总框架

一、 计算

（1） 单数计算
- 方阵：①$|A|$ ②A^{-1} ③A^*
- 矩阵：④A^T ⑤R（A）

（2） 双数计算
- ⑥+
- ×
  - ⑦AB
  - ⑧kA
  - ⑨A^k

二、 应用

（1） 方程组 ＝ ⑤⑦

（2） 向量 ＝ 方程组＋①

（3） 特征值类 ＝ 向量＋②④⑧

两步计算（一）

一、定义

两步计算 需要计算两次才能完成的计算，叫做两步计算。

特点 两步计算的计算式中，包含 2 个计算符号。

二、分类

类型	第一步	第二步	举例
1	单数	单数	$\lvert A^{-1}\rvert$
2	双数	双数	$A（B+C）$
3	单数	双数	$\lvert A\rvert\lvert B\rvert$
4	双数	单数	$\lvert AB\rvert$

三、公式（？+单数）

序号	第一步	第二步：
1	$\lvert A\rvert$	
2	A^{-1}	
3	A^{*}	
4	A^{T}	
5	$R(A)$	
6	$A+B$	
7	kA	
8	AB	
9	A^{k}	

（2010）设 A,B 为 3 阶方阵，且 $|A|=3$，$|B|=2$，$|A^{-1}+B|=2$，则 $|A+B^{-1}|=$ ______.

$|A^{-1}+B|$

$=|A^{-1}+EB|$

$=|A^{-1}+A^{-1}AB|$

$=|A^{-1}(E+AB)|$

$=|A^{-1}|\,|E+AB|$

$=|A|^{-1}\,|E+AB|$

$=2$

又 $\because |A|^{-1}=\frac{1}{3}$

$\therefore |E+AB|=6$

$|A+B^{-1}|$

$=|AE+B^{-1}|$

$=|ABB^{-1}+B^{-1}|$

$=|(AB+E)\cdot B^{-1}|$

$=|AB+E|\cdot|B^{-1}|$

$=6|B|^{-1}$

$=6\times\frac{1}{2}$

$=3$

$|A|=0$ ← （2015）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$，且 $A^3=0$.（1）求 a 的值；（2）若矩阵X满足 $X-XA^2-AX+AXA^2=E$，其中 E 为3阶单位矩阵，求X。

解：(1) ∵ $A^3=0$

∴ $|A|^3=0$

∴ $|A|=0$

∴ $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-a^2 & a & -1 \\ -a & 1 & a \end{vmatrix}$

$=a^3=0$

∴ $a=0$

(2) $X(E-A^2)-AX(E-A^2)$

$=(X-AX)(E-A^2)$

$=(E-A)X(E-A^2)=E$

$X=(E-A)^{-1}E(E-A^2)^{-1}$

$=(E-A)^{-1}(E-A^2)^{-1}$

$=[(E-A^2)(E-A)]^{-1}$

$=(E-A^2-A+A^3)^{-1}$

$=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$

$=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

（2013）设 $A=(a_{ij})$ 是3阶非零矩阵，$|A|$ 为 A 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$，则 $|A|=$__________.

降阶

A^*

分析：$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{bmatrix}=-A^T$

$|A^*|=|-A^T|$

$|A|^2=(-1)^3|A^T|$

$|A|^2=-|A|$

$|A|^2+|A|=0$

$|A|(|A|+1)=0$

$|A|=0$ 或 -1

当 $|A|=0$ 时

$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$

$=-a_{11}^2-a_{12}^2-a_{13}^2$

$=-(a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2)=0$

$\therefore a_{11}=a_{12}=a_{13}=0$

同理，可得

$a_{21}=a_{22}=a_{23}=0$

$a_{31}=a_{32}=a_{33}=0$

$\therefore A=0$，不合题意，舍去

$\therefore |A|=-1$

3 /

总框架

一、 计算

（1） 单数计算 $\begin{cases} \text{方阵：①}|A| \quad \text{②}A^{-1} \quad \text{③}A^{*} \\ \text{矩阵：④}A^{T} \quad \text{⑤}R(A) \end{cases}$

（2） 双数计算 $\begin{cases} \text{⑥}+ \\ \times \begin{cases} \text{⑦}AB \\ \text{⑧}kA \\ \text{⑨}A^{k} \end{cases} \end{cases}$

二、 应用

（1） 方程组 ＝ ⑤⑦

（2） 向量 ＝ 方程组＋①

（3） 特征值类 ＝ 向量＋②④⑧

两步计算（二）

一、相关定义

$\boxed{\text{独立向量}}$ 线性无关的向量，叫做独立向量。

$\boxed{\text{导出向量}}$ 由独立向量通过乘加的关系推导出的向量，叫做导出向量。

$\boxed{\text{矩阵中的向量}}$ 矩阵的所有行向量，不是独立向量，就是导出向量。

矩阵的所有列向量，不是独立向量，就是导出向量。

同一个矩阵，其行向量中，独立向量的个数，等于其列向量中，独立向量的个数。

二、回顾

$\boxed{\text{独立公式}}$ 矩阵的秩等于矩阵的行（或列）向量中，所有独立向量的个数，即

$R(A)=n_{\text{独}}$。

注： 矩阵的秩可以从向量的角度去理解。

三、基本公式

① $R(A_{m\times n})\le m$，且 $R(A_{m\times n})\le n$.

②若矩阵 A 和 B 等价，则 $R(A)=R(B)$.

③若 P 可逆，则 $R(PA)=R(A)$.

若 Q 可逆，则 $R(AQ)=R(A)$.

若 P、Q 可逆，则 $R(PAQ)=R(A)$.

四、其他公式（？+ 秩）

序号	第一步	第二步：
1	$\lvert A \rvert$	
2	A^{-1}	
3	A^*	
4	A^{T}	
5	$R(A)$	
6	$A+B$	
7	kA	
8	AB	
9	A^k	
拼接	A，B	

（2016）设矩阵$\begin{bmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$等价，则$a=$ ___2___.

∵ A与B等价

∴ $R(A)=R(B)$

$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

∴ $R(B)=2$

∴ $R(A)=2$

∴ $|A|=0$

∴ $\begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix}=0$

∴ $a=2$，或 -1

$a=-1$ 时

$A=\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

∴ $R(A)=1$，舍去

∴ $a=2$

1 / 3

(2010) 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，B 为 $n\times m$ 阶矩阵，E 为 m 单位矩阵，若 $AB=E$，则

A

(A) $r(A)=m, r(B)=m$

(B) $r(A)=m, r(B)=n$

(C) $r(A)=n, r(B)=m$

(D) $r(A)=n, r(B)=n$

解：$R(AB)\le R(A)$ 且 $R(AB)\le R(B)$

$\because AB=E$

$\therefore R(AB)=R(E)=m$

$\therefore m\le R(A)$ 且 $m\le R(B)$

$\therefore R(A)\ge m$ 且 $R(B)\ge m$

$\because R(A)\le m$ 且 $R(B)\le m$

$\therefore R(A)=m,\ R(B)=m$

2 / 3

设 A 为 n 阶矩阵，证明 $R(A+E)+R(A-E)\ge n$.

证：

$$(A+E)+(E-A)=2E \rightarrow \boxed{R(A+B)\le R(A)+R(B)}$$

$$R(2E)\le R(A+E)+R(E-A)$$

$\because$ $R(2E)=R(E)=n$

$\therefore$ $R(A+E)+R(E-A)\ge n$

又$\because$ $R(E-A)=R(A-E)$

$\therefore$ $R(A+E)+R(A-E)\ge n$

特殊方阵

1. E
2. E_{12}
3. 对称矩阵
4. 对角矩阵
5. 分块对角矩阵
6. 正交矩阵

简称：“2E，3 对，1 正”

审题之前，要先判断题目中有没有“特殊方阵”。

2E — E

一、定义

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}，\text{以3阶为例}$$

二、公式

序号	计算类型	
1	$\|A\|$	
2	A^{-1}	
3	A^{*}	
4	A^{T}	
5	$R(A)$	
6	$A+B$	
7	kA	
8	AB	
9	A^{k}	

2E — E_{12}

一、定义

$$E_{12}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}，\text{以3阶为例}$$

二、公式

序号	计算类型	
1	$\lvert A\rvert$	
2	A^{-1}	
3	A^{*}	
4	A^{T}	
5	$R(A)$	
6	$A+B$	
7	kA	
8	AB	
9	A^{k}	

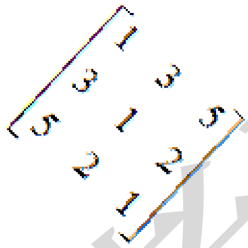
3 对—对称矩阵

$\boxed{\text{定义}}$ 以主对角线为轴，两边的元素呈对称分布，这样的矩阵叫做对称矩阵。如：

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{定义式}}$ $A^{\mathrm{T}} = A$

$\boxed{\text{观察方法}}$ 将主对角线竖起来，观察两边的元素是否左右对称。如：



$\boxed{\text{最简单的对称矩阵}}$ E 和 E_{12}

$$\mathrm{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 对—对角矩阵

一、定义

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}，以3阶为例$$

最简单的对角阵　E

二、公式

序号	计算类型	
1	$\|A\|$	
2	A^{-1}	
3	A^*	
4	A^{T}	
5	$R(A)$	
6	$A+B$	
7	kA	
8	AB	
9	A^k	

3 对—分块对角矩阵

一、定义

$$A_{m\times m} \quad B_{n\times n}$$

$$G=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}, H=\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}.$$

二、公式

序号	计算类型	
1	$\lvert A\rvert$	
2	A^{-1}	
3	A^*	
4	A^{T}	
5	$R(A)$	
6	$A+B$	
7	kA	
8	AB	
9	A^k	

1 正—正交矩阵

一、定义

定义式 1　$A^{\mathrm{T}}A = AA^{\mathrm{T}} = E$。

定义式 2　$A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$

最简单的正交矩阵　E 和 E_{12}

二、公式

序号	计算类型	
1	$\|A\|$	
2	A^{-1}	
3	A^{*}	
4	A^{T}	
5	$R(A)$	
6	$A+B$	
7	kA	
8	AB	
9	A^{k}	

（2013）设 $A=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵，$|A|$ 为 A 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$，则 $|A|=$ <u>-1</u>.

降

呈(A^*)

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{bmatrix}$$

$$=-A^T$$

$$|A^*|=|-A^T|$$

$$|A|^2=(-1)^3|A^T|$$

$$|A|^2=-|A|$$

$$|A|^2+|A|=0$$

$$|A|(|A|+1)=0$$

$|A|=0$ 或 -1

① $|A|=0$ 时.

设 $A=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$

$$A^*=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore A^* \neq -A^T$

$\therefore$ 舍去

② $|A|=-1$ 时

设 $A=E_{12}$

$$A^*=|A|\cdot A^{-1}=-E_{12}$$

$$A^T=E_{12}$$

$\therefore A^*=-A^T$ ✓

(2009) 设 A, B 均为 2 阶矩阵，A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵，若 $|A|=2, |B|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 （ B ）

$C =$

(A) $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$

$C^* = |C| \cdot C^{-1}$

$|C| = \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{2\times 2}|A||B| = 6$

$C^{-1} = \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$

$C^* = 6\begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} O & 6B^{-1} \\ 6A^{-1} & O \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} O & 6\cdot\frac{B^*}{|B|} \\ 6\cdot\frac{A^*}{|A|} & O \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{bmatrix}$

小结

$$\begin{cases}\text{两步计算}\\ \\ \text{特殊方阵}\end{cases}$$

一、两步计算

序号	第一步	第二步：
1	$\lvert A\rvert$	
2	A^{-1}	
3	A^*	
4	A^{T}	
5	$R(A)$	
6	$A+B$	
7	kA	
8	AB	
9	A^k	
拼接	A，B	

二、特殊方阵

2E，3 对，1 正

审题之前，要先判断题目中有没有“特殊方阵”。

序号	计算类型	
1	$\lvert A\rvert$	
2	A^{-1}	
3	A^{*}	
4	A^{T}	
5	$R(A)$	
6	$A+B$	
7	kA	
8	AB	
9	A^{k}	