*2. Определители и их свойства*

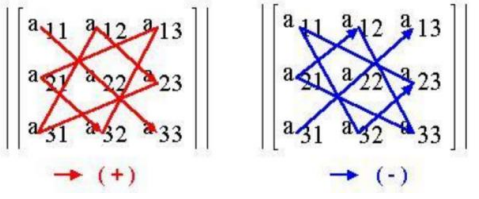
**ghp\_ZZTgFAnpjtdUAzJgStFCzGlrQGvJdp49U8iX**

**Определитель** – число, характеризующее квадратную матрицу. Он определен только для квадратных матриц. Для неквадратных матриц определитель не вычисляется (т.е. не существует). Определитель матрицы обозначается А или Δ , или det(А).

Определителем матрицы первого порядка A = ( ) , или определителем первого порядка, называется элемент : = =

Под определителем (детерминантом) второго порядка понимается выражение:

Определитель третьего порядка можно вычислить по правилу Саррюса (правилу треугольников):



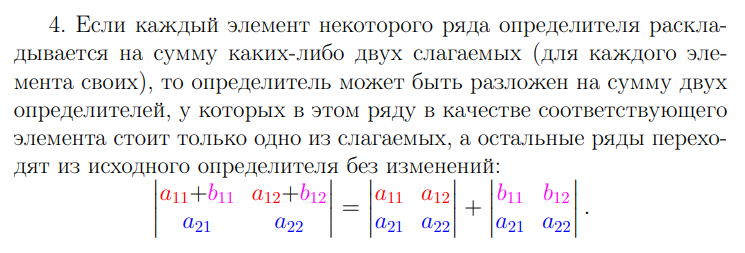


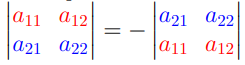
При вычислении определителей высоких порядков используют теорему Лапласа: определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.

**Свойства определителей:**

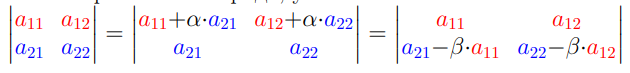
1. – при транспонировании квадратной матрицы ее определитель не меняется
2. Общий множитель в строке можно вынести за знак определителя
3. – если кв. матрица A n\*n n-го порядка умножается на некоторое λ≠0, то определитель полученной матрицы равен произведению определителя исходной матрицы А на число в степени, равной порядку матрицы

*\*картинка относится к 4 пункту*

1. ****
2. Если 2 строки(столбца) определителя поменять местами, то определитель поменяет знак

****

1. Определитель не изменится, если к какой-то его строке (или столбцу) прибавить другую строку (или столбец), умноженный на некоторое число

****

1. Определитель равен нулю, если он имеет:

- нулевую строку (столбец);

- хотя бы две одинаковые строки (столбца);

- хотя бы две строки (столбца), элементы которых пропорциональны;

- хотя бы одну строку (столбец), являющуюся линейной комбинацией других строк (столбцов)

1. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц:

det(A · B) = det A · det B

*4. Ранг матрицы*

Ранг матрицы – наивысший порядок отличных от 0 миноров этой матрицы (максимальное число линейно независимых столбцов(строк) матрицы)

Обозначение: r, r(A), rang(A)

Свойства ранга матрицы:

1. r(A + B) ≤ r(A) + r(B).

2. r(A · B) ≤ min {r(A), r(B)} .

3. r( ) = r(A).

*Теорема (о ранге матрицы)*

Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк (столбцов), через которые линейно выражаются все остальные ее строки (столбцы).

*Следствие из теоремы о ранге матрицы*

Для любой матрицы максимальное число линейно независимых строк равно максимальному числу линейно независимых столбцов.

*Нахождение ранга матрицы (метод элементарных преобразований):*

1. С помощью элементарных преобразований строк приводим данную матрицу к ступенчатому виду.

2. Определяем ранг исходной матрицы как количество ненулевых строк в получившейся ступенчатой матрице.

*Элементарные преобразования, которые не меняют ранг матрицы:*

1. Перестановка строк/столбцов местами
2. Умножение элементов строки/столбца на число не равное 0
3. Сложение строк/столбцов с предварительным умножение одной из них на число не равное 0
4. Отбрасывание нулевой строки/столбца
5. Транспонирование матрицы

*6. Нахождение ранга матрицы*

**Метод окаймляющих миноров**

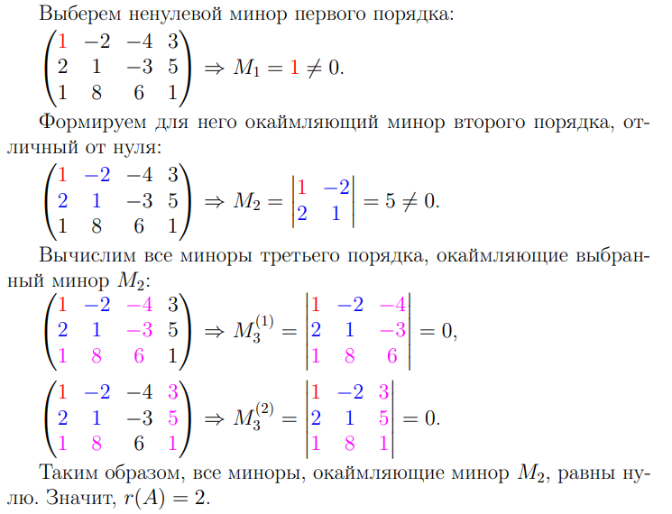
*Определение*. Минор M∗ матрицы A называется окаймляющим для минора M, если он получается из последнего добавлением одной новой строки и одного нового столбца матрицы A.

*Теорема (об окаймляющих минорах).* Если для некоторого отличного от нуля минора матрицы все окаймляющие его миноры равны нулю, то он является базисным.

Метод окаймляющих миноров позволяет найти один из базисных миноров и включает в себя следующие этапы:

1. Выбирается ненулевой минор первого порядка (любой ненулевой элемент матрицы).

2. К этому минору последовательно добавляются такие строки и столбцы, чтобы новый окаймляющий минор был отличен от нуля. Если этого сделать нельзя, то последний ненулевой минор является базисным, а его порядок равен рангу матрицы.



**Метод элементарных преобразований***:*

*Определение*. *Ступенчатой* называется матрица, у которой все ненулевые строки располагаются над всеми нулевыми строками и первый ненулевой элемент каждой ненулевой строки располагается правее первого ненулевого элемента предыдущей строки.

1. С помощью элементарных преобразований строк приводим данную матрицу к ступенчатому виду.

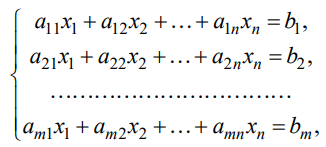
2. Определяем ранг исходной матрицы как количество ненулевых строк в получившейся ступенчатой матрице.

*Элементарные преобразования, которые не меняют ранг матрицы:*

1. Перестановка строк/столбцов местами
2. Умножение элементов строки/столбца на число не равное 0
3. Сложение строк/столбцов с предварительным умножение одной из них на число не равное 0
4. Отбрасывание нулевой строки/столбца
5. Транспонирование матрицы

*8. Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли*

Система из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными (сокращенно СЛАУ) в общем виде имеет вид:

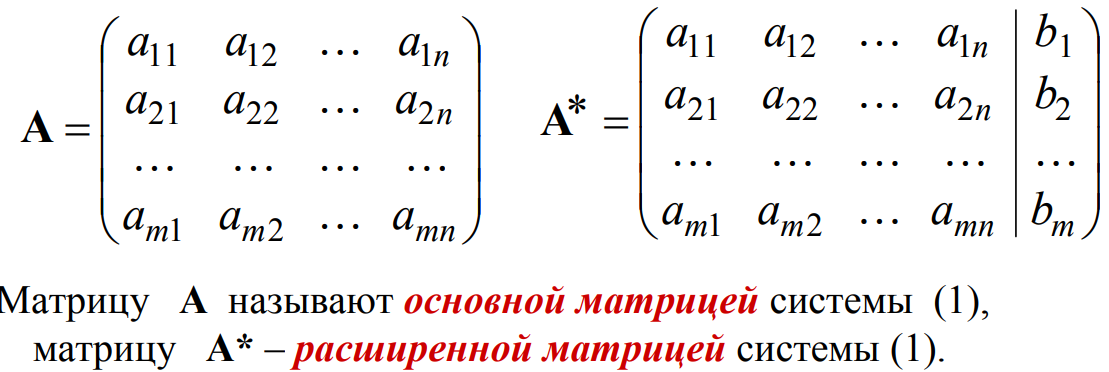


- где числа называются коэффициентами системы, числа – свободные члены, - неизвестные числа, которые надо определить.

Запись СЛАУ в виде системы называется координатной. Ее можно записать в матричной форме:

A\*X=В

- где А – матрица коэффициентов, Х – столбец неизвестных, В – столбец свободных членов



Также расширенную матрицу можно записать как (A|B)

Упорядоченный набор чисел c1 ,c2 ,…, называется решением системы, если он обращает в верное равенство каждое уравнение системы

СЛАУ называется:

- *совместной*, если она имеет хотя бы 1 решение

- *несовместной*, если ни одного решения

-*вырожденной*, если определитель системы равен 0

-*невырожденной*, если определитель системы отличен от нуля

Совместная СЛАУ называется:

- *определенной*, если она имеет единственное решение

-*неопределенной*, если она имеет бесконечное множество решений

**Теорема Кронекера-Капелли**

СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы этой системы.

Это решение единственно, когда ранг равен числу переменных системы.

- если rang(A)≠rang(A|B) – система не имеет решений

- если rang(A)=rang(A|B)=n – система имеет 1 решение (n-кол-во переменных системы)

- если rang(A)=rang(A|B)<n – система имеет бесконечное мн-во решений

*10. Правило Крамера*

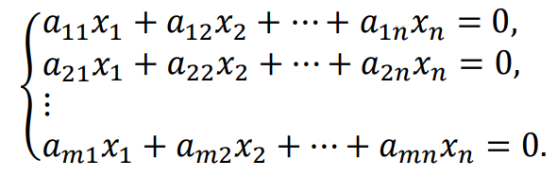
**Правило Крамера** (метод решения невырожденных систем)

Пусть дана система n линейных ур-й с n неизвестными, и пусть det этой системы отличен от нуля. Тогда система имеет единственное решение, определяемое по формуле:

где – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой j-го столбца на столбец свободных членов.

*12. Однородные системы линейных алгебраических уравнений*

Система линейных уравнений является однородной, если свободный член **каждого** уравнения системы равен нулю:



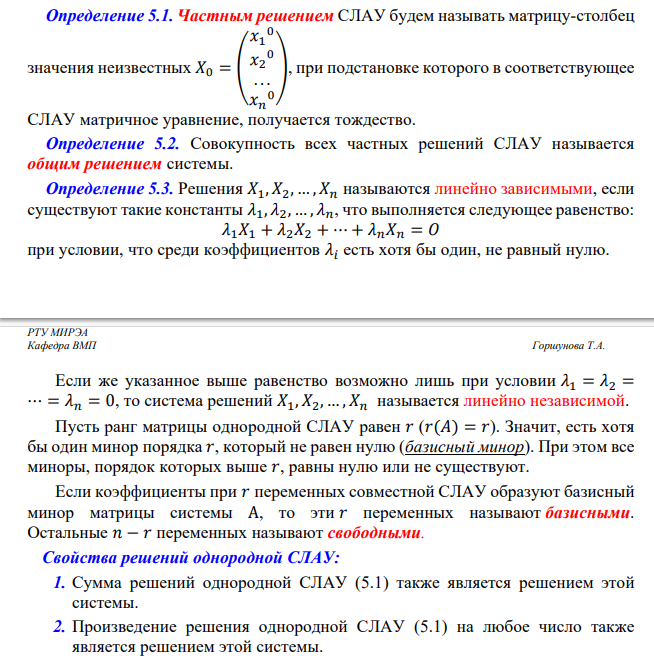
В матричной форме: А\*Х=0

О**днородная система всегда совместна**, то есть всегда имеет решение, так как существует тривиальное решение: 𝑥1 = 𝑥2 =. . . = 𝑥𝑛 = 0

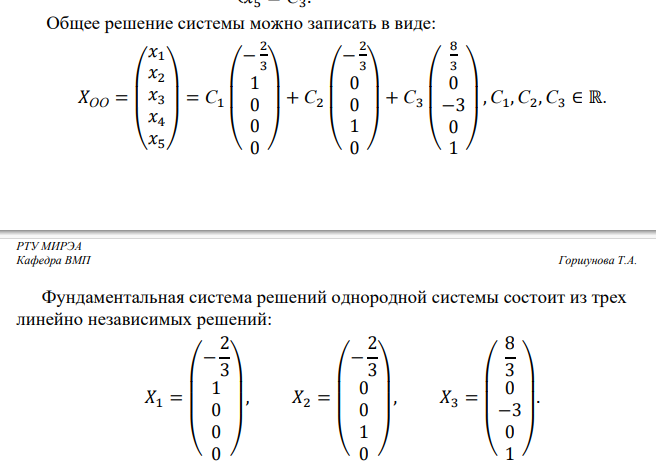
Однородная система линейных уравнений имеет:

• *единственное* (тривиальное) решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен числу неизвестных: 𝑟(𝐴) = 𝑛;

• *хотя бы одно нетривиальное* решение (бесконечное множество нетривиальных решений) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы меньше числа неизвестных: 𝑟(𝐴) < n



Множество решений однородной системы уравнений является векторным пространством. Любая совокупность 𝑛 − 𝑟 линейно независимых решений однородной СЛАУ называется *фундаментальной системой* решений (ФСР) данной СЛАУ



*14. Базис на плоскости и в пространстве. Декартова прямоугольная система координат*

Два линейно независимых упорядоченных вектора образуют *базис на плоскости*, если любой вектор этой плоскости можно представить в виде их линейной комбинации, т.е. такие, что .

Три линейно независимых упорядоченных вектора образуют *базис в пространстве*, если любой вектор пространства можно представить в виде .

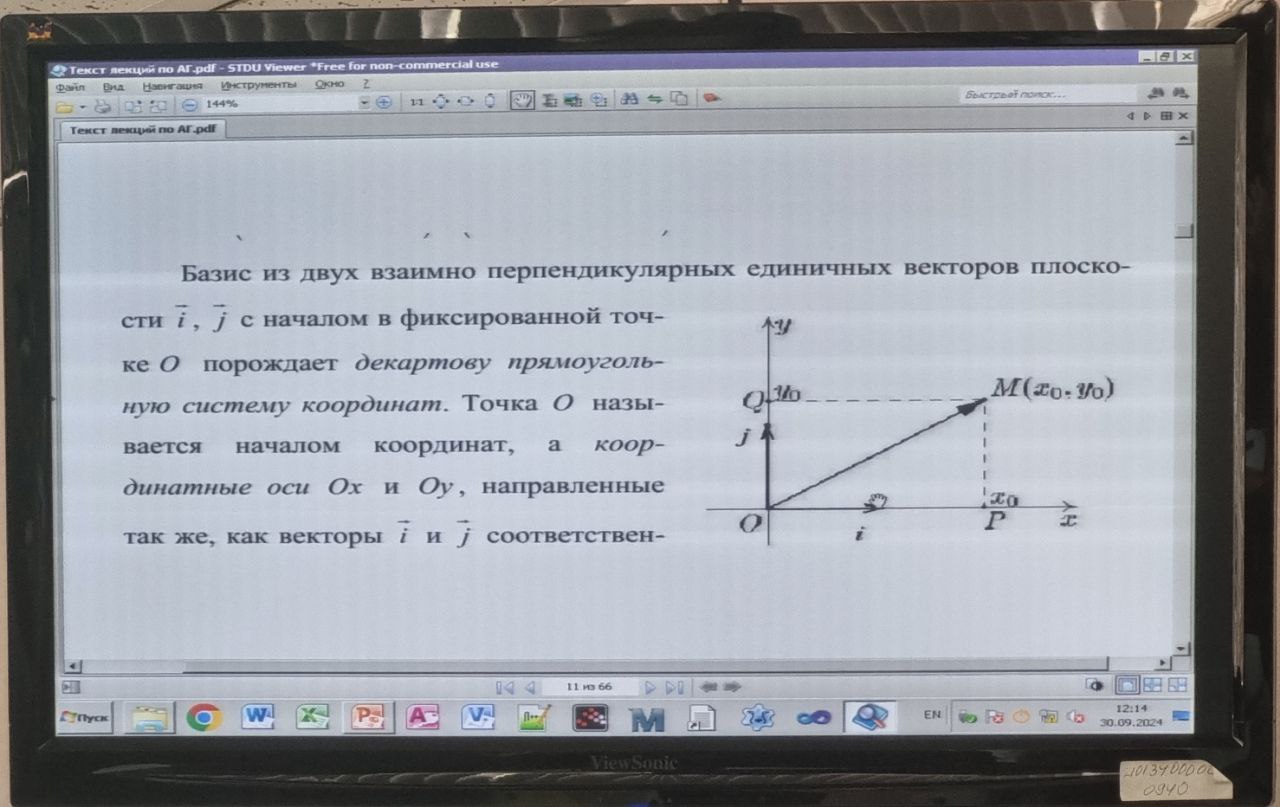
Равенство называется разложением вектора по базису , а числа α,β и – координатами вектора в этом базисе.

На плоскости базисом являются любые два неколлинеарных вектора этой плоскости, а в пространстве – любая тройка некомпланарных векторов.

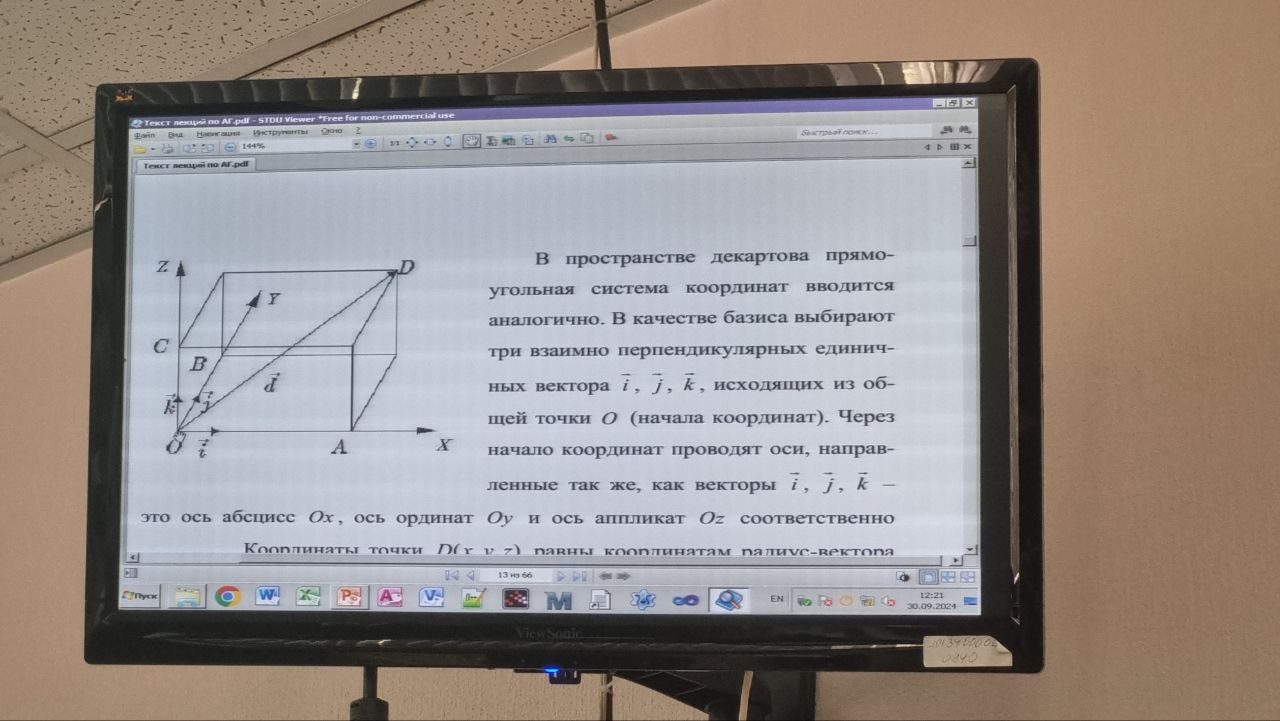
Координаты вектора относительно заданного базиса определяются однозначно. Равенство можно записывать в символическом виде

**Теорема.** Пусть в некотором базисе заданы , . Тогда ; λ.

Базис из двух взаимно перпендикулярных единичных векторов плоскости , с началом координат в фиксированной точке О порождает *декартову прямоугольную систему координат*. Точка О называется началом координат, а координатные оси Ох и Оу, направленные так же, как векторы и соответственно

**

В пространстве декартова прямоугольная система координат вводится аналогично. В качестве базиса выбирают три взаимно перпендикулярных единичных векторов , , исходящих из общей точки О (начало координат). Через начало координат проводят оси, направленные так же, как векторы , – это ось абсцисс Ох, ось ординат Оу, ось аппликат Оz соответственной.

Координаты точки D(x, y, z) равны координатам радиус-вектора этой точки:

Если  – углы наклона вектора = к осям, то , , . Числа , , – направляющие косинусы вектора . (их сумма квадратов равна 1)

*16. Векторное произведение векторов.*

Векторным произведением векторов и называется вектор , обозначаемый , (или × ), который определяется следуюзими тремя условиями:

1) длина вектора равна , где – угол между векторами и

2) ⟂, ⟂

3) тройка , и является правой

Свойства векторного произведения:

1), = -, – антикоммутативность

2), = , + , – дистрибутивность

3), = λ, , λ – однородность

Для того, чтобы два вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение было равно нулю

**Геометрический смысл векторного произведения**

Длина векторного произведения численной равна площади параллелограмма, построенного на векторах сомножителях как на сторонах.

, =

*18. Прямая на плоскости. Уравнение прямой*

Уравнение вида F(x, y)=0 называется уравнением линии L, расположенной в плоскости Oxy, если ему удовлетворяют декартовы координатылюбой точки, принадлежащей линии L, и не удовлетворяют координаты никаких других точек.

**Теорема.** Произвольная прямая, принадлежащая плоскости Оху, задается уравнением первого порядка относительно декартовых координат x и y.

**Уравнение прямой, проходящей через две данные точки на плоскости**

Две различные точки определяют единственную прямую.

Пусть заданы точки – произвольная точка прямой

- *уравнение прямой, проходящей через две заданные точки*

**Уравнение прямой в отрезках**

Пусть данные точки и принадлежат осям координат, т.е. .

Используем *уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:*

Получаем - уравнение прямой в отрезках

**Угловой коэффициент прямой**

**Общее уравнение прямой**

Все рассмотренные уравнения могут быть записаны в виде:

Ах+Ву+С=0

Из общего уравнения следует:

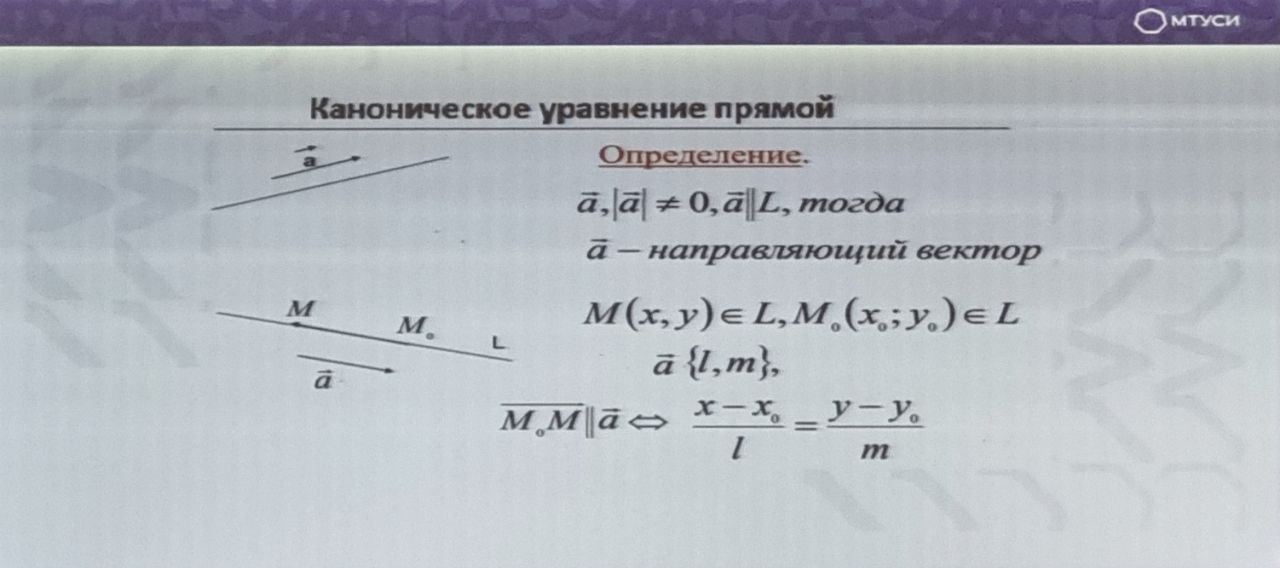
1) Если C≠0, то прямая не проходит через начало координат

2) Если С=0, то прямая проходит через начало координат

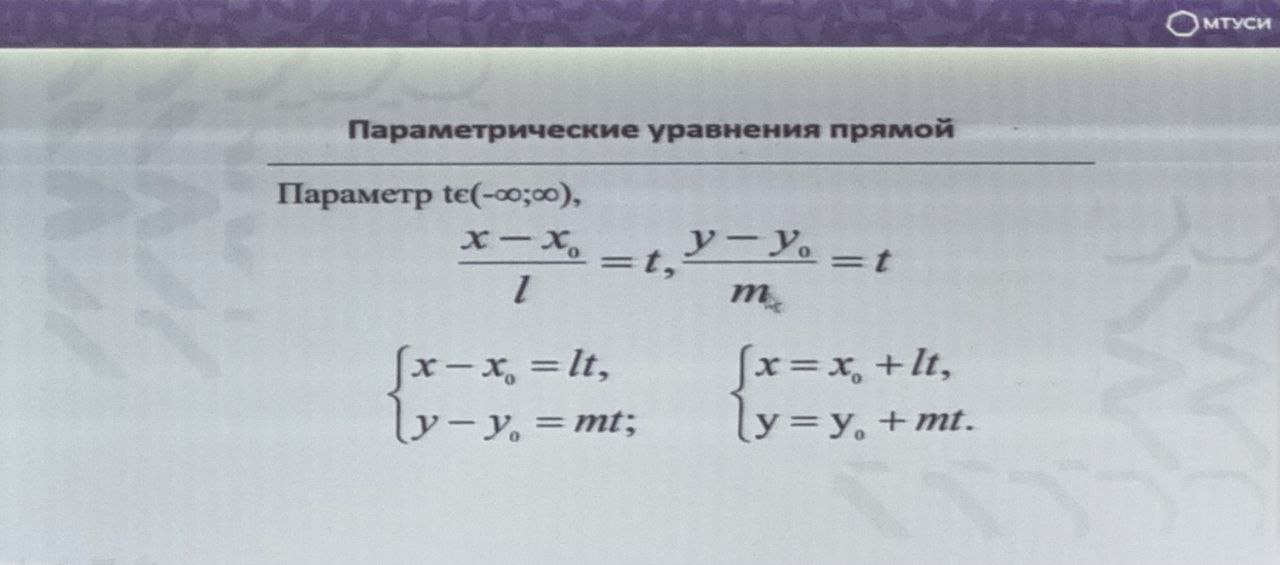
3) Если А≠0 и В≠0, то прямая не параллельна осям координат

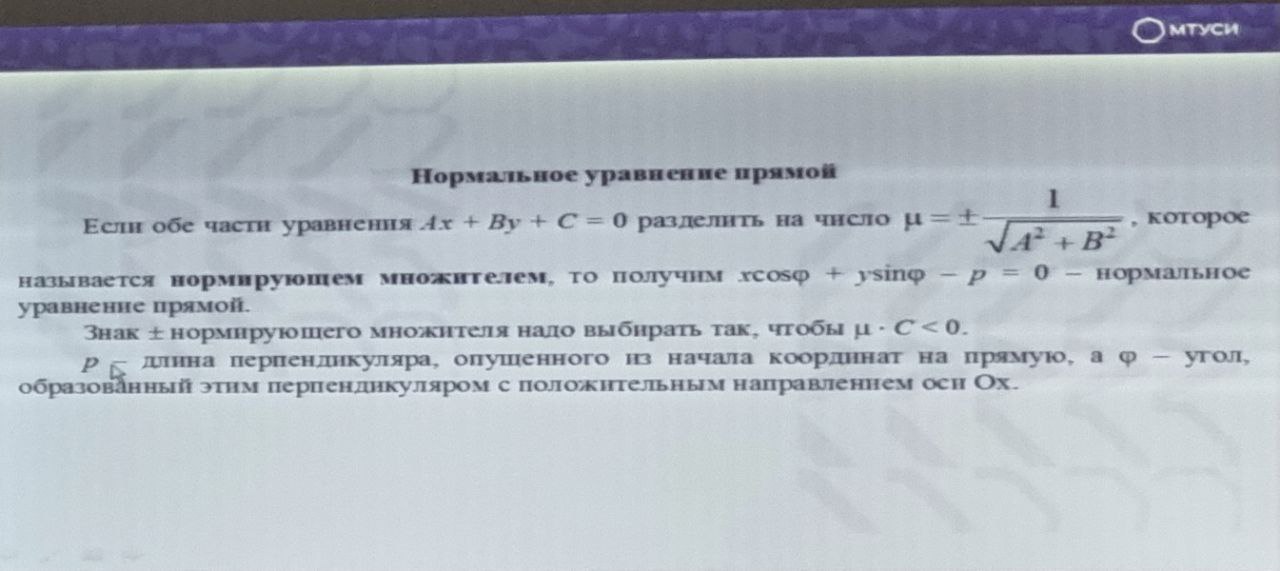
4) Если А=0, то прямая параллельна оси Ох, а если В=0, то прямая параллельна оси Оу

**Каноническое уравнение прямой**



**Параметрические уравнения прямой**



**Нормальное уравнение прямой**

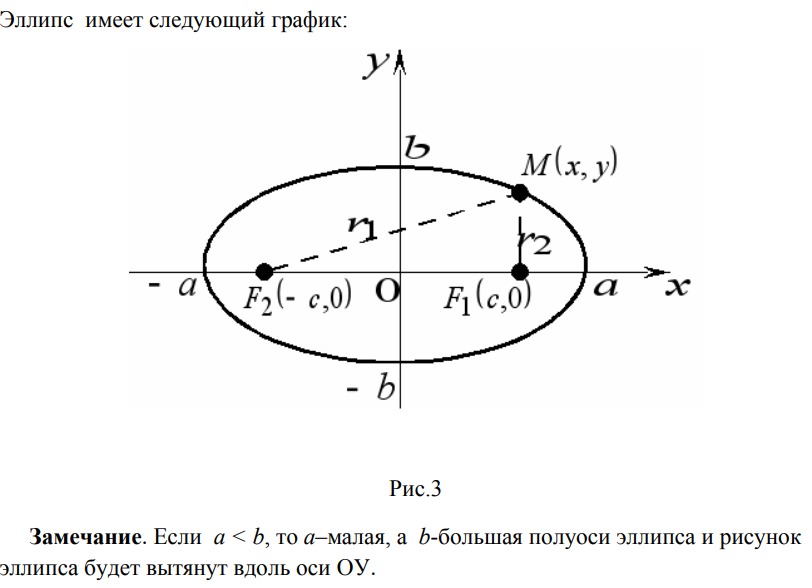
*20. Эллипс*

Кривой второго порядка называется линия, определяемая в декартовых координатах уравнением второго порядка:

Все коэффициенты уравнения– действительные числа и по крайней мере, одно из чисел А, В или С не равно нулю, т.е.

**Эллипсом** называется геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная 2a (a>0).

*Каноническое (простейшее) уравнение эллипса*:



*Свойства эллипса:*

1) *Симметрия эллипса.* Эллипс симметричен относительно обеих осей координат

2) *Вершины эллипса.*  Вершинами эллипса являются точки (-a, 0), (a, 0), (0, -b), (0, b)

3) *Полуоси эллипса.* Если а>b, то 2a – длина большой оси, a 2b – длина малой оси эллипса, a и b – длины большой и малой полуосей эллипса соответственно. Если a<b, то a – малая, a b – большая полуоси эллипса (в таком случае рисунок эллипса будет вытянут вдоль оси Оу)

4) *Фокусы эллипса.* Фокусы всегда располагаются на большой оси эллипса. При этом:

- если a>b, то точки F1(c, 0) и F2(-c, 0) называются фокусами эллипса.

Расстояние между ними называется фокальным расстоянием и равно 2с, где

- если a<b, то фокусами будут точки F1(0, c) и F2(0, -c), где

5) Если b=a, то из уравнения эллипса получаем уравнение окружности с центром в начале координат

6) *Эксцентриситет* эллипса – это показатель, характеризующий степень деформации окружности, при которой получится эллипс. Эксцентриситетом эллипса называется отношение фокального расстояния 2с к длине большой оси. При этом:

- если a>b, то

- если a<b, то

Эксцентриситет эллипса всегда меньше 1:

7) Фокальные радиусы эллипса r1 и r2 - это расстояние от любой точки М(х,у), лежащей на эллипсе, до фокусов F1(-с;0) и F2(с,0). Фокальные радиусы вычисляются как:

8) *Директрисы эллипса –* прямые, параллельные малой оси эллипса и отстают от нее на расстоянии равном

9) *Оптическое свойство* эллипса: касательная к эллипсу образует равные углы с фокальными радиусами точки касания.

*Параметрические уравнения эллипса*

Если центр симметрии эллипса находится в точке (), то легко показать, что уравнение эллипса имеет вид:

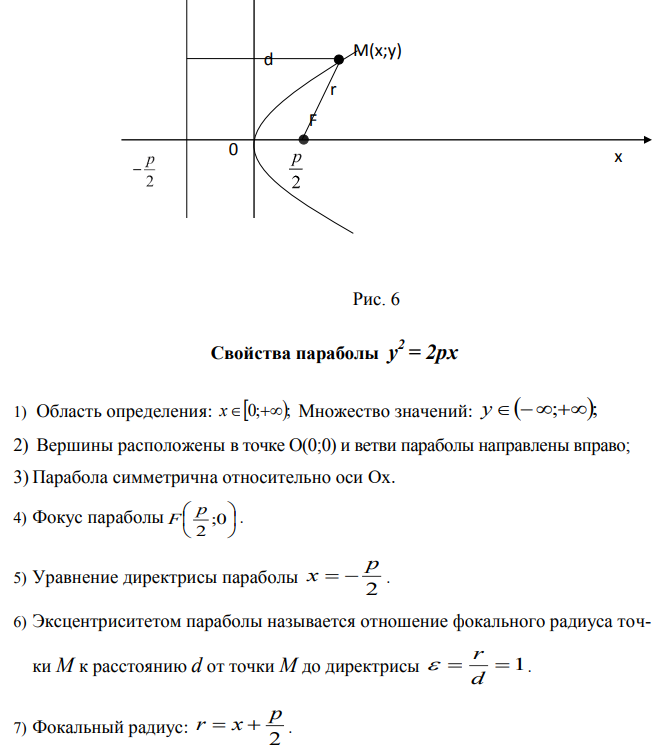
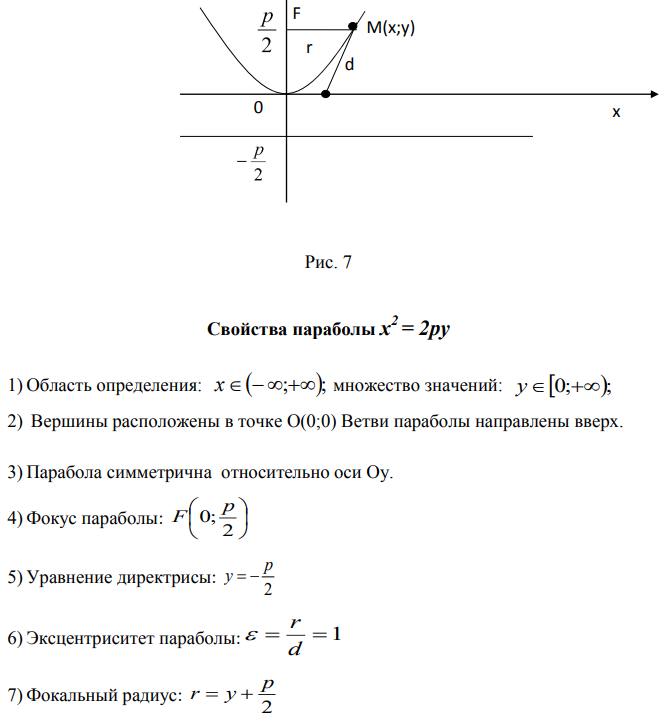
*22. Парабола*

**Параболой** называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой.

Расстояние от фокуса F до директрисы называется параметром параболы и обозначается p (p>0). Тогда фокус параболы имеет координаты (), а уравнение директрисы

Пусть М(x;y) - произвольная точка параболы. Расстояние от точки M до директрисы обозначим d, а фокальный радиус FM обозначим r. Согласно определению параболы d=r.

Каноническое уравнение параболы имеет два вида: и

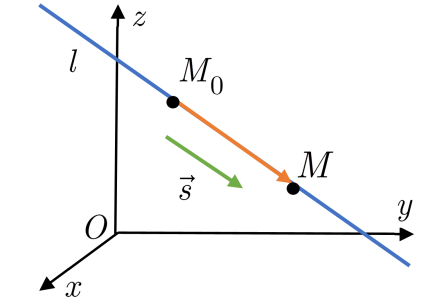
*   
Замечание*.

Частным случаем параболы является парабола вида: с вершиной в точке А (;). Фокус параболы находится как F, уравнение директрисы

*24. Уравнения прямой в пространстве.*

**Каноническое уравнение прямой**

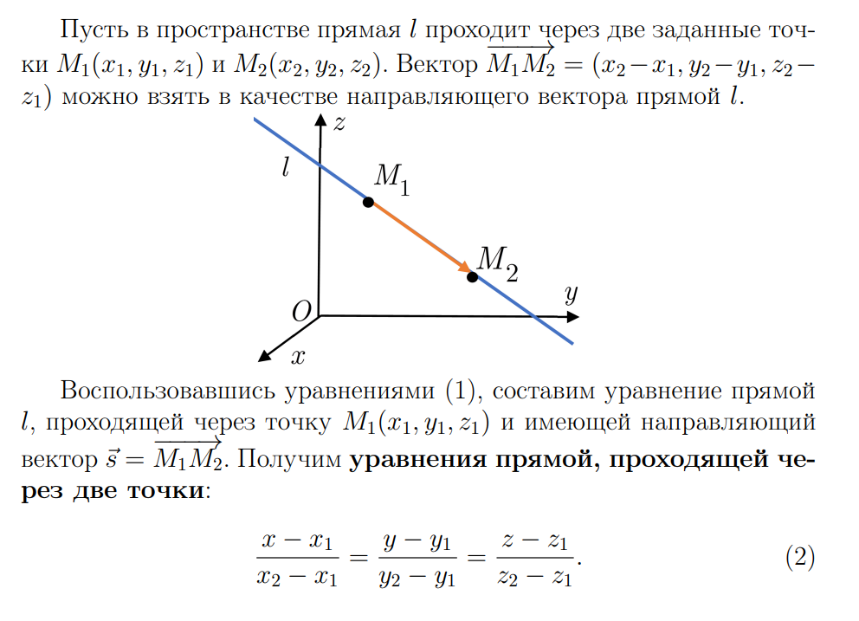
Рассмотрим в пространстве произвольную прямую l. Будем предполагать, что точка , а ненулевой вектор параллелен этой прямой или лежит на ней. Вектор – *направляющий вектор прямой l.*

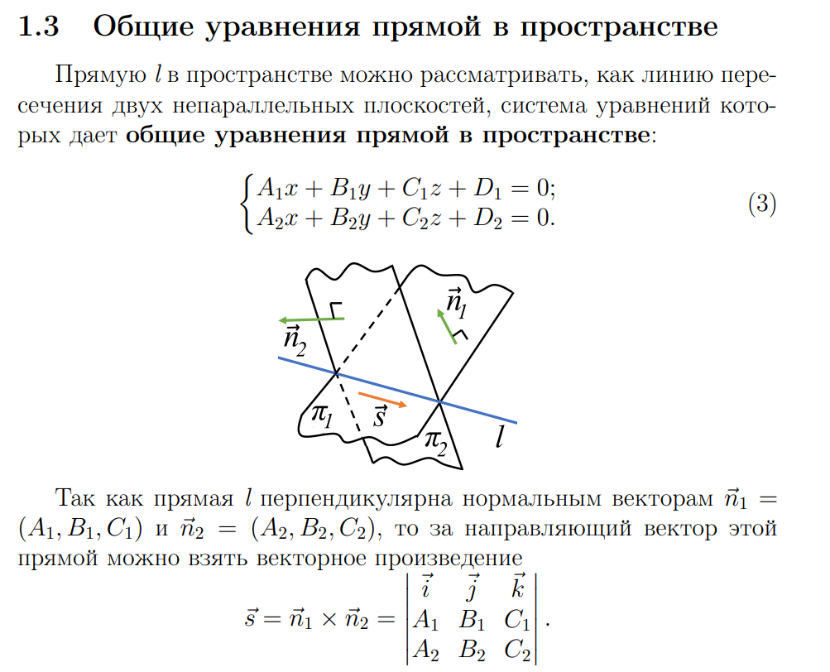
**При таких условиях произвольная точка M(x, y, z) принадлежит прямой l тогда и только тогда, когда вектор коллинеарен вектору .

Отсюда получаем *каноническое уравнение прямой в пространстве (1)*:

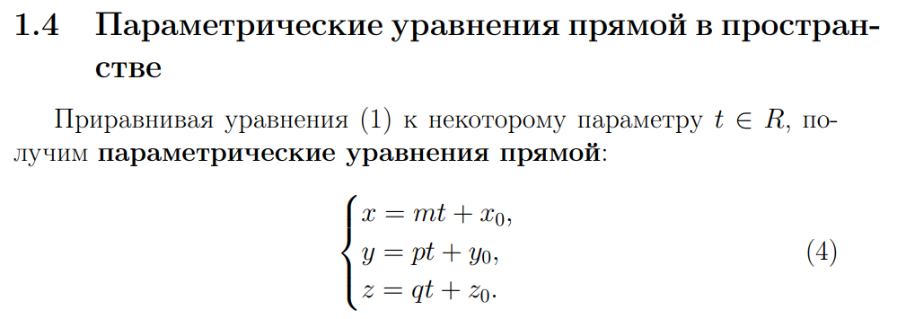
**Уравнение прямой в пространстве, проходящей через 2 точки**

Пусть в пространстве прямая l проходит через 2 заданные точки и . Вектор можно взять в качестве направляющего вектора прямой l.

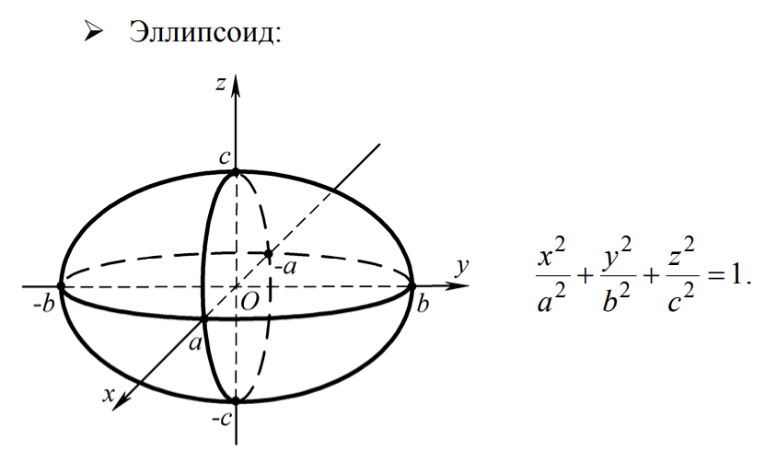
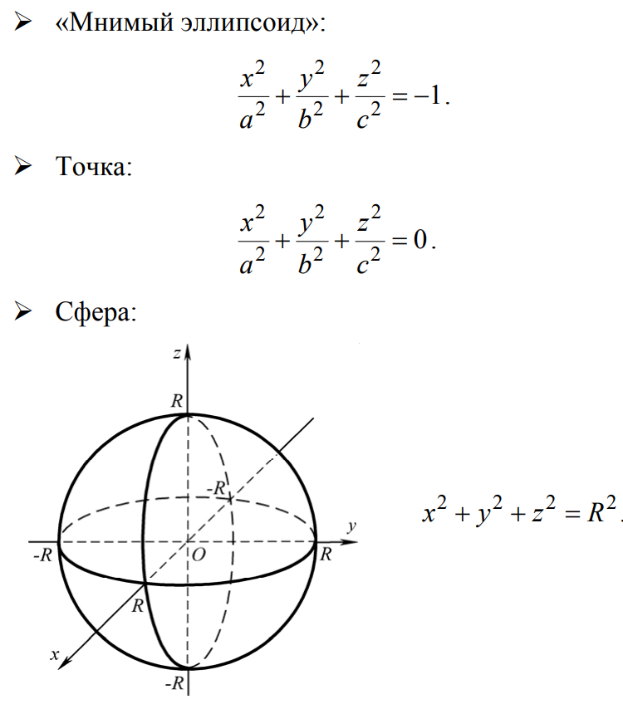
Воспользовавшись каноническим уравнением, составим ур-е прямой l, проходящей через точку и имеющей направляющий вектор . Получим уравнения прямой, проходящей через 2 точки:

**Общие уравнения прямой в пространстве**

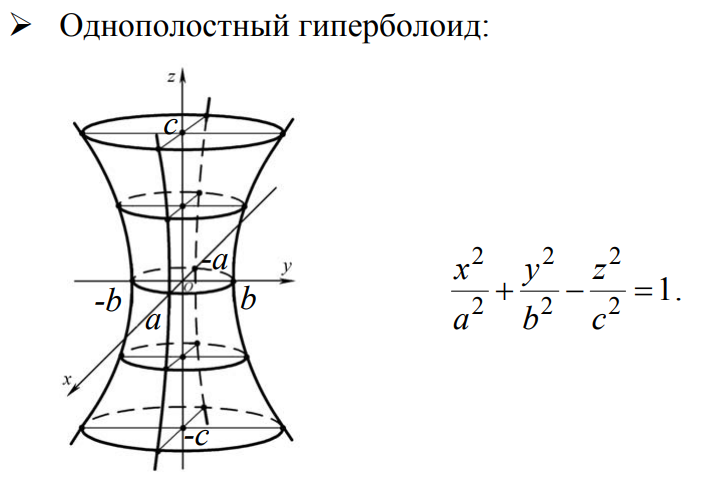
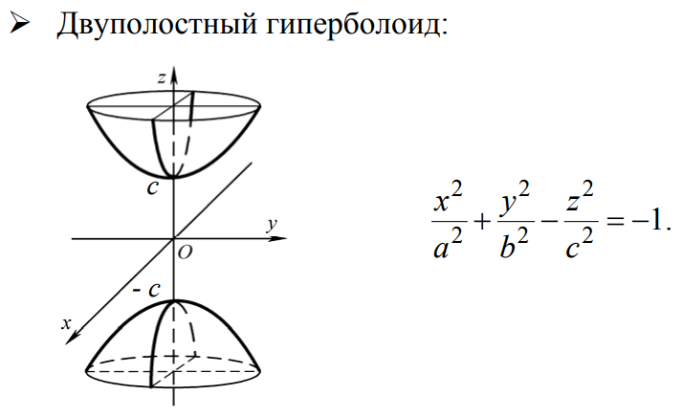
**Параметрические уравнения прямой в пространстве**



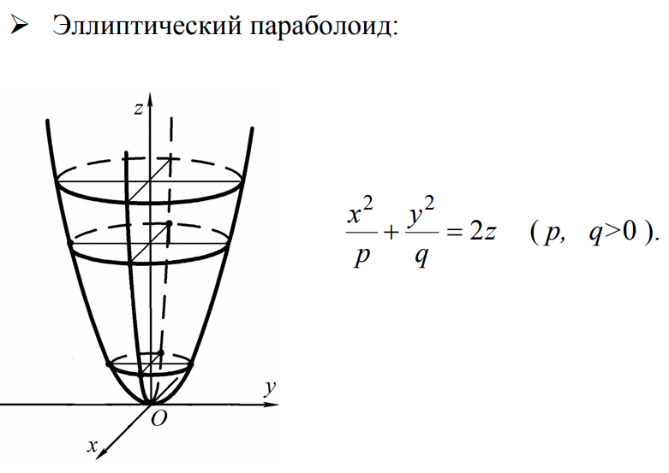
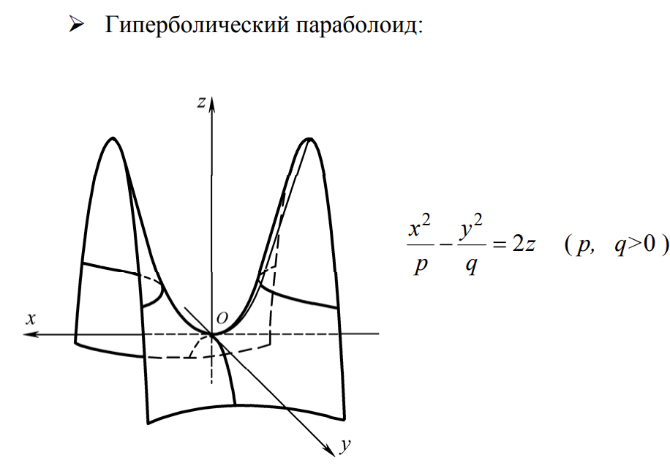
*26. Поверхности второго порядка. Эллипсоид.*



*27. Гиперболоиды*

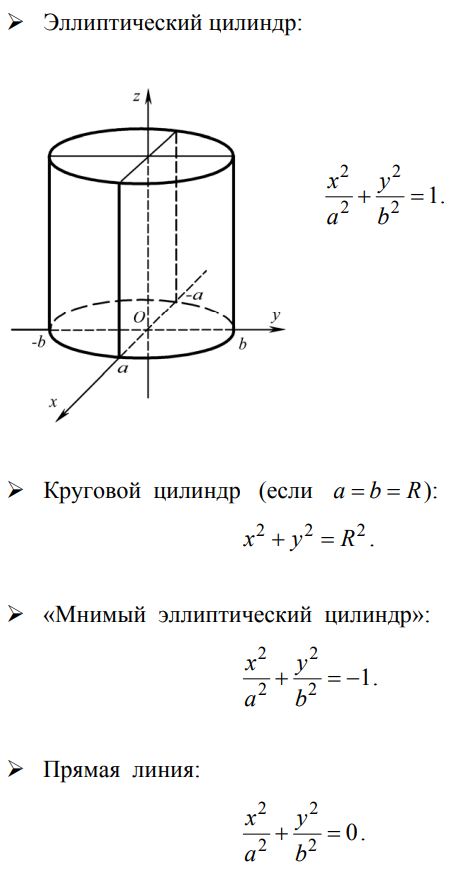


*28. Параболоиды*

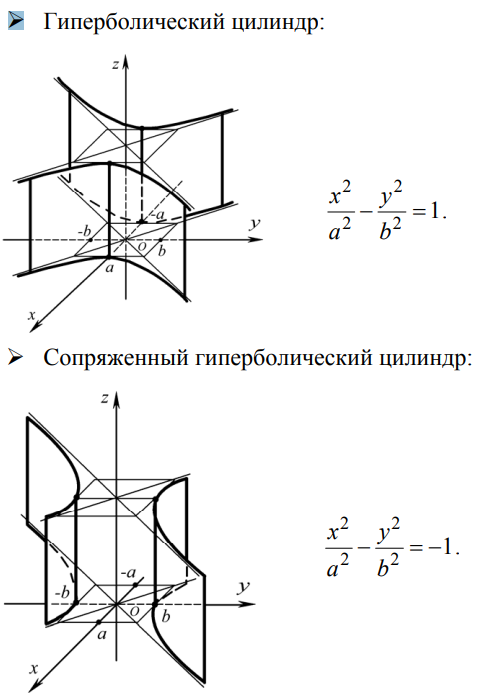


*29. Цилиндры и конусы второго порядка*

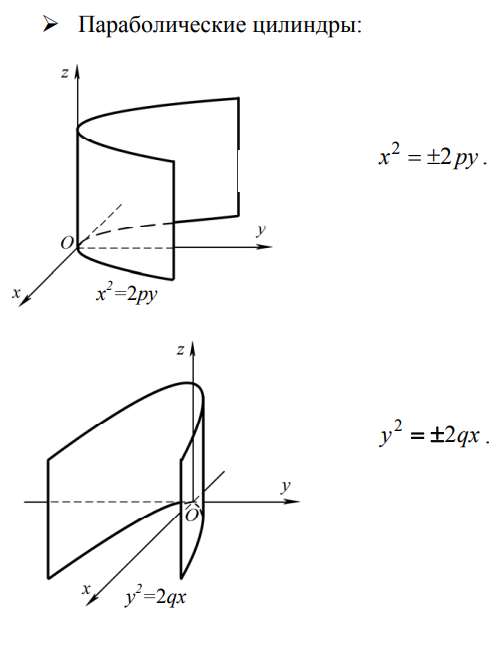
**Цилиндры эллиптического типа**



**Цилиндры гиперболического типа**



**Цилиндры параболического типа**



**Конус второго порядка**

