Name: …………………………………..

Matrikel-Nr.: ……………………………

Hinweise:

- Diese Klausur enthält 1 Aufgaben.
- Die Unterlagen bestehen aus 12 Seiten inkl. Deckblatt.
- Die Dauer der Klausur beträgt 240 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel:
  - Schriftliche Hilfsmittel
  - Zugewiesener Laborrechner
  - Taschenrechner
- Notieren Sie auf jedem Blatt Ihren Namen und Matrikelnummer.
- Stellen Sie Ihren Lösungsweg ausführlich dar und begründen Sie Ihr Vorgehen.
- Geben Sie dieses Deckblatt, die Aufgabenstellung und alle bearbeiteten Blätter mit Ihrer Klausur ab.

max. Punktzahl	Ist-Punktzahl
100	

Note	

Aufgabe

Bei der galvanischen Abscheidung von Metallen ist es wünschenswert, definierte Spannungen im Material einstellen zu können. In einer Analyse wurden erste Stichversuche gemacht, um zu entscheiden, ob Temperatur T und Stromdichte J einen signifikanten Einfluss auf die mechanische Spannung S des Metalls haben.

a) Stellen Sie einen Hypothesentest auf, mit dem bewertet werden kann, ob die Temperatur einen signifikanten Einfluss auf die Zugspannung im Material hat (α = 5 %). Was für eine Zufallsvariable wählen Sie? Erklären Sie das Vorgehen. Verwenden Sie als Basis den Datensatz *StichversuchTemperatur.mat*. Gehen Sie von einer normalverteilten Grundgesamtheit aus. Mit welcher Sicherheit kann eine Verschiebung von 20 MPa festgestellt werden?

T / °C	J / A/mm²	S_1 / MPa	S_2 / MPa	S_3 / MPa
20	3	103.73	102.83	104.63
60	3	37.26	32.71	31.67

b) Verwenden Sie eine geeignete Variable, mit deren Konfidenzbereich (γ = 95 %) bewertet werden kann, ob die Stromdichte einen signifikanten Einfluss auf die Zugspannung im Material hat. Verwenden Sie als Basis den Datensatz *StichversuchStromdichte.mat*. Gehen Sie wieder von einer normalverteilten Grundgesamtheit aus.

T / °C	J / A/mm²	S_1 / MPa	S_2 / MPa	S_3 / MPa
40	1	53.72	53.88	55.53
40	5	25.56	26.90	26.04

c) Plausibilisieren Sie beide Ergebnisse durch eine geeignete grafische Darstellung.

Um die Zugspannung im Material numerisch bewerten zu können, wird ein vollfaktorieller 2^2 - Versuchsplan mit 3 Messungen für jeden Punkt im Versuchsraum durchgeführt. Es ergeben sich die in der folgenden Tabelle dargestellten Daten (VersuchsplanGalvanik.mat).

Nr.	T / °C	J / A/mm²	S_1 / MPa	S_2 / MPa	S_3 / MPa
1	20	1	86.1599	93.1480	89.9977
2	20	5	66.8348	65.8121	60.3456
3	60	1	15.1574	18.8144	18.0414
4	60	5	- 10.2289	- 6.2047	- 3.2325

d) Bestimmen Sie die Regressionsfunktion für ein lineares Modell mit 2-fach-Wechselwirkungen.

e) Reduzieren Sie das Modell mithilfe eines t-Tests und des adjungierten Bestimmtheitsmaßes auf die signifikanten Terme. Stellen Sie die Stichprobenwerte und das Regressionsergebnis zusammen als Surface-Plot dar.

f) Berechnen Sie das Prognoseintervall (γ = 95 %) der Regressionsfunktion und stellen Sie den Prognosebereich und das Regressionsergebnis zusammen als Surface-Plot dar

g) Welche Möglichkeit sehen Sie, die Signifikanz der Terme mit einer ANOVA zu bewerten? Erläutern Sie Ihren Vorschlag und bewerten Sie die Signifikanz. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit Aufgabenteil e).

Zur Plausibilisierung wird ein weiterer Punkt im Versuchsraum aufgenommen. Es wird der Center-Point gewählt. Es ergeben sich folgende Werte *(CenterPoint.mat)*:

T / °C	J / A/mm²	S_1 / MPa	S_2 / MPa	S_3 / MPa
40	3	73.43	69.15	66.17

h) Ist die Regressionsfunktion mit linearen Termen und Wechselwirkungstermen vernünftig gewählt? Welche Änderung würden Sie vorschlagen?

Die MATLAB-Funktion *GalvanikSpannung.p* bestimmt die mechanische Spannung S, die bei einer Stromdichte J und Temperatur T entsteht. Der Aufruf der Funktion lautet

S = GalvanikSpannung(T, J)

T und J dürfen Skalare oder Spaltenvektoren sein. Beispiel für den Aufruf:

S = GalvanikSpannung(40, 3)

i) Erstellen Sie einen geeigneten D-optimalen Versuchsplan, um die von Ihnen ausgewählte Regressionsfunktion zu bestimmen. Speichern Sie den von Ihnen generierten Datensatz in der Datei *Versuch.mat* ab.

j) Reduzieren Sie das Modell auf die signifikanten Terme. Stellen Sie die Stichprobenwerte und das Regressionsergebnis zusammen als Surface-Plot dar. Vergleichen Sie das Ergebnis mit Aufgabenteil e.

Musterlösung

a) Jede Gruppe weist eine Normalverteilung auf, die Standardabweichung ist unbekannt. Damit weist die Größe

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{1}{N} + \frac{1}{M}} \cdot s}$$

mit

$$\bar{x} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$$

$$\mu = \mu_1 - \mu_2$$

$$s^2 = \frac{\sum_{n=1}^{N} \left(x_{1n} - \bar{x}_1 \right)^2 + \sum_{m=1}^{M} \left(x_{2m} - \bar{x}_2 \right)^2}{N + M - 2} = \frac{(N-1) \cdot s_1^2 + (M-1) \cdot s_2^2}{N + M - 2}$$

eine t-Verteilung mit N + M - 2 = 4 Freiheitsgraden auf.

Die Nullhypothese lautet $\mu = 0$, die Alternativhypothese $\mu \neq 0$. Unter Annahme der Nullhypothese ergeben sich die Grenzen c_1 und c_2 mit der Wahrscheinlichkeit $\gamma = 95$ % über

$$P(c_1 < t \leq c_2) = F(c_2) - F(c_1) = \gamma$$

zu

$$c_1 = F^{-1}\left(\frac{1 - \gamma}{2} \right)$$

und

$$c_2 = F^{-1}\left(\frac{1 + \gamma}{2} \right)$$

Der Annahmebereich für die Nullhypothese lautet damit

$$\bar{x}_{C1} = c_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{1}{M}} \cdot s < \bar{x} \leq c_2 \cdot \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{1}{M}} \cdot s = \bar{x}_{C2}$$

Berechnung erfolgt mit folgendem Matlab-Skript:

```
load StichversuchTemperatur.mat;
gamma = 0.95;
N = 3;
M = 3;
FG = (N + M - 2);
X1T = data(1:3,3);
X2T = data(4:6,3);
xquer = mean(X1T) - mean(X2T)
s = sqrt(((N-1)*std(X1T)^2 + (M-1)*std(X2T)^2) / FG);
c1 = tinv((1-gamma)/2,FG);
c2 = tinv((1+gamma)/2,FG);
xc1 = c1*sqrt(1/N+1/M)*s
xc2 = c2*sqrt(1/N+1/M)*s
```

Zur Bewertung der Sicherheit wird wieder die Variable t betrachtet. Die Differenz μ ist konstant und beträgt μ = 20 MPa.

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{1}{N} + \frac{1}{M}} \cdot s}$$

Die Sicherheit, mit der eine Abweichung μ erkannt wird, ergibt sich aus der Gleichung

$$P = F\left(\frac{\bar{x}_{C1} - \mu}{\sqrt{\frac{1}{N} + \frac{1}{M}} \cdot s}\right) + 1 - F\left(\frac{\bar{x}_{C2} - \mu}{\sqrt{\frac{1}{N} + \frac{1}{M}} \cdot s}\right)$$

Der Sicherheit, mit der eine Änderung von 20 MPa identifiziert werden kann, berechnet sich mit den berechneten Grenzen zu

$$P = F\left(\frac{\bar{x}_{C1} - \mu}{\sqrt{\frac{1}{N} + \frac{1}{M}} \cdot s}\right) + 1 - F\left(\frac{\bar{x}_{C2} - \mu}{\sqrt{\frac{1}{N} + \frac{1}{M}} \cdot s}\right) = 0.9995$$

Sie ist deshalb vergleichsweise groß, weil die Standardabweichung in Relation zur Differerent klein ist. Die Berechnung erfolgt mit folgendem Matlab-Skript:

```
mu = 20;
P = tcdf((xc1-mu)/s/sqrt(1/N+1/M),FG) + 1 - tcdf((xc2-mu)/s/sqrt(1/N+1/M),FG)
```

b) Es wird dieselbe Art von Zufallsvariable verwendet

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{1}{N} + \frac{1}{M}} \cdot s}$$

Schließt der Konfidenzbereich den Wert null ein, ist die Stromdichte nicht signifikant, andernfalls ist sie signifikant.

$$\gamma = P\left(\bar{x} - c_2 \cdot \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{1}{M}} \cdot s < \mu \le \bar{x} - c_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{1}{M}} \cdot s\right)$$

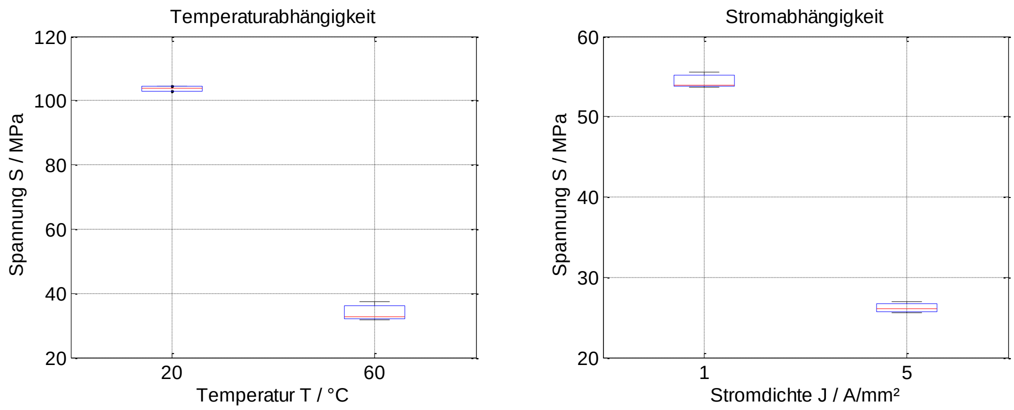
Mit den gegebenen Zahlenwerten ergibt sich

$$26.2695\ \text{MPa} < \mu \le 30.1530\ \text{MPa}$$

Da der Konfidenzbereich den Wert null nicht einschließt, ist der Unterschied signifikant. Berechnung erfolgt mit folgendem Matlab-Skript:

```
load StichversuchStromdichte.mat;
gamma = 0.95;
N = 3;
M = 3;
FG = (N + M - 2);
X1J = data(1:3,3);
X2J = data(4:6,3);
xquer = mean(X1J) - mean(X2J)
s = sqrt(((N-1)*std(X1J)^2 + (M-1)*std(X2J)^2) / FG);
c1 = tinv((1-gamma)/2,FG);
c2 = tinv((1+gamma)/2,FG);
muc1 = xquer - c2*sqrt(1/N+1/M)*s
muc2 = xquer - c1*sqrt(1/N+1/M)*s
```

c) Der grafische Vergleich wird mit zwei Boxplots durchgeführt:



Die Plots zeigen, dass die beiden Boxes keine Überlappung aufweisen und dass beide Größen einen signifikanten Einfluss haben. Die Grafik bestätigt also das Ergebnis des Hypothesentests. Die Darstellung erfolgt mit folgendem Matlab-Skript:

```
h1 = figure(1);

subplot(1,2,1);
boxplot([X1T, X2T])

subplot(1,2,2);
boxplot([X1J, X2J])
```

d) Mithilfe der Funktion regstats ergeben sich für das lineare Modell mit Wechselwirkungen die Koeffizienten

$$S = b_0 + b_1 \cdot T + b_2 \cdot J + b_3 \cdot T \cdot J$$

Mit den berechneten Koeffizienten lautet die Regressionsfunktion

$$S = 132.5364 - 1.8204 \cdot T - 6.5525 \cdot J + 0.0097 \cdot T \cdot J$$

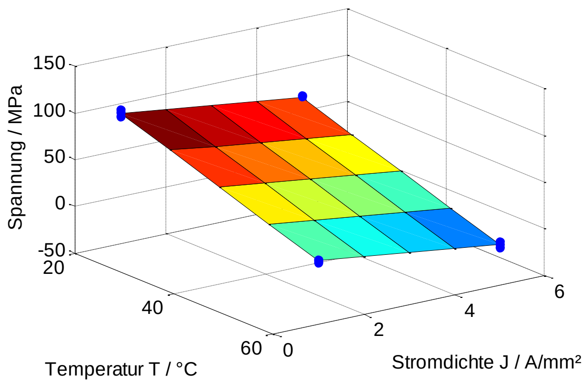
Berechnung erfolgt mit folgendem Matlab-Skript:

```
load VersuchsplanGalvanik.mat;
T = data(:,1);
J = data(:,2);
S = data(:,3);
model = [0 0; 1 0; 0 1; 1 1]
stats = regstats(S,[T J],model,{'tstat','adjrsquare'});
stats.tstat.beta
```

e) Die nicht signifikanten Terme werden über den t-Test eliminiert, dabei wird das adjungierte Bestimmtheitsmaß kontrolliert. Der Wechselwirkungsterm ist nicht signifikant und wird eliminiert. Dabei steigt das adjungierte Bestimmtheitsmaß leicht an. Das reduzierte Regressionsmodell lautet

$$S = b_0 + b_1 \cdot T + b_2 \cdot J = 131.3780 - 1.7915 \cdot T - 6.1664 \cdot J$$

Das Regressionsergebnis wird als Surface-Plot dargestellt. Dazu werden für die Eingangsgrößen T und J sowie für die Ausgangsgröße S eine Matrix erzeugt.



Die Signifikanzbewertung und die Darstellung wurden mit folgendem MATLAB-Code erstellt:

```
model = [0 0; 1 0; 0 1; 1 1]
stats = regstats(S,[T J],model,{'tstat','adjrsquare'});
stats.tstat.pval
stats.adjrsquare

model = [0 0; 1 0; 0 1]
stats = regstats(S,[T J],model,{'tstat','adjrsquare'});
stats.tstat.pval
stats.adjrsquare
b = stats.tstat.beta

t = 20:10:60;
j = 1:1:5;
[Tplot,Jplot] = meshgrid(t,j);
Splot = b(1) + b(2)*Tplot + b(3)*Jplot;

surf(Tplot,Jplot,Splot)
hold on;
scatter3(T,J,S,'filled');
hold off;
```

f) Die Regressionsfunktion ist zweidimensional. Deshalb wird der Prognosebereich mithilfe der in der Vorlesung hergeleiteten Gleichung berechnet. Es wird das reduzierte Regressionsmodell ohne Wechselwirkungsterm verwendet. Die Konstanten c_1 und c_2 ergeben sich dabei aus der inversen t-Verteilung mit 12 - 3 = 9 Freiheitsgraden und γ = 95 % zu

$$c_1 = F^{-1}\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)$$

$$c_2 = F^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$$

$$\underline{x}_0^T \cdot \underline{b} + c_1 \cdot s_{\hat{y}_0} < \hat{y}\left(\underline{x}_0^T\right) \le \underline{x}_0^T \cdot \underline{b} + c_2 \cdot s_{\hat{y}_0}$$

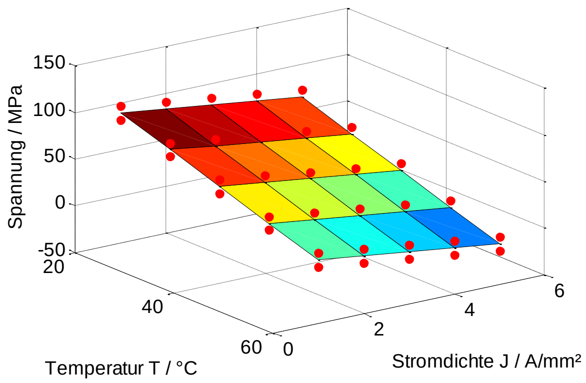
mit

$$\underline{b} = \left(\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}\right)^{-1} \cdot \mathbf{X}^T \cdot \underline{y}$$

und

$$s_{\hat{y}_0}^2 = \frac{1}{N-M-1} \cdot \left(\underline{y}^T \cdot \underline{y} - \underline{b}^T \cdot \mathbf{X}^T \cdot \underline{y}\right) \cdot \left(1 + \underline{x}_0^T \cdot \left(\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}\right)^{-1} \cdot \underline{x}_0\right)$$

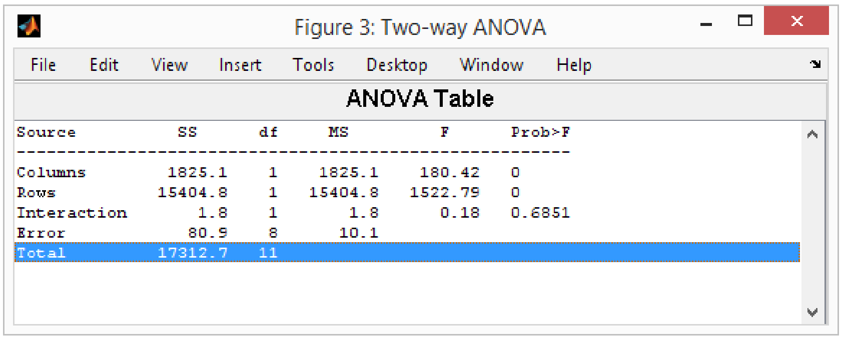
Der Prognosebereich wird in den Surface-Plot eingezeichnet:



Es wurde folgendes MATLAB-Skript verwendet:

```
% Statistische Konstanten
FG = 12 - 3;
c1 = tinv((1-gamma)/2,FG)
c2 = tinv((1+gamma)/2,FG)

% Regression
X = [ones(size(T)) T J];
bmat = inv(X'*X)*X'*S;
Sres = S - X*bmat;

% Erstellen einer Matrix mit den neuen Beobachtungen
xneu = [];
for t = 20:10:60
    for j = 1:1:5
        xneu = [xneu; [1 t j]];
    end;
end;

% Berechnung Prognosebereich
Smin = [];
Smax = [];
for n = 1:length(xneu)
    x0 = xneu(n,:)';
    Smin = [Smin bmat'*x0 - ...
            tinv((1+gamma)/2,FG)*sqrt(Sres'*Sres/FG)*sqrt(1 + x0'*inv(X'*X)*x0)];
    Smax = [Smax bmat'*x0 + ...
            tinv((1+gamma)/2,FG)*sqrt(Sres'*Sres/FG)*sqrt(1 + x0'*inv(X'*X)*x0)];
end;

surf(Tplot,Jplot,Splot)
hold on;
scatter3(xneu(:,2),xneu(:,3),Smin,'r','filled');
scatter3(xneu(:,2),xneu(:,3),Smax,'r','filled');
scatter3(40,3,mean([73.43,69.15,66.17]),'k','filled');
hold off;
```

g) Der Datensatz kann als zweidimensionale Varianzanalyse aufgefasst werden. Eine Dimension ist die Temperatur T (Zeilen), die andere Dimension ist die Stromdichte J (Spalten). Die ANOVA teilt die Varianz des Ausgangssignals in unterschiedliche Ursachen auf. In diesem Fall wird der Einfluss der beiden Eingangsgrößen sowie des Wechselwirkungsterms bewertet. Der Datensatz muss in eine entsprechende Matrix umgeformt werden. Es ergibt sich folgende ANOVA-Tabelle:



Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Columns	1825.1	1	1825.1	180.42	0
Rows	15404.8	1	15404.8	1522.79	0
Interaction	1.8	1	1.8	0.18	0.6851
Error	80.9	8	10.1		
Total	17312.7	11			

Nach der ANOVA-Tabelle sind alle Terme bis auf den Wechselwirkungsterm signifikant, das Ergebnis entspricht in diesem Fall dem Ergebnis des t-Tests.

h) Der neu aufgenommene Center-Point liegt nicht innerhalb des Prognosebereichs der Regressionsfunktion. Er ist bereits in die Grafik mit dem Prognosebereich eingezeichnet. Ursache ist vermutlich ein quadratischer Zusammenhang, der durch den linearen Modellansatz mit Wechselwirkungen nicht abgedeckt wird. Deshalb wird das Modell um quadratische Terme erweitert.

i) Unter Berücksichtigung des vollquadratischen Modells ergeben sich 6 Regressionsterme. Es wird ein D-optimaler Versuchsplan mit $1.5 \cdot 6 = 9$ Versuchen entworfen. Für die Eingangsgrößen ergibt sich folgender Datensatz, dür den die Ausgangsgröße wird mit der angegebenen MATLAB-Funktion berechnet wird.

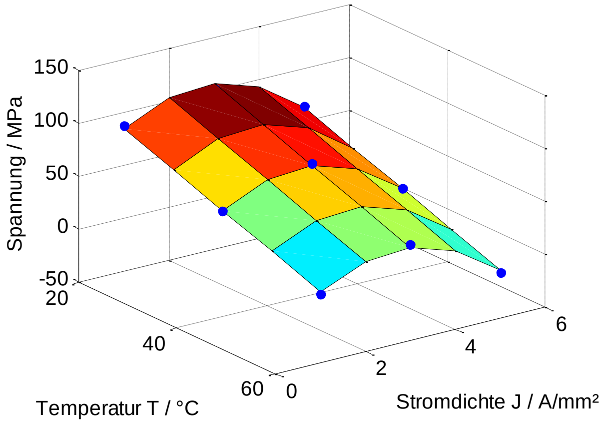
Nr.	T / °C	J / A/mm²	S / MPa
1	60	5	- 6.8147
2	20	3	101.3630
3	20	5	64.5409
4	60	3	40.1462
5	20	1	87.0538
6	40	5	29.9239
7	40	3	74.0856
8	60	1	14.2520
9	40	1	49.7583

j) Die nicht signifikanten Terme werden wieder über den t-Test eliminiert, dabei wird das adjungierte Bestimmtheitsmaß kontrolliert.

Das reduzierte Regressionsmodell lautet in diesem Fall:

$$S = b_0 + b_1 \cdot T + b_2 \cdot J + b_3 \cdot J = 83.9983 - 1.7115 \cdot T + 42.8344 \cdot J - 8.0198 \cdot J^2$$

Das Regressionsergebnis wird als Surface-Plot dargestellt. Dazu werden für die Eingangsgrößen T und J sowie für die Ausgangsgröße S eine Matrix erzeugt.




```
model = [0 0; 1 0; 0 1; 1 1; 2 0; 0 2];
stats = regstats(S,[T J],model,{'tstat','adjrsquare'});
stats.tstat.pval
stats.adjrsquare

model = [0 0; 1 0; 0 1; 1 1; 0 2];
stats = regstats(S,[T J],model,{'tstat','adjrsquare'});
stats.tstat.pval
stats.adjrsquare

model = [0 0; 1 0; 0 1; 0 2];
stats = regstats(S,[T J],model,{'tstat','adjrsquare'});
stats.tstat.pval
stats.adjrsquare
b = stats.tstat.beta;

Splot = b(1) + b(2)*Tplot + b(3)*Jplot + b(4)*Jplot.*Jplot;

surf(Tplot,Jplot,Splot);
hold on;
scatter3(T,J,S,'filled');
hold off;
```