总框架（公共部分）

一、 计算

（1） 微分
- 一元
- 二元

（2） 积分
- 一重
- 二重

二、 应用

（1） 几何应用

（2） 微分方程

三、 高中延伸类

（1） 代数：不等式证明 → 微分中值定理

（2） 几何：无

四、 其他（极限）

导数与微分

一、基本概念

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
方向（k）	3	-5	7	9	-6	3	-1

导数　研究曲线 $y=f(x)$ 上每一点的方向的函数，叫做它的导函数，简称导数，记作 y' 或者 $f'(x)$。对应地，我们把函数 $y=f(x)$ 称为原函数。

几何意义　导数 $f'(x)$ 的每一个函数值，表示曲线 $y=f(x)$ 的对应点的方向（此点处切线的斜率）。

微分　导数的微分形式为：$\dfrac{dy}{dx}$

导数与微分　导数和微分是同一件事情的 2 种书写形式，所以 $y'=\dfrac{dy}{dx}$。

二、基本函数与基本导数表

基本函数　幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数，这 5 种函数叫做基本函数。

基本函数的导数　① $(C)'=0$　② $(x)'=1$

基本导数表　由所有基本函数的导数组成的一张表，叫做基本导数表。

三、复合运算与复合函数

复合运算　将一个基本函数 $f(x)$ 的自变量 x 用另一个基本函数来替代，这种操作方式叫做复合运算，如：$x \to \varphi(x)$， $f(x) \to f(\varphi(x))$。

复合函数　经过复合运算得到的函数，叫做复合函数，如上面的 $f(\varphi(x))$。

母函数　其中外面的函数 $f(x)$ 称为母函数。

子函数　里面的函数 $\varphi(x)$ 称为子函数。

四、组合函数

组合函数　2 个或者 2 个以上的基本函数，通过＋－×÷和复合等 5 种计算组合而成的函数，叫做组合函数。

组合函数的类型　①加法型函数　②减法型函数　③乘法型函数　④除法型函数　⑤复合函数。

五、“组合函数”的求导公式

（1）$(u+v)'=u'+v'$

（2）$(u-v)'=u'-v'$

（3）$(uv)'=u'v+v'u$

（4）$(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

（5）$[f(\varphi(x))]'=f'(\varphi(x))\varphi'(x)$

重要结论　所有的组合函数都很容易求导。

基本导数表

函数类型	个数	细目
幂函数	4	（1）$(C)'=0$ （3）$(\frac{1}{x})'=-\frac{1}{x^2}$ （2）$(x^n)'=nx^{n-1}$ （4）$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
指数函数	2	（1）$(e^x)'=e^x$ （2）$(a^x)'=a^x\ln a$
对数函数	2	（1）$(\ln x)'=\frac{1}{x}$ （2）$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$
三角函数	6	（1）$(\sin x)'=\cos x$ （3）$(\tan x)'=\sec^2 x$ （2）$(\cos x)'=-\sin x$ （4）$(\cot x)'=-\csc^2 x$ （5）$(\sec x)'=\sec x\tan x$ （6）$(\csc x)'=-\csc x\cot x$
反三角函数	4	（1）$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ （3）$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$ （2）$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ （4）$(arc\cot x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

反复参隐

一、求导的基本题型

（1）反函数

（2）复合函数

（3）参数方程

（4）隐函数

简称“求导，反复参隐”

二、求导公式

	①反函数	②复合函数	③参数方程	④隐函数
求导公式	$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$	$[f(\varphi(x))]'$ $=f'(\varphi(x))\varphi'(x)$	$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$	两边求导

重要结论 公式为导数形式的，解题时也要采用导数形式；

公式为微分形式的，解题时也要采用微分形式。

$\frac{dy}{dx}$

（2013） 设函数 $f'(x)=\sqrt{1-e^x}$，$f(-1)=0$，则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\frac{dx}{dy}\Big|_{y=0}=$ ________

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{\sqrt{1-e^x}}$$

$$\frac{dx}{dy}\Big|_{y=0}=\frac{dx}{dy}\Big|_{x=-1}=\frac{1}{\sqrt{1-e^x}}\Big|_{x=-1}=\frac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}$$

当 $y=0$ 时，$x=-1$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$

设函数 $x=ye^{y}$，则它的反函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数 $y'(0)=$ ____1____.

$\frac{dx}{dy}=x'_y=e^y+e^y\cdot y$ ， $x=0$ 时，$y=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{e^y+ye^y}$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=0}=\left.\frac{1}{e^y+ye^y}\right|_{y=0}=\frac{1}{e^0+0\cdot e^0}=1$

y'

$y=\log_a \sin x$，求 $\frac{dy}{dx}$.

$(\ln x)' = \frac{1}{x\ln e}$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$

解：$\frac{dy}{dx} = y' = (\log_a \sin x)' = \frac{1}{\ln a \sin x}\cdot(\sin x)'$

$= \frac{\cos x}{\ln a \sin x} = \frac{\cot x}{\ln a}$

（2012）设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\geq 1\\ 2x-1, & x<1\end{cases}$，$y=f(f(x))$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=e}=$________

复合 $y'(e)$

$e\approx 2.7$

解：

$$y'=f'(f(x))\cdot f'(x)$$

$$y'(e)=f'(f(e))\cdot f'(e)=f'(\ln\sqrt{e})\cdot f'(e)=f'\left(\tfrac{1}{2}\right)f'(e)$$

$$=2\cdot\frac{1}{2e}=\frac{1}{e}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2x}, & x>1\\ 2, & x<1\end{cases}$$

（2017） 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t+e^t\\ y=\sin t\end{cases}$ 确定，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=$______

解：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\cos t}{1+e^t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{\cos t}{1+e^t}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{\cos t}{1+e^t}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{-\sin t(1+e^t)-e^t\cos t}{(1+e^t)^2}\cdot\frac{1}{1+e^t}=\frac{-\sin t(1+e^t)-e^t\cos t}{(1+e^t)^3}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\frac{-e^0\cos 0}{(1+e^0)^3}=\frac{-1}{8}=-\frac{1}{8}$$

（2015）设$\begin{cases} x=\arctan t \\ y=3t+t^3 \end{cases}$，则$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=$______

解：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3+3t^2}{\frac{1}{1+t^2}}=3(1+t^2)\cdot(1+t^2)=3(1+t^2)^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d(3(1+t^2)^2)}{dx}=\frac{d(3(1+t^2)^2)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

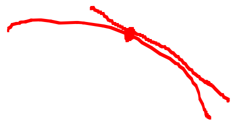
$$=3\times2(1+t^2)\cdot2t\cdot(1+t^2)$$

$$=12t(1+t^2)^2$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=12(1+1)^2=12\times4=48$$

（2019）曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ 在 $t = \dfrac{3}{2}\pi$ 对应点处切线（y'）在 y 轴上的截距为______

解：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{\sin t}{1-\cos t}$



$k=-1$

$k = \dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{3}{2}\pi} = \dfrac{\sin\frac{3}{2}\pi}{1-\cos\frac{3}{2}\pi} = \dfrac{-1}{1-0} = -1$

$t=\frac{3}{2}\pi$ 对应点：$\left(\frac{3}{2}\pi+1,\ 1\right)$

∴切线方程：$y-1 = -\left[x-\left(\frac{3}{2}\pi+1\right)\right]$

令 $x=0$，得 $y-1 = \frac{3}{2}\pi+1$

$y = \frac{3}{2}\pi+2$

(2013)曲线上$\begin{cases} x=\arctan t \\ y=\ln\sqrt{1+t^2} \end{cases}$对应于 $t=1$ 处的法线方程为______________.

y'

$k_1\cdot k_2=-1$

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+t^2}}\cdot 2t}{\frac{1}{1+t^2}}=\dfrac{\frac{2t}{2(1+t)}}{\frac{1}{1+t^2}}$

$=\dfrac{2t(1+t^2)}{2(1+t)}$

$k_1=\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1}=\dfrac{2(1+1)}{2(1+1)}=1$

$\because k_1\cdot k_2=-1$

$\therefore k_2=-1$，$t=1$ 对应点 $(\frac{\pi}{4},\ln\sqrt{2})$

法线方程：$y-\ln\sqrt{2}=-(x-\frac{\pi}{4})=-x+\frac{\pi}{4}$

$y=-x+\frac{\pi}{4}+\ln\sqrt{2}$

$y''(0)$

（2012）设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的隐函数，则 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}=$ ___1___.

$x=0$时，$-y+1=e^y$

$y=0$

解：（1）两边求导

$2x-y'=e^y\cdot y'$

$x=0$时

$-y'=e^0\cdot y'=y'$

$2y'=0$，$y'(0)=0$

（2）两边再求导

$2-y''=(e^y\cdot y')\cdot y'+y''\cdot e^y$

$=e^y y'^2+e^y y''$

（3）$2-y''(0)=e^0 y'(0)^2+e^0 y''(0)$

$=y'(0)^2+y''(0)$

$=y''(0)$

$2y''(0)=2$

$y''(0)=1$

（2009）设 $y=y(x)$ 是由方程 $xy+e^{y}=x+1$ 确定的隐函数，则 $\frac{d^{2}y}{dx^{2}}|_{x=0}=$ $y''(0)$ ______ -3 .

$x=0$ 时，$e^y=1$，$y=0$.

解：(1) 两边求导.

$y+y'x+e^y\cdot y'=1$

$x=0$ 时

$0+e^0\cdot y'(0)=1$，$y'(0)=1$

(2) 两边再求导.

$y'+y''x+y'+(e^y\cdot y')\cdot y'+y''e^y=0$

$y'(0)+y'(0)+e^0\,y'(0)^2+y''(0)e^0=0$

$2y'(0)+y'(0)^2+y''(0)=0$

$2+1+y''(0)=0$

$y''(0)=-3$

隐　　y'

（2011）曲线 $\tan\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)=e^{y}$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为____________.

解： 两边求导

$$\sec^2\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)\cdot(1+y')=e^{y}\cdot y'$$

令 $x=0,\ y=0,$

$$\sec^2\frac{\pi}{4}(1+y'(0))=e^{0}\cdot y'(0)$$

$$\left(1+\tan^2\frac{\pi}{4}\right)(1+y'(0))=y'(0)$$

$$2(1+y'(0))=y'(0)$$

$$2+2y'(0)=y'(0)$$

$$k=y'(0)=-2$$

k

切线方程：

$$y-0=-2(x-0)$$

$$y=-2x$$