总框架

一、 计算

（1） 单数计算
- 方阵：① $|A|$ ② A^{-1} ③ A^*
- 矩阵：④ A^T ⑤ R（A）

（2） 双数计算
- ⑥ +
- ×
  - ⑦ AB
  - ⑧ kA
  - ⑨ A^k

二、 应用

（1） 方程组 ＝ ⑤⑦

（2） 向量 ＝ 方程组＋①

（3） 特征值类 ＝ 向量＋②④⑧

行列式

一、定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

二、公式

（1）三角形公式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

（2）降阶公式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

小结：求行列式的公式有 2 个，三角形公式和降阶公式，简称“绝三降”。

三、解题方法

$$\begin{cases} \text{定义法} \\ \text{公式法} \end{cases}$$

设 $F(x)=\begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & 2x-a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & 3x-a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & 4x-a_{44} \end{vmatrix}$，求 x^4 的系数.

解：

$\because x^4$ 的项为：($x-a_{11}$)($2x-a_{22}$)($3x-a_{33}$)($4x-a_{44}$)

$\therefore x^4$ 的系数为：1×2×3×4=24.

行列式的性质

性质 1　互换行列式的两行(列),行列式变号.

性质 2　行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式等于零.

推论　如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于零.

性质 3　把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数然后加到另一行(列)对应的元素上去,行列式不变.

性质 4　若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,则它等于下列两个行列式之和:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 5　行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘此行列式.

推论　行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6　行列式和它的转置行列式相等.（$D = D^T$）

计算：

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解：

$$D \xlongequal[5r_1 \to r_4]{(-1)\times r_1 \to r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[-8r_2 \to r_4]{4r_2 \to r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4 \div 5]{r_3 \div 2} 10\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{\frac{1}{2}r_3 \to r_4} 10\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 10\times 4 = 40.$$

计算：

$$D=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}.$$

解：
$$D \xlongequal[r_4 \to r_1]{\substack{r_2 \to r_1 \\ r_3 \to r_1}} \begin{vmatrix} x+3 & x+3 & x+3 & x+3 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \div (x+3)} (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(-1)\times r_1 \to r_4]{\substack{(-1)\times r_1 \to r_2 \\ (-1)\times r_1 \to r_3}} (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x+3)(x-1)^3$$

计算：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ a^4 & 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^3 & a^4 & 1 & a & a^2 \\ a^2 & a^3 & a^4 & 1 & a \\ a & a^2 & a^3 & a^4 & 1 \end{vmatrix}$$

解：

$$D\xlongequal[i=1,2,3,4]{(-a)r_{i+1}\to r_i}\begin{vmatrix} 1-a^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^5 & 0 \\ a & a^2 & a^3 & a^4 & 1 \end{vmatrix}=\left(1-a^5\right)^4$$

将“普通行列式”转化为“三角形行列式”的方法：

（1）我帮大家

（2）大家帮我

（3）手拉手

降阶公式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} (i=1,2,\cdots,n)$$

降阶法的使用条件：

（1） 0多

（2） 相同数或相反数多

（2014）行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$ （ B ）

(A) $(ad-bc)^2$　　(B) $-(ad-bc)^2$

(C) $a^2d^2-b^2c^2$　　(D) $b^2c^2-a^2d^2$

$$D = c\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & d & 0 \end{vmatrix} + d(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & 0 \\ 0 & c & d \end{vmatrix}$$

$$= -c\cdot b\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + d\cdot a(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= bc(ad-cb) - ad(ad-bc)$$

$$= (ad-bc)(bc-ad) = -(ad-bc)^2$$

(2015) n阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \underline{2^{n+1}-2}$.

$$D_n = 2\times(-1)^{1+1}D_{n-1} + 2\times(-1)^{1+n}(-1)^{n-1}$$

$$= 2D_{n-1} + 2\times(-1)^{2n}$$

$$= 2D_{n-1} + 2$$

$$= 2(2D_{n-2}+2)+2$$

$$= 2^2D_{n-2}+2^2+2$$

$$= 2^2(2D_{n-3}+2)+2^2+2$$

$$= 2^3D_{n-3}+2^3+2^2+2^1$$

$$= \cdots\cdots$$

$$= 2^{n-1}D_1+2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^2+2^1$$

$$= 2^n+2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^2+2^1$$

$$= a_1\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$= 2\cdot\frac{1-2^n}{1-2}$$

$$= 2(2^n-1) = 2^{n+1}-2$$

计算：

$$\begin{vmatrix} x+1 & 2 & -1 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}$$

解

$$D \xlongequal{r_2 \to r_1} \begin{vmatrix} x+3 & x+3 & 0 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \div (x+3)} (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(-1)\times c_1 \to c_2} (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & x-1 & 1 \\ -1 & 2 & x+1 \end{vmatrix} = (x+3)\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 2 & x+1 \end{vmatrix} = (x+3)(x^2-3).$$

总框架

一、 计算

（1） 单数计算 $\begin{cases} \text{方阵：①}\,|A|\quad \text{②}A^{-1}\quad \text{③}A^{*} \\ \text{矩阵：④}A^{T}\quad \text{⑤}R(A) \end{cases}$

（2） 双数计算 $\begin{cases} \text{⑥}+ \\ \times \begin{cases} \text{⑦}AB \\ \text{⑧}kA \\ \text{⑨}A^{k} \end{cases} \end{cases}$

二、 应用

（1） 方程组 ＝ ⑤⑦

（2） 向量 ＝ 方程组＋①

（3） 特征值类 ＝ 向量＋②④⑧

伴随矩阵

一、定义

行列式$|A|$的各个元素的代数余子式A_{ij}所构成的如下矩阵：

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

称为矩阵A的伴随矩阵。

二、公式

$$AA^* = A^*A = |A|E$$

三、解题方法

$$\begin{cases} \text{定义法} \\ \text{公式法} \end{cases}$$

总框架

一、 计算

（1） 单数计算 $\begin{cases} \text{方阵：①}\,|A|\quad \text{②}A^{-1}\quad \text{③}A^{*} \\ \text{矩阵：④}A^{T}\quad \text{⑤}R(A) \end{cases}$

（2） 双数计算 $\begin{cases} \text{⑥}+ \\ \times \begin{cases} \text{⑦}AB \\ \text{⑧}kA \\ \text{⑨}A^{k} \end{cases} \end{cases}$

二、 应用

（1） 方程组 ＝ ⑤⑦

（2） 向量 ＝ 方程组＋①

（3） 特征值类 ＝ 向量＋②④⑧

逆矩阵

一、定义

对于方阵 A，如果有一个方阵 B，能使 $AB=BA=E$，

那么我们说 A 是可逆的，并把 B 称为 A 的逆矩阵，即 $B=A^{-1}$.

二、公式

（1）天方公式：$A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$

（2）AE 公式：$(A \ \vdots \ E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E \ \vdots \ A^{-1})$

小结：求逆矩阵的公式有 2 个，天方公式和 AE 公式，简称“逆天 A”。

三、解题方法

$$\begin{cases} \text{定义法} \\ \text{公式法} \end{cases}$$

(2001)设矩阵 A 满足 $A^2+A-4E=0$,其中 E 为单位矩阵,则 $(A-E)^{-1}=$ $\underline{\frac{1}{2}(A+2E)}$

$(a^2+a)-4=0$

$\Downarrow$

$[(a-1)(a+2)+2]-4=0$

$(a-1)(a+2)-2=0$

$(a-1)(a+2)=2$

$(a-1)\frac{1}{2}(a+2)=1$

定义法

$(A-E)\times ? = E$

$(a-1)\times ? = 1$

~~公式法~~

$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$

$\cancel{[A \vdots E]}$

(2008)设 A 为n阶非0矩阵，E 为n阶单位矩阵，若 $A^3=0$，则 （ ）

(A) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 不可逆.

(B) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 可逆.

(C) $E-A$ 可逆，$E+A$ 可逆.

(D) $E-A$ 可逆，$E+A$ 不可逆.

(1) $(1-a)\times ? = 1$

$a^3=0$

$(1-a)(1+a+a^2)=1-a^3=1$

可逆

(2) $(1+a)\times ? = 1$

$a^3=0$

$(1+a)(1-a+a^2)=1+a^3=1$

可逆

求 2 阶方阵 A=$\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$的逆矩阵

解： $|A| = mq - pn$

$$A^* = \begin{pmatrix} q & -n \\ -p & m \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} q & -n \\ -p & m \end{pmatrix}}{mq - pn}$$

2 阶方阵的伴随矩阵 A*的求法：将主对角线上的数字互换，然后再将副对角线上的数字取负号，简称“2 星换负”。

求方阵$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$的逆矩阵：

解：记所给的矩阵为 A.

$$(A \ \vdots \ E)=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-1)\times r_1 \to r_3]{(-1)\times r_1 \to r_2} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-2)\times r_2 \to r_1]{r_2\times(-1)} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 9 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{(-9)\times r_3 \to r_1 \\ 4\times r_3 \to r_2}]{r_3 \div 2} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & 2 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \div 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

将 A 转化成 E 的过程：

A→三角矩阵→对角阵→E

总框架

一、 计算

（1） 单数计算

- 方阵：①｜A｜ ②A^{-1} ③A^{*}
- 矩阵：④A^{T} ⑤R（A）

（2） 双数计算

- ⑥+
- ×
  - ⑦AB
  - ⑧kA
  - ⑨A^{k}

二、 应用

（1） 方程组 ＝ ⑤⑦

（2） 向量 ＝ 方程组＋①

（3） 特征值类 ＝ 向量＋②④⑧

转置

一、定义

把矩阵 A 的行换成同序数的列得到一个新矩阵，叫作 A 的转置矩阵，记作 A^T

例如：

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$$

的转置矩阵为

$$A^T=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$$

二、公式（无）

三、解题方法

$$\begin{cases}\text{定义法}\\ \text{公式法}\end{cases}$$

四、相关概念

（1）对称矩阵：$A^T=A$

（2）正交矩阵：$A^TA=AA^T=E$

总框架

一、 计算

（1） 单数计算

- 方阵：①｜A｜ ②A^{-1} ③A^{*}
- 矩阵：④A^{T} ⑤R（A）

（2） 双数计算

- ⑥+
- ×
  - ⑦AB
  - ⑧kA
  - ⑨A^{k}

二、 应用

（1） 方程组 ＝ ⑤⑦

（2） 向量 ＝ 方程组＋①

（3） 特征值类 ＝ 向量＋②④⑧

矩阵的秩

一、定义

设在矩阵 A 中有一个不等于 0 的 r 阶子式 D，且所有 $r+1$ 阶子式全等于 0，那么 D 称为矩阵 A 的最高阶非零子式，数 r 称为矩阵 A 的秩，记作 $R(A)$。

二、公式

（1）独立公式

矩阵的秩等于矩阵的行（或列）向量中，独立向量的个数，即 $R(A)=n_{独}$。

（2）阶梯公式

将矩阵转化为“行阶梯形矩阵”，矩阵的秩即等于其竖线或横线的个数，即 $R(A)=n_{线}$。

小结： 求秩的公式有 2 个，独立公式和阶梯公式，简称“秩独梯”。

三、解题方法

$$\begin{cases}\text{定义法}\\ \text{公式法}\end{cases}$$

设 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&-1\\1&3&x&1\\2&0&3&-4\\3&5&y&-1\end{bmatrix}$, 已知 $\mathrm{R}(A)=2$，求 x,y 的值.

解：

$\because$

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&x\\2&0&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\-2&0&x-3\\2&0&3\end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-2&x-3\\2&3\end{vmatrix}=2x=0,$$

$\therefore x=0$

$\because$

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\2&0&3\\3&5&y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&0&3\\-2&0&y-5\end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&3\\-2&y-5\end{vmatrix}=-(2y-4)=0,$$

$\therefore y=2$

设$A=\begin{bmatrix}2&1&8&3&7\\2&-3&0&7&-5\\3&-2&5&8&0\\1&0&3&2&0\end{bmatrix}$，求$\mathrm{R}(A)$

解：

$$A\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4}\begin{bmatrix}1&0&3&2&0\\2&-3&0&7&-5\\3&-2&5&8&0\\2&1&8&3&7\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{-3r_1\to r_3\\-2r_1\to r_4}]{-2r_1\to r_2}\begin{bmatrix}1&0&3&2&0\\0&-3&-6&3&-5\\0&-2&-4&2&0\\0&1&2&-1&7\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{2r_2\to r_3\\3r_2\to r_4}]{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{bmatrix}1&0&3&2&0\\0&1&2&-1&7\\0&0&0&0&14\\0&0&0&0&16\end{bmatrix}\xrightarrow[-16r_3\to r_4]{r_3\div 14}\begin{bmatrix}1&0&3&2&0\\0&1&2&-1&7\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$\therefore \mathrm{R}(A)=3.$

阶梯的画法

（1）从第一行开始，先画竖线，再画横线；

（2）整个楼梯，以竖线开始，以横线结尾；

（3）竖线的长度恒为1，横线的长度可以＞1；

（4）从左到右，楼梯只能下行，不能上行；

（5）竖线和横线的个数相同。