2973	18.2998
41 - 50	18.3036	18.2959	18.3051	18.2998	18.3036	18.2959	18.3051	18.3083	18.3133	18.3109

b) Bewerten Sie die systematische Messabweichung. Stellen Sie dazu die Stichprobe im Vergleich zu dem Referenzwert grafisch dar. Berechnen Sie die erforderlichen Qualitätskenngrößen und führen Sie einen Hypothesentest auf systematische Messabweichung durch.

Für das Messsystem wird eine Linearitätsuntersuchung durchgeführt. Dazu werden bei 5 unterschiedlichen Referenztemperaturen jeweils 10 Stichprobenwerte aufgenommen.

Nr.	Temperaturwerte T / °C				
Referenz	10.7000	18.3000	31.7000	44.0000	54.2000
1	10.6529	18.2937	31.6723	43.8981	54.2330
2	10.6675	18.2961	31.7330	44.0024	54.1845
3	10.7184	18.3155	31.7306	44.0291	54.2087
4	10.6966	18.3131	31.7209	43.9757	54.2112
5	10.7039	18.3058	31.6917	43.9903	54.2209
6	10.6602	18.2913	31.6723	44.0049	54.1650
7	10.6917	18.2913	31.6723	43.9879	54.2063
8	10.7451	18.3010	31.6772	43.9830	54.2573
9	10.7136	18.2961	31.6723	43.9927	54.1820
10	10.6335	18.3034	31.6748	43.9879	54.2209

c) Bewerten Sie die Linearität des Messsystems. Stellen Sie dazu die Stichprobe im Vergleich zu dem Referenzwert grafisch dar. Führen Sie einen Hypothesentest auf Linearität durch.

Da das Messsystem an unterschiedlichen Prüfeinrichtungen eingesetzt werden soll, werden 3 Messstationen unter Fertigungsbedingungen miteinander verglichen. Dazu wurden an den 3 Messstationen mit 10 Teilen jeweils 2 Messungen durchgeführt.

Nr.	Temperaturwerte T / °C					
	Messstation 1		Messstation 2		Messstation 3	
	Messreihe 1	Messreihe 2	Messreihe 1	Messreihe 2	Messreihe 1	Messreihe 2
1	19.4903	19.4903	19.4828	19.4804	19.4803	19.4782
2	19.4199	19.4223	19.4314	19.4316	19.4192	19.4170
3	19.3835	19.3835	19.3627	19.3652	19.3799	19.3788
4	19.4248	19.4272	19.4338	19.4314	19.4454	19.4454
5	19.4078	19.4102	19.4142	19.4118	19.4072	19.4083
6	19.4078	19.4078	19.4289	19.4289	19.4258	19.4247
7	19.4369	19.4369	19.4338	19.4363	19.4421	19.4421
8	19.4223	19.4223	19.4191	19.4191	19.4279	19.4279
9	19.4248	19.4272	19.4216	19.4191	19.4356	19.4345
10	19.4078	19.4102	19.4142	19.4142	19.4225	19.4214

d) Bewerten Sie das Streuverhalten des Messsystems. Stellen Sie dazu die Messergebnisse in einer geeigneten Form dar und führen Sie eine numerische Bewertung auf Basis des %GRR-Wertes durch.

Um die Langzeitstabilität des Messsystems bewerten zu können, wurden an 20 verschiedenen Tagen jeweils 3 Messungen bei einer Referenztemperatur von 18.3 °C durchgeführt. Aus Voruntersuchngen ist bekannt, dass die Standardabweichung σ = 0.01 °C beträgt.

Nr.	Temperaturwerte T / °C									
	Tag 1	Tag 2	Tag 3	Tag 4	Tag 5	Tag 6	Tag 7	Tag 8	Tag 9	Tag 10
1	18.3080	18.2978	18.3038	18.3052	18.3021	18.2924	18.2894	18.3052	18.3074	18.3019
2	18.2867	18.3034	18.2903	18.3026	18.2948	18.3000	18.2996	18.3026	18.2998	18.2844
3	18.2953	18.2866	18.3005	18.3087	18.3080	18.3048	18.3028	18.3087	18.2994	18.2801
Nr.	Temperaturwerte T / °C									
	Tag 11	Tag 12	Tag 13	Tag 14	Tag 15	Tag 16	Tag 17	Tag 18	Tag 19	Tag 20
1	18.2945	18.2948	18.3095	18.2871	18.3006	18.2924	18.3095	18.3054	18.3069	18.2945
2	18.3082	18.3069	18.3000	18.3008	18.3066	18.3043	18.3000	18.2989	18.2988	18.3081
3	18.3046	18.2825	18.2814	18.2960	18.2898	18.2969	18.2814	18.3066	18.3069	18.3000

e) Bewerten Sie die Langzeitstabilität des Messsystems mithilfe der Shewhart Regelkarte. Zeichnen Sie eine Eingriffsgrenze (γ= 99 %) und eine Warngrenze (γ= 95 %) ein.

15.2 Gewichtsmessung

In einer Fachabteilung für Kaffeevollautomaten wird eine Einrichtung aufgebaut, mit der die produzierte Kaffeemenge statistisch bewertet werden soll. Die Einrichtung besteht aus einem Rahmen, an dem über 3 Wägezellen eine Messplatte aufgehängt ist. Auf diese Platte werden die Kaffeetassen gestellt. Nach Start der Messung wird die Gewichtszunahme erfasst. Mithilfe der Mess-System-Analyse soll die Toleranz bestimmt werden, bei der das Messsystem gerade noch messfähig ist. Die Daten für die gesamte Aufgabe finden Sie in der Datei *MSAGewicht.mat*.

a) Die Einrichtung besitzt eine Auflösung von 2 Nachkommastellen. Bewerten Sie, welche Grenze sich hinsichtlich der Zieltoleranz aus dieser Auflösung ergibt.

Zur Bewertung des systematischen Messfehlers wird bei einer Referenz von m_{REF} = 147.35 g eine Messreihe mit N = 50 Stichprobenwerten aufgenommen.

Nr.	Masse m / g									
1 - 10	146.99	147.32	147.66	146.32	147.66	146.65	146.99	146.99	147.32	147.66
11 – 20	146.65	146.65	146.99	147.32	147.66	148.66	147.99	146.99	147.32	147.66
21 - 30	147.99	147.32	147.99	147.32	146.99	147.66	147.66	146.99	146.32	146.99
31 - 40	147.32	146.99	147.66	147.32	146.99	147.32	146.99	146.99	147.99	147.66
41 - 50	147.66	146.99	146.99	147.32	148.32	148.32	147.99	146.99	147.66	147.66

b) Bewerten Sie die systematische Messabweichung. Stellen Sie dazu die Stichprobe im Vergleich zu dem Referenzwert grafisch dar. Berechnen Sie aus den erforderlichen Qualitätskenngrößen die Toleranz, die sich bei einem C_g und C_{gk}-Wert von 1.33 ergibt. Führen Sie außerdem einen Hypothesentest auf systematische Messabweichung durch.

Für das Messsystem wird eine Linearitätsuntersuchung durchgeführt. Dazu werden bei 5 unterschiedlichen Referenzgewichten jeweils 10 Stichprobenwerte aufgenommen.

Nr.	Masse m / g				
Referenz	98.50	123.17	147.35	172.08	196.82
1	98.94	123.30	146.99	173.35	196.03
2	98.94	123.97	147.32	171.68	197.03
3	98.28	124.30	147.66	172.34	196.70
4	98.61	122.97	146.32	172.01	197.03
5	98.61	122.97	147.66	171.68	197.03
6	99.28	122.97	146.65	171.68	197.03
7	98.61	122.97	146.99	171.68	196.70
8	98.61	123.63	146.99	172.01	197.70
9	98.28	123.30	147.32	171.68	196.03
10	98.28	123.97	147.66	171.01	196.70

c) Bewerten Sie die Linearität des Messsystems. Stellen Sie dazu die Stichprobe im Vergleich zu dem Referenzwert grafisch dar. Führen Sie einen Hypothesentest auf Linearität durch. Welche Grenze hinsichtlich der Zieltoleranz ergibt sich aus der Untersuchung.

Zur Bestimmung der Peproduzierbarkeit werden zwei Messreihen mit jeweils 25 Teilen aufgenommen.

Teil	Masse m / g		Teil	Masse m / g	
	Messung 1	Messung 2		Messung 1	Messung 2
1	117.28	116.82	14	135.59	135.73
2	122.94	122.16	15	117.98	119.06
3	125.29	125.29	16	126.04	127.25
4	142.23	141.64	17	124.13	122.08
5	115.27	115.08	18	111.72	111.00
6	129.37	129.82	19	112.09	111.57
7	133.07	131.82	20	127.55	126.65
8	136.08	135.09	21	106.34	107.00
9	105.48	104.92	22	133.46	132.85
10	123.60	123.24	23	129.42	128.62
11	125.08	123.28	24	109.27	108.59
12	105.79	106.01	25	117.52	116.58
13	111.11	108.83			

d) Bewerten Sie das Streuverhalten des Messsystems. Stellen Sie dazu die Messergebnisse in einer geeigneten Form dar. Wie beeinflusst ein %GRR-Wert von 30 % die Grenze der Zieltoleranz?

Um die Langzeitstabiltät des Messystems bewerten zu können, wurden an 20 verschiedenen Tagen jeweils 5 Messungen mit einem Referenzgewicht von 123.38 g durchgeführt. Aus Voruntersuchngen ist bekannt, dass die Standardabweichung σ = 0.419 g beträgt.

Nr.	Masse m / g									
	Tag 1	Tag 2	Tag 3	Tag 4	Tag 5	Tag 6	Tag 7	Tag 8	Tag 9	Tag 10
1	123.70	122.49	123.24	123.41	122.81	123.84	123.99	124.43	123.70	122.92
2	123.09	123.50	123.79	123.55	123.09	123.48	122.95	123.74	122.66	123.54
3	123.66	123.07	123.34	123.85	123.52	123.45	123.47	123.02	124.02	123.78
4	122.93	123.06	123.80	123.64	122.96	123.55	123.63	123.72	122.71	123.72
5	123.76	123.44	123.18	123.26	123.50	123.89	123.27	123.67	123.84	123.40
Nr.	Masse m / g									
	Tag 11	Tag 12	Tag 13	Tag 14	Tag 15	Tag 16	Tag 17	Tag 18	Tag 19	Tag 20
1	122.99	123.63	123.46	123.50	123.74	123.48	123.21	123.50	123.72	123.25
2	123.33	123.61	123.49	123.66	123.78	122.78	123.12	123.32	122.81	123.86
3	123.04	123.21	124.25	123.14	123.93	123.32	123.68	123.34	123.43	123.30
4	122.68	123.41	122.43	123.75	123.35	123.17	123.52	123.50	123.29	122.77
5	123.00	123.57	123.52	123.45	123.93	122.66	123.75	123.87	123.62	123.96

f) Bewerten Sie die Langzeitstabilität des Messsystems mithilfe der Shewhart Regelkarte. Zeichnen Sie eine Eingriffsgrenze (γ= 99 %) und eine Warngrenze (γ= 95 %) ein.

g) Für welche Zieltoleranz ist das Messsystem gerade eben noch fähig?