Name: …………………………………..

Matrikel-Nr.: ……………………………

Hinweise:

- Diese Klausur enthält 1 Aufgabe.
- Die Unterlagen bestehen aus 14 Seiten inkl. Deckblatt.
- Die Dauer der Klausur beträgt 180 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel:
  - Vorlesungsskript, Vorlesungsfolien
  - Schriftliche Unterlagen
  - Zugewiesener Laborrechner
  - Taschenrechner
- Notieren Sie auf jedem Blatt Ihren Namen und Matrikelnummer.
- Stellen Sie Ihren Lösungsweg ausführlich dar und begründen Sie Ihr Vorgehen.
- Geben Sie dieses Deckblatt, die Aufgabenstellung und alle bearbeiteten Blätter mit Ihrer Klausur ab.

max. Punktzahl	Ist-Punktzahl
100	

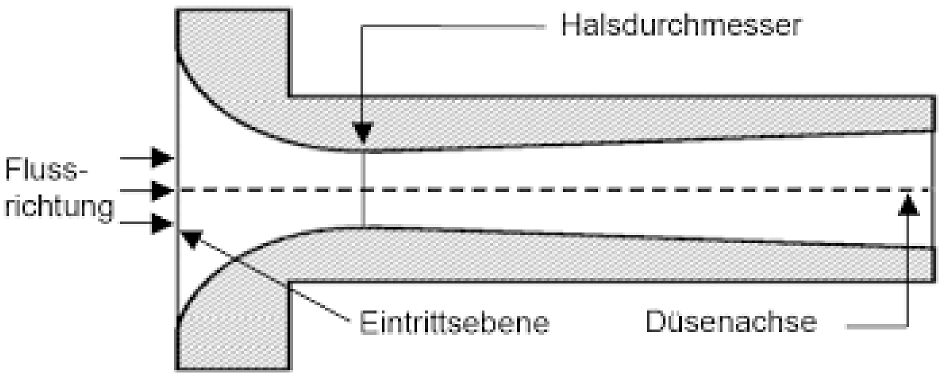
Note	

Beschreibung der Aufgabe

Stadtwerke und Gasversorger müssen für die Abrechnung von Gas Zähler einsetzen, die in regelmäßigen Abständen kalibriert werden. Dazu werden Prüfstände eingesetzt, wie sie in der folgenden Abbildung gezeigt sind.

Quelle: Inotech GmbH: Prüfstand zum Abgleich von Haushaltgaszählern

In diesen Prüfständen werden sogenannte kritische Düsen eingesetzt. N unterschiedliche Düsen erzeugen jeweils einen Volumenstrom Q_n, zusammen ergibt sich der für die Kalibrierung notwendigen Volumenstrom Q.



Quelle: TetraTec Instruments GmbH: Bedienungsanleitung SNZ und CFO - Kritische Düsen

Die Düsen weisen einen Druck p_D und eine Temperatur T_D auf.

Statistische Auswertung einer Wiederholmessung

Zunächst wird an einer einzelnen Düse eine Wiederholmessung durchgeführt. Die Düse hat einen nominalen Durchfluss von $Q_{NOM} = 0.5$ m³/h. Mit einem Referenzmessgerät wird der Istwert Q_{IST} des Volumenstroms bestimmt. Die Daten sind in der Datei *Durchflussmessung.mat* gespeichert.

Durchfluss Q_{IST} / m³/h									
0.5007	0.5159	0.5120	0.5129	0.5185	0.5123	0.5058	0.5128	0.5181	0.5070
0.5089	0.5155	0.5126	0.5166	0.5196	0.4957	0.5039	0.5085	0.4964	0.5213
0.5020	0.5058	0.5308	0.5042	0.5232	0.5085	0.5172	0.5091	0.5112	0.5082
0.4933	0.5106	0.4872	0.5189	0.5094	0.5050	0.5134	0.5129	0.5078	0.4953
0.5010	0.5146	0.5134	0.5117	0.5232	0.4927	0.5188	0.5216	0.5157	0.5240

a) Stellen Sie für die Messreihe die Häufigkeitsverteilung als Histogramm dar.

b) Schätzen Sie auf Basis der Stichprobe den Mittelwert und die Standardabweichung der Durchflussmessung. Geben Sie für $\gamma = 95$ % den Konfidenzbereich für beide Größen an. Gehen Sie dabei von einer normalverteilten Grundgesamtheit aus.

c) Plausibilisieren Sie die geschätzten Größen, in dem Sie die geschätzte Wahrscheinlichkeitsdichte zusammen mit einem Histogramm der Stichprobenwerte darstellen.

d) Besitzt der Düsenprüfstand einen systematischen Messfehler? Beantworten Sie die Frage mit einem geeigneten Hypothesentest. Begründen Sie Ihr Vorgehen.

e) Welche Abweichung ΔQ des Düsenprüfstandes könnten Sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % erkennen? Beantworten Sie die Frage, in dem Sie die Gütefunktion des Tests darstellen und auswerten.

Regressionsrechnung und Statistische Versuchsplanung

Voruntersuchungen zeigen, dass der gemessene Durchfluss Q neben dem nominellen Wert Q_{NOM} von der Düsentemperatur T_D und dem Druck vor der Düse p_D abhängig ist. Diese Abhängigkeit soll für einen nominellen Durchfluss Q_{NOM} = 3 m³/h mit einem Versuchsplan bestimmt werden.

Eingangsgröße	Variable	Einheit	Minimum	Zentralpunkt	Maximum
Düsentemperatur	T_D	K	283	293	303
Druck	p_D	mbar	950	1000	1050

Zur Ermittlung der Versuchsergebnisse wird die MATLAB-Funktion Durchfluss.p verwendet. Sie ermittelt den Durchfluss Q an der Stelle X, die sich aus den Variablen X = [T_D p_D] zusammensetzt. Alle Variablen können auch als Spaltenvektor eingesetzt werden.

Der folgende Programmausschnitt zeigt den Aufruf der Funktion für eine Temperatur T_D = 293 K und einen Druck von p_D = 1000 mbar.

```
% Beispiel für den Aufruf der Funktion Durchfluss
X = [293 1000];
Q = Durchfluss(X)
```

f) Stellen Sie einen vollfaktoriellen Versuchsplan für ein vollquadratisches Modell und die Eingangsgrößen T_D und p_D auf. Bestimmen Sie die Versuchsergebnisse und speichern Sie das Versuchsergebnis ab. Verwenden Sie für die folgenden Aufgabenteile diesen Datensatz weiter.

g) Stellen Sie eine geeignete Regressionsfunktion auf und reduzieren Sie die Regressionsfunktion auf die signifikanten Terme. Wie ändert sich dabei das adjungierte Bestimmtheitsmaß?

h) Stellen Sie für das Modell mit den signifikanten Termen einen D-optimalen Versuchsplan auf. Bestimmen Sie die Versuchsergebnisse und speichern Sie das Versuchsergebnis ab. Verwenden Sie für die folgenden Aufgabenteile diesen Datensatz weiter.

i) Bestimmen Sie für beide Regressionsfunktionen den Prognosebereich mit γ = 99 %, der sich auf Basis der Regressionsrechnungen ergibt. Stellen Sie die Regressionsfunktion und den Prognosebereich für beide Versuchspläne jeweils als Diagramm dar. Vergleichen Sie die Ergebnisse.

Statistische Tolerierung

Um eine statistische Tolerierung durchzuführen, wird eine Literaturrecherche durchgeführt. Die Physikalisch Technische Bundesanstalt schlägt ein Verfahren vor, bei dem der durch Düsentemperatur T_D und Düsendruck p_D entstehende systematische Messfehler kompensiert wird. Dazu wird der nominelle Wert Q_{NOM} mit einer hier vereinfachten Funktion korrigiert, in die die Messungen von Druck p_D und der Temperatur T_D an der Düse eingehen.

$$Q_{KOR} = \frac{p_D \cdot T_{NOM}}{p_{NOM} \cdot T_D \cdot K} \cdot \left(1 + c_{PE} \cdot \left(p_D - p_{NOM}\right)\right) \cdot Q_{NOM}$$

Dabei ist K die Kompressibilitätszahl, p_{NOM} = 1013 mbar der Druck unter Nominalbedingungen und T_{NOM} = 293 K die Temperatur unter Normalbedingungen. Die Konstante c_{PE} wird Düsenkorrekturfaktor genannt. Es gelten die in der folgenden Tabelle dargestellten Sollwerte und Toleranzen.

Größe	Sollwert	Toleranz	Bemerkung
Q_{NOM}	0.5 m³/h	0.002 m³/h	normalverteilt $\pm 3\cdot\sigma$
p_D	1013 mbar	2 mbar	gleichverteilt
T_D	293 K	1 K	gleichverteilt
c_{PE}	$5\cdot10^{-5}$ 1/mbar	$2.5\cdot10^{-6}$ 1/mbar	normalverteilt $\pm 3\cdot\sigma$
K	0.95	0.005	normalverteilt $\pm 3\cdot\sigma$

Die Größen T_{NOM} = 293 K und p_{NOM} = 1013 mbar sind Konstanten und weisen keine Toleranz auf.

j) Führen Sie für den korrigierten Volumenstrom eine statistische Tolerierung mit Linearisierung und Grenzwertsatz durch. Wählen Sie als Arbeitspunkt die Sollwerte der entsprechenden Größen. Wie groß ist die Toleranz im Arbeitspunkt für γ = 99.73 %.

k) Vergleichen Sie die einzelnen Toleranzbeiträge der oben aufgeführten Größen.

l) Verifizieren Sie das Ergebnis mit einer statistischen Simulation.

Musterlösung

a) Die Darstellung der Messwerte als Histogramm wird mit der Funktion hist durchgeführt. Wegen der gemeinsamen Darstellung mit der Wahrscheinlichkeitsdichte wird eine Normierung vorgenommen, mit der die Fläche der Säulen in Summe eins ergibt.

b) Die Stichprobe weist eine Normalverteilung auf, die Standardabweichung ist unbekannt. Damit weist die Größe

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{N}}$$

eine t-Verteilung mit N - 1 Freiheitsgraden auf. Der Konfidenzbereich für den Mittelwert bei unbekannter Varianz ergibt sich zu

$$0.5080\ m^3/h = \bar{x} - \frac{c_2 \cdot s}{\sqrt{N}} < \mu \le \bar{x} - \frac{c_1 \cdot s}{\sqrt{N}} = 0.5131\ m^3/h$$

Dabei berechnen sich die Grenzen c_1 und c_2 über die inverse t-Verteilung mit N - 1 Freiheitsgraden.

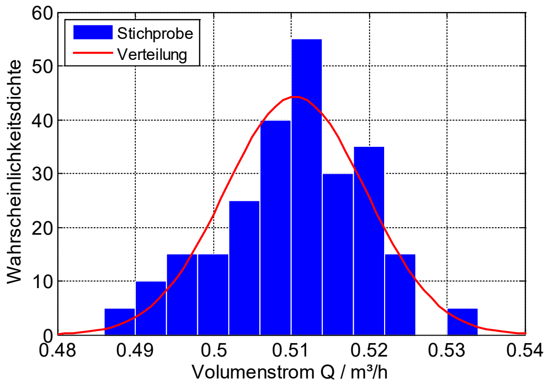
Für die Varianz ergibt sich der Konfidenzbereich

$$\frac{s^2 \cdot (N-1)}{c_2} < \sigma^2 \le \frac{s^2 \cdot (N-1)}{c_1}$$

mit Berechnung der Grenzen c_1 und c_2 über die inverse chi^2-Verteilung mit N - 1 Freiheitsgraden. Die Standardabweichung liegt damit in den Grenzen

$$0.0075\ m^3/h < \sigma \le 0.0112\ m^3/h$$

c) Die geschätzte Verteilung ist eine Normalverteilung. Sie wird zusammen mit dem normierten Histogramm dargestellt.



```
%% Initialisierung
clear all;
close all;
clc;

%% Histogramm und Wahrscheinlichkeitsdichte
load('Durchflussmessung.mat');

N = length(QREF);
dQh = 0.004;
Qh = 0.48:dQh:0.54;
hQ = hist(QREF,Qh)/N/dQh;
Qf = 0.2:0.001:0.8;
fQ = normpdf(Qf,mean(QREF),std(QREF));

% Berechnen der charakteristischen Größen und der Konfidenzbereiche
gamma = 0.95;
muQREF = mean(QREF);
sQREF = std(QREF);
muQREFmin = muQREF - tinv((1+gamma)/2,N-1)*sQREF/sqrt(N);
muQREFmax = muQREF - tinv((1-gamma)/2,N-1)*sQREF/sqrt(N);
sigQREFmin = sqrt(sQREF^2*(N-1)/chi2inv((1+gamma)/2,N-1));
sigQREFmax = sqrt(sQREF^2*(N-1)/chi2inv((1-gamma)/2,N-1));

% Definition des Grafikfensters
hdl = figure(1);
set(hdl,'Position',[100 100 600 400]);

hdl = bar(Qh,hQ,'b');
set(hdl,'BarWidth',1,'EdgeColor',[1 1 1]);
hold on;
plot(Qf,fQ,'r','Linewidth',2);
hold off;
axis([0.48 0.54 0 60]);
set(gca,'FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
xlabel('Volumenstrom Q / m³/h', 'FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Wahrscheinlichkeitsdichte', 'FontName','Arial','FontSize',14);
grid on;
box on;
h = legend('Stichprobe','Verteilung');
set(h,'FontWeight','normal','FontSize',12,'location','northwest','orienta-
tion','vertical');
```

d) Der Hypothesentest mit folgenden Hypothesen durchgeführt:

H0: Es liegt keine signifikante Abweichung vor ($\mu = 0.5$)

H1: Es liegt eine signifikante Abweichung vor ($\mu \neq 0.5$)

Mithilfe der Nullhypothese werden die Annahmegrenzen bestimmt. Mit der Aussagesicherheit von $\gamma = 95$ % und der inversen t-Verteilung mit N - 1 Freiheitsgraden ergeben sich die Konstanten c_1 und c_2. Damit kann der Annahmebereich bestimmt werden über

$$c_1 \leq \frac{\overline{x} - \mu}{s / \sqrt{N}} \leq c_2$$

und

$$c_1 \cdot \frac{s}{\sqrt{N}} \leq \overline{x} - \mu \leq c_2 \cdot \frac{s}{\sqrt{N}}$$

zu

$$\mu + c_1 \cdot \frac{s}{\sqrt{N}} \le \bar{x} \le \mu + c_2 \cdot \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Mit der Nullhypothese $\mu = 0.5$ ergibt sich konkret

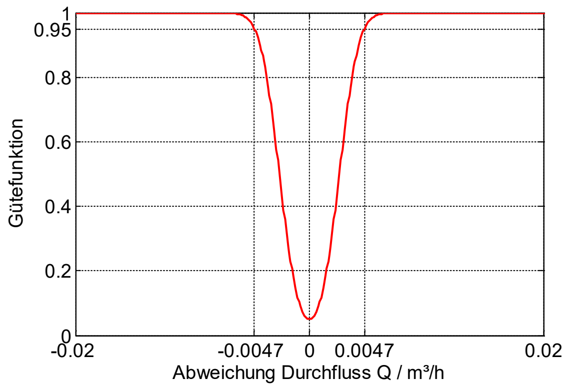
$$0.4974 = Q_{C1} = \mu + c_1 \cdot \frac{s}{\sqrt{N}} \le \bar{x} \le \mu + c_2 \cdot \frac{s}{\sqrt{N}} = Q_{C2} = 0.5026$$

Die Stichprobe hat einen Mittelwert von 0.5105 m³/h. Er liegt außerhalb des Annahmebereichs, die Nullhypothese wird deshalb verworfen. Es gibt eine signifikante Abweichung.

e) Zur Berechnung der Abweichung, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % erkannt werden kann, wird die Gütefunktion berechnet. Dazu wird für unterschiedliche μ_Q die Wahrscheinlichkeit

$$P = P\left(\bar{Q}_{REF} < Q_{C1} \mid \mu = \mu_Q\right) + P\left(\bar{Q}_{REF} > Q_{C2} \mid \mu = \mu_Q\right)$$

berechnet und als Funktion von μ_Q dargestellt. Wegen der unbekannten Varianz wird wieder mit der t-Verteilung gerechnet. Es ergibt sich folgendes Bild:



Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % wird eine Abweichung von ± 0.0047 m³/h erkannt.

```
%% Hypothesentest, Gütefunktion
muQC1 = 0.5 + tinv((1-gamma)/2,N-1)*sQREF/sqrt(N);
muQC2 = 0.5 + tinv((1+gamma)/2,N-1)*sQREF/sqrt(N);
muQ = 0.45:0.0001:0.55;
guete = tcdf((muQC1-muQ)/sQREF*sqrt(N),N-1) + …
        1 - tcdf((muQC2-muQ)/sQREF*sqrt(N),N-1);

% Definition des Grafikfensters
hdl = figure(2);
set(hdl,'Position',[100 100 600 400]);

plot(muQ-0.5,guete,'r','Linewidth',2);
axis([-0.02 0.02 0 1]);
set(gca,'XTick',[-0.02 -0.0047 0 0.0047 0.02],'YTick',[0 0.2 0.4 0.6 0.8 0.95
1]);
set(gca,'FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
xlabel('Abweichung Durchfluss Q / m³/h', 'FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Gütefunktion', 'FontName','Arial','FontSize',14);
grid on;
box on;
```

f) Der vollfaktorielle Versuchsplan bei einem quadratischen Modell mit zwei Eingangsvariablen ist ein 3^2-Versuchsplan. Er kann mit dem Befehl fullfact generiert werden. Nach Umrechnung der normierten Eingangsgrößen in physikalische Eingangsgrößen ergibt der Datensatz für den Versuch. Mit der Funktion Durchfluss.p wird das Versuchsergebnis bestimmt.

Versuch	Düsentemperatur TD / K	Druck p_D / mbar	Durchfluss Q / m³/h
1	283	950	3.0969
2	293	950	2.9847
3	303	950	2.8918
4	283	1000	3.2688
5	293	1000	3.1462
6	303	1000	3.0469
7	283	1050	3.4325
8	293	1050	3.3296
9	303	1050	3.2137

Wegen eines zufälligen Messfehlers ergeben sich jedes Mal etwas andere Daten.

```
%% Aufbau des vollfaktoriellen Versuchsplans
model = [0 0; 1 0; 0 1; 1 1; 2 0 ; 0 2];
FFDesign = fullfact([3 3]) - 2;
Tff = 293 + FFDesign(:,1).*10;
pff = 1000 + FFDesign(:,2).*50;
Xff = [Tff pff];
Qff = Durchfluss(Xff);
% save Versuchff.mat Xff Qff
load Versuchff.mat
```

g) Mit dem Befehl regstats wird die Regression durchgeführt und bewertet. Es zeigt sich, dass nur die in der folgenden Gleichung angegebenen Terme signifikant sind.

$$Q = b_0 + b_1 \cdot T_P + b_2 \cdot p_D^2$$

Bei dem vollfaktoriellen Versuchsplan ergeben sich folgende Regressionskoeffizienten:

Versuchsplan	b_0	b_1	b_2
vollfaktoriell	4.6371	- 0.0108	$1.6707 \cdot 10^{-6}$
D-optimal	4.6081	- 0.0107	$1.6864 \cdot 10^{-6}$

```
% Bestimmung der Regressionsfunktion mit signifikanten Termen
regff = regstats(Qff,Xff,model,{'adjrsquare','tstat'})
regff.adjrsquare
regff.tstat.pval

model = [0 0; 1 0; 1 1; 2 0 ; 0 2];
regff = regstats(Qff,Xff,model,{'adjrsquare','tstat'})
regff.adjrsquare
regff.tstat.pval

model = [0 0; 1 0; 2 0 ; 0 2];
regff = regstats(Qff,Xff,model,{'adjrsquare','tstat'})
regff.adjrsquare
regff.tstat.pval

model = [0 0; 1 0; 0 2];
regff = regstats(Qff,Xff,model,{'adjrsquare','tstat','r'})
regff.adjrsquare
regff.tstat.pval
regff.tstat.beta
regff.r
```

Das adjungierte Bestimmtheitsmaß nimmt zunächst zu und beim letzten Schritt leicht ab.

h) Mit dem Wissen, wie das reduzierte Modell aussieht, kann ein D-optimaler Versuchsplan erstellt werden. Es müssen drei Regressionsparameter bestimmt werden, deshalb werden

$N = 1.5 \cdot 3 = 4.5 \approx 5$

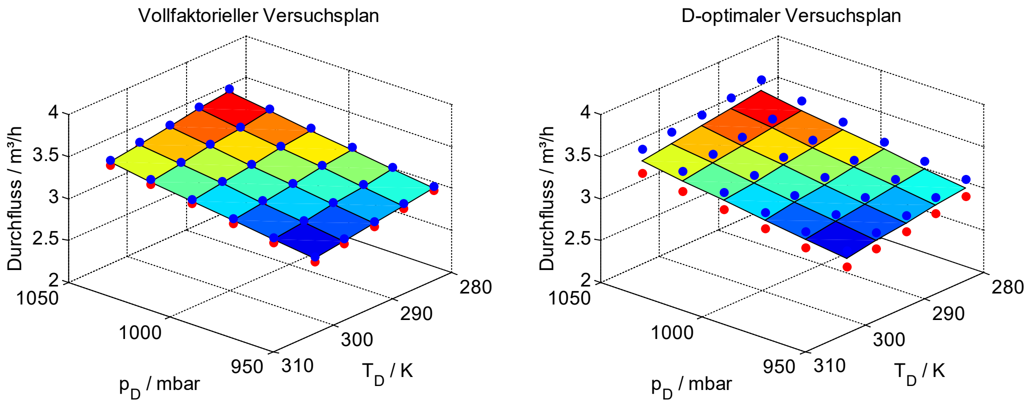
Versuche durchgeführt. Mit dem Befehl cordexch wird ein D-optimaler Versuchsplan erzeugt. Er kann zum Beispiel so aussehen.

Versuch	**Düsentemperatur TD / K**	**Druck p_D / mbar**	**Durchfluss Q / m³/h**
1	303	950	2.8946
2	283	1000	3.0993
3	283	950	3.0475
4	283	950	3.2730
5	303	1000	3.1004

Eine Analyse zeigt, dass auch in diesem Versuch alle Terme signifikant sind. Die Regressionskoeffizienten sind oben in der Tabelle zum Vergleich eingetragen.

```
%% Aufbau des d-optimalen Versuchsplans
AnzahlVersuche = 5;
AnzahlVariablen = 2;
[doptDesign,X]=cordexch(AnzahlVariablen,AnzahlVersuche,model,'tries',10);
Topt = 293 + doptDesign(:,1).*10;
popt = 1000 + doptDesign(:,2).*50;
Xopt = [Topt popt];
Qopt = Durchfluss(Xopt);
% save Versuchopt.mat Xopt Qopt
load Versuchopt.mat

% Bestimmung der Regressionsfunktion mit signifikanten Termen
regopt = regstats(Qopt,Xopt,model,{'adjrsquare','tstat','r'})
regopt.adjrsquare
regopt.tstat.pval
regopt.tstat.beta
regopt.r
```

i) Die Prognosebereiche werden mit der in der Vorlesung hergeleiteten Gleichung bestimmt und in einem Diagramm dargestellt.



Die Regressionsfunktion weist nur leichte Abweichungen im Bereich von 0.2 % des Messwertes auf. Es wird also ein ähnliches Ergebnis mit einer Einsparung von nahezu 50 % des Versuchsumfangs erzielt.

Eine Analyse des Prognosebereichs macht allerdings deutlich, dass durch die wenigen Versuchspunkte der Prognosebereich bei dem D-optimalen Versuchsplan ungefähr 4-mal so groß ist wie bei dem vollfaktoriellen Versuchsplan.

```
%% Grafische Darstellung der Regressionsfunktion und Bestimmung des Prognosein-
tervalls
td = 283:5:303;
pd = 950:20:1050;
[TD,PD] = meshgrid(td,pd);
Qregff = regff.tstat.beta(1) + regff.tstat.beta(2)*TD + …
         regff.tstat.beta(3)*PD.^2;
Qregopt = regopt.tstat.beta(1) + regopt.tstat.beta(2)*TD + …
          regopt.tstat.beta(3)*PD.^2;

% Bestimmung der Prognosebereiche für jeden Punkt beim vollfaktoriellen Versuchs-
plan
gamma = 0.99;
FGff = 9 - 3;
tdv = reshape(TD,30,1);
pdv = reshape(PD,30,1);
X0 = [ones(size(tdv)) tdv pdv.^2];
Xprogff = [ones(size(Tff)) Tff pff.^2];
```

```
PSIff = inv(Xprogff'*Xprogff);
rmsff = sqrt(regff.r'*regff.r/FGff);
Qprogffmin = zeros(size(tdv));
Qprogffmax = zeros(size(tdv));
for n = 1:length(tdv)
        Qprogffmin(n)   = X0(n,:)*regff.tstat.beta + …
        tinv((1-gamma)/2,FGff)*rmsff*sqrt(1+X0(n,:)*PSIff*X0(n,:)');
        Qprogffmax(n)   = X0(n,:)*regff.tstat.beta + …
        tinv((1+gamma)/2,FGff)*rmsff*sqrt(1+X0(n,:)*PSIff*X0(n,:)');
end;

% Bestimmung der Prognosebereiche für jeden Punkt bei D-optimlaen Versuchsplan
FGopt = 5 - 3;
Xprogopt = [ones(size(Topt)) Topt popt.^2];
PSIopt = inv(Xprogopt'*Xprogopt);
rmsopt = sqrt(regopt.r'*regopt.r/FGopt);
Qprogoptmin = zeros(size(tdv));
Qprogoptmax = zeros(size(tdv));
for n = 1:length(tdv)
        Qprogoptmin(n)   = X0(n,:)*regopt.tstat.beta + …
        tinv((1-gamma)/2,FGopt)*rmsopt*sqrt(1+X0(n,:)*PSIopt*X0(n,:)');
        Qprogoptmax(n)   = X0(n,:)*regopt.tstat.beta + …
        tinv((1+gamma)/2,FGopt)*rmsopt*sqrt(1+X0(n,:)*PSIopt*X0(n,:)');
end;

% Definition des Grafikfensters
hdl = figure(2);
set(hdl,'Position',[100 100 1200 400]);

% Darstellung des Regressionsfunktion
subplot(1,2,1);
surf(PD,TD,Qregff);
hold on;
    scatter3(sqrt(X0(:,3)),X0(:,2),Qprogffmin,'ro','filled');
    scatter3(sqrt(X0(:,3)),X0(:,2),Qprogffmax,'bo','filled');
hold off;
axis([950 1050 280 310 2 4]);
set(gca,'FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
xlabel('p_D / mbar','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('T_D / K','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
zlabel('Durchfluss / m³/h','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSi-
ze',14);
title('Vollfaktorieller Versuchsplan', 'FontName','Arial','FontSize',14);
grid on;
box off;
view([-139 32]);

% Darstellung der Regressionsfunktion
subplot(1,2,2);
surf(PD,TD,Qregopt);
hold on;
    scatter3(sqrt(X0(:,3)),X0(:,2),Qprogoptmin,'ro','filled');
    scatter3(sqrt(X0(:,3)),X0(:,2),Qprogoptmax,'bo','filled');
hold off;
axis([950 1050 280 310 2 4]);
set(gca,'FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
xlabel('p_D / mbar', 'FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('T_D / K','FontName','Arial','FontSize',14);
zlabel('Durchfluss / m³/h', 'FontName','Arial','FontSize',14);
title('D-optimaler Versuchsplan', 'FontName','Arial','FontSize',14);
grid on;
box off;
view([-139 32]);
```

j) Für die statistische Tolerierung werden die angegebenen Toleranzwerte entsprechend ihrer Verteilung in Standardabweichungen umgerechnet und mit ihrer Empfindlichkeit multipliziert. Sie ergibt sich aus der partiellen Ableitung nach der entsprechenden Größe im Arbeitspunkt. Die Ableitungen werden symbolisch bestimmt, die entsprechenden Zahlenwerte numerisch bestimmt.

Größe	Toleranz	Standardabweichung	Empfindlichkeit
Q_{NOM}	0.002 m³/h	$3.3333\cdot10^{-4}$ m³/h	1.0384
p_D	2 mbar	0.5774 mbar	$5.45\cdot10^{-4}$ m³/h / mbar
T_D	1 K	0.2887 K	- 0.0018 m³/h / K
c_{PE}	$2.5\cdot10^{-6}$ 1/mbar	$4.1667\cdot10^{-7}$ 1/mbar	- 6.7543 m³/h·mbar
K	0.005	$8.3333\cdot10^{-4}$	- 0.5466 m³/h

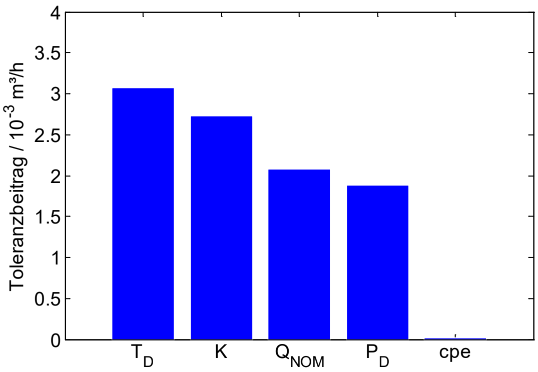
Die angegebene Konfidenzzahl entspricht einem Erweiterungsfaktor von 6. Er muss bei der Berechnung der einzelnen Toleranzen berücksichtigt werden. Die Berechnung wird mit folgendem MATLAB-Code ausgeführt.

Die Wurzel aus der Summe der Quadrate führt zu einer Gesamttoleranz von 0.005 m³/h.

```
% Symbolische Berechnung der partiellen Ableitungen
syms tnom TD pnom PD K cpe QNOM;
KORRs = tnom./TD.*PD/pnom/K.*(1+cpe*(PD-pnom)).* QNOM;
EQNOMs = simple(diff(KORRs,'QNOM'));
EPDs = simple(diff(KORRs,'PD'));
ETDs = simple(diff(KORRs,'TD'));
Ecpes = simple(diff(KORRs,'cpe'));
EKs = simple(diff(KORRs,'K'));

% Definition Arbeitspunkt
pnom = 1013;
tnom = 293;
QNOM = 0.5;
TD = tnom;
PD = 1000;
cpe = 5e-5;
K = 0.95;
QKOR0 = tnom./TD.*PD/pnom./K.*(1+cpe.*(PD-pnom)).*QNOM;

% Berechnung der Empfindlichkeiten im Arbeitspunkt
EQNOM = eval(EQNOMs);
EPD = eval(EPDs);
ETD = eval(ETDs);
Ecpe = eval(Ecpes);
EK = eval(EKs);

% Übernahme der Toleranzangaben, Umrechnung in Standardabweichung
sigQNOM = 0.002/6;
sigPD = 2/sqrt(12);
sigTD = 1/sqrt(12);
sigcpe = 2.5e-6/6;
sigK = 0.005/6;

% Beiträge zur Gesamttoleranz und Berechnung der Gesamttoleranz
gamma = 0.9973;
TNOM = 6*EQNOM*sigQNOM
TPD = 6*EPD*sigPD
TTD = 6*ETD*sigTD
```

```
Tcpe = 6*Ecpe*sigcpe
TK = 6*EK*sigK
T = sqrt(TTD^2+TPD^2+TK^2+Tcpe^2+TNOM^2)
```

k) Die einzelnen Toleranzbeiträge ergeben sich aus dem Produkt von Empfindlichkeit und Standardabweichung. Da der Toleranzbeitrag relativ verglichen werden soll, muss der Erweiterungsfaktor nicht zwingend berücksichtigt werden. Es ergibt sich folgendes Säulendiagramm. Die Toleranzbeiträge sind alle in einem vergleichbaren Bereich, nur der vom Düsenkorrekturfaktor ist deutlich kleiner.



l) Für die statistische Simulation werden 10^5 Zufallsgrößen berechnet. Dabei werden Eingangsgrößen entsprechend ihrer statistischen Verteilung generiert und in die Ausgangsgröße umgerechnet.

Aus der sich ergebenden Verteilung wird der untere und der obere Grenzwert für $\gamma = 99.73$ % bestimmt. Dazu wird der entsprechende Prognosebereich für Ausgangsgröße berechnet.

Es ergibt sich dieselbe Toleranz wie bei der statistischen Simulation.

```
% Generieren der Zufallszahlen
N = 1e5;
QNOMsim = normrnd(QNOM,sigQNOM,N,1);
PDsim = unifrnd(PD-1,PD+1,N,1);
TDsim = unifrnd(TD-0.5,TD+0.5,N,1);
cpesim = normrnd(cpe,sigcpe,N,1);
Ksim = normrnd(K,sigK,N,1);
QKORsim = tnom./TDsim.*PDsim/pnom./Ksim.*(1+cpesim.*(PDsim-pnom)).*QNOMsim;

% Schätzung Prognosebereich
TQmin = mean(QKORsim) + tinv((1-gamma)/2,N-1)*std(QKORsim)*sqrt(1 + 1/N);
TQmax = mean(QKORsim) + tinv((1+gamma)/2,N-1)*std(QKORsim)*sqrt(1 + 1/N);
Tsim = TQmax - TQmin
```