总框架

一、 计算

（1） 单数计算

- 方阵：① $|A|$ ② A^{-1} ③ A^{*}
- 矩阵：④ A^{T} ⑤ $R(A)$

（2） 双数计算

- ⑥+
- ×
  - ⑦AB
  - ⑧kA
  - ⑨ A^{k}

二、 应用

（1） 方程组 ＝ ⑤⑦

（2） 向量 ＝ 方程组＋①

（3） 特征值类 ＝ 向量＋②④⑧

普通解法

一、核心概念

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-3y-z=7 \\ x-y+z=8 \\ 4x+y+z=4 \end{cases}$$

假想未知数　3 个未知数中，我们可以假想 x 、 y 为真正的未知数，所以，可以把 x 、 y 叫做假想未知数。

假想常数　同时可以假想 z 为常数，所以，可以把 z 叫做假想常数。

二、普通解法的一般步骤

（1）方程组的化简（最简形）

（2）设 k

（3）写出通解

三、其他概念

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1-x_2+2x_3-2x_4+3x_5=1 \\ 2x_1-x_2+5x_3-9x_4+8x_5=-1 \\ 3x_1-2x_2+7x_3-11x_4+11x_5=0 \\ x_1-x_2+x_3-x_4+3x_5=3 \end{cases}$$

线性方程组　未知数均为一次的方程组，叫做线性方程组。

齐次线性方程组　等号右边的常数项，全为 0 时，感觉比较整齐，这样的线性方程组，叫做齐次线性方程组。

非齐次线性方程组　等号右边的常数项，不全为 0 时，感觉不够整齐，这样的线性方程组，叫做非齐次线性方程组。

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0 \end{cases} \qquad \mathrm{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{系数矩阵}}$ 未知数的系数组成的矩阵，叫做系数矩阵。系数矩阵一般用 A 表示。

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3-2x_4+3x_5=1 \\ 2x_1-x_2+5x_3-9x_4+8x_5=-1 \\ 3x_1-2x_2+7x_3-11x_4+11x_5=0 \\ x_1-x_2+x_3-x_4+3x_5=3 \end{cases} \qquad \overline{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & -9 & 8 & -1 \\ 3 & -2 & 7 & -11 & 11 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{增广矩阵}}$ 未知数的系数和等号右边的常数项组成的矩阵，叫做增广矩阵。

增广矩阵一般用 $\overline{A}$ 表示。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\left(\text{其中}k_1,\ k_2\text{为任意常数}\right)$$

$\boxed{\text{通解}}$ 一个方程组所有解的集合，叫做解集，或者叫做通解。

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3-2x_4+3x_5=1 \\ 2x_1-x_2+5x_3-9x_4+8x_5=-1 \\ 3x_1-2x_2+7x_3-11x_4+11x_5=0 \\ x_1-x_2+x_3-x_4+3x_5=3 \end{cases}$$

$\boxed{\text{独立方程}}$ 互相无关的方程，叫做独立方程。

$\boxed{\text{导出方程}}$ 可以由若干独立方程通过倍加的方式，得到的方程，叫做导出方程。

在方程组中，导出方程没有信息量，是多余的。

求解方程组：$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0 \end{cases}$

解：（1）方程组的化简（最简形）

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad -\frac{4}{3}x_4=0, \\ \qquad x_2 \quad +3x_4=0, \\ \qquad\quad x_3-\frac{4}{3}x_4=0, \end{cases}$$

（2）设k

令 $x_4=k$

（3）写出通解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{4}{3}k \\ -3k \\ \frac{4}{3}k \\ k \end{bmatrix}=k\begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ -3 \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$（其中k为任意常数）

求解方程组: $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 9x_4 + 8x_5 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 11x_4 + 11x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 3 \end{cases}$

解：

（1）方程组的化简（最简形）

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & -9 & 8 & -1 \\ 3 & -2 & 7 & -11 & 11 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_4 + 5x_5 = 4 \\ x_2 - 4x_4 + 2x_5 = -1 \\ x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$$

（2）设k

令 $x_4 = k_1$，$x_5 = k_2$

（3）写出通解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4k_1 - 5k_2 + 4 \\ 4k_1 - 2k_2 - 1 \\ k_1 - 2 \\ k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\text{其中}k_1\text{，}k_2\text{为任意常数}\right)$$

求解方程组：$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5=0 \\ x_1+x_2+x_3+3x_5=0 \\ x_3+3x_4+6x_5=0 \end{cases}$

解：（1）方程组的化简（最简形）

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_3+3x_5=0 \\ x_4+x_5=0 \end{cases}$$

（2）设k

令$x_2=k_1$，$x_5=k_2$

（3）写出通解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -k_1 \\ k_1 \\ -3k_2 \\ -k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\left(\text{其中}k_1\text{，}k_2\text{为任意常数}\right)$$

当矩阵化为最简形时，如果一条横线上出现了 2 个或者 2 个以上的数字，则一般来说：

（1）应该选择第 1 个数字所对应的未知数作为假想未知数；

（2）而其他数字所对应的未知数，则作为假想常数；

总框架

一、 计算

（1） 单数计算

- 方阵：①｜A｜ ②A^{-1} ③A^{*}
- 矩阵：④A^{T} ⑤R（A）

（2） 双数计算

- ⑥+
- ×
  - ⑦AB
  - ⑧kA
  - ⑨A^{k}

二、 应用

（1） 方程组 ＝ ⑤⑦

（2） 向量 ＝ 方程组＋①

（3） 特征值类 ＝ 向量＋②④⑧

简便解法

一、齐次线性方程组

1. 将矩阵化为“最简形”的一般步骤

（1）下清 0：对阶梯线以下进行清 0（顺序为从左到右）

（2）将每行的首个非 0 数，归 1

（3）上清 0：对阶梯线以上进行清 0（只针对每行的首个非 0 数，顺序为从右到左）

2. 基础解系

（1）方程组 $Ax=0$ 的解集的最大无关组，称为该方程组 $Ax=0$ 的基础解系.

基础解系中的向量，通常用字母 ξ_1,ξ_2……表示.

（2）化为“最简形”后，令假想常数＝单位向量，如 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 等，则其对应的假想未知数＝某一列的相反数，此时可迅速求出基础解系.

（3）基础解系不唯一

3. 通解

方程组 $Ax=0$ 的通解可表示为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots\cdots$，其中 k_i 为任意常数.

4. 简便解法（齐次）的一般步骤

（1）方程组的化简（最简形）

（2）写出基础解系 $\xi_1,\xi_2\cdots\cdots$

（3）写出通解 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots\cdots$

二、非齐次线性方程组

1. 特解

（1）方程组 $Ax=b$ 的一个解，称为该方程组 $Ax=b$ 的特解，通常用字母 η 表示.

（2）化为“最简形”后，令假想常数＝0 向量，如 $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ 等，则其对应的假想未知数与某一列数字相同（常数项 b），此时即可求出 $Ax=b$ 的特解 η，简称“麻花相反，鱼竿相同”.

（3）特解不唯一

2. 通解

方程组 $Ax=b$ 的通解可表示为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots\cdots+\eta$，其中 k_i 为任意常数.

3. 简便解法（非齐次）的一般步骤

（1）方程组的化简（最简形）

（2）写出方程组 $Ax=0$ 的基础解系 $\xi_1,\xi_2\cdots\cdots$

（3）写出方程组 $Ax=b$ 的特解 η

（4）写出通解 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots\cdots+\eta$

（2014）设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$，$E$ 为 3 阶单位矩阵.

（1）求方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系；

（2）求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 B.

解：(1) ① 方程组阶化简　　~~③ 通解~~

$$A \to \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -3\end{bmatrix}$$

② 基础解系

$$\xi=\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 3\\ 1\end{bmatrix}$$

（2009）设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$，$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

(1) 求满足 $\mathbf{A}\xi_2=\xi_1$，$\mathbf{A}^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量 ξ_2，ξ_3.

(2) 对(1)中的任意向量 ξ_2，ξ_3 证明 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

解：(1) ① 解方程组 $Ax=\xi_1$

$$(A|\xi_1)=\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\0&-4&-2&-2\end{array}\right]\to\begin{array}{c} \begin{array}{cccc}x_1&x_2&x_3&\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right]\end{array}$$

$$\xi_2=k_1\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}\quad(k_1\text{为任意常数})$$

② 解方程组 $A^2x=\xi_1$

$$A^2=\begin{bmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{bmatrix},\quad(A^2|\xi_1)=\left[\begin{array}{ccc|c}2&2&0&-1\\-2&-2&0&1\\4&4&0&-2\end{array}\right]\to\begin{array}{c} \begin{array}{cccc}x_1&x_2&x_3&\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\end{array}$$

$$\xi_3=k_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{bmatrix}\quad(k_2,k_3\text{为任意常数})$$

(2) ……

解的判定

一、回顾

定理 n元线性方程组$Ax=b$

（1）无解的充分必要条件是$R(A)<R(\overline{A})$；

（2）有唯一解的充分必要条件是$R(A)=R(\overline{A})=n$；

（3）有无穷多解的充分必要条件是$R(A)=R(\overline{A})<n$.

二、非齐次线性方程组

1. 重要概念

$$\overline{A}=[A\vdots b]=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3 & \vdots & 1\\ 0 & 5 & -4 & \vdots & -1\\ 2 & 2 & 1 & \vdots & 2\end{pmatrix}$$

隔离线 系数矩阵A与常数项b之间的竖线，叫做隔离线。

2. “解的判定”方法

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & -3 & \vdots & 1\\ 0 & 5 & -4 & \vdots & -1\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & -2 & -3 & \vdots & 1\\ 0 & 5 & -4 & \vdots & -1\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix}$$

（1）阶梯线是否塌陷

将$\overline{A}$化为行阶梯形矩阵后，如阶梯线在隔离线处出现塌陷，那么该方程组$Ax=b$无解。如阶梯线在隔离线处未出现塌陷（地面是平直的），那么该方程组$Ax=b$有解。

（2）阶梯线的行数

阶梯线的行数＝独立方程的个数

当方程组$Ax=b$有解时，若阶梯线的行数＝未知数的个数n，即：独立方程的个数＝未知数的个数n，则方程组$Ax=b$有唯一解。

当方程组$Ax=b$有解时，若阶梯线的行数＜未知数的个数n，即：独立方程的个数＜未知数的个数n，则方程组$Ax=b$有无穷多解。

三、齐次线性方程组

1. 重要概念

齐次：$b=0$

$$\overline{A}=[A\vdots b]=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3 & \vdots & 0\\ 0 & 5 & -4 & \vdots & 0\\ 1 & 3 & 2 & \vdots & 0\end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{隔离线}}$ 系数矩阵 A 与常数项 b 之间的竖线，叫做隔离线。

2. “解的判定”方法

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & -3 & \vdots & 0\\ 0 & 5 & -4 & \vdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix}$$

（1）阶梯线是否塌陷

将 $\overline{A}$ 化为行阶梯形矩阵后，因为阶梯线在隔离线处不可能出现塌陷（地面肯定是平直的），所以方程组 $Ax=0$ 必定有解。

（2）阶梯线的行数

$\boxed{\text{阶梯线的行数＝独立方程的个数}}$

若阶梯线的行数＝未知数的个数 n，即：独立方程的个数＝未知数的个数 n，则方程组 $Ax=0$ 有唯一解：即 0 解。

若阶梯线的行数＜未知数的个数 n，即：独立方程的个数＜未知数的个数 n，则方程组 $Ax=0$ 有无穷多解。

矩阵方程

一、定义

（1）A 和 B 均已知；
（2）C 未知.

此时，称 $AC=B$ 为“矩阵方程”.

二、解的判定

1. $Ax=b$ 的增广矩阵

$$\overline{A}=[A\vdots b]=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3 & \vdots & 1\\ 0 & 5 & -4 & \vdots & -1\\ 2 & 2 & 1 & \vdots & 2\end{pmatrix}$$

2. $AC=B$ 的增广矩阵

$$\overline{A}=[A\vdots B]=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3 & \vdots & 1 & -1 & 2\\ 0 & 5 & -4 & \vdots & -1 & 2 & 4\\ 2 & 2 & 1 & \vdots & 2 & -3 & 5\end{pmatrix}$$

3. “解的判定”方法

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & -3 & \vdots & 1 & -1 & 2\\ 0 & 5 & -4 & \vdots & -1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -3 & 0\end{pmatrix}$$

（1）阶梯线是否塌陷

将 $\overline{A}$ 化为行阶梯形矩阵后，如阶梯线在任何一个隔离线处出现塌陷，那么该方程组 $AC=B$ 无解。如阶梯线在任何一个隔离线处均未出现塌陷（地面是平直的），那么该方程组 $AC=B$ 有解。

（2）阶梯线的行数

阶梯线的行数＝独立方程的个数

当方程组 $AC=B$ 有解时，若阶梯线的行数＝未知数的个数 n，即：独立方程的个数＝未知数的个数 n，则方程组 $AC=B$ 有唯一解。

当方程组 $AC=B$ 有解时，若阶梯线的行数＜未知数的个数 n，即：独立方程的个数＜未知数的个数 n，则方程组 $AC=B$ 有无穷多解。

（2012）设 $A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

（Ⅰ）求 $|A|$

（Ⅱ）已知线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解，(1) 求 a，(2) 并求 $Ax=b$ 的通解。

解：（Ⅰ）

$$|A|=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}+a\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4$$

（Ⅱ）(1)

$$\bar{A}=[A\,\vdots\,b]=\left[\begin{array}{cccc:c}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\a&0&0&1&0\end{array}\right]\to\cdots\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&0&1-a^4&-a-a^2\end{array}\right]$$

$1-a^4=0$ 且 $-a-a^2=0$

即 $a^4=1$ 且 $\cancel{a=0}$ 或 $a=-1$ ✓ $\therefore a=-1$

(2) $\because a=-1$

$$\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

通解：$k\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$（k为任意常数）

图 式 题 数 高 低

（2010 年）设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$ 已知线性方程组 $Ax=b$ 存在两个不同的解

$\Leftrightarrow$ 无穷多解 　 解

行 <3 　 增

(1) 求 λ, a.

(2) 求方程组 $Ax=b$ 的通解.

解：(1) $\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}\lambda & 1 & 1 & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 1\end{array}\right]\to\cdots\to\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & a-\lambda+1\end{array}\right]$

∵ $Ax=b$ 存在两个不同的解

∴ $\begin{cases}\lambda-1\neq 0\\ 1-\lambda^2=0\\ a-\lambda+1=0\end{cases}$

∴ $\lambda=-1$, $a=-2$

(2) $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$

通解：$k\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}$ （k 为任意常数）

（2013）设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，(1) 当 a，b 为何值时，存在矩阵 C，使得 $AC-CA=B$？(2) 求所有矩阵 C.

解：(1) 设 $C=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}$

$\because AC-CA=B$

$\therefore \begin{bmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix}x_1+ax_3 & x_2+ax_4\\ x_1 & x_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_1+x_2 & ax_1\\ x_3+x_4 & ax_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{bmatrix}$

$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\ -ax_1+x_2+ax_4=1\\ x_1-x_3-x_4=1\\ x_2-ax_3=b\end{cases}$$

有解 → 不会增阶

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}0 & -1 & a & 0 & \vdots & 0\\ -a & 1 & 0 & a & \vdots & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & \vdots & b\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & \vdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & a+1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b\end{bmatrix}$$

$\therefore a=-1,\ b=0$

(2) $\bar{A}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1+k_2+1 & -k_1\\ k_1 & k_2\end{bmatrix}$

通解：$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$ （k_1,k_2为任意常数）

（2018）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$，其中 a 为是参数

（I） 求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解；

（II）求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形.

解：(I) $(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2=0$

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \\ x+ax_3=0 \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{bmatrix}$$

① 当 $a-2=0$ 时

即 $a=2$ 时

有无穷多解.

通解：$k\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

（k为任意常数）

② 当 $a-2\neq 0$ 时

有唯一解：0解

（2016）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&a&1\\-1&1&a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&2\\1&a\\-a-1&-2\end{pmatrix}$. 当 a 为何值时，矩阵方程 $AX=B$ 无解，有唯一解，有无穷多解？有解时，求此方程.

解：$\bar{A}=(A\vdots B)=\left[\begin{array}{ccc|c|c}1&-1&-1&2&2\\2&a&1&1&a\\-1&1&a&-a-1&-2\end{array}\right]\to\cdots\left[\begin{array}{ccc|c|c}1&-1&-1&2&2\\0&a+2&3&-3&a-4\\0&0&a-1&-a+1&0\end{array}\right]$

分析：$\begin{cases}a=-2\\a\neq-2\end{cases}\times\begin{cases}a=1\\a\neq1\end{cases}=4$ 种情况

① $a=-2$ 且 $a=1$ ✗

② $a\neq-2$ 且 $a\neq1$ ✓

③ $a=-2$ ~~且 $a\neq1$~~ ✓

④ $a=1$ ~~且 $a\neq-2$~~ ✓

(1) 当 $a\neq-2$ 且 $a\neq1$ 时

$\bar{A}\to\left[\begin{array}{ccc|c|c}1&0&0&1&\frac{3a}{a+2}\\0&1&0&0&\frac{a-4}{a+2}\\0&0&1&-1&0\end{array}\right]$

$X=\begin{bmatrix}1&\frac{3a}{a+2}\\0&\frac{a-4}{a+2}\\-1&0\end{bmatrix}$

方程有唯一解

(2) 当 $a=-2$ 时

$\bar{A}\to\left[\begin{array}{ccc|c|c}1&-1&-1&2&2\\0&0&3&-3&-6\\0&0&-3&3&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c|c}1&-1&-1&2&2\\0&0&3&-3&-6\\0&0&0&0&-6\end{array}\right]$

方程 $AX=B$ 无解.

(3) 当 $a=1$ 时

$\bar{A}\to\left[\begin{array}{ccc|c|c}1&-1&-1&2&2\\0&3&3&-3&-3\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$

$\to\left[\begin{array}{ccc|c|c}1&0&0&1&1\\0&1&1&-1&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$

$X=\begin{bmatrix}1&1\\-1-k_1&-1-k_2\\k_1&k_2\end{bmatrix}$（$k_1,k_2$ 为任意常数）

方程 $AX=B$ 有无穷多解.

一堆方程组

一、定义

（1）A 和 B 均已知；

（2）C 未知.

此时，称 $AC=B$ 为“矩阵方程”.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

二、解的判定

1. $Ax=b$ 的增广矩阵

$$\overline{A}=[A\vdots b]=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & \vdots & 1 \\ 0 & 5 & -4 & \vdots & -1 \\ 2 & 2 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

2. $AC=B$ 的增广矩阵

$$\overline{A}=[A\vdots B]=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & \vdots & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & \vdots & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & \vdots & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

3. “解的判定”方法

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & \vdots & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & \vdots & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

（1）阶梯线是否塌陷

将 $\overline{A}$ 化为行阶梯形矩阵后，如阶梯线在$\boxed{\text{任何一个隔离线}}$处出现塌陷，那么该方程组 $AC=B$ 无解。如阶梯线在$\boxed{\text{任何一个隔离线}}$处均未出现塌陷（地面是平直的），那么该方程组 $AC=B$ 有解。

（2）阶梯线的行数

$$\boxed{\text{阶梯线的行数＝独立方程的个数}}$$

当方程组 $AC=B$ 有解时，若阶梯线的行数＝未知数的个数 n，即：独立方程的个数＝未知数的个数 n，则方程组 $AC=B$ 有唯一解。

当方程组 $AC=B$ 有解时，若阶梯线的行数＜未知数的个数 n，即：独立方程的个数＜未知数的个数 n，则方程组 $AC=B$ 有无穷多解。

三、阶梯线的特点

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

（1）阶梯线的下方全是 0；

（2）整个阶梯线以“竖线”开始，以“横线”结尾；

（3）因为，竖线和横线是成对出现的，所以竖线和横线的个数相同；

（4）阶梯线的行数＝竖线的个数＝横线的个数；

（5）竖线的长度恒为 1，横线的长度可以为 1，也可以＞1；

（6）每一条横线上的第一个数字，不能为 0；

（7）阶梯线应该从左向右画，而且阶梯线只能往下走，不能往上走。

四、“解的判定”所在的位置

$\overline{A}$ → 行阶梯形 → 解的判定 → 行最简形 → 通解

（2018）

已知a是常数，且矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}$可经初等列变换化为矩阵$B=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

（I） 求a; $=2$

（II） 求满足$AP=B$的可逆矩阵P.

解：(II)

$$\bar{A}=[A\mid B]=\left[\begin{array}{ccc|c|c|c}1&2&2&1&2&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-2&-1&1&1\end{array}\right]\xrightarrow{}\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c|c|c}1&2&2&1&2&2\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]}_{\text{阶梯形}}\xrightarrow{}\underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc}x_1&x_2&x_3&①&②&③\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc|c|c|c}1&0&6&3&4&4\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]\end{array}}_{\text{最简形}}$$

① $p_1=k_1\begin{bmatrix}-6\\2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\-1\\0\end{bmatrix}$ ③ $p_3=k_3\begin{bmatrix}-6\\2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\-1\\0\end{bmatrix}$

② $p_2=k_2\begin{bmatrix}-6\\2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\-1\\0\end{bmatrix}$

化✓
基
特
通

$\therefore P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{bmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{bmatrix}$（$k_1,k_2,k_3$为任意常数，且$k_2\neq k_3$）

（2014）设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$，$E$ 为 3 阶单位矩阵.

（Ⅰ）求方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系；

（Ⅱ）求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 B.

解：(Ⅰ) $\xi=\begin{bmatrix}-1\\2\\3\\1\end{bmatrix}$

$B=A^{-1}E=A^{-1}$ ✗

(Ⅱ) $\underset{3\times 4}{A}\ \underset{4\times 3}{B}=\underset{3\times 3}{E}$

$$\bar{A}=[A\,\vdots\,E]=\left[\begin{array}{cccc|ccc}1&-2&3&-4&1&1&1\\0&1&-1&1&1&1&1\\1&2&0&-3&1&1&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|ccc}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{array}\right]\to \text{阶梯形}$$

$$\begin{array}{ccccccc}x_1&x_2&x_3&x_4&①&②&③\end{array}$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc|ccc}1&0&0&1&2&6&-1\\0&1&0&-2&-1&-3&1\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{array}\right]\to \text{最简形}$$

① $b_1=k_1\begin{bmatrix}-1\\2\\3\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{bmatrix}$　② $b_2=k_2\begin{bmatrix}-1\\2\\3\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6\\-3\\-4\\0\end{bmatrix}$

③ $b_3=k_3\begin{bmatrix}-1\\2\\3\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$

$$B=(b_1,b_2,b_3)=\begin{bmatrix}-k_1+2&-k_2+6&-k_3-1\\2k_1-1&2k_2-3&2k_3+1\\3k_1-1&3k_2-4&3k_3+1\\k_1&k_2&k_3\end{bmatrix}$$（k_1,k_2,k_3 为任意常数）

化 ✓
易 5
错 1
返