总框架（公共部分）

一、 计算

（1） 微分 $\begin{cases} \text{一元} \\ \text{二元} \end{cases}$

（2） 积分 $\begin{cases} \text{一重} \\ \text{二重} \end{cases}$

二、 应用

（1） 几何应用

（2） 微分方程

三、 高中延伸类

（1） 代数：不等式证明 → 微分中值定理

（2） 几何：无

四、 其他（极限）

平面图形的面积

一、一重积分的应用

（1）平面图形的面积

（2）旋转体的体积

简称：“面旋”

二、求面积的 3 种题型

（1）面条形

（2）麻花形

（3）千层饼

三、“切割法”的一般步骤

（1）将图形切割成无数个小薄片

（2）求出小薄片的面积“小 S”（dS）

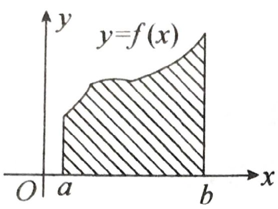
（3）将≈变为＝

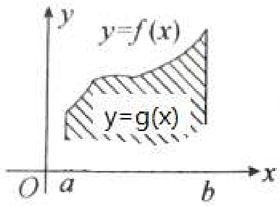
（4）等式两边积分，求出整个图形的面积“大 S”（S）

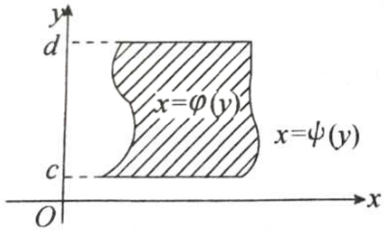
简称：“切小变大”

四、平面图形的面积

（1）直角坐标系（面条形）



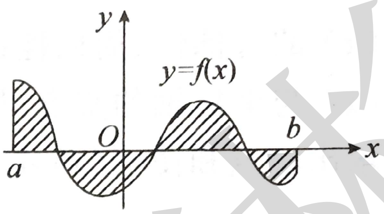


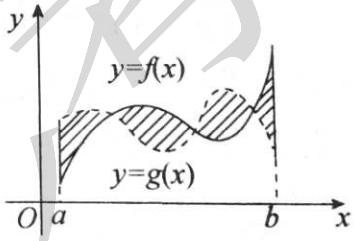


$$S=\int_a^b f(x)dx \qquad S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx \qquad S=\int_c^d (\psi(y)-\varphi(y))dy$$

重要结论　当图形中出现竖线时，x 的积分限很容易确定，此时应选择 x 作为积分变量；
当图形中出现横线时，y 的积分限很容易确定，此时应选择 y 作为积分变量。

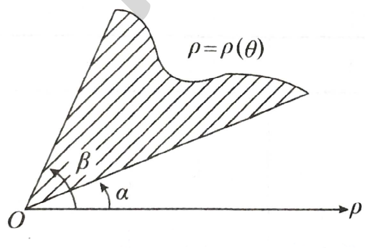
（2）直角坐标系（麻花形）

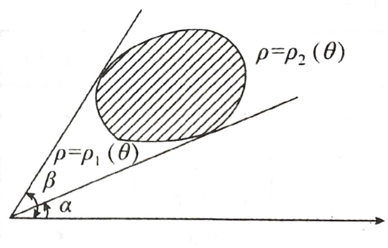




$$S=\int_a^b |f(x)|dx \qquad S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dy$$

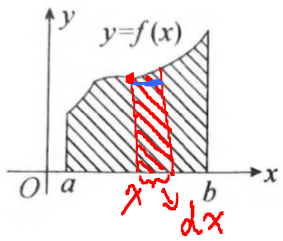
（3）极坐标（千层饼）





$$S=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\rho^2(\theta)d\theta \qquad S=\int_\alpha^\beta \left[\frac{1}{2}\rho_2^2(\theta)-\frac{1}{2}\rho_1^2(\theta)\right]d\theta$$

证明：下图中阴影部分的面积为：$\int_a^b f(x)dx$



证：①切

② $ds = S_{红阴} \approx S_{长} = f(x)\cdot dx \to \underset{\Delta x}{dx} \to 0$

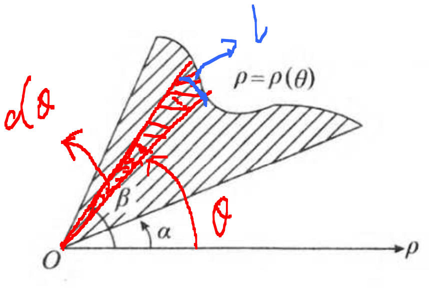
为

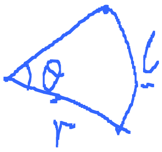
③ $ds \doteq f(x)dx$

④ 两边求积分，得

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

证明：下图中阴影部分的面积为：$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^{2}(\theta)d\theta$





θ的定义：$\theta=\frac{l}{r}$

小S ds　l为圆的一周时，$\theta=\frac{2\pi r}{r}=2\pi$

$l=\theta\cdot r$

记：

① 切

② $ds=S_{红阴}\approx S_{扇}\approx S_{\triangle}=\frac{1}{2}\cdot l\cdot\rho=\frac{1}{2}\cdot d\theta\cdot\rho\cdot\rho$

$=\frac{1}{2}\rho^{2}d\theta$

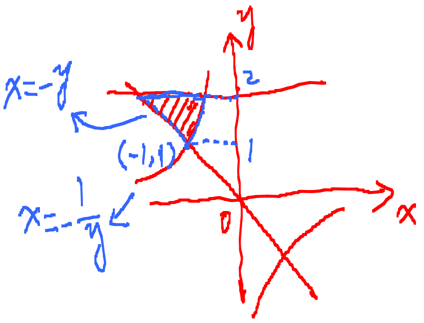
③ $ds=\frac{1}{2}\rho^{2}d\theta$

④ 两边求积分，得

$S=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}\rho^{2}d\theta$，得证

$xy=-1$　　$y=-x$

（2014）设 D 是由曲线 $xy+1=0$ 与直线 $y+x=0$ 及 y=2 围成的有界区域，则 D 的面积为 $\underline{\frac{3}{2}-\ln 2}$



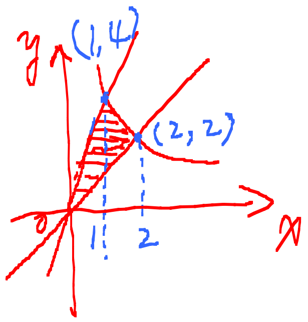
$$S=\int_1^2\left(-\frac{1}{y}+y\right)dy=\left(\frac{y^2}{2}-\ln y\right)\Big|_1^2$$

$$=(2-\ln 2)-\left(\frac{1}{2}-0\right)$$

$$=2-\ln 2-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3}{2}-\ln 2$$

（2012）由曲线 $y=\frac{4}{x}$ 和直线 $y=x$ 及 $y=4x$ 在第一象限中围成的平面图形的面积为 $\underline{4\ln 2}$。



$$S=S_1+S_2=\int_0^1(4x-x)\,dx+\int_1^2\left(\frac{4}{x}-x\right)dx$$

$$=\int_0^1 3x\,dx+\left(4\ln x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2$$

$$=3\times\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+(4\ln 2-2)-\left(0-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\times(1-0)+4\ln 2-2+\frac{1}{2}$$

$$=4\ln 2$$

（2013）设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos 3\theta\left(-\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{6}\right)$，则 L 所围成的平面图形的面积为 $\frac{\pi}{12}$。

$$S=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}\rho^2 d\theta=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}r^2 d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta\, d\theta.$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 6\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\times 2\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 6\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos 6\theta\, d\theta\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{6}\sin 6\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{6}+\frac{1}{6}(\sin\pi-\sin 0)\right]$$

$$=\frac{\pi}{12}$$

旋转体的体积

一、一重积分的应用

（1）平面图形的面积

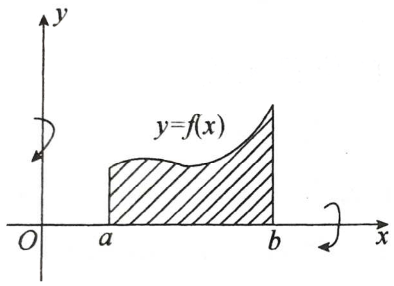
（2）旋转体的体积

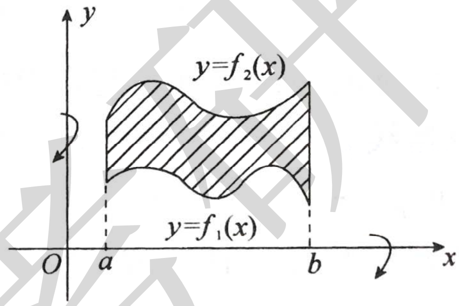
简称：“面旋”

二、求“旋转体体积”的 2 种题型

（1）磨盘的体积

（2）扳指的体积





$$V_x=\int_a^b \pi f^2(x)dx$$

$$V_y=\int_a^b 2\pi x f(x)dx$$

$$V_x=\int_a^b \left[\pi f_2^2(x)-\pi f_1^2(x)\right]dx$$

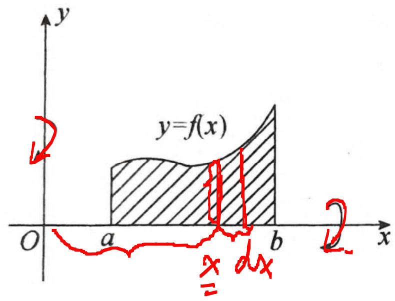
$$V_y=\int_a^b \left[2\pi x f_2(x)-2\pi x f_1(x)\right]dx$$

重要结论　在直角坐标系中，出现双函数时，都是“上一下”。

试证明：以下阴影区域绕 x 轴和 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积，分别为

(1) $V_x=\int_a^b \pi f^2(x)dx$ 和 (2) $V_y=\int_a^b 2\pi x f(x)dx$。

厚度：thickness



证：(1) $dV_x = St = \pi r^2 t = \pi f^2(x)dx$

$\therefore V_x = \int_a^b \pi f^2(x)dx$，得证

(2) $dV_y = S_{侧面}\cdot t = C\cdot ht = 2\pi r h t = 2\pi x\cdot f(x)dx$

$\therefore V_y = \int_a^b 2\pi x f(x)dx$，得证.

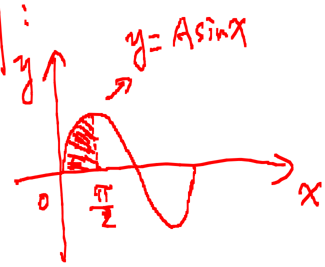
$dV_x = S_t = \pi f^2(x)\,dx$

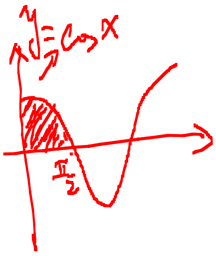
$dV_y = S_{(矩)}\,t = ch\,t = 2\pi x f(x)\,dx$

x轴

（2015）设 $A>0$，D 是由曲线段 $y=A\sin x(0\le x\le \frac{\pi}{2})$ 及直线 $y=o, x=\frac{\pi}{2}$ 所形成的平面区域，V_1，V_2 分别表示 D 绕 x 轴与绕 y 轴旋转所成旋转体的体积，若 $V_1=V_2$，求 A 的值。

绘：





$V_1 = V_x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi f^2(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi A^2 \sin^2 x\,dx = \pi A^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$

$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\pi A^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2x)\,d2x = \frac{1}{4}\pi A^2 (2x - \sin 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{4}\pi A^2 [(\pi - \sin\pi) - (0 - \sin 0)] = \frac{1}{4}\pi^2 A^2$

$V_2 = V_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi x f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi x \cdot A \sin x\,dx$

$= -2A\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,d\cos x = -2A\pi \left(x\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx \right)$

$= -2A\pi(-1) = 2A\pi$

$\because V_1 = V_2$

$\therefore \frac{1}{4}\pi^{\cancel{2}} A^{\cancel{2}} = 2\cancel{A}\cancel{\pi}$

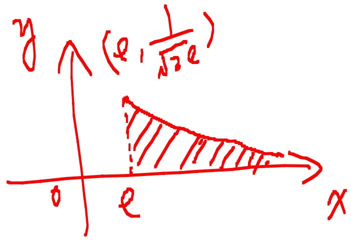
$\frac{1}{4}\pi A = 2$

$\therefore A = 2\times\frac{4}{\pi} = \frac{8}{\pi}$ ✓

V_x

$\left(e, \frac{1}{\sqrt{2}e}\right)$ $(+\infty, 0)$

（2010）设位于曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x\left(1+\ln^2 x\right)}}$ $(e \le x < +\infty)$ 下方，x 轴上方的无界区域为 G，则 G 绕 x 轴旋转一周所得空间区域的体积是 $\underline{\ \frac{\pi^2}{4}\ }$.



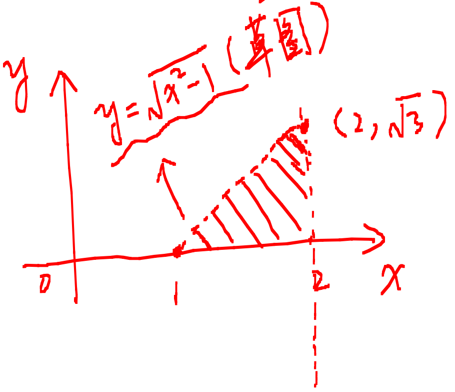
$$V_x = \int_e^{+\infty} \pi f^2(x)\,dx = \int_e^{+\infty} \frac{\pi}{x\left(1+\ln^2 x\right)}\,dx$$

$$= \pi \int_e^{+\infty} \frac{1}{1+\ln^2 x}\,d\ln x = \pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$= \pi \arctan t \Big|_1^{+\infty} = \pi\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \pi \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{4}$$

$(1,0)$ 交点 $(2,\sqrt{3})$ V_x

（2011）曲线 $y=\sqrt{x^2-1}$，直线 $x=2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为 $\underline{\frac{4}{3}\pi}$.



$$V_x=\int_1^2 \pi f^2(x)\,dx=\int_1^2 \pi(x^2-1)\,dx$$

$$=\pi\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_1^2=\pi\left[\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right]$$

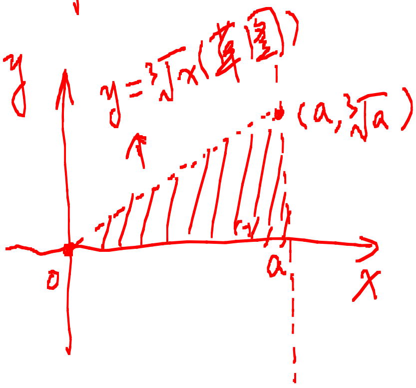
$$=\pi\left(\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+1\right)=\pi\left(\frac{7}{3}-1\right)$$

$$=\frac{4}{3}\pi$$

①$(0,0)$ ②$(a,\sqrt[3]{a})$ ③ Cht

（2013）设 D 是由曲线 $y=\sqrt[3]{x}$，直线 $x=a\ (a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形，V_x,V_y 分别是 D 绕 x 轴和 y 轴旋转一周所形成的立体的体积，若 $10V_x=V_y$，求 a 的值.

解：



$$V_x=\int_0^a \pi f^2(x)dx=\pi\int_0^a (x^{\frac{1}{3}})^2dx=\pi\int_0^a x^{\frac{2}{3}}dx$$

$$=\pi\cdot\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{5}{3}}\Big|_0^a=\frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}$$

$$V_y=\int_0^a 2\pi x f(x)dx=2\pi\int_0^a x\cdot x^{\frac{1}{3}}dx$$

$$=2\pi\cdot\frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{7}{3}}\Big|_0^a=\frac{6}{7}\pi x^{\frac{7}{3}}\Big|_0^a=\frac{6}{7}\pi a^{\frac{7}{3}}$$

$\because 10V_x=V_y$

$\therefore 10\cdot\frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}=\frac{6}{7}\pi a^{\frac{7}{3}}$

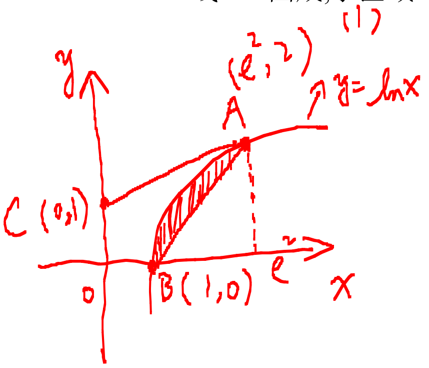
$10\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{7}\cdot a^{\frac{2}{3}}$

$a^{\frac{2}{3}}=10\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{6}=7$

$a=7^{\frac{3}{2}}=7\sqrt{7}$

（2012）过 $(0,1)$ 点作曲线 $L: y=\ln x$ 的切线,切点为 A,又 L 与 x 轴交于 B 点,区域 D 由 L 与直线 AB 围成,求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

(1) S (2) V_x



(1) $k_{AC}=\dfrac{\ln x-1}{x-0}=\dfrac{1}{x}$

$\therefore\ x=e^2$

$\therefore\ A(e^2,2)$

$\therefore\ l_{AB}:\ \dfrac{y-0}{x-1}=\dfrac{2-0}{e^2-1}$

$y=\dfrac{2}{e^2-1}(x-1)$

$$S=\int_1^{e^2}\left[\ln x-\frac{2}{e^2-1}(x-1)\right]dx$$

$$=\left(x\ln x\Big|_1^{e^2}-\int_1^{e^2}x\cdot\frac{1}{x}dx\right)-\int_0^{e^2-1}\frac{2}{e^2-1}t\,dt$$

$$=2e^2-(e^2-1)-\frac{2}{e^2-1}\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_0^{e^2-1}$$

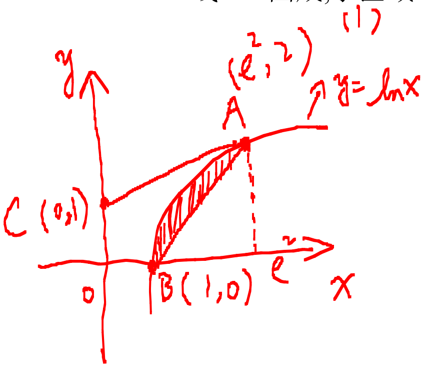
$$=e^2+1-\frac{\cancel{2}}{\cancel{e^2-1}}\cdot\frac{(e^2-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{2}}$$

$$=\cancel{e^2}+1-\cancel{e^2}+1$$

$$=2$$

（2012）过$(0,1)$点作曲线$L: y=\ln x$的切线,切点为A,又L与x轴交于B点,区域D由L与直线AB围成,求区域D的面积及D绕x轴旋转一周所得旋转体的体积.

(1) S (2) V_x



(1) $k_{AC}=\frac{\ln x-1}{x-0}=\frac{1}{x}$

$\therefore x=e^2$

$\therefore A(e^2,2)$

$\therefore L_{AB}: \frac{y-0}{x-1}=\frac{2-0}{e^2-1}$

$y=\frac{2}{e^2-1}(x-1)$

(2) $V_x=\int_1^{e^2}\pi f_2^2(x)dx-\int_1^{e^2}\pi f_1^2(x)dx$

$=\underbrace{\int_1^{e^2}\pi(\ln x)^2dx}_{①}-\underbrace{\int_1^{e^2}\pi\left[\frac{2}{e^2-1}(x-1)\right]^2dx}_{②}$

① $\xlongequal{\ln x=t}\pi\int_0^2 t^2\,de^t=\pi\left(t^2e^t\Big|_0^2-\int_0^2 2te^t\,dt\right)$

$=\pi\left(4e^2-2\int_0^2 t\,de^t\right)$

$=2\pi\left[2e^2-\left(te^t\Big|_0^2-\int_0^2 e^t\,dt\right)\right]$

$=2\pi\left[2e^2-\left(2e^2-e^t\Big|_0^2\right)\right]$

$=2\pi(e^2-e^0)=2\pi(e^2-1)$

② $=\pi\cdot\frac{4}{(e^2-1)^2}\int_1^{e^2}(x-1)^2\,d(x-1)$

$\xlongequal{x-1=t}\pi\frac{4}{(e^2-1)^2}\int_0^{e^2-1}t^2\,dt=\frac{4\pi}{(e^2-1)^2}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_0^{e^2-1}$

$=\frac{4\pi}{\cancel{(e^2-1)^2}}\cdot\frac{(e^2-1)^{\cancel{3}}}{3}=\frac{4}{3}\pi(e^2-1)$

$\therefore V_x=①-②=2\pi(e^2-1)-\frac{4}{3}\pi(e^2-1)$

$=\frac{2}{3}\pi(e^2-1)$

$t=0$时，$(1,0)$，$t=\frac{\pi}{2}$时，$(0,1)$

（2016）设 D 是由曲线 L_1: $y=\sqrt{1-x^2}\,(0\le x\le 1)$ 与 L_2: $\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}\left(0\le t\le \dfrac{\pi}{2}\right)$ 围成的平面区域，求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。V_x

解：L_2：$\cos t=\sqrt[3]{x}$

$\sin t=\sqrt[3]{y}$

$\because \sin^2 t+\cos^2 t=1$

$\therefore (\sqrt[3]{x})^2+(\sqrt[3]{y})^2=1$

$(x^{\frac13})^2+(y^{\frac13})^2=1$

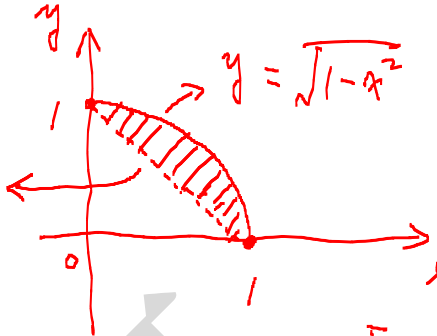
$x^{\frac23}+y^{\frac23}=1$

$y^{\frac23}=1-x^{\frac23}$

$y=(1-x^{\frac23})^{\frac32}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=I_n$

$I_1=1$



$$V_x=\underbrace{\int_0^1\pi(\sqrt{1-x^2})^2dx}_{①}-\underbrace{\int_0^1\pi\left[(1-x^{\frac23})^{\frac32}\right]^{2}dx}_{②}$$

$$①=\int_0^1\pi(1-x^2)dx=\pi\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\pi\left(1-\frac13\right)=\frac23\pi$$

$$②=\pi\int_0^1(1-x^{\frac23})^3dx\ \xrightarrow[x=t^3]{\text{令}x^{\frac13}=t}\ =\pi\int_0^1(1-t^2)^3\cdot 3t^2dt$$

$$\xrightarrow{\text{令}t=\sin u}3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6u\cdot\sin^2u\cos u\,du=3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7u\sin^2u\,du$$

$$=3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7u(1-\cos^2u)du=3\pi(I_7-I_9)$$

$$=3\pi\left(\frac67\cdot\frac45\cdot\frac23 I_1-\frac89\cdot\frac67\cdot\frac45\cdot\frac23 I_1\right)$$

$$=3\pi\left(1-\frac89\right)\cdot\frac{6\cdot4\cdot2}{7\cdot5\cdot3}=3\pi\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{6\cdot4\cdot2}{7\cdot5\cdot3}$$

$$=\frac{16}{3\times7\times5}\pi$$

$$V_x=①-②=\frac23\pi-\frac{16}{3\times7\times5}\pi=\frac{2\times7\times5-16}{3\times7\times5}\pi=\frac{18}{35}\pi$$