Name: …………………………………..

Matrikel-Nr.: ……………………………

Hinweise:

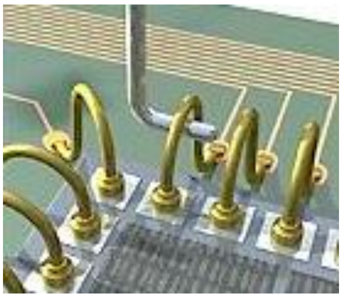
- Diese Klausur enthält 2 Aufgaben.
- Die Unterlagen bestehen aus 11 Seiten inkl. Deckblatt.
- Die Dauer der Klausur beträgt 90 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel:
  - Schriftliche Hilfsmittel
  - Zugewiesener Laborrechner
  - Taschenrechner
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und notieren Sie jeweils Ihren Namen und Matrikelnummer.
- Stellen Sie Ihren Lösungsweg ausführlich dar und begründen Sie Ihr Vorgehen.
- Geben Sie dieses Deckblatt, die Aufgabenstellung und alle bearbeiteten Blätter mit Ihrer Klausur ab.

Aufgabe	max. Punktzahl	Ist-Punktzahl
1	47	
2	53	
	Σ = 100	

Note	

1 Aufgabe

Bei der Kontaktierung elektromechanischer Systeme werden Bond-Verbindungen eingesetzt. Zum Nachweis der Stabilität werden bei Erprobungsteilen Zugversuche durchgeführt. Dabei ist die Kraft von Bedeutung, bei der die Bond-Verbindungen reißen. Sie wird als Zugfestigkeit definiert. Ziel ist es, eine möglichst hohe Zugfestigkeit zu erzielen.



Um die Bauteil-Geometrie zu optimieren, werden Zugversuche an Bond-Verbindungen durchgeführt, die unterschiedliche Längen aufweisen. Es ergeben sich die unten dargestellten Zahlenwertein cN, die auch in der Datei *Zugversuch.mat* gespeichert sind. Aus vorhergehenden Untersuchungen ist bekannt, dass die Messwerte eine Normalverteilung und eine Standardabweichung von σ = 1.5 cN besitzen.

	2.8 mm	**3 mm**	**3.2 mm**	**3.4 mm**	**3.6 mm**
1	27.50	28.84	25.20	23.88	25.48
2	26.45	25.64	26.72	23.22	26.24
3	25.84	27.39	25.35	24.61	27.94
4	27.68	27.21	26.69	22.79	27.01
5	24.94	26.55	26.86	23.58	27.46
6	25.26	27.18	26.20	23.23	25.50
7	25.18	24.98	25.18	22.81	25.92
8	27.23	26.71	28.23	25.06	27.71
9	27.15	26.46	26.98	24.01	25.62
10	25.62	24.30	27.21	24.46	24.81

a) Geben Sie für jede Drahtlänge und γ = 95 % den Konfidenzbereich des Mittelwertes an und stellen Sie die Messergebnisse in geeigneter Form grafisch dar.

b) Ein Mitarbeiter ist der Auffassung, dass es sich um ganz normale Streuungen von Messwerten handelt. Diskutieren Sie diese Vermutung mit Hilfe der ANOVA.

c) Ein zweiter Mitarbeiter meint, dass die Messwerte einen Trend aufweisen und dass die Zugfestigkeit mit steigender Länge des Bond-Drahtes steigt. Prüfen Sie diese Hypothese mit Hilfe der Regressionsrechnung und einem Signifikanzniveau von α = 5 %.

Beim Setzen der Bond-Verbindungen werden Ultraschall-Aktoren eingesetzt. Sie arbeiten mit einer Frequenz, die im Bereich der Eigenschwingungen der Bond-Verbindungen liegt. Es wird vermutet, dass die Eigenschwingung des Bond-Drahtes zu einer Vorschädigung und damit zu einer Reduzierung der Zugfestigkeit führt.

d) Bei welcher Drahtlänge würden Sie eine Übereinstimmung von Eigenschwingung und Anregungsfrequenz vermuten? Begründen Sie Ihre Aussage.

e) Definieren Sie einen Hypothesentest, mit dem Sie Ihre Vermutung prüfen können. Geben Sie bei Ihrer Lösung insbesondere auf

- Nullhypothese H0
- Alternativhypothese H1
- Definition der Zufallsvariable
- Verwerfungsbereich

ein. Verwenden Sie zunächst ein Signifikanzniveau von $\alpha_1 = 5$ %.

f) Was ändert sich, wenn Sie das Signifikanzniveau auf $\alpha_2 = 1$ % ändern? Begründen Sie Ihre Aussage. Gehen Sie verbal auf den Fehler 1. und 2. Art ein.

2 Aufgabe

In Fernwärme-Übergabestationen wird die genutzte Energie über die Temperaturdifferenz von der einströmenden Wassermenge T_E und der ausströmenden Wassermenge T_A bestimmt. In dieser Aufgabe wird in vereinfachter Form die Temperaturdifferenz $\Delta T = T_E - T_A$ hinsichtlich ihrer Toleranz analysiert.

Im ersten Aufgabenteil wird der Abgleich der Temperatursensoren betrachtet. Bei den Temperatursensoren handelt es sich um PT100 Widerstände, für die vereinfachend folgende Kennlinie angenommen wird.

$$R = R_0 \cdot \left(1 + \alpha \cdot \left(T - T_0\right)\right)$$

Die Kennlinie hat die Sollwerte T_0 = 25 °C, R_0 = 100 Ω und $\alpha = 4 \cdot 10^{-3}$ 1/°C.

Die Sensoren werden an zwei Soll-Temperaturen T_{10} = 25 °C und T_{20} = 70 °C abgeglichen, die Sensoren weisen an diesen Temperaturen die Widerstandswerte $R_1 = R(T_1)$ und $R_2 = R(T_2)$ auf.

a) Zeigen Sie, dass die Temperatur T über den Widerstand R und die Funktion

$$T = T_0 + \frac{R \cdot \left(T_1 - T_2\right) - R_2 \cdot \left(T_1 - T_0\right) + R_1 \cdot \left(T_2 - T_0\right)}{R_1 - R_2}$$

bestimmt werden kann.

b) Geben Sie eine Formel für die Standardabweichung σ_T der Temperatur T unter der Annahme an, dass alle Widerstandswerte einen normalverteilten Messfehler mit σ_R = 1 mΩ und die Temperaturen T_1 und T_2 einen normalverteilten Messfehler mit σ_{T12} = 10 mK aufweisen.

c) Warum ist die Standardabweichung σ_T von der zu messenden Temperatur abhängig?

d) Stellen Sie die 2-fache Standardabweichung σ_T als Funktion von T im Bereich von 0 ... 100 °C als MATLAB-Plot dar.

e) Verifizieren Sie Ihre Rechnung mit einer Monte-Carlo-Simulation. Zeichnen Sie das Simulationsergebnis ebenfalls in den Plot von Aufgabenteil e) ein.

Im zweiten Aufgabeteil wird die Temperaturdifferenz zwischen der einströmenden und der ausströmenden Wassermenge analysiert.

f) Führen Sie eine Toleranzbetrachtung für die Temperaturdifferenz $\Delta T = T_E - T_A$ durch. Gehen Sie von unkorrelierten Messgrößen aus. Geben Sie eine Formel für $\sigma_{\Delta T}$ an. Stellen Sie das Ergebnis außerdem grafisch dar.

Musterlösung Aufgabe 1:

a) Jede Gruppe weist eien Normalverteilung auf, außerdem ist die Standaradabweichung bekannt. Damit ist die Größe z standardnormalverteilt.

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} = \sqrt{N} \cdot \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}$$

Mit

$$c = F^{-1}(0.975) = 1.96$$

berechnet sich das Konfidenzintervall zu

$$\bar{x} - c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq \bar{x} + c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

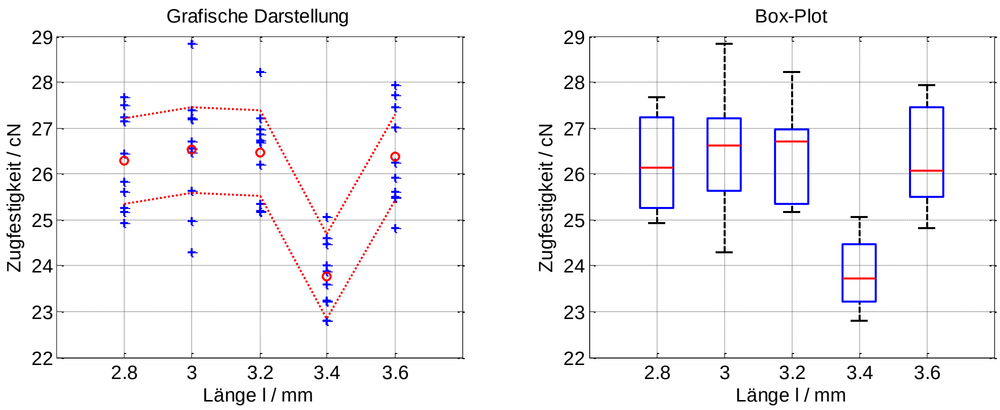
Die Rechnung muss für jede Drahtlänge angewendet werden. Deshalb können Matrix-Operationen verwendet werden.

```
% Daten laden, Variablenname zugfestigkeit
load Zugversuch.mat
laenge = 2.8:0.2:3.6;
N = 10;

% Konfidenzbereich des Mittelwertes
mu = mean(zugfestigkeit);
sig = 1.5;
c = norminv(0.975,0,1)
min = mu - c*sig/sqrt(N);
max = mu + c*sig/sqrt(N);
```

Darstellung des Konfidenzintervalls, alternativ kann der Box-Plot dargestellt werden.

```
% Grafische Darstellung
subplot(1,2,1);
plot(ones(10,1)*laenge,zugfestigkeit,'b+','Linewidth',2);
hold on;
plot(laenge,mu,'ro','Linewidth',2);
plot(laenge,max,'r:','Linewidth',2);
plot(laenge,min,'r:','Linewidth',2);
hold off;

subplot(1,2,1);
boxplot(zugfestigkeit);
```

Es ergeben sich folgende Bilder:



b) Die ANOVA gibt an, ob die Streuungen zwischen den Gruppen größer ist als die Streuung innerhalb der Gruppen.

```
% Berechnung ANOVA
anova1(zugfestigkeit)
```

Der p-Wert beträgt $p = 5.23\cdot10^{-7}$, es liegt eine signifikante Abweichung vor. Es ist allerdings nicht klar, woraus sich die Abweichung ergibt.

c) Der Trend kann über die Regression mit linearen Modell bestimmt werden. Ist der lineare Term signifikant, liegt ein Trend vor. Damit der regstats-Befehl angewendet werden kann, muss eine Umformatierung der Daten vorgenommen werden.

```
% Regressionsrechnung für eine lineare Regression
response  = reshape(zugfestigkeit',50,1);
data = laenge';
for n = 1:9
    data = [data; laenge'];
end;
tstat = regstats(response,data,'linear',{'tstat'})
```

Der p-Wert für linearen Term beträgt p = 7.78 %, der Term ist nicht signifikant, es liegt also kein signifikanter Trend vor.

d) Wenn die Resonanz ausgeprägt ist, führt sie zu Vorschädigungen und damit zu einer verminderten Zugfestigkeit. Bei der Drahtlänge von 3.4 mm ist die Zugfestigkeit gegenüber den anderen Längen verringert. Es wird deshalb vermutet, dass die Resonanz bei dieser Drahtklänge auftritt.

e) Die Hypothesen sind

H0: Mittelwerte der Gruppe mit Drahtlänge 3.4 mm und den anderen Gruppe sind identisch
H1: Mittelwert der Gruppe mit Drahtlänge 3.4 mm ist kleiner

Wenn die Nullhypothese stimmt, sind sie Mittelwerte beider Gruppe gleich. Außerdem ist die Standardabweichung σ bekannt. Damit ist die Zufallsvariable

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\sigma_x^2}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\sigma^2 \cdot \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{M}\right)}}$$

standardnormalverteilt.

Es liegt ein einseitiges Verwerfungsintervall vor. Für ein Signifikanzniveau von α = 5 % ergibt sich mit

$$c = F^{-1}(\alpha) = -1.6449$$

der Annahmebereich für die Nullhypothese zu

$$c \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{1}{M}} \le \bar{x}_1 - \bar{x}_2$$

Der Grenzwert beträgt - 0.3084. Im Vergleich dazu liegt die Differenz der Mittelwerte mit - 2.6455 deutlich unter dieser Grenze, so dass die Nullhypothese verworfen wird. Es liegt eine signifikante Abweichung vor.

```
% Hypothesentest, dass die Reihe mit einer Länge von 3.4 mm signifikant
% nach unten abweicht, Berechnung der kritischen Annahmegrenze

N = 10;
M = 40;
sig = 1.5;
muN = mean(zugfestigkeit(:,4));
muM = mean([zugfestigkeit(:,1); zugfestigkeit(:,2); zugfestigkeit(:,3); ...
            zugfestigkeit(:,5)]);
dmu = muN - muM
sigeff = sig*sqrt(1/M + 1/N)
c1a = norminv(0.05,0,1);
xquergrenza = c1a*sigeff
Ha = dmu < xquergrenza
```

f) Wird das Signifikantniveau auf 1 % gesenkt, verschiebt sich die Grenze für den Annahmebereich zu - 0.4362. Es wird der Fehler erster Art verringert, also der Fehler, bei dem gleiche Mittelwerte als unterschiedlich bewertet werden. Allerdings wird der Fehler 2. Art vergrößert. Damit wird eine Mittelwertverschiebung erst größeren Abweichungen erkannt.

Musterlösung Aufgabe 2:

a) Aus den Messwerten R_1

$$R_1 = R_0 \cdot \left(1 + \alpha \cdot \left(T_1 - T_0\right)\right)$$

und R_2

$$R_2 = R_0 \cdot \left(1 + \alpha \cdot \left(T_2 - T_0\right)\right)$$

sowie T_1 und T_2 ergeben sich die Konstanten der Kennlinie

$$\alpha = \frac{R_1 - R_2}{R_2 \cdot \left(T_1 - T_0\right) - R_1 \cdot \left(T_2 - T_0\right)}$$

und

$$R_0 = \frac{R_1}{1 + \alpha \cdot \left(T_1 - T_0\right)} = \frac{R_1}{1 + \dfrac{R_1 - R_2}{R_2 \cdot \left(T_1 - T_0\right) - R_1 \cdot \left(T_2 - T_0\right)} \cdot \left(T_1 - T_0\right)} = \frac{R_2 \cdot \left(T_1 - T_0\right) - R_1 \cdot \left(T_2 - T_0\right)}{T_1 - T_2}$$

Aus diesen Messgrößen ergibt sich die Temperatur T zu

$$T = T_0 + \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{R}{R_0} - 1\right) = T_0 + \frac{R_2 \cdot \left(T_1 - T_0\right) - R_1 \cdot \left(T_2 - T_0\right)}{R_1 - R_2} \cdot \left(\frac{R}{\dfrac{R_2 \cdot \left(T_1 - T_0\right) - R_1 \cdot \left(T_2 - T_0\right)}{T_1 - T_2}} - 1\right)$$

$$= T_0 + \frac{R \cdot \left(T_1 - T_2\right) - R_2 \cdot \left(T_1 - T_0\right) + R_1 \cdot \left(T_2 - T_0\right)}{R_1 - R_2}$$

Das Ergebnis kann numerisch überprüft werden:

```
% Definition der Kenngrößen
T0 = 25;
T1 = 25;
T2 = 70;
sigT12 = 10e-3;
alpha = 4e-3;
R0 = 100;
R1 = 100*(1+alpha*(T1-T0));
R2 = 100*(1+alpha*(T2-T0));
sigR = 1e-3;

% Temperaturabhängigkeit des Widerstands
T = 0:1:100;
R = 100*(1+alpha*(T-T0));

% Überprüfen der berechneten Temperatur
Tref = T0 + (R*(T1-T2)-R2*(T1-T0)+R1*(T2-T0))/(R1-R2);
```

b) Für die statistische Tolerierung muss eine lineare Maßkette erstellt werden. Dazu werden die partielle Ableitungen berechnet und der Widerstand R als Funktion von T eingesetzt.

$$E_{T1} = \frac{\partial T}{\partial T_1} = \frac{R - R_2}{R_1 - R_2} = \frac{R_0 \cdot \left(1 + \alpha \cdot \left(T - T_0\right)\right) - R_2}{R_1 - R_2}$$

$$E_{T2} = \frac{\partial T}{\partial T_2} = \frac{-R + R_1}{R_1 - R_2} = \frac{-R_0 \cdot \left(1 + \alpha \cdot \left(T - T_0\right)\right) + R_1}{R_1 - R_2}$$

$$E_R = \frac{\partial T}{\partial R} = \frac{T_1 - T_2}{R_1 - R_2}$$

$$\begin{aligned} E_{R1} &= \frac{\partial T}{\partial R_1} = \frac{T_2 \cdot \left(R_1 - R_2\right) - R \cdot \left(T_1 - T_2\right) + R_2 \cdot T_1 - R_1 \cdot T_2}{\left(R_1 - R_2\right)^2} \\ &= \frac{T_2 \cdot R_1 - T_2 \cdot R_2 - R \cdot \left(T_1 - T_2\right) + R_2 \cdot T_1 - R_1 \cdot T_2}{\left(R_1 - R_2\right)^2} \\ &= \frac{\left(R_2 - R\right) \cdot \left(T_1 - T_2\right)}{\left(R_1 - R_2\right)^2} = \frac{\left(R_2 - R_0 \cdot \left(1 + \alpha \cdot \left(T - T_0\right)\right)\right) \cdot \left(T_1 - T_2\right)}{\left(R_1 - R_2\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{R2} &= \frac{\partial T}{\partial R_2} = \frac{-T_1 \cdot \left(R_1 - R_2\right) + R \cdot \left(T_1 - T_2\right) - R_2 \cdot T_1 + R_1 \cdot T_2}{\left(R_1 - R_2\right)^2} \\ &= \frac{-T_1 \cdot R_1 + T_1 \cdot R_2 + R \cdot \left(T_1 - T_2\right) - R_2 \cdot T_1 + R_1 \cdot T_2}{\left(R_1 - R_2\right)^2} \\ &= \frac{\left(R - R_1\right) \cdot \left(T_1 - T_2\right)}{\left(R_1 - R_2\right)^2} = \frac{\left(R_0 \cdot \left(1 + \alpha \cdot \left(T - T_0\right)\right) - R_1\right) \cdot \left(T_1 - T_2\right)}{\left(R_1 - R_2\right)^2} \end{aligned}$$

Unter der Annahme normalverteilter und unkorrelierter Größen ergibt sich für die Varianz

$$\begin{aligned} \sigma_T^2 &= E_{R1}^2 \cdot \sigma_{R1}^2 + E_{R2}^2 \cdot \sigma_{R2}^2 + E_R^2 \cdot \sigma_R^2 + E_{T1}^2 \cdot \sigma_{T1}^2 + E_{T2}^2 \cdot \sigma_{T2}^2 \\ &= \left(E_{R1}^2 + E_{R2}^2 + E_R^2\right) \cdot \sigma_R^2 + \left(E_{T1}^2 + E_{T2}^2\right) \cdot \sigma_{T12}^2 \end{aligned}$$

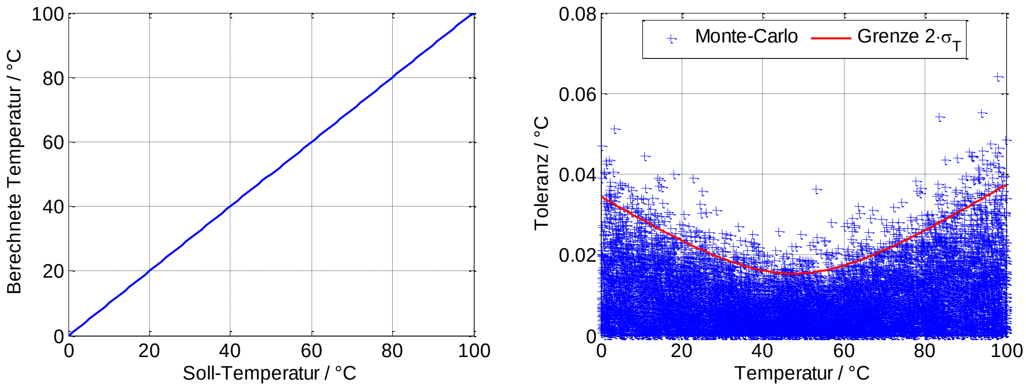
beziehungsweise für die Standardabweichung

$$\sigma_T = \sqrt{\left(E_{R1}^2 + E_{R2}^2 + E_R^2\right) \cdot \sigma_R^2 + \left(E_{T1}^2 + E_{T2}^2\right) \cdot \sigma_{T12}^2}$$

```
% Berechnen der Empfindlichkeiten
ET1 = (R-R2)/(R1-R2)
ET2 = (R1-R)/(R1-R2)
ER = (T1-T2)/(R1-R2)
ER1 = (R2-R)*(T1-T2)/(R1-R2)^2
ER2 = (R-R1)*(T1-T2)/(R1-R2)^2

% Berechnen der Standardabweichung
sigT = sqrt((ER1.^2+ER2.^2+ER^2)*sigR^2 + (ET1.^2+ET2.^2)*sigT12^2)
```

c) Der Messfehler ist von der Temperatur abhängig, weil die Empfindlichkeiten vom Widerstand R und damit von der Temperatur T abhängen. Das wurde bei der Programmierung oben bereits berücksichtigt, indem T und R als Vektoren definiert sind.

d) Der Messfehler ist in folgendem Diagramm als $2 \cdot \sigma_T$ Grenzen eingezeichnet. Zusätzlich ist die unter e) geforderte Monte-Carlo-Simulation und im Bild links die unter a) berechnete Temperatur als Funktion der realen Temperatur dargestellt .



e) Bei der Monte-Carlo-Simulation werden für die Größen R_1, R_2, T_1 und T_2 Zufallszahlen generiert. Sie sind alle normalverteilt und besitzen die angegebenen Sollwerte. Die Größe T_0 ist fest definiert. Die Größe R entspricht ihrem Sollwert als Funktion der Temperatur und besitzt die angegebenen Standardabweichung. Die Zufallszahlen werden in die Formel

$$T = T_0 + \frac{R \cdot (T_1 - T_2) - R_2 \cdot (T_1 - T_0) + R_1 \cdot (T_2 - T_0)}{R_1 - R_2}$$

eingesetzt. Die bereits oben gezeigten Simulationswerte bestätigen die berechnete Toleranz.

```
% Monte Carlo Simulation, Generieren der Zufallsgrößen
N = 10000;
T0V = T0*ones(N,1);
T1V = normrnd(T1,sigT12,N,1);
T2V = normrnd(T2,sigT12,N,1);
R1V = normrnd(R1,sigR,N,1);
R2V = normrnd(R2,sigR,N,1);
TV = unifrnd(0,100,N,1);
RV = 100*(1+alpha*(TV-T0)) + normrnd(0,sigR,N,1);
TrefV = T0V + (RV.*(T1V-T2V)-R2V.*(T1V-T0V)+R1V.*(T2V-T0V))./(R1V-R2V);
plot(TV,abs(TrefV-TV),'b+');
hold on;
plot(T,2*sigT,'r');
hold off;
```

f) Im Fall unkorrelierter Größen addieren sich die Varianzen der einzelnen Temperaturmessungen zur Gesamtvarianz. Allerdings muss berücksichtigt werden, dass die beiden Temperaturmessungen an unterschiedlichen Temperaturen T_E und T_A bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
\sigma_{\Delta TU}^2 &= \sigma_{TE}^2 + \sigma_{TA}^2 \\
&= \left(E_{R1E}^2 + E_{R1E}^2 + E_{RE}^2\right) \cdot \sigma_R^2 + E_{T1E}^2 \cdot \sigma_{T12}^2 + E_{T2E}^2 \cdot \sigma_{T12}^2 \\
&\quad + \left(E_{R1A}^2 + E_{R1A}^2 + E_{RA}^2\right) \cdot \sigma_R^2 + E_{T1A}^2 \cdot \sigma_{T12}^2 + E_{T2A}^2 \cdot \sigma_{T12}^2
\end{aligned}$$