总框架

一、 计算

（1） 单数计算
- 方阵：①｜A｜ ②A^{-1} ③A^{*}
- 矩阵：④A^{T} ⑤R（A）

（2） 双数计算
- ⑥+
- ×
  - ⑦AB
  - ⑧kA
  - ⑨A^{k}

二、 应用

（1） 方程组 ＝ ⑤⑦

（2） 向量 ＝ 方程组＋①

（3） 特征值类 ＝ 向量＋②④⑧

向量的计算

一、向量的基本计算

序号	计算类型		
1	$\lvert A\rvert$		
2	A^{-1}		
3	A^*		
4	A^{T}		
5	$R(A)$		
6	$A+B$		
7	kA		
8	AB		
9	A^k		

（1）向量的加减

$$\alpha+\beta=\begin{bmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{bmatrix}$$

$$\alpha^T \pm \beta^T = [a_1 \pm b_1,\quad a_2 \pm b_2,\quad a_3 \pm b_3]$$

（2）向量的数乘

$$k\alpha = k\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{bmatrix}$$

$$k\alpha = k[a_1,\quad a_2,\quad a_3] = [ka_1,\quad ka_2,\quad ka_3]$$

（3）向量的乘法

内积 $\alpha^T\beta = [a_1,\quad a_2,\quad a_3]\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

① $(\alpha,\ \beta) = \alpha^T\beta$

② $(\beta,\ \alpha) = \beta^T\alpha$

③ $(\alpha,\ \beta) = (\beta,\ \alpha)$

外积 $\alpha\beta^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix}$

注：$R(\alpha\beta^T) = 1$

小结 向量的乘法有 2 种：内积和外积。两者的计算结果完全不同，简称“内外有别”。

二、乘法的向量形式

（1）矩阵的表达形式

①A　　②$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$　　③$\begin{bmatrix} k_1 & k_4 & k_7 \\ k_2 & k_5 & k_8 \\ k_3 & k_6 & k_9 \end{bmatrix}$

（2）乘法$A\times B$

①×②型

$$A(\beta_1, \beta_2, \beta_3)=(A\beta_1, A\beta_2, A\beta_3)$$

②×③型

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{bmatrix} k_1 & k_4 & k_7 \\ k_2 & k_5 & k_8 \\ k_3 & k_6 & k_9 \end{bmatrix}$$
$$=(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3, k_4\alpha_1+k_5\alpha_2+k_6\alpha_3, k_7\alpha_1+k_8\alpha_2+k_9\alpha_3)$$

（3）乘法Ax

②×③型

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$$

三、乘法的向量形式（扩展）

（1）矩阵的表达形式

① A ② $(\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3)$ ③ $\begin{bmatrix} k_1 & k_4 & k_7 \\ k_2 & k_5 & k_8 \\ k_3 & k_6 & k_9 \end{bmatrix}$

（2）乘法 Ax

②×③型

乘法：$(\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$

因式分解：$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = (\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

（3）乘法 $A \times B$

②×③型

乘法：$(\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3)\begin{bmatrix} k_1 & k_4 & k_7 \\ k_2 & k_5 & k_8 \\ k_3 & k_6 & k_9 \end{bmatrix}$

$= (k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3, \quad k_4\alpha_1 + k_5\alpha_2 + k_6\alpha_3, \quad k_7\alpha_1 + k_8\alpha_2 + k_9\alpha_3)$

因式分解：$(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3, \quad k_4\alpha_1 + k_5\alpha_2 + k_6\alpha_3, \quad k_7\alpha_1 + k_8\alpha_2 + k_9\alpha_3)$

$= (\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3)\begin{bmatrix} k_1 & k_4 & k_7 \\ k_2 & k_5 & k_8 \\ k_3 & k_6 & k_9 \end{bmatrix}$

①×②型

乘法：$A(\beta_1, \quad \beta_2, \quad \beta_3) = (A\beta_1, \quad A\beta_2, \quad A\beta_3)$

因式分解：$(A\beta_1, \quad A\beta_2, \quad A\beta_3) = A(\beta_1, \quad \beta_2, \quad \beta_3)$

3 3

（2017）设α是n维单位列向量，E为n阶单位矩阵，则 （ A ）

$(A)E-\alpha\alpha^T$不可逆 $(B)E+\alpha\alpha^T$不可逆

$(C)E+2\alpha\alpha^T$不可逆 $(D)E-2\alpha\alpha^T$不可逆

$$\alpha=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\alpha\alpha^T=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

(A) $E-\alpha\alpha^T=\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$ 不

(B) $E+\alpha\alpha^T=\begin{bmatrix}2&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$ 可

(C) $E+2\alpha\alpha^T=\begin{bmatrix}3&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$ 可

(D) $E-2\alpha\alpha^T=\begin{bmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$ 可

设$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\-2&-4&-6\\3&6&9\end{bmatrix}$，求$A^{100}$.

幂
归
时
外

$R(A)=1$

解：

$$A=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}=\alpha\beta^T$$

$$\beta^T\alpha=\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}=1-4+9=6$$

$$A^{100}=\alpha\underbrace{(\beta^T\cdot\alpha)(\beta^T\cdot\alpha)\beta^T\cdots\cdots}_{99个}\alpha\beta^T$$

$$=6^{99}\alpha\beta^T$$

$$=6^{99}A=6^{99}\begin{bmatrix}1&2&3\\-2&-4&-6\\3&6&9\end{bmatrix}$$

（2017）设 3 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$ 有 3 个不同的特征值，且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$。

(Ⅰ) 证明 $r(A)=2$;

(Ⅱ) 若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求方程组 $Ax=\beta$ 的通解。

解：(Ⅱ) $\beta=\alpha_1\cdot 1+\alpha_2\cdot 1+\alpha_3\cdot 1$

$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\beta$

$\therefore \eta=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$\because \alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$

$\therefore \alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0$

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=0$

$A\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=0$

$\therefore \xi=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$

$\because r(A)=2$

$\therefore 3-r(A)=1$

$\therefore Ax=0$ 的基础解系只有 1 个解向量

$\therefore Ax=\beta$ 的通解：$k\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ (k 为任意常数)

（2016）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求 A^{99}；

$$\begin{bmatrix}-2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98}\\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

（Ⅱ）设 3 阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，满足 $B^2=BA$. 记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合.

解：（Ⅱ）

$$B^3=B\cdot B^2=B\cdot BA=B^2A=BA\cdot A=BA^2$$

$$B^4=B\cdot B^3=B\cdot BA^2=B^2A^2=BA\cdot A^2=BA^3$$

$$\therefore B^{100}=B\cdot A^{99}$$

$$\therefore(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}-2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98}\\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\left((-2+2^{99})\alpha_1+(-2+2^{100})\alpha_2,\ (1-2^{99})\alpha_1+(1-2^{100})\alpha_2,\ (2-2^{98})\alpha_1+(2-2^{99})\alpha_2\right)$$

$$\therefore \beta_1=(-2+2^{99})\alpha_1+(-2+2^{100})\alpha_2$$

$$\beta_2=(1-2^{99})\alpha_1+(1-2^{100})\alpha_2$$

$$\beta_3=(2-2^{98})\alpha_1+(2-2^{99})\alpha_2$$

向量的线性表示

一、定义

$\boxed{\text{线性表示 1}}$ 给定向量组 $A:\alpha_1$，$\alpha_2,\cdots$，α_n 和向量 β，如果存在一组数 λ_1，$\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，使

$$\beta=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_n\alpha_n$$

$$\text{即 } \beta=A\gamma$$

这时称向量 β 能由向量组 A 线性表示。

向量 β 能由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow$ 方程组 $Ax=\beta$ 有解

$\boxed{\text{线性表示 2}}$ 设有两个向量组 $A:\alpha_1$，$\alpha_2,\cdots$，α_n，及 $B:\beta_1$，$\beta_2,\cdots$，β_m，若 B 组中的每个向量都能由向量组 A 线性表示，即

$$\beta_1=A\gamma_1$$
$$\beta_2=A\gamma_2$$
$$\vdots$$
$$\beta_m=A\gamma_m$$
$$\text{即 } B=AC$$

则称向量组 B 能由向量组 A 线性表示。

向量组 B 能由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $AC=B$ 有解

$\boxed{\text{向量组等价}}$ 若向量组 A 与向量组 B 能相互线性表示，则称这两个向量组等价.

向量组 A 与向量组 B 等价 $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $AC=B$ 和 $BD=A$ 均有解

二、定理

定理 1　向量β能由向量组$A:\alpha_1$，$\alpha_2,\cdots$，α_n线性表示的充分必要条件是矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$的秩等于矩阵$B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta)$的秩.

定理 2　向量组$B:\beta_1$，$\beta_2,\cdots$，β_m能由向量组$A:\alpha_1$，$\alpha_2,\cdots$，α_n线性表示的充分必要条件是矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$的秩等于矩阵$(A,B)=(\alpha_1$，$\alpha_2,\cdots$，$\alpha_n,\beta_1$，$\beta_2,\cdots$，$\beta_m)$的秩, 即$R(A)=R(A,B)$.

定理 3　向量组$A:\alpha_1$，$\alpha_2,\cdots$，α_n与向量组$B:\beta_1$，$\beta_2,\cdots$，β_m等价的充分必要条件是$R(A)=R(B)=R(A,B)$. 其中A和B是向量组A和B所构成的矩阵.

定理 4　设向量组$B:\beta_1$，$\beta_2,\cdots$，β_m能由向量组$A:\alpha_1$，$\alpha_2,\cdots$，α_n线性表示, 则$R(B)\le R(A)$. 其中A和B是向量组A和B所构成的矩阵.

三、待定系数法

求“函数关系式”的一般步骤：

（1）设$y=kx$

（2）根据已知条件，求k

（3）将k回代到（1）式，完成

求“线性表示 1”的一般步骤：

（1）设倍数表达式为：$Ax=\beta$

（2）根据已知条件，求x

（3）将x回代到（1）式，完成

求“线性表示 2”的一般步骤：

（1）设倍数表达式为：$AC=B$

（2）根据已知条件，求C

（3）将C回代到（1）式，完成

某正比例函数经过点（2,3），求此正比例函数的表达式。

解：

(1) 设 $y=kx$

(2) ∵ 过点 $(2,3)$

∴ $3=2k$

∴ $k=\frac{3}{2}$

(3) $y=\frac{3}{2}x$

设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\\0\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\0\\3\\1\end{pmatrix}$，将向量 β 由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

$\bar{A}$ 的倍数

解：(1) 令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

设 $Ax=\beta$

(2) $\bar{A}=[A\vdots\beta]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&2&-1&0\\2&1&4&3\\2&3&0&1\end{array}\right]\to\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}x_1&x_2&x_3&\end{array}\\\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&3&2\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\end{array}$ 最简形

代

基

特

通

ξ η

$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}-3\\2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}$

(3) $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\beta$

$\therefore\ \beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$

$=(-3k+2)\alpha_1+(2k-1)\alpha_2+k\alpha_3$（其中 k 为任意常数）

(2011) 设向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,1)^T$，$\alpha_3=(1,3,5)^T$，不能由向量组 $\beta_1=(1,1,1)^T$，$\beta_2=(1,2,3)^T$，$\beta_3=(3,4,a)^T$ 线性表示.

（I）求 a 的值；

（II）将 β_1,β_2,β_3 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

A　B

解：(I) (1) 令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

设 $BC=A$

(2) $[B \mid A]=\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & a & 1 & 1 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-5 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right]$ 阶梯形

$\because$ 矩阵方程 $BC=A$ 无解

$\therefore a-5=0$

$\therefore a=5$

（2013）设 A,B,C 均为 n 阶矩阵，若 $AB=C$，且 B 可逆，则 （ B ）

B^{-1}

（A）矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价

（B）矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价

（C）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价

（D）矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价

分析：$AB=C \Rightarrow$ C可由A线性表示 $\Rightarrow$ A和C等价

$A=CB^{-1} \Rightarrow$ A可由C线性表示

线性无关

一、定义

$\boxed{\text{线性相关}}$ 给定向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$,如果存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$, 使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$, 则称向量组 A 线性相关.

$\boxed{\text{线性无关}}$ 否则称向量组 A 线性无关.

$\boxed{\text{小结}}$ 线性相关就是倍数相关，线性无关就是倍数无关.

二、性质与判定

1. 线性无关与线性相关的性质

假设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维列向量，且 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

（1）如果 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则 $|A|=0$；

（2）如果 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则 $|A|\neq 0$.

2. 线性无关与线性相关的判定

假设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维列向量，且 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

（1）如果 $|A|=0$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；

（2）如果 $|A|\neq 0$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

3. 说明

（1）此判定定理可以推广到 n 维

（2）使用条件：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均已知且 A 为方阵

三、几何意义

1. 线性相关

假设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$均为3维列向量

（1）α_1,α_2线性相关$\Leftrightarrow$共线

（2）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关$\Leftrightarrow$共面

2. 线性无关

假设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$均为3维列向量

（1）α_1,α_2线性无关$\Leftrightarrow$不共线

（2）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关$\Leftrightarrow$不共面

3. 线性表示

（1）$\alpha_3=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$

（2）假设ξ为3维列向量，那么某齐次线性方程组的通解：$k\xi$（k为任意常数）代表一条直线

（3）假设ξ_1,ξ_2均为3维列向量，那么某齐次线性方程组的通解：$k_1\xi_1+k_2\xi_2$（k_1，k_2为任意常数）代表一个平面

四、特殊向量

$$0=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\ e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ e_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

（1）0向量与任何2个向量α_1,α_2所构成的向量组均线性相关

（2）单位向量e_1,e_2,e_3线性无关

（3）任何一个3维列向量，都可以由e_1,e_2,e_3线性表示，且其系数即为这个3维向量的分量

（2012）设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$ 其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的是（ C ）

无

绝 $|\,|=0$

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　（B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$　　（C）$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$　　（D）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

$\because |\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4| = \begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ c_1 & c_3 & c_4\end{vmatrix} = 0$

$\therefore \alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 线相

（2009 年）设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$，$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

无 绝

(1) 求满足 $\mathbf{A}\xi_2=\xi_1$，$\mathbf{A}^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量 ξ_2，ξ_3.

(2) 对(1)中的任意向量 ξ_2，ξ_3 证明 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

解：(1) $\xi_2=k_1\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}$ (k_1为任意常数)

$\xi_3=k_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{bmatrix}$ (k_2,k_3为任意常数)

(2) $|\xi_1\ \xi_2\ \xi_3|=\begin{vmatrix}-1&\frac{1}{2}k_1-\frac{1}{2}&-k_2-\frac{1}{2}\\1&-\frac{1}{2}k_1+\frac{1}{2}&k_2\\-2&k_1&k_3\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-1&k_1-1&-2k_2-1\\1&-k_1+1&2k_2\\-2&2k_1&2k_3\end{vmatrix}$

$=\frac{1}{4}\begin{vmatrix}0&0&-1\\1&-k_1+1&2k_2\\-2&2k_1&2k_3\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\times(-1)\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&-k_1+1\\-2&2k_1\end{vmatrix}$

$=-\frac{1}{4}\begin{vmatrix}1&-k_1+1\\0&2\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}\times(2-0)=-\frac{1}{4}\times2=-\frac{1}{2}\neq0$

$\therefore$ ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

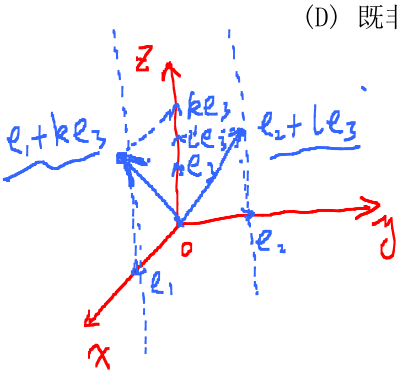
（2013）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维向量，则对任意常数 k,l，向量组 $\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关的 （ A ）

(A) 必要非充分条件

(B) 充分非必要条件

(C) 充分必要条件

(D) 既非充分也非必要条件



（2011）设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是4阶矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，若 $(1,0,1,0)^T$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $A^*x=0$ 的基础解系可为 （ D ）

(A) α_1,α_3. (B) α_1,α_2. (C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. (D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

分析：$\because$ $Ax=0$ 的基础解系中的解向量个数为 1

$\therefore$ $n-r=1$

$\because$ $n=4$

$\therefore$ $r=3$

$R(A)=3<4$

$\therefore$ $R(A^*)=1$

$\therefore$ $A^*x=0$ 的基础解系中解向量个数为 $4-1=3$（个）

$\because$ $(1,0,1,0)^T$ 是 $Ax=0$ 的解

$\therefore$ $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}=0$

$\alpha_1+\alpha_3=0$

$\alpha_1=-\alpha_3$

独立向量

一、定义

独立向量 若向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$ 线性无关，也就是说，它们是互相独立的，那么我们把这些向量叫做独立向量。

导出向量 若向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$ 线性相关，且其中一共有 r 个向量为独立向量，那么剩余的其他向量，一定可以由这些独立向量线性表示，这些“其他向量”叫做导出向量。

向量组的秩 上面的 r 叫做向量组的秩，它代表一个向量组中，独立向量的个数。

二、定理与推论

定理 矩阵的秩等于它的列向量组的秩, 也等于它的行向量组的秩。

推论 求向量组的秩, 就是求矩阵的秩。

三、“矩阵的秩”的求法（回顾）

1. 定义法

如果 r 阶子式是矩阵 A 的最高阶非零子式，那么数 r 称为矩阵 A 的秩，记作 $R(A)$。

2. 公式法

（1）独立公式

矩阵的秩等于矩阵的行（或列）向量中，独立向量的个数，即 $R(A) = n_{独}$。

（2）阶梯公式

将矩阵转化为“行阶梯形矩阵”，矩阵的秩即等于阶梯线的行数，即 $R(A) = n_{行}$。

小结： 求秩的公式有 2 个，独立公式和阶梯公式，简称“秩独梯”。

（2017）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为线性无关的 3 维列向量组，则向量组 $A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$ 的秩为____2____

$$r=R(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=R(\underbrace{A}_{①}\times\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{②})$$

$$=R(A)$$

无 ✓

绝 ✓

$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\neq 0$

可逆

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$r=R(A)=2$

A 是一个 m 行 n 列的矩阵，证明：

（1）$R(A) \le n$

（2）$R(A) \le m$

证：(1) 设 $A=(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n)$

$\because$ 其中独立向量的个数 $\le n$

$\therefore R(A) \le n$

(2) 设 $A=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$

$\because$ 其中独立向量的个数 $\le m$

$\therefore R(A) \le m$

并集

矩阵 A，B 的行数相同，证明：

（1）$R(A,B)\ge R(A)$

（2）$R(A,B)\ge R(B)$

（3）$R(A,B)\le R(A)+R(B)$

证：令 $A=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m)$

$B=(\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n)$

则 $(A,B)=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m,\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n)$

(1) 设A中前p个列向量为独立向量，而其他剩余的向量均为导出向量

则 $A=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_p,\alpha_{p+1}\cdots\alpha_m)$

$R(A)=p$

$R(A,B)=R(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_p,\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n)\ge p$

$\therefore R(A,B)\ge R(A)$

(2) 同理可证 $R(A,B)\ge R(B)$

(3) 设B中前q个列向量为独立向量，而其他剩余的向量均为导出向量

则 $B=(\beta_1,\beta_2\cdots\beta_q,\beta_{q+1}\cdots\beta_n)$

$R(B)=q$

$\therefore R(A,B)=R(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_p,\beta_1,\beta_2\cdots\beta_q,\cancel{\alpha_{p+1}}\cdots\alpha_m,\cancel{\beta_{q+1}}\cdots\beta_n)$

$=R(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_p,\beta_1,\beta_2\cdots\beta_q)$

$\le p+q$

$\therefore R(A,B)\le R(A)+R(B)$

（2018）设A、B为n阶矩阵，记$r(X)$为矩阵X的秩，(X,Y)表示分块矩阵，则（ A ）

(A) $r(A,AB)=r(A)$ (B) $r(A,BA)=r(A)$

(C) $r(A,B)=\max\{r(A),r(B)\}$ (D) $r(A,B)=r(A^TB^T)$

定义法
公式法

分析：(A) 令 $A=(\alpha_1,\alpha_2)$

$B=\begin{bmatrix} k_1 & k_3 \\ k_2 & k_4 \end{bmatrix}$

$AB=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{bmatrix} k_1 & k_3 \\ k_2 & k_4 \end{bmatrix}$

$=(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\ k_3\alpha_1+k_4\alpha_2)$

$r(A,AB)=r(\alpha_1,\alpha_2,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,k_3\alpha_1+k_4\alpha_2)$

导出向量

$=r(\alpha_1,\alpha_2)=r(A)$

(B) 令 $B=(\beta_1,\beta_2)$

$A=\begin{bmatrix} k_5 & k_7 \\ k_6 & k_8 \end{bmatrix}$

$BA=(\beta_1,\beta_2)\begin{bmatrix} k_5 & k_7 \\ k_6 & k_8 \end{bmatrix}$

$=(k_5\beta_1+k_6\beta_2,\ k_7\beta_1+k_8\beta_2)$

$r(A,BA)$

$=(\alpha_1,\alpha_2,k_5\beta_1+k_6\beta_2,k_7\beta_1+k_8\beta_2)$

$\neq r(A)$

(C)(D) $r(A,B)\geq r(A)$ 且 $r(A,B)\geq r(B)$ 且 $r(A,B)\leq r(A)+r(B)$

（2010）设向量组Ⅰ：α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_r 可由向量组Ⅱ：β_1，$\beta_2,\cdots$，β_s 线性表示，下列命题正确的是 （ A ）

A　　B　　倍数

① $A=BC$

（A）若向量组Ⅰ线性无关，则 $r \le s$ → $R(B)$，$R(A)$

（B）若向量组Ⅰ线性相关，则 $r > s$

（C）若向量组Ⅱ线性无关，则 $r \le s$

（D）若向量组Ⅱ线性相关，则 $r > s$

$R(AB) \le R(A)$
且 $R(AB) \le R(B)$

(A)
$\boxed{\begin{aligned} &① \because A = BC \\ &\therefore R(A) \le R(B) \end{aligned}}$

~~且 $R(A) \le R(C)$~~

② ∵ Ⅰ 线性无关

∴ $R(A) = r$

③ 又 ∵ $R(B) \le s$

∴ $r = R(A) \le R(B) \le s$

∴ $r \le s$

(D)
① ……

∴ $R(A) \le R(B)$

② ∵ Ⅱ 线性相关

∴ $R(B) < s$

③ ∵ $R(A) \le r$

∴ $r \ge R(A) \le R(B) < s$