总框架（公共部分）

一、 计算

（1） 微分 $\begin{cases} \text{一元} \\ \text{二元} \end{cases}$

（2） 积分 $\begin{cases} \text{一重} \\ \text{二重} \end{cases}$

二、 应用

（1） 几何应用

（2） 微分方程

三、 高中延伸类

（1） 代数：不等式证明 → 微分中值定理

（2） 几何：无

四、 其他（极限）

偏导

一、x 的偏导

x 的偏导 令 y 为常数，然后让二元函数 $z=f(x,y)$ 对 x 进行求导，叫做 z 对 x 的偏导，记作 z_x' 或者 f_x'。这种书写的形式称为偏导的导数形式。

几何意义 偏导 z_x' 的每一个函数值，表示当 y 为某一常数时，曲线 $z=f(x,y)$ 的对应点的方向（此点处切线的斜率）。

微商 偏导的微商形式：$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 或者 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$。

导数与微商 导数形式和微商形式是同一件事情的 2 种书写形式，所以 $z_x'=\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_x'=\dfrac{\partial f}{\partial x}$。

最重要的写法 4 种写法中，最重要的写法是 z_x'，其次是 f_x'。

二、y 的偏导

y 的偏导 令 x 为常数，然后让二元函数 $z=f(x,y)$ 对 y 进行求导，叫做 z 对 y 的偏导，记作 z_y' 或者 f_y'。这种书写的形式称为偏导的导数形式。

几何意义 偏导 z_y' 的每一个函数值，表示当 x 为某一常数时，曲线 $z=f(x,y)$ 的对应点的方向（此点处切线的斜率）。

微商 偏导的微商形式：$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 或者 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$。

导数与微商 导数形式和微商形式是同一件事情的 2 种书写形式，所以 $z_y'=\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_y'=\dfrac{\partial f}{\partial y}$。

最重要的写法 4 种写法中，最重要的写法是 z_y'，其次是 f_y'。

幸运数字 在考研的历程中，最幸运的数字是“2”。

三、偏导的四则运算

（1）$(u+v)'=u'+v'$

（2）$(u-v)'=u'-v'$

（3）$(uv)'=u'v+v'u$

（4）$(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

四、全微分

$dz=z'_x dx+z'_y dy$

五、重要结论

对于二元函数 $z=f(x,y)$ 来说，x 和 y 之间没有函数关系，二者互相独立，所以此时有 $y'_x=x'_y=0$。

（2016）已知函数 $f(x,y)=\dfrac{e^x}{x-y}=\dfrac{u}{v}$，则 （ D ）

（A） $f_x'-f_y'=0$

（B） $f_x'+f_y'=0$

（C） $f_x'-f_y'=f$

（D） $f_x'+f_y'=f$

$$f_x'=\frac{(e^x)_x'(x-y)-(x-y)_x'e^x}{(x-y)^2}=\frac{e^x(x-y)-1\cdot e^x}{(x-y)^2}$$

$$f_y'=\frac{(e^x)_y'(x-y)-(x-y)_y'e^x}{(x-y)^2}=\frac{0+1\cdot e^x}{(x-y)^2}$$

$$f_x'+f_y'=\frac{e^x(\cancel{x-y})-\cancel{e^x}+\cancel{e^x}}{(x-y)^{\cancel{2}}}=\frac{e^x}{x-y}=f$$

$f_u'(1,1)$ $f_v'(1,1)$

(2015)设函数 $f(u,v)$ 满足 $f(\underset{u}{x+y},\underset{v}{\frac{y}{x}})=x^2-y^2$，则 $\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 与 $\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 依次是 （ D ）

（A）$\frac{1}{2}$,0 (B)0，$\frac{1}{2}$ （C）-$\frac{1}{2}$,0 (D)0 ,-$\frac{1}{2}$

分析：令 $\begin{cases} u=x+y & ① \\ v=\frac{y}{x} & ② \end{cases}$

② ⇒ $y=xv$ 代入①

$u=x+xv$

$x=\frac{u}{1+v}$

$y=xv=\frac{uv}{1+v}$

$f(u,v)=x^2-y^2=\left(\frac{u}{1+v}\right)^2-\left(\frac{uv}{1+v}\right)^2$

$=\frac{u^2-u^2v^2}{(1+v)^2}=\frac{u^2\cancel{(1+v)}(1-v)}{(1+v)^{\cancel{2}}}$

$=\frac{u^2(1-v)}{1+v}$

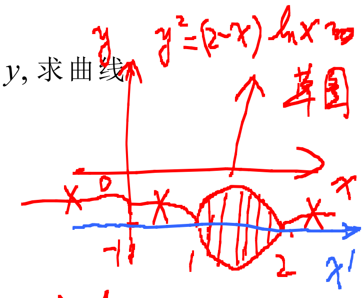
$f_u'=\frac{1-v}{1+v}\cdot 2u$ $f_u'(1,1)=0$

$f_v'=u^2\cdot\frac{-1\cdot(1+v)-1\cdot(1-v)}{(1+v)^2}=u^2\cdot\frac{-1\cancel{-v}-1\cancel{+v}}{(1+v)^2}$

$=\frac{-2u^2}{(1+v)^2}$

$f_v'(1,1)=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

（2014）已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$，且 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$，求曲线 $f(x,y)=0$ 所围成的图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成的旋转体的体积.



解：① $\because f'_y=2(y+1)$

$\therefore f=\int 2(y+1)dy$

$=y^2+2y+C(x)$

② $f(y,y)=y^2+2y+C(y)$

又 $\because f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$

$=y^2+2y+1-(2-y)\ln y$

$\therefore C(y)=1-(2-y)\ln y$

$\therefore f(x,y)=y^2+2y+1-(2-x)\ln x$

$=(y+1)^2-(2-x)\ln x$

③ 令 $f(x,y)=0$

得 $(y+1)^2-(2-x)\ln x=0$

$\therefore (y+1)^2=(2-x)\ln x$

设 $y=-1$ 为 x' 轴，在 $x'oy$ 中，

$(y-1+1)^2=y^2=(2-x)\ln x\geq 0$

令 $y=0$，得 $(2-x)\ln x=0$

$\therefore x=2$ 或 $x=1$

④ $V_{x'}=\int_1^2\pi f^2(x)dx=\pi\int_1^2 y^2dx$

$=\pi\int_1^2(2-x)\ln x\,dx$

$=\pi\int_1^2\ln x\,d\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)$

$=\pi\left[\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\ln x\Big|_1^2-\int_1^2\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\cdot\frac{1}{x}dx\right]$

$=\pi\left[(4-2)\ln 2-0-\int_1^2\left(2-\frac{x}{2}\right)dx\right]$

$=\pi\left[2\ln 2-\left(2x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2\right]$

$=\pi\left\{2\ln 2-\left[(4-1)-\left(2-\frac{1}{4}\right)\right]\right\}$

$=\pi\left[2\ln 2-\left(3-2+\frac{1}{4}\right)\right]$

$=\pi\left(2\ln 2-\frac{5}{4}\right)$

求下列函数的全微分：

（1） $z=xy+\dfrac{x}{y}$

解：(1) $dz=z_x'dx+z_y'dy$

$z_x'=(xy)_x'+\left(\dfrac{x}{y}\right)_x'$

$=y+\dfrac{1}{y}$

$z_y'=(xy)_y'+\left(\dfrac{x}{y}\right)_y'$

$=x+x\left(-\dfrac{1}{y^2}\right)$

$=x-\dfrac{x}{y^2}$

$\therefore dz=\left(y+\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(x-\dfrac{x}{y^2}\right)dy$

（2） $z=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $=\dfrac{u}{v}$

(2) $z_x'=\dfrac{y_x'\sqrt{x^2+y^2}-(\sqrt{x^2+y^2})_x'y}{x^2+y^2}$

$=-\dfrac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot y}{x^2+y^2}$

$=-\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$z_y'=\dfrac{y_y'\sqrt{x^2+y^2}-(\sqrt{x^2+y^2})_y'y}{x^2+y^2}$

$=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{2y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$

$=\dfrac{(x^2+y^2)-y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$=\dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\therefore dz=-\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dx+\dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dy$

dz $\quad z_x'$ $\quad z_y'$

（2017）设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，且 $df(x,y)=ye^y dx+x(1+y)e^y dy$，

过点 $f(0,0)=0$，则 $f(x,y)=$ $\underline{xye^y}$

③

分析：① $z_x' = ye^y \Rightarrow z=\int ye^y dx = xye^y + C(y)$

② $z_y' = x(1+y)\cdot e^y \Rightarrow z_y' = (xye^y)_y' + C'(y) = x(e^y+ye^y)+C'(y)$

$= xe^y(1+y)+C'(y)$

$\therefore C'(y)=0 \quad \therefore C(y)=C$

$\therefore z=xye^y+C$

③ $\because f(0,0)=0 \quad \therefore C=0$

$\therefore z=\underline{xye^y}$

复合函数的偏导

一、二元函数求偏导的基本题型

（1）复合函数

（2）隐函数

简称“二元，复隐”

二、复合函数的基本概念

复合函数 若 $y=f(u)$，而 $u=\varphi(x)$，即函数中又包含了函数，则此函数称为复合函数。

父函数 其中，$y=f(u)$，称为父函数。

子函数 $u=\varphi(x)$，称为子函数。

三、复合函数的种类

父函数	子函数	具体形式	类型
一元	一元	$y=f(u)$ $u=\varphi(x)$	1-1 型
一元	二元	$z=f(u)$ $u=\varphi(x,y)$	1-2 型
二元	一元	$z=f(u,v)$ $u=\varphi(x)$ $v=\psi(x)$	2-1 型
二元	二元	$z=f(u,v)$ $u=\varphi(x,y)$ $v=\psi(x,y)$	2-2 型

四、公路图

$\boxed{\text{导数}}$ 研究曲线 $y=f(x)$ 上每一点的方向的函数，叫做它的导函数，简称导数，记作 y'，也可以具体地写成 y'_x。

1-1 型

$$y-u-x$$

$$y'_x=y'_u u'_x$$

1-2 型

$$z-u\left\langle\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$$

$$z'_x=z'_u u'_x$$

$$z'_y=z'_u u'_y$$

2-1 型

$$z\left\langle\begin{matrix}u-x\\v-x\end{matrix}\right.$$

$$z'_x=z'_u u'_x+z'_v v'_x$$

2-2 型

$$z\left\langle\begin{matrix}u\left\langle\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.\\v\left\langle\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.\end{matrix}\right.$$

$$z'_x=z'_u u'_x+z'_v v'_x$$

$$z'_y=z'_u u'_y+z'_v v'_y$$

五、复合函数求偏导的一般步骤

（1）设中间变量u、v、w

（2）画公路图

（3）写出偏导

简称“复 u 公路”

六、课本上的公式

1-2 型

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

2-1 型

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

2-2 型

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

1-2 型

$$z'_x=z'_u u'_x$$

$$z'_y=z'_u u'_y$$

2-1 型

$$z'_x=z'_u u'_x+z'_v v'_x$$

2-2 型

$$z'_x=z'_u u'_x+z'_v v'_x$$

$$z'_y=z'_u u'_y+z'_v v'_y$$

七、二阶偏导

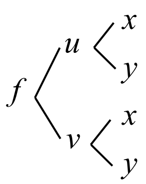
（1）$z''_{uu}=(z'_u)'_u$　　$z''_{uv}=(z'_u)'_v$　　$z''_{vu}=(z'_v)'_u$　　$z''_{vv}=(z'_v)'_v$

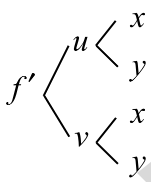
（2）$f''_{uu}=(f'_u)'_u$　　$f''_{uv}=(f'_u)'_v$　　$f''_{vu}=(f'_v)'_u$　　$f''_{vv}=(f'_v)'_v$

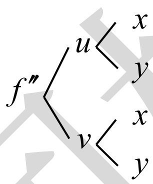
基本原则：直接去括号（　　）。

一般来说：$\boxed{f''_{uv}=f''_{vu}}$

八、偏导的公路图







结论：对一个函数进行求导，其导函数的自变量的种类不会发生改变。

（2019）设函数 $f(u)$ 可导，$z=f(\sin y-\sin x)+xy$，则 $\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\cos y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=$ $\frac{y}{\cos x}+\frac{x}{\cos y}$

f' 已知　复合　z_x'　z_y'

分析：

① 令 $\sin y-\sin x=u$，则 $z=f(u)+xy$

② $f-u<\begin{matrix}x\\y\end{matrix}$

③ $z_x'=f_x'+(xy)_x'=f_u'u_x'+y=f_u'(-\cos x)+y$

$=y-f_u'\cos x$

$z_y'=f_y'+(xy)_y'=f_u'u_y'+x=f_u'\cdot\cos y+x$

$\sim=\frac{1}{\cos x}z_x'+\frac{1}{\cos y}z_y'=\left(\frac{y}{\cos x}-\cancel{f_u'}\right)+\left(\cancel{f_u'}+\frac{x}{\cos y}\right)$

$=\frac{y}{\cos x}+\frac{x}{\cos y}$

f', f'' 已知　复合(2-1型)　① $y'_x(0)$　② $y''_{xx}(0)$

（2017）设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，$y=f(e^x,\cos x)$，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$，$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$。

解：1° 令 $e^x=u$，$\cos x=v$，则 $y=f(u,v)$

2° $f=y \begin{cases} u - x \\ v - x \end{cases}$

★ $\begin{pmatrix} f'_u \\ f'' \end{pmatrix}$

3° ① $y'_x = y'_u u'_x + y'_v \cdot v'_x = f'_u e^x + f'_v(-\sin x)$

令 $x=0$，则 $u=1, v=1$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = y'_x(0) = f'_u = f'_u(u,v) = f'_u(1,1)$

② $y''_{xx} = (y'_x)'_x = [f'_u e^x]'_x - [f'_v \sin x]'_x$

$= (f'_u)'_x e^x + e^x f'_u - [(f'_v)'_x \sin x + \cos x f'_v]$

$= [(f'_u)'_u \cdot u_x + (f'_u)'_v \cdot v_x] e^x + e^x f'_u$

$- [(f'_v)'_u \cdot u_x + (f'_v)'_v \cdot v_x] \sin x - \cos x f'_v$

$= [f''_{uu} e^x + f''_{uv}(-\sin x)] e^x + e^x f'_u$

$- [f''_{vu} e^x + f''_{vv}(-\sin x)] \sin x - \cos x f'_v$

$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = y''_{xx}(0) = f''_{uu} + f'_u - f'_v = f''_{uu}(1,1) + f'_u(1,1) - f'_v(1,1)$

f', f'' 已知　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　复合(2-2型)

（2019）$f(u,v)$具有 2 阶连续偏导数，且 $g(x,y)=xy-f(x+y,x-y)$，

求$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$。

解：① 令 $x+y=u$，$x-y=v$，则 $g(x,y)=xy-f(u,v)$

② $f<\begin{matrix} u<\begin{matrix}x\\y\end{matrix} \\ v<\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\end{matrix}$　$\begin{pmatrix} f'_u \\ f'' \end{pmatrix}$

③ $g'_x=(xy)'_x-f'_x=y-(f'_u u'_x+f'_v v'_x)=y-f'_u-f'_v$

$g'_y=(xy)'_y-f'_y=x-(f'_u u'_y+f'_v v'_y)=x-f'_u+f'_v$

1° $g''_{xx}=(g'_x)'_x=y'_x-(f'_u)'_x-(f'_v)'_x=0-(f''_{uu}u'_x+f''_{uv}v'_x)$
$-(f''_{vu}u'_x+f''_{vv}v'_x)=-f''_{uu}-f''_{uv}-f''_{vu}-f''_{vv}$
$=-f''_{uu}-2f''_{uv}-f''_{vv}$

2° $g''_{xy}=(g'_x)'_y=y'_y-(f'_u)'_y-(f'_v)'_y=1-(f''_{uu}u'_y+f''_{uv}v'_y)$
$-(f''_{vu}u'_y+f''_{vv}v'_y)=1-f''_{uu}+\cancel{f''_{uv}}-\cancel{f''_{vu}}+f''_{vv}$
$=1-f''_{uu}+f''_{vv}$

3° $g''_{yy}=(g'_y)'_y=x'_y-(f'_u)'_y+(f'_v)'_y=0-(f''_{uu}u'_y+f''_{uv}v'_y)$
$+(f_{vu}u_y+f_{vv}v_y)=-f''_{uu}+f''_{uv}+f''_{vu}-f''_{vv}$
$=-f''_{uu}+2f''_{uv}-f''_{vv}$

$\therefore \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=g''_{xx}+g''_{xy}+g''_{yy}=-f''_{uu}-\cancel{2f''_{uv}}-\cancel{f''_{vv}}+1-f''_{uu}+f''_{vv}$
$-f''_{uu}+\cancel{2f''_{uv}}-f''_{vv}=-3f''_{uu}-f''_{vv}+1$

$F''_{xx}(0,2)$

（2011）设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}\,dt$，则 $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=$ 4 ______.

$\left(\frac{4}{v}\right)$

$$F'_x=(\quad)'_x=\frac{\sin(xy)}{1+(xy)^2}\cdot(xy)'_x=y\cdot\frac{\sin xy}{1+(xy)^2}$$

$$F''_{xx}=(F'_x)'_x=y\cdot\frac{(\sin xy)'_x\left[1+(xy)^2\right]-\left[1+(xy)^2\right]'_x\sin xy}{\left[1+(xy)^2\right]^2}$$

$$F''_{xx}(0,2)=2\cdot\left.\frac{(\sin xy)'_x-0}{1}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}$$

$$=2y\cos xy\Big|_{\substack{x=0\\y=2}}=2\cdot2\cos 0=4$$

《课后练习》

（2019）设函数 $f(u)$ 可导，$z=yf(\frac{y^2}{x})$，则 $2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$________.

$\left[答案：yf(\frac{y^2}{x})\right]$

（2013）设函数 $z=\frac{y}{x}f(xy)$，其中函数 f 可微，则 $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$ （ ）

（A）$2yf'(xy)$ （B）$-2yf'(xy)$ （C）$\frac{2}{x}f(xy)$ （D）$-\frac{2}{x}f(xy)$

$[答案：A]$

（2012）设 $z=f\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)$，其中函数 $f(x)$ 可微，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=$________.

$[答案：O]$

（2009）设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f(x,xy)$，，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ________.

$[答案：xf''_{uv}+f'_v+xyf''_{vv}]$

（2009）设 $z=f(x+y,x-y,xy)$，其中 f 具有 2 阶连续偏导数，求 dz 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

$$\left[\begin{array}{l}答案：dz=(f'_u+f'_v+yf'_w)dx+(f'_u-f'_v+xf'_w)dy\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}=f'_w+f''_{uu}-f''_{vv}+xyf''_{ww}+(x+y)f''_{uw}+(x-y)f''_{vw}\end{array}\right]$$

复合函数的偏导 2

一、一阶偏导符号的简化

$y'_x \Rightarrow y_x$

$z'_x \Rightarrow z_x$

$f'_y \Rightarrow f_y$

二、二阶偏导符号的简化

$z''_{uu} \Rightarrow z_{uu}$

$f''_{uv} \Rightarrow f_{uv}$

三、总原则

辫子没了

四、选择"导数形式"的理由

（1） 简便：$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$(7个字母)$\Rightarrow z_{xy}$(3个字母)

（2） 统一：$[f(\varphi(x))]' = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$【一元复合函数的求导公式】

五、常见函数的偏导

	函数表达式	z_x	z_y
①加法函数	$z = ax + by$	$z_x = a$	$z_y = b$
②乘法函数	$z = xy$	$z_x = y$	$z_y = x$

（2009）设 $z=(x+e^y)^x$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=$ $\underline{1+2\ln 2}$.

$z_x(1,0)$

$(a^x)'=a^x\ln a$

分析：方法一：

① 设 $u=x+e^y$，$v=x$

则 $z=u^v$

② $z<\begin{matrix} u<\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \\ v - x \end{matrix}$

③ $z_x=z_u\cdot u_x+z_v\cdot v_x$

$=v\cdot u^{v-1}\cdot 1+u^v\ln u\cdot 1$

④ 将 $x=1$，$y=0$ 代入

得 $u=1+1=2$，$v=1$

$z_x(1,0)=1\cdot 2^0\cdot 1+2^1\ln 2\cdot 1=1+2\ln 2$

方法二：

$z=e^{x\ln(x+e^y)}$

⋮

（2011）设函数 $z=\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$，则 $dz\big|_{(1,1)}=$______.

复合

2-2

分析：方法一：$dz=z_x dx+z_y dy$

① 设 $u=\left(1+\frac{x}{y}\right)$，$v=\frac{x}{y}$

则 $z=u^v$

② z — u — x, y；v — x, y

$z_x=z_u\cdot u_x+z_v\cdot v_x$

$=v\cdot u^{v-1}\cdot\frac{1}{y}+u^v\ln u\cdot\frac{1}{y}$

$z_y=z_u\cdot u_y+z_v\cdot v_y$

$=v\cdot u^{v-1}\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)+u^v\ln u\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)$

③ 将 $x=1, y=1$ 代入.

得 $u=1+1=2$

$v=1$

$\therefore z_x(1,1)=1\cdot 2^{1-1}\cdot 1+2^1\ln 2\cdot 1$

$=1+2\ln 2$

$z_y(1,1)=1\cdot 2^0\cdot 1\cdot(-1)+2^1\ln 2\cdot 1\cdot(-1)$

$=-1-2\ln 2$

$\therefore dz\big|_{(1,1)}=(1+2\ln 2)dx+(-1-2\ln 2)dy$

方法二：$z=e^{\frac{x}{y}\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)}\cdots$

（2019）已知函数 $u(x,y)$ 满足 $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0$，求 a,b 的值，使得在变换 $u(x,y)=v(x,y)e^{ax+by}$ 下，上述等式可化为 $v(x,y)$ 不含一阶偏导数的等式。

u_{xx} u_{yy} u_x u_y

$=w$

2-2

解：① 令 $w=e^{ax+by}$，则 $u=vw$

② $u \to v \to x, y$；$u \to w \to x, y$

$$\boxed{\begin{aligned} W_x &= e^{ax+by}\cdot a = aw \\ W_y &= e^{ax+by}\cdot b = bw \end{aligned}}$$

③ $u_x = u_v\cdot v_x + u_w\cdot w_x$
$= w v_x + v\cdot aw$

$u_y = u_v\cdot v_y + u_w\cdot w_y$
$= w\cdot v_y + v\cdot bw$

$u_{xx} = (w v_x)'_x + (v\cdot aw)'_x$
$= w_x v_x + v_{xx} w + a(v_x w + w_x v)$

$u_{yy} = (u_y)'_y = (w\cdot v_y)'_y + (v\, bw)'_y$
$= w_y v_y + v_{yy} w + b(v_y w + w_y v)$

④ ∵ $2u_{xx}-2u_{yy}+3u_x+3u_y=0$

∴ $2(w_x v_x + v_{xx} w) + 2a(v_x w + w_x v) - 2(w_y v_y + v_{yy} w) - 2b(v_y w + w_y v) + 3(w v_x + v\cdot aw) + 3(w v_y + v bw) = 0$

∵ 以上等式不含v的一阶偏导

∴ $\begin{cases} 2w_x + 2aw + 3w = 0 \\ -2w_y - 2bw + 3w = 0 \end{cases}$

∴ $\begin{cases} 2aw + 2aw + 3w = 0 \\ -2bw - 2bw + 3w = 0 \end{cases}$

∴ $\begin{cases} w(4a+3) = 0 \\ w(-4b+3) = 0 \end{cases}$

∵ $w = e^{ax+by} > 0$

∴ $\begin{cases} 4a+3 = 0 \\ -4b+3 = 0 \end{cases}$

∴ $\begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = \frac{3}{4} \end{cases}$

（2010）

设函数$u=f(x,y)$具有二阶连续偏导数，且满足等式$4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. 确定$a,b$的值，使等式在变换$\xi=x+ay,\eta=x+by$下简化$\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$

解：

① $u \to (u_\xi, u_\eta)$，$\xi \to x, y$；$\eta \to x, y$

$\xi_x=1$，$\eta_x=1$；$\xi_y=a$，$\eta_y=b$

$u_{\xi\eta}=0$

② $u_x=u_\xi\cdot\xi_x+u_\eta\cdot\eta_x=u_\xi+u_\eta$

$u_y=u_\xi\cdot\xi_y+u_\eta\cdot\eta_y=au_\xi+bu_\eta$

$u_{xx}=(u_x)'_x=(u_\xi)'_x+(u_\eta)'_x=(u_{\xi\xi}\cdot\xi_x+u_{\xi\eta}\cdot\eta_x)+(u_{\eta\xi}\cdot\xi_x+u_{\eta\eta}\cdot\eta_x)$

$=u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+2u_{\xi\eta}$

$u_{yy}=(u_y)'_y=a(u_\xi)'_y+b(u_\eta)'_y=a(u_{\xi\xi}\xi_y+u_{\xi\eta}\cdot\eta_y)+b(u_{\eta\xi}\xi_y+u_{\eta\eta}\eta_y)$

$=a(au_{\xi\xi}+bu_{\xi\eta})+b(au_{\eta\xi}+bu_{\eta\eta})=a^2u_{\xi\xi}+b^2u_{\eta\eta}+2abu_{\xi\eta}$

$u_{xy}=(u_x)'_y=(u_\xi)'_y+(u_\eta)'_y=au_{\xi\xi}+bu_{\eta\eta}+(a+b)u_{\xi\eta}$

③ ∵ $4u_{xx}+12u_{xy}+5u_{yy}=0$

∴ $4(u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+2u_{\xi\eta})+12[au_{\xi\xi}+bu_{\eta\eta}+(a+b)u_{\xi\eta}]+5(a^2u_{\xi\xi}+b^2u_{\eta\eta}+2abu_{\xi\eta})=0$

∵ 上式可化为 $u_{\xi\eta}=0$

∴ $\begin{cases}4+12a+5a^2=0 \ (1)\\ 4+12b+5b^2=0 \ (2)\\ 8+12(a+b)+10ab\neq0 \ (3)\end{cases}$

解方程 $5x^2+12x+4=0$

$(x+2)(5x+2)=0$

$x=-2$ 或 $x=-\frac{2}{5}$

∴ $a=-2$ 或 $-\frac{2}{5}$

$b=-2$ 或 $-\frac{2}{5}$

1° 当 $a=-2, b=-2$ 时,

$A=\underbrace{8+12(a+b)+10ab}=8+12\times(-4)+10\times4=8-48+40=0$ (舍)

2° 当 $a=-\frac{2}{5}, b=-\frac{2}{5}$ 时,

$A=8+12\times(-\frac{4}{5})+\cancel{10}^{2}\times\frac{4}{\cancel{25}_{5}}=8-\frac{48}{5}+\frac{8}{5}=8-\frac{40}{5}=0$ (舍)

3° 当 $a,b=-2$ 和 $-\frac{2}{5}$ 时

$A=8+12\times(-2-\frac{2}{5})+10\times(2\times\frac{2}{5})$

$=8+12\times(-\frac{12}{5})+\cancel{10}^{2}\times\frac{4}{\cancel{5}}$

$=8-\frac{144}{5}+8\neq0$, 符合

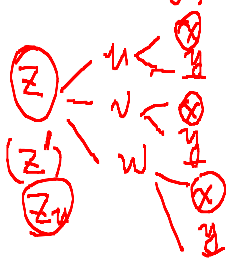
$\therefore$ $a=-2, b=-\frac{2}{5}$ 或 $a=-\frac{2}{5}, b=-2$.

父函数 → 复合函数 → f', f''

（2009）设 $z=f(x+y,x-y,xy)$，其中 f 具有2阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$. z_{xy}

解：① 设 $u=x+y$, $v=x-y$, $w=xy$, 则 $z=f(u,v,w)$

②



③ $z_x = z_u\cdot u_x + z_v\cdot v_x + z_w\cdot w_x = z_u\cdot 1 + z_v\cdot 1 + z_w\cdot y = z_u + z_v + z_w y$

$z_{xy} = (z_x)'_y = (z_u)'_y + (z_v)'_y + (z_w y)'_y = z_{uu}u_y + z_{uv}v_y + z_{uw}\cdot w_y$

$+ z_{vu}u_y + z_{vv}v_y + z_{vw}w_y + (z_w)'_y y + z_w$

$= z_{uu}\cdot 1 + \cancel{z_{uv}\cdot(-1)} + z_{uw}\cdot x + \cancel{z_{vu}\cdot 1} + z_{vv}\cdot(-1) + z_{vw}\cdot x$

$+ [z_{wu}\cdot 1 + z_{wv}\cdot(-1) + z_{ww}\cdot x]y + z_w$

$= z_{uu} + z_{uw}(x+y) - z_{vv} + z_{vw}(x-y) + xy\, z_{ww} + z_w$

$= f_{uu} + f_{uw}(x+y) - f_{vv} + f_{vw}(x-y) + xy\, f_{ww} + f_w$

隐函数的偏导

一、二元函数求偏导的基本题型

（1）复合函数

（2）隐函数

简称“二元，复隐”

二、显函数与隐函数

（1）显函数

显函数 很明显的函数，形如 $z=z(x,y)$ 的函数，称为显函数。

举例 $z=xy+\frac{x}{y}$

（2）隐函数

隐函数 隐藏起来的函数，称为隐函数。

举例 函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^z+xyz+x+\cos x=2$ 确定。

特点 1 一般来说，等式中 z 出现 2 次或 2 次以上。

特点 2 含 z 的项，无法合并同类项，因此也无法方便地推出其对应的显函数。

三、隐函数求偏导的一般步骤

（1）计算出所给点的完整坐标

（2）两边求导

简称“隐点两”

四、结论

当出现幂指函数时，可以先两边取对数，再两边求导。

（2015）若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{z}+xyz+x+\cos x=2$ 确定，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$ $-dx$.

隐函数

分析：
$dz=z_x dx+z_y dy$

① 点

$x=0,y=1$ 代入方程

$e^z+0+0+1=2$，$e^z=1$，$z=0$，∴ $(0,1,0)$

② 函

1° 两边对 x 求偏导，得

$e^z\cdot z_x+y\cdot(z+z_x\cdot x)+1-\sin x=0$

将 $(0,1,0)$ 代入，得

$e^0\cdot z_x+1\cdot(0+0)+1-0=0$

$z_x+1=0$，$z_x=-1$

2° 两边对 y 求偏导，得

$e^z\cdot z_y+x(z+z_y\cdot y)=0$

将 $(0,1,0)$ 代入，得

$e^0\cdot z_y+0=0$

$z_y=0$

③ $dz=z_x dx+z_y dy=-dx+0\cdot dy$

$=-dx$

幂指函数

（2013）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(z+y)^x=xy$ 确定，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$ ________。

$z_x(1,2)$

分析： ① 点

将 $x=1$, $y=2$ 代入方程，得

$(z+2)^1=2$

$z+2=2$, $z=0$, $\therefore (1,2,0)$

② 偏

方程两边取对数，得

$x\ln(z+y)=\ln x+\ln y$

两边对 x 求偏导，得

$\ln(z+y)+\frac{z_x}{z+y}\cdot x=\frac{1}{x}$

将 $(1,2,0)$ 代入，得

$\ln(0+2)+\frac{z_x}{0+2}\cdot 1=1$

$\ln 2+\frac{z_x}{2}=1$

$\frac{z_x}{2}=1-\ln 2$

$z_x=2-2\ln 2$

（2016）设函数 $f(u,v)$ 可微，$z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定，则

$dz(0,1)=$ $-dx+2dy$

u v

分析：$dz=z_xdx+z_ydy$

① 点

$x=0,y=1$ 代入方程，得

$z-1=0$

$z=1$，$\therefore(0,1,1)$

② 两

1° 方程两边对 x 求偏导，得

$1\cdot z+z_x\cdot(x+1)-0=2xf(u,v)+f_u'\cdot u_x'\cdot x^2$

将 $(0,1,1)$ 代入，得

$1+z_x=0$

$z_x=-1$

2° 方程两边对 y 求偏导，得

$(x+1)z_y-2y=x^2[f_u'\cdot u_y'+f_v'\cdot v_y']$

将 $(0,1,1)$ 代入，得

$z_y-2=0$

$z_y=2$

③ $dz=z_xdx+z_ydy$

$=-dx+2dy$

（2010）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\underset{u}{\frac{y}{x}},\underset{v}{\frac{z}{x}}\right)=0$ 确定,其中 F 为可微函数,且 $F_2'\neq 0$,则

$x\overset{z_x}{\frac{\partial z}{\partial x}}+y\overset{z_y}{\frac{\partial z}{\partial y}}=$ （ B ）

(A) x　　(B) z

(C) $-x$　　(D) $-z$

分析：

① ~~点~~

② 两

y为常数

1° 方程两边对x求偏导,得

$F_u\cdot u_x+F_v\cdot v_x=0$

$F_u\cdot y\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+F_v\cdot\frac{z_x x-z}{x^2}=0$

$F_v(xz_x-z)=yF_u$

$z_x=\frac{y\frac{F_u}{F_v}+z}{x}$

2° 方程两边对y求偏导,得

$F_u\cdot u_y+F_v\cdot v_y=0$

$F_u\cdot\cancel{\frac{1}{x}}\cdot 1+F_v\cdot\cancel{\frac{1}{x}}\cdot z_y=0$

$F_u+F_v\cdot z_y=0$

$z_y=-\frac{F_u}{F_v}$

③ 原式 $=\cancel{y\frac{F_u}{F_v}}+z-\cancel{y\frac{F_u}{F_v}}$

$=z$

《课后练习》

（2018）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\ln z+e^{z-1}=xy$ 确定，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(2,\frac{1}{2}\right)}=$ ____________

【答案】 $\dfrac{1}{4}$

（2014）设 $z=z(x，y)$ 是由方程 $e^{2yz}+x+y^2+z=\dfrac{7}{4}$ 确定的函数，则 $\left.dz\right|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=$ ________.

【答案】 $-\dfrac{1}{2}dx-\dfrac{1}{2}dy$