# 总框架

## 一、 计算

（1） 单数计算 $\begin{cases} \text{方阵：①} |A| \quad \text{②} A^{-1} \quad \text{③} A^{*} \\ \text{矩阵：④} A^{T} \quad \text{⑤} R(A) \end{cases}$

（2） 双数计算 $\begin{cases} \text{⑥} + \\ \times \begin{cases} \text{⑦} AB \\ \text{⑧} kA \\ \text{⑨} A^{k} \end{cases} \end{cases}$

## 二、 应用

（1） 方程组 ＝ ⑤⑦

（2） 向量 ＝ 方程组＋①

（3） 特征值类 ＝ 向量＋②④⑧

# 加与乘

## 一、定义

（1）加

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

（2）数乘

$$kA=Ak=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}.$$

（3）乘法

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 14 & -3 \\ 17 & 13 & 10 \end{pmatrix}$$

（4）幂

$A^k$ 就是 $k$ 个 $A$ 连乘

## 二、公式（无）

## 三、解题方法

$$\begin{cases} \text{定义法} \\ \text{公式法} \end{cases}$$

## 四、幂的求法

（1）归纳法

（2）对角阵法

（3）向量外积法



设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}$，求 $A^k$

解：$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2\lambda & 1\end{pmatrix}$

$$A^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2\lambda & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3\lambda & 1\end{pmatrix}$$

……

$$A^k=\begin{pmatrix}1 & 0\\ k\lambda & 1\end{pmatrix}$$

证明：

（1）当 $k=1$ 时，上式显然成立；

（2）假设当 $k=n$ 时，上式成立，

那么当 $k=n+1$ 时，

$$A^{n+1}=A^nA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ n\lambda & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ (n+1)\lambda & 1\end{pmatrix},$$

上式仍成立，得证。

（2016）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求 $A^{99}$；

（Ⅱ）设3阶矩阵 $B=(a_1,a_2,a_3)$，满足 $B^2=BA$. 记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，将 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$

分别表示为 $a_1,a_2,a_3$ 的线性组合. $a_1,a_2,a_3$.

（2016）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求 $A^{99}$；

（Ⅱ）设3阶矩阵 $B=(a_1,a_2,a_3)$，满足 $B^2=BA$. 记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，将 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$

分别表示为 $a_1,a_2,a_3$ 的线性组合. $a_1,a_2,a_3$.

$A^2=\cdots$

$A^3=\cdots$

$A^4=\cdots$

# 总框架

## 一、 计算

（1） 单数计算

- 方阵：①｜A｜ ②$A^{-1}$ ③$A^{*}$
- 矩阵：④$A^{T}$ ⑤R（A）

（2） 双数计算

- ⑥+
- ×
  - ⑦AB
  - ⑧kA
  - ⑨$A^{k}$

## 二、 应用

（1） 方程组 ＝ ⑤⑦

（2） 向量 ＝ 方程组＋①

（3） 特征值类 ＝ 向量＋②④⑧

# “乘法”的 3 种另类解释

（1）初等变换

（2）方程组

（3）向量的计算



# 初等变换

## 一、定义

$\boxed{\text{初等行变换}}$ 以下 3 种变换称为矩阵的初等行变换：

（1）互换两行（互换）

（2）以 $k\neq 0$ 数乘某一行（数乘）

（3）把某一行的 $k$ 倍加到另一行上去（倍加）。

这 3 种变换合称“互数倍”。

$\boxed{\text{初等列变换}}$ 把以上定义中的“行”换成“列”，即是矩阵的初等列变换。

$\boxed{\text{初等变换}}$ 初等行变换与初等列变换，统称初等变换。

$\boxed{\text{等价}}$ 如果矩阵 A 经有限次初等变换，变成矩阵 B，就称矩阵 A 与 B 等价。

# 二、E 的初等变换

## 1、定义

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}，以3阶单位矩阵为例$$

（1）互换　　（2）数乘　　（3）倍加

$$E_{12}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad E_{2(k)}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad E_{23(k)}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&k\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{初等矩阵}}$　由单位矩阵 $E$ 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵。

$\boxed{\text{互初}}$　其中，$E_{12}$ 为互换型初等矩阵，简称互初。

$\boxed{\text{数初}}$　$E_{2(k)}$ 为数乘型初等矩阵，简称数初。

$\boxed{\text{倍初}}$　$E_{23(k)}$ 为倍加型初等矩阵，简称倍初。

## 2、公式

$$\boxed{\left|E_{12}\right|=-1\qquad \left|E_{2(k)}\right|=k\qquad \left|E_{23(k)}\right|=1}$$

$$\boxed{E_{12}^{-1}=E_{12}}$$

$$\boxed{E_{12}^{T}=E_{12}}$$

# 三、A 的初等变换

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{性质 1}}$ 对矩阵 $A$ 施行一次初等行变换，相当于在 $A$ 的左边乘以相应的初等矩阵。

$\boxed{\text{性质 2}}$ 对矩阵 $A$ 施行一次初等列变换，相当于在 $A$ 的右边乘以相应的初等矩阵。

举例：

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}4&5&6\\1&2&3\\7&8&9\end{bmatrix}$$

$$E_{12}A=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}=$$

$\boxed{\text{定理 1}}$ 如果矩阵 $A$ 经过有限次初等行变换，可以得到矩阵 $B$，那么一定存在可逆矩阵 $P$，使 $PA=B$，反之亦然；

$\boxed{\text{定理 2}}$ 如果矩阵 $A$ 经过有限次初等列变换，可以得到矩阵 $B$，那么一定存在可逆矩阵 $Q$，使 $AQ=B$，反之亦然；

$\boxed{\text{定理 3}}$ 如果矩阵 $A$ 经过有限次初等变换，可以得到矩阵 $B$，那么一定存在可逆矩阵 $P$ 和 $Q$，使 $PAQ=B$，反之亦然。

证明：

（2012）设 $A$ 为3阶矩阵，$|A|=3$，$A^*$ 为 $A$ 的伴随矩阵，若交换 $A$ 的第1行与第2行得到矩阵 $B$，则 $|BA^*|=$ $\underline{-27}$.

$E_{12}A=B$

$|BA^*|=|E_{12}AA^*|=|E_{12}\,|A|E|=|3E_{12}|$

$=3^3|E_{12}|=3^3\times(-1)=-27$

（2011）设 $A$ 为3阶矩阵，将 $A$ 的第2列加到第1列得矩阵 $B$，再交换 $B$ 的第2行与第3行得单位矩阵，记 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $A=$（D）

(A) $P_1P_2$.　　(B) $P_1^{-1}P_2$.　　(C) $P_2P_1$.　　(D) $P_2P_1^{-1}$.

互动

$\because AP_1=B$

$P_2B=E$

$A=?$

$\therefore P_2AP_1=E$

$\therefore A=P_2^{-1}EP_1^{-1}$

$=P_2^{-1}P_1^{-1}$

$=P_2P_1^{-1}$

求方阵$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$的逆矩阵

解：记所给的矩阵为 A.

$$(A \;\vdots\; E)=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-1)\times r_1 \to r_3]{(-1)\times r_1 \to r_2} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-2)\times r_2 \to r_1]{r_2 \times (-1)} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 9 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{(-9)\times r_3 \to r_1 \\ 4\times r_3 \to r_2}]{r_3 \div 2} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & 2 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \div 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$