总框架

一、 计算

（1） 单数计算
- 方阵：① $|A|$ ② A^{-1} ③ A^{*}
- 矩阵：④ A^{T} ⑤ $R(A)$

（2） 双数计算
- ⑥ +
- ×
  - ⑦ AB
  - ⑧ kA
  - ⑨ A^{k}

二、 应用

（1） 方程组 ＝ ⑤⑦

（2） 向量 ＝ 方程组＋①

（3） 特征值类 ＝ 向量＋②④⑧

向量的正交

一、向量的正交

（1）向量的正交

定义 当向量的内积$\alpha^T\beta=0$时，称向量α与β正交，

几何意义 两向量正交，即两向量互相垂直。

特例 若$\alpha=0$，则α与任何向量都正交。

（2）单位向量

向量的长度 用$\|\alpha\|$表示，若$\alpha=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$, 则$\|\alpha\|=\sqrt{x^2+y^2}$；

若$\alpha=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$, $\|\alpha\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

单位向量 若$\|\alpha\|=1$，称α为单位向量。

（3）施密特正交化

①正交化

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1$$

②单位化

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}$$

$$\gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}$$

二、求“正交向量”的一般步骤

1. 3 个向量，两两正交，已知其中 2 个向量，求第 3 个向量的一般步骤：

（1）设未知数
（2）列方程组
（3）解方程组
（4）答

2. 3 个向量，两两正交，已知其中 1 个向量，求其他 2 个向量的一般步骤：

（1）设未知向量
（2）列方程组
（3）解方程组
（4）正交化
（5）答

三、正交矩阵

定义　列向量都是单位向量，且两两正交，这样的方阵叫做～。

特例　单位向量$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$的组合，如$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$等。

定理　如果 A 为正交矩阵，那么 $A^TA=E\left(即A^{-1}=A^T\right)$，反之亦然。

正交变换　若 P 为正交矩阵，则线性变换 $y=Px$ 称为～。

已知向量$\alpha=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，向量$\beta=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$正交，试求一个非零向量$\gamma$，使$\alpha,\beta,\gamma$两两正交。

解：

(1) 设未知数 向量

设 $\gamma=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ ✓

(2) 列方程组

① $\because \gamma\perp\alpha$

$\therefore \alpha^T\gamma=0$

$\therefore x_1+x_2+x_3=0$

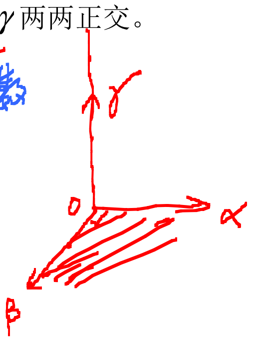
② $\because \gamma\perp\beta$

$\therefore \beta^T\gamma=0$

$\therefore x_1-x_3=0$

未知数 常数

$\therefore \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1-x_3=0 \end{cases}$



~~代~~ 基础

(3) 解方程组

$\xi=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$

通解：$\gamma=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k\xi$ （k为任意常数）

(4) 答

取 $k=1$

得 $\gamma=\xi=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$

已知向量 $\alpha=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, 向量 $\beta=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$, 试对这 2 个向量进行施密特正交化。

解：① 正交化

$$\alpha_1=\alpha$$

$$\alpha_2=\beta-\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha=\beta-\frac{2}{2}\alpha$$

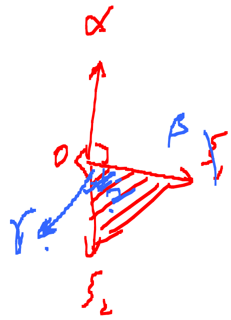
$$=\beta-\alpha=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix} \checkmark$$

② 单位化

$$\gamma_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

$$\gamma_2=\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\frac{\alpha_2}{2}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

已知向量 $\alpha=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$，试求 2 个非零向量 β,γ，使 α,β,γ 两两正交。



解：① 设未知向量

设 $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

② 列方程组

$\because x\perp\alpha$

$\alpha^T x=0$

未知数　常数

$\therefore x_1-x_2+x_3=0$

③ 解方程组

通解：$k_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=k_1\xi_1+k_2\xi_2$

④ 正交化

$\beta_1=\xi_1$

$\beta_2=\xi_2-\dfrac{(\xi_1,\xi_2)}{(\xi_1,\xi_1)}\xi_1$

$=\xi_2-\dfrac{-1}{2}\xi_1$

$=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}+\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+\frac{1}{2}\\0+\frac{1}{2}\\0+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}$

⑤ 答

$\beta=\beta_1=\xi_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$

$\gamma=\beta_2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}$

请判断矩阵 $P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$ 是否为正交矩阵。

解：① 两两正交？

令 $P=[p_1,p_2,p_3]$

$p_1^Tp_2=\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{6}}=0$

$p_1^Tp_3=\frac{1}{\sqrt{18}}-\frac{2}{\sqrt{18}}+\frac{1}{\sqrt{18}}=0$

$p_2^Tp_3=\frac{1}{\sqrt{12}}-\frac{1}{\sqrt{12}}=0$

② 均为单位向量

$\|p_1\|=\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=1$

$\|p_2\|=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1$

$\|p_3\|=\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{4}{6}+\frac{1}{6}}=1$

∴ P 是正交矩阵

特征值与特征向量

一、矩阵 A 的特征值与特征向量

1.特征值

(1)定义

$\boxed{\text{特征值}}$ 设 A 是 n 阶矩阵，如果数 λ 和 n 维非零列向量 ξ，能使 $A\xi=\lambda\xi$ 成立，那么数 λ 称为 A 的～。$A\xi=\lambda\xi$ 也可以写成 $(\lambda E-A)\xi=0$。

$\boxed{\text{特征方程}}$ $|\lambda E-A|=0$，称为 A 的特征方程。故 n 阶矩阵 A 有 n 个特征值。

(2)公式

$\boxed{\text{加法公式}}$ $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}$

$\boxed{\text{乘法公式}}$ $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|$

因为 λ 有 2 个定义，2 个公式，所以可以简称为“2+2”。

2.特征向量

(1)定义

设 A 是 n 阶矩阵，如果数 λ 和 n 维非零列向量，能使 $A\xi=\lambda\xi$ 成立，那么数 λ 称为 A 的特征值，非零向量 ξ 称为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量。

(2)公式(性质)

- 1 重特征值对应的所有特征向量为 $k\xi(k\neq0)$
- 2 重特征值对应的所有特征向量为 $k\xi$ 或 $k_1\xi_1+k_2\xi_2(k,k_1,k_2\neq0)$
- 不同的特征值对应的特征向量，线性无关

因为 ξ 有 1 个定义，1 张图，所以可以简称为“1+1”。

注：当特征值和特征向量在题目中同时出现时，应优先分析特征向量。

二、f（A）的特征值与特征向量

1. f（A）

如果 A 的特征值为λ，其对应的特征向量为ξ，那么以下矩阵的特征值和特征向量分别为：

矩阵	O	E	kA	A^k	f(A)	A^{-1}	A^*	f(A)＋A^{-1}＋A^*
特征值	0	1	$k\lambda$	λ^k	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\lvert A\rvert}{\lambda}$	$f(\lambda)+\frac{1}{\lambda}+\frac{\lvert A\rvert}{\lambda}$
对应的特征向量	—	—	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ

其中：$f(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m$ 是矩阵 A 的多项式，

$f(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m$ 是λ的多项式。

2. f（A）=0

如果 A 的特征值为λ，且矩阵 A 满足 $f(A)=0$，则 $f(\lambda)=0$ 。

三、“数值矩阵”特征值γ与特征向量ξ的求法

（1）$|\lambda E-A|=0\Rightarrow$ 特征值λ

（2）$(\lambda E-A)x=0\Rightarrow$ 特征向量ξ

注：对角矩阵，三角矩阵的特征值口算即可求出

（2018）

设2阶矩阵A有两个不同特征值，α_1,α_2是A的线性无关的特征向量，且满足$A^2(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_1+\alpha_2$，则$|A|=$ -1

λ ± 1

$f(A)$ ✓

解：设A的特征值为λ，

则A^2的特征值为λ^2

$\because$ $A^2(\alpha_1+\alpha_2)=1\times(\alpha_1+\alpha_2)$ ✓

$\therefore$ A^2的特征值为1

$\therefore$ $\lambda^2=1$

$\lambda=\pm 1$

$\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$

$|A|=\lambda_1\lambda_2=1\times(-1)$

$=-1$

（2017）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{pmatrix}$ 的一个特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，则 $a=$ <u>-1</u>

$A \to$ ① + ①

$\cancel{f(A)}$

解：$\because A\xi=\lambda\xi$

$\therefore \begin{bmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix}1\\3+2a\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda\\\lambda\\2\lambda\end{bmatrix}$

$\therefore \lambda=1$

$3+2a=\lambda=1$

$\therefore a=-1$

（2015）设 3 阶矩阵 A 的特征值为 2，-2,1，$B=A^2-A+E$，其中 E 为 3 阶单位矩阵，则行列式 $|B|$=___21___.

A

f(A) ✓

解：设 A 的特征值为 λ

则 B 的特征值为 $f(\lambda)=\lambda^2-\lambda+1$

$\because \lambda=2,-2,1$

$\therefore f(\lambda)=3,7,1$，即为 B 的特征值

$\therefore |B|=3\times7\times1=21$

(2009) 若 3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=2$，其中 $\boldsymbol{\alpha}^T$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置，则矩阵 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T$ 的非零特征值为_____________. 2

A ✓ → ①+↓

~~f(A)~~

$A\xi=\lambda\xi$

解：$\beta\alpha^T\xi=\lambda\xi$

$\beta\alpha^T\beta=\beta\cdot2=2\beta$

∴ $\beta\alpha^T$ 的特征值为 2，其对应特征向量为 β

$f(A)=0$

设 A 是 2 阶矩阵，且满足 $A^2+A-6=O$. 则 $|A+5E|=$ $\underline{\quad 14 \quad}$.

解：

$\because A^2+A-6=0$

$\therefore \lambda^2+\lambda-6=0$

$(\lambda+3)(\lambda-2)=0$

$\lambda_1=-3,\ \lambda_2=2$

$A+5E$ 的特征值：2, 7

$\therefore |A+5E|=2\times 7=14$

求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解：(1) 求特征值

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

$\therefore\ \lambda_1=2,\quad \lambda_2=\lambda_3=1$

(2) 求特征向量

① 当 $\lambda_1=2$ 时，解方程组 $(\lambda E-A)x=0$

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 4 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

解得 $\xi_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

$k_1\xi_1\ (k_1\neq 0)$ 为对应于 $\lambda_1=2$ 的全部特征向量

② 当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，解方程组

$(\lambda E-A)x=0$

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 4 & -2 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

解得 $\xi_2=\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix}$

$k_2\xi_2\ (k_2\neq 0)$ 为对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的全部特征向量.

设（1）$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，（2）$B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$，求 A，B 的特征值.

解：(1) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda-2)=0$

$\therefore\ \lambda_1=-1,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=2$

(2) $|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & & \\ & \lambda-3 & \\ & & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-3)^3=0$

$\therefore\ \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=3$