Tilastotieteen johdantokurssi

Apulaisprofessori Ville Hautamäki

School of Computing
University of Eastern Finland

September 26, 2023

Todennäköisyyslaskentaa (1)

- Tapahtumia joissa sattuma vaikuttaa yksittäiseen tulokseen kutsutaan satunnaisilmiöiksi tai satunnaiskokeiksi.
- Satunnaisilmiön lopputulosta ei tiedetä etukäteen, mutta jos ilmiö toistuu useita kertoja, tuloksista muodostuu säännönmukainen jakauma.
- Satunnaisilmiöitä ja satunnaiskokeita voidaan mallintaa todennäköisyyslaskennan keinoin, jolloin saadun mallin avulla voidaan tehostaa päätöksentekoa epävarmuutta sisältävissä tilanteissa.

Todennäköisyyslaskentaa (2)

- Tilastotieteessä usein määritellään todennäköisyysmalli tutkittavalle ilmiölle.
- Tämä malli sisältää matemaattisessa muodossa sen mitä on perusteltua olettaa ilmiön ominaisuuksista, mutta numeerisia arvoja prosessia kuvaaville parametreille ei yleensä tunneta.
- Niiden arvot **estimoidaan** käyttämällä havaittuja arvoja satunnaisilmiön tuloksesta.

Klassinen todennäköisyyden määritelmä

- Klassinen todennäköisyys määritellmään suotuisten tapausten lukumäärän suhde kaikkien mahdollisten tapausten lukumäärään.

$$\text{Tapahtuman todennäköisyys} = \frac{\text{Suotuisten tapahtumien lkm}}{\text{Kaikkien tapahtumien lkm}} \tag{1}$$

- Klassisessa todennäköisyyden tulkinnassa oletetaan, että kaikki tapaukset ovat yhtä todennäköisiä. Esimerkiksi voidaan sanoa, että yhtä noppaa heitettäessä saadaan silmäluku 2 todennäköisyydellä $\frac{1}{6}$ (noppa oletetaan harhattomaksi eli jokaisen silmäluvun todennäköisyys on sama).
- Klassista eli frekventistä todennäköisyyden määritelmää voi myös kritisoida siitä että monesti toistaminen ei ole mielekästä (esim: "mikä on todennäköisyys sille että opettaja saapuu tiistain luennolle?"

Subjektiivinen todennäköisyys

- Toinen yleisesti käytetty tulkinta todennäköisyydelle on **subjektiivinen todennäköisyys**, joka kuvaa uskomusta tapauksen todennäköisyydestä, mutta ei välttämättä sisällä mittalukua todennäköisyydestä.
- Esimerkiksi väite "Todennäköisesti huomenna sataa" kuvaa väitteen esittäjän subjektiivista uskomusta sateen mahdollisuudesta.
- Subjektiivinen todennäköisyys -pohjainen tilastotiede tunnetaan nimellä Bayesilainen tilastotiede. Siinä todennäköisyys on aina suhteessa (priori) alkuperäiseen uskomukseen.
- Kun data on havaittu, voidaan uskomus päivittää vastaamaan todellisuutta.
- Historiallisesti, Bayesiläinen todennäköisyyspäättely kehitettiin ensiksi (1700-luvulla) ja frekventistinen 1900-luvun alussa.
- Andrei Kolmogorov systematisoi ja formalisoi todennäköisyyslaskennan 1900-luvun alkupuolella.

Tilastollinen todennäköisyyden tulkinta

- Tilastollisessa todennäköisyyden tulkinnassa tapahtuman todennäköisyys määritellään tapahtuman suhteelliseksi esiintymisfrekvenssiksi pitkässä koesarjassa, jossa tapahtumat ovat riippumattomia. Esimerkiksi jos seurataan suurta määrää mielivaltaisesti valittuja syntymiä voidaan laskea tilastollinen todennäköisyys sille, että syntyvä lapsi on poika.
- **Esimerkki 5.1**: 5.1 Aikavälillä 2000-2015 Suomessa syntyi kaikkiaan 929420 lasta. Syntyneistä lapsista 475550 oli poikia ja 453870 oli tyttöjä. Tämän perusteella voidaan tehdä arvio, että syntyvä lapsi on poika todennäköisyydellä

$$\frac{475550}{929420} = 0.512 \tag{2}$$

Todennäköisyysmalli

- Todennäköisyyslaskenta on satunnaisilmiöiden käsittelyä matematiikan keinoin. Kun tarkastellaan satunnaiskoetta (satunnaisilmiö), niin tulosvaihtoehdot tiedetään, mutta sattuman vuoksi ei voida varmuudella sanoa/ennustaa, mikä satunnaiskokeen tulos lopulta on.
- Esimerkiksi, jos noppaa heitetään yhden kerran, emme tiedä silmälukua etukäteen. Tiedämme vain, että heitosta saatava silmäluku on jokin arvo joukosta $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Voimme myös olettaa nopan olevan tasapainoinen (**harhaton**), jolloin kaikki silmäluvut ovat yhtä todennäköisiä.

Todennäköisyysmallinnuksen perusperiaatteet

Edellä oleva kuvaus nopanheitosta sisältää kaksi osaa:

- Listan kaikista kokeen tulosvaihtoehdoista.
- Kunkin tulosvaihtoehdon todennäköisyydet

Nämä kaksi tekijää muodostavat perustan satunnaisilmiötä kuvaavalle todennäköisyysmallille.

Otosavaruus ja alkeistapaus

- Satunnaiskokeen/satunnaisilmiön kaikkien tulosvaihtoehtojen muodostamaa joukkoa kutsutaan **otosavaruudeksi**. Esimerkiksi heitettäessä kolikkoa kerran tiedetään tuloksen olevan kruuna tai klaava eli otosavaruus on

$$S = \{\text{kruuna}, \text{klaava}\} = \{\text{kr}, \text{kl}\} \tag{3}$$

- Edellä otosavaruutta merkittiin symbolilla S, mutta otosavaruutta merkitään usein myös kreikkalaisella kirjaimella Ω
- Satunnaisilmiön tuottamaa tulosta kutsutaan myös **alkeistapaukseksi**. Esimerkiksi kolikonheitossa on kaksi alkeistapausta “kruuna” (kl) ja "klaava" (lk). Alkeistapaukset ovat otosavaruuden alkioita.

Esimerkki 5.2

Heitettäessä kolikkoa kahdesti voidaan saada neljä erilaista tulosta:

1. heitto	2. heitto
kruuna	kruuna
kruuna	klaava
klaava	kruuna
klaava	klaava

- Otosavaruus kahden kolikon heitossa on siis

$$S = \{\text{krkr}, \text{krkl}, \text{klkr}, \text{klkl}\} \tag{4}$$

  Tässä otosavaruudessa on siis neljä alkeistapausta.

- Jos kiinnostuksen kohteena olisikin kruunien lukumäärä kahden kolikon heitossa, niin otosavaruus olisi

$$S = \{0, 1, 2\} \tag{5}$$

Satunnaisotanta ja tapahtuma

Satunnaisotannassa jokainen otos on tulos, joten satunnaisotannan otosavaruus muodostuu kaikista mahdollisista otoksista.

- **Tapahtumaksi** kutsutaan satunnaiskokeen tulosta tai tulosten muodostamaa joukkoa. Toisin sanoen tapahtuma on otosavaruuden S osajoukko. Tapahtumia merkitään isoilla kirjaimilla $\{A, B, C, \ldots\}$
- Voimme sanoa esimerkiksi, että tapahtuma A sattuu (toteutuu), jos satunnaiskokeen tulos kuuluu joukkoon A.

Esimerkki 5.3

- Heitetään kolikkoa kunnes saadaan ensimmäinen kruuna tai kolikkoa on heitetty neljä kertaa. Tässä satunnaiskokeessa otosavaruus on

$$S = \{\text{kr}, \text{klkr}, \text{klklkr}, \text{klklklkr}, \text{klklklkl}\} \tag{6}$$

- Jos tapahtuma A on "Saadaan enintään kaksi klaavaa ennen kruunaa", niin tapahtuma A on joukko $A = \{\text{kr}, \text{klkr}, \text{klklkr}\}$

Merkintä, tapahtuman A todennäköisyyttä merkitään $P(A)$.

Esimerkki 5.4

Edellä todettiin, että yhtä noppaa heitettäessä saadaan silmäluku 2 todennäköisyydellä $\frac{1}{6}$. Harhattoman nopan tapauksessa todennäköisyys voidaan laskea suotuisten tapausten ja kaikkien tapausten lukumäärien suhteena $\Rightarrow$ otosavaruus sisältää nopanheitossa kuusi mahdollista alkeistapausta

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \tag{7}$$

joista yksi eli silmäluku 2 on suotuisa. Jos merkitään tapahtumaa A =“nopan silmäluku on 2”, niin tämän tapahtuman todennäköisyys on $P(A) = \frac{1}{6}$.

Todennäköisyysmallista

Todennäköisyysmalliksi kutsutaan satunnaisilmiön matemaattista mallia, jonka määrittelee otosavaruus sekä otosavaruuden tuloksiin liittyvät todennäköisyydet. Todennäköisyysmallissa todennäköisyys liittyy siis tapahtumiin.

A. Kolmogorovin todennäköisyyden perusominaisuudet

1. $0 \leq P(A) \leq 1$, Tapahtuman A todennäköisyys on vähintään 0 (mahdoton tapahtuma) ja enintään 1 (varma tapahtuma).
2. $P(A^C) = 1 - P(A)$, tapahtuman A **vastatapahtuman todennäköisyys**
3. $P(S) = 1$, otosavaruuden eli varman tapahtuman todennäköisyys on 1.
4. jos tapahtumat A ja B ovat **erilliset**, niin

$$P(A \text{ tai } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{8}$$

   Tämä on **yhteenlaskusääntö**. Yleisessä tapauksessa pätee

$$P(A \text{ tai } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{9}$$

5. $P(A \text{ ja } B) = P(A \cap B) = P(A)P(B)$ kun tapahtumat ovat riippumattomia. Eli tieto toisesta tapahtumasta ei kerro mitään toisesta. Todennäköisyys kummallekin tapahtumalle on siten tulo. Tätä kutsutaan riippumattomien tapahtumien **tulosäännöksi**.

Esimerkki 5.5, veriryhmien todennäköisyyksistä

Satunnisesti valitun henkilön veriryhmä noudattelee oheista taulukkoa:

Veriryhmä	O	A	B	AB
Todennäköisyys	0.49	0.27	0.20	?

- Mikä on todennäköisyys, että henkilön veriryhmä on A tai B? Koska henkilön veriryhmä voi olla vain yhtä ryhmää, tapahtumat "veriryhmä on A" ja "veriryhmä on B" ovat erillisiä. Satunnaisesti valitun henkilön veriryhmä on A tai B todennäköisyydellä

$$\begin{aligned} P(\text{"Veriryhmä on A tai B"}) &= P(\text{"Veriryhmä on A"}) \\ &+ P(\text{"Veriryhmä on B"}) \\ &= 0.27 + 0.20 = 0.47 \quad (10) \end{aligned}$$

Esimerkki 5.5 (jatkuu)

- Mikä on veriryhmän AB todennäköisyys?
  Erillisten tapausten yhteenlaskusäännöllä saadaan:

$$\begin{aligned} P(\text{"Veriryhmä on A tai B tai O"}) &= P(\text{"O"}) + P(\text{"A"}) + P(\text{"B"}) \\ &= 0.49 + 0.27 + 0.20 = 0.96 \end{aligned}$$

  joten tapahtuman "veriryhmä on O tai A tai B"
  vastatapahtuman todennäköisyyden avulla saadaan

$$P(\text{"Veriryhmä on AB"}) = 1 - 0.96 = 0.04 \qquad (11)$$

  Voitaisiin ajatella myös näin: Todennäköisyyden perusominaisuuden 3 nojalla kaikkien otosavaruuteen kuuluvien alkeistapausten todennäköisyyksien summa on aina 1

Esimerkki 5.6

Valitaan 1-numeroinen satunnaisluku kokonaisluvuista 0-9 niin että kaikki luvut ovat yhtä todennäkoisiä. Todennäköisyyksiksi saadaan

Satunnaisluku	0	1	2	...	8	9
Todennäköisyys	0.1	0.1	0.1	...	0.1	0.1

Todennäköisyydet 0.1 saadaan ehdoista, että joku luku valitaan, ja että jokainen numero on yhtä todennäköinen ja lukujen todennäköisyyksien summa on 1.

- Millä todennäköisyydellä 1-numeroinen satunnaisluku on pariton?

$$\begin{aligned} P(\text{"Luku on pariton"}) &= P(\{1,3,5,7,9\}) \\ &= P(\{1\}) + P(\{3\}) + \ldots + P(\{9\}) \\ &= 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 = 0.5 \end{aligned}$$

Esimerkki 5.6 (jatkuu)

- Millä todennäköisyydellä luku on pariton tai pienempi tai yhtä suuri kuin 3?
  Määritellään tapahtumat A ja B seuraavasti:
  $A =$ "luku on pariton" ja $B =$ "luku ≤ 3" Nyt todennäköisyys, että luku on pariton on $P(A) = 0.5$ ja todennäköisyys, että luku on pienempi tai yhtä suuri kuin 3 on $P(B) = 0.4$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(\text{"luku on pariton tai luku on} \leq 3\text{"}) \\ &= P(\{1,3,5,7,9\} \cup \{0,1,2,3\}) \\ &= P(\{0,1,2,3,5,7,9\}) = 0.7 \end{aligned} \tag{12}$$

  Huom! tämä on eri kuin $P(A) + P(B) = 0.9$. Meidän siis tulee käyttää yhteenlaskusääntöä:

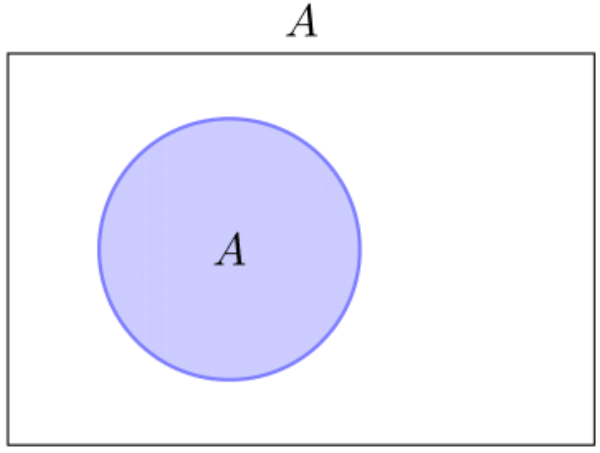
$$P(A \,\text{tai}\, B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{13}$$

  eli pitää vähentää summasta $P(A \cap B) = 0.2$, koska tapahtumissa A ja B on **kaksi** yhteistä alkeistapausta, luvut 1 ja 3.

Visualisointi Venn-diagrammeilla

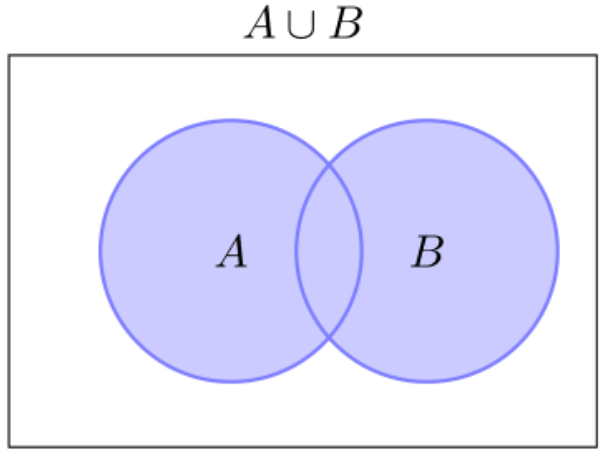
Ensiksi perusjoukko S

Ja sitten tapahtuma A, joukko-opin merkinnöillä $A \subseteq S$

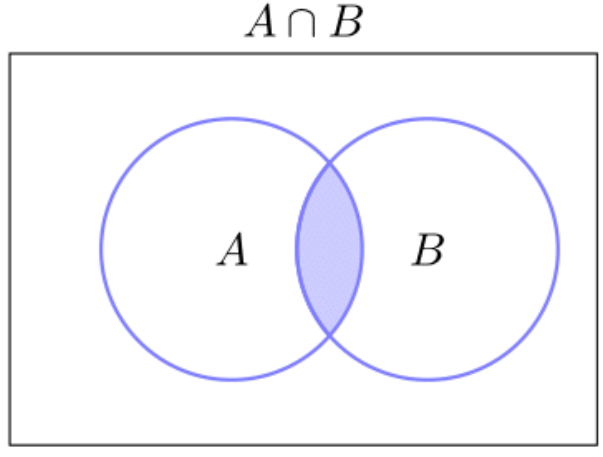


Visualisointi jatkuu

"A tai B" eli joko A tai B tai molemmat. Joukko-oppi: $A \cup B$

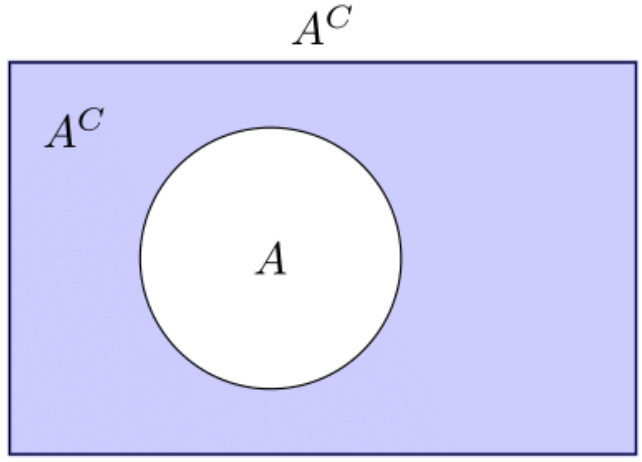


"A ja B" eli A ja B tapahtuu yhtäaikaa. Joukko-oppi: $A \cap B$

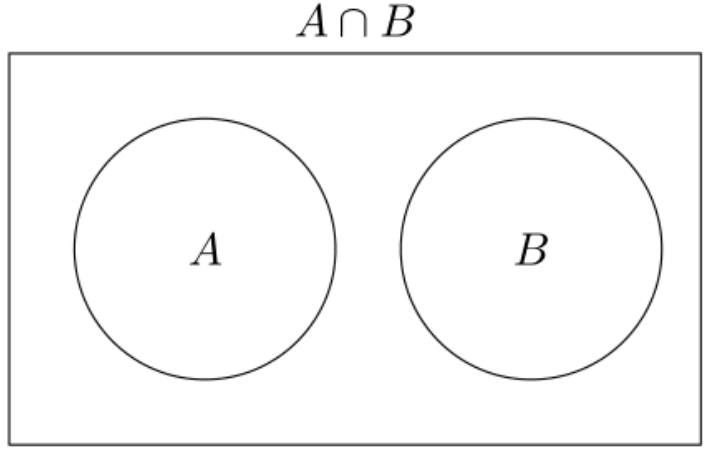


Visualisointi jatkuu

A ei esiinny. Joukko-oppi: A^C. (A:n komplementti)



A ja B ovat erillisiä. Joukko-oppi: $A \cap B = \emptyset$



Esimerkki 5.8

- Heitettäessä kolikkoa kaksi kertaa otosavaruus on $S = \{\text{krkr}, \text{krkl}, \text{klkr}, \text{klkl}\}$. Kaksi tapahtumaa, jotka ovat $A =$ "1. heitto on kruuna" ja $B =$ "2. heitto on kruuna". Tapahtumat A ja B eivät ole erillisiä, koska molemmat sattuvat jos molempien heittojen tulos on kruuna.
- Heitot oletetaan riippumattomiksi eli edellisen heiton tulos ei vaikuta seuraavan heiton tulokseen. Siksi voidaan käyttää kertolaskusääntöä laskettaessa todennäköisyys sille, että molemmilla heitoilla saadaan kruuna:

$$\begin{aligned} P(A \text{ ja } B) &= P(A \cap B) \\ &= P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned} \qquad (14)$$

Esimerkki 5.9

Heitään vain yhtä noppaa. Tapahtumat ovat:
$A =$ "Silmäluku on vähintään 3" $= \{3, 4, 5, 6\}$
$B =$ "Silmäluku on 3" $= \{3\}$
Tapahtuma "A ja B" $= A \cap B = \{3, 4, 5, 6\} \cap \{3\} = \{3\} = B$, eli tapahtumat eivät ole erillisiä.
Jotta tapahtumat A ja B olisivat erillisiä, niillä ei saisi olla yhtään yhteistä alkeistapausta. Eli $A \cap B$ olisi silloin tyhjä joukko.

Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus

- Kun tapahtuma B on mahdollinen, eli $P(B) > 0$, niin **ehdollinen todennäköisyys** tapahtumalle A ehdolla B saadaan

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{15}$$

  Ehdollinen todennäköisyys $P(A|B)$ kertoo tapahtuman A todennäköisyyden, kun tiedetään, että tapahtuma B on tapahtunut.
- Ehdollinen todennäköisyys toimii kuin datasetin **filtteröinti**, esimerkiksi: todennäköisyys että saat nuhan on pieni, mutta jos ulkona on -10C pakkasta, niin todennäköisyys on suurempi.

Esimerkki: vaalit Yhdysvalloissa

Yhdysvaltojen 2012 vaalissa annettiin yhteensä 132 948 000 vaalilippua, joista 18-19-v. oli 20 539 000 ja 30-45-v. 30 756 000. Lasketaan ensiksi todennäköisyys, että äänestäjän ikä on alle 45:

$$P(\text{ikä} < 45) = \frac{20\ 539\ 000 + 30\ 756\ 000}{132\ 448\ 000} = \frac{51\ 295\ 000}{132\ 948\ 000} = 0.38,$$

Todennäköisyys on siis 0.38. Jos tiedämme että satunnaisen äänestäjän ikä tulee olla yli 29. Filtteröimme siis kaikkien äänestäjien joukosta kaikki alle 29 vuotiaat pois ja laskemme ehdollisen todennäköisyyden:

$$P(\text{ikä} < 45 | \text{ikä} > 29) = \frac{30\ 756\ 000}{112\ 409\ 000} = 0.27.$$

On tärkeää huomata että äänten kokonaislukumäärä tippuu 132 448 000:sta 112 409 000:han. Tämä on se filtteröinnin vaikutus.

Riippumattomuus

Tapahtumien riippumattomuus ehdollisen todennäköisyyden näkökulmasta. Kun tapahtumat A ja B ovat riippumattomia ja $P(B) > 0$ niin,

$$P(A|B) = P(A) \tag{16}$$

Edellinen tarkoittaa sitä, ettei tieto tapahtuman B tapahtumisesta vaikuta tapahtuman A todennäköisyyteen.

Esimerkki 5.10

Heitetään noppaa kaksi kertaa. Olkoon tapaukset sitten:
$A =$ "Saadaan ainakin kerran silmäluku 2" ja
$B =$ "Silmälukujen summa on pienempi kuin 6" Taulukoidaan kaikki heittojen mahdolliset tulokset:

	Ensimmäinen heitto					
Toinen heitto	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Todennäköisyydet voi ajatella suotuisten tapausten lukumäärien ja kaikkien tulosvaihtoehtojen lukumäärän (36 kpl) avulla, koska noppia heitettäessä jokainen silmäluku on yhtä todennäköinen (klassinen todennäköisyyden määritelmä).

Esimerkki 5.10 jatkuu

- Laske todennäköisyydet $P(A)$ ja $P(B)$
  Tapahtumalle A suotuisia tulosvaihtoehtoja on 11 kpl ja tapahtumalle B suotuisia tulosvaihtoehtoja on 10 kpl. Siten

$$P(A) = \frac{11}{36} \approx 0.305 \tag{17}$$

$$P(B) = \frac{10}{36} \approx 0.278 \tag{18}$$

- Laske todennäköisyys $P(A \cap B)$
  Molemmille tapahtumille suotuisia tulosvaihtoehtoja on 5 kpl, joten

$$P(A \cap B) = \frac{5}{36} \approx 0.134 \tag{19}$$

Esimerkki 5.10 jatkuu

- Laske ehdollinen todennäköisyys $P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{10}{36}} = \frac{1}{2} \tag{20}$$

Esimerkki 5.11

Kolikon heitto kolme kertaa. Tarkastellaan tapahtumaa
$A =$ "Saadaan kaikilla kolmella heitolla klaava"
Otosavaruudessa on 8 eri tulosmahdollisuutta (luettele ne!), joista jokainen on yhtä todennäköinen. Siten

$$P(A) = \frac{1}{8} \tag{21}$$

Toisaalta voidaan laskea myös suoraan hyödyntäen riippumattomien tapahtumien kertolaskusääntöä

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \tag{22}$$

Esimerkki 5.12

Kuopion sosiaali- ja terveystointen yhdistämisen vaikutuksista tehdyssä tutkimuksessa kyselylomakkeessa kysyttiin henkilön sukupuoli ja mielipide siitä, takaavatko vastaanottotilat yksityisyyden.

	Mies	Nainen	Yhteensä
Hyvin	40	292	332
Huonosti	7	144	151
Yhteensä	47	436	483

Esimerkki 5.12 (jatkuu)

Poimitaan aineistosta yksi henkilö satunnaisesti ja tarkastellaan tapahtumia:
$A =$ "Henkilö kokee vastaanottotilojen takaavan yksityisyyden hyvin",
$B =$ "Henkilö on mies"

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{332}{483} \approx 0.687 \\ P(B) &= \frac{47}{483} \approx 0.0973 \\ P(A \cap B) &= \frac{40}{483} \approx 0.0828 \end{aligned} \tag{23}$$

$P(A \cap B)$ on todennäköisyys sille, että valittu henkilö kokee yksityisyyden vastaanottotiloissa hyväksi ja on mies.

Esimerkki 5.12 (jatkuu)

Jos tiedetään valitun henkilön olevan mies, niin hän kokee vastaanottotilojen takaavan yksityisyyden hyvin todennäköisyydellä

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{40/483}{47/483} = \frac{40}{47} = 0.85 \tag{24}$$

Tapahtumat A ja B eivät ole riippumattomia, koska

$$P(A \cap B) \neq P(A)P(B) \tag{25}$$

eli

$$\frac{40}{483} \approx 0.0828 \neq \frac{332}{483} \times \frac{47}{483} \approx 0.067 \tag{26}$$

Lyhyesti kombinatoriikasta

Edellä todennäköisyydet voi ajatella siten, että todennäköisyys on tapahtumalle suotuisten tulosvaihtoehtojen lukumäärän suhde satunnaiskokeen kaikkien tulosvaihtoehtojen lukumäärään.
Erilaisten tulosten ja tapahtumalle suotuisten tulosvaihtoehtojen lukumäärän laskeminen voi kuitenkin olla hankalaa.
Kombinatoriikka käsittelee näiden lukumäärien laskemista.

Erilaisten lottorivien lukumäärä

- Kombinatoriikan avulla voidaan ratkaista esimerkiksi erilaisten lottorivien lukumäärä. Lotossa arvotaan 40:stä numerosta 7 numeroa sisältävä rivi (ei huomioida lisänumeroita). Erilaisten lottorivien lukumäärä (erilaisten 7 numeron kombinaatioiden lkm.) on

$$\binom{40}{7} = \frac{40!}{7!(40-7)!} = \frac{40!}{7!33!} = 18\ 643\ 560 \qquad (27)$$

- Edellisessä kaavassa $\binom{40}{7}$ on binomikerroin ja luetaan "40 yli 7". Binomikertoimen

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (28)$$

avulla voidaan laskea kuinka monella tavalla n alkiosta voidaan valita k alkiota, kun tietty alkio voidaan poimia vain kerran ja valintajärjestyksellä ei ole merkitystä.

Kertomasta

- Merkintä $n!$ tarkoittaa **kertomaa**, eli

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1 \tag{29}$$

  joka kertoo kuinka monella eri tavalla n alkiota voidaan asettaa jonoon.
- On myös hyvä huomata että on sovittu että $0! = 1$.
- Kertoma on määritelty vain kokonaisluvuille, mutta sama voidaan tehdä myös reaaliluvuille ja sen funktion nimi on **Gamma-funktio** $\Gamma(n)$. Mikä saa kokonaislukujen tapauksessa saman arvon kuin kertoma. Tilastotieteessä Gamma-funktio esiintyy mm. Beta -jakaumassa.

Esimerkki 5.13

Kolme henkilöä voidaan asettaa jonoon 6:lla ($3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$), kun järjestyksellä on väliä. Kolmen henkilön joukosta voidaan poimia kaksi henkilöä $\binom{3}{2} = 3$ kun poimintajärjestyksellä ei ole väliä.

```
# Kertoma
factorial(3)
## [1] 6
# 3 yli 2
choose(3,2)
## [1] 3
```

Esimerkki 5.13

Ohessa yksinkertaiset esimerkit siitä kuinka kertoma ja binomikerroin voidaan laskea R:llä

- Kertoma eli 3! on R:ssä `factorial(3)`
- kolme yli kahden $\binom{3}{2}$ on R:ssä `choose(3,2)`

Luku 6. Satunnaismuuttujat

Johdanto: Satunnaismuuttujat

- **Satunnaismuuttuja** on mikä tahansa numeerinen muuttuja, jonka arvon määrää satunnaiskokeen tulos.
- Toisin sanoen se on numeerinen muuttuja, jonka havaittuun arvoon sattuma vaikuttaa.
- Satunnaismuuttujia merkitään isoilla kirjaimilla (esim. X, Y, Z, X_1, X_2)
- Satunnaismuuttujan saamia yksittäisiä arvoja taasen merkataan pienillä kirjaimilla, kuten x, y, z

Satunnaismuuttujien tyypeistä

- Satunnaismuuttujia on monenlaisia. Esimerkiksi nopan heiton tulos on usein käytetty esimerkki satunnaismuuttujasta.
- mutta samalla tavalla satunnaismuuttujina käsitellään tutkimuksissa mitattavia ominaisuuksia, esimerkiksi maanäytteen typpipitoisuutta.
- Nopan heiton tulos puolestaan on esimerkki diskreetistä satunnaismuuttujasta ja maanäytteen typpipitoisuus jatkuvasta satunnaismuuttujasta.

Satunnaismuuttuja voi saada vain numeerisia arvoja

- Erotuksena todennäköisyyslaskennan **tapahtumiin** satunnaismuuttuja voi saada vain numeerisia arvoja
- Esimerkiksi, kolikkoa heitettäessä pitää päättää millä numerolla merkitään kruunaa ja klaavaa (esim kruuna $= 0$ ja klaava $= 1$)
- Koodaustavan voi itse valita, mutta eri valinnat johtavat eri satunnaismuuttujiin.

Todennäköisyysjakauma ja odotusarvo

- Satunnaismuuttujan **todennäköisyysjakauma** kertoo, mitä arvoja satunnaismuuttuja voi saada ja millä todennäköisyyksillä se mitäkin arvoja saa.
- Satunnaismuuttujan **odotusarvo** (E[X], μ) ilmaisee minkä arvon ympärille satunnaismuuttujan arvot keskittyvät.
- Odotusarvo voidaan tulkita laskennallisena keskiarvona jos olemme keränneet äärettömän paljon dataa.

Varianssi ja keskihajonta

- Satunnaismuuttujan **varianssi** ($\mathrm{Var}(X)$, σ^2) ja sen neliöjuuri **keskihajonta** kuvaavat kuinka paljon satunnaismuuttujan yksittäiset arvot vaihtelevat odotusarvon ympärillä.
- Odotusarvo siis kertoo jakauman sijainnista.
- Varianssi kertoo jakauman "leveydestä".
- Odotusarvo ja varianssi eivät kuitenkaan kerro paljoakaan jakauman todellisesta muodosta $\rightarrow$ **erilaiset jakaumat voivat tuottaa saman odotusarvon ja varianssin!**

Diskreetti satunnaismuuttuja

- **Diskreetti satunnaismuuttuja** saa äärellisen tai numeroituvasti äärettömän määrän eri arvoja.
- Diskreetin satunnaismuuttujan todennäköisyysjakauma, eli **pistetodennäköisyysfunktio** kirjoitetaan muodossa

$$f(x) = \begin{cases} p_1 & \text{kun } x = x_1 \\ p_2 & \text{kun } x = x_2 \\ p_3 & \text{kun } x = x_3 \\ \vdots & \\ p_k & \text{kun } x = x_k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{30}$$

Pistetodennäköisyys taulukkomuodossa

- Pistetodennäköisyysfunktio voidaan esittää myös taulukkona:

X:n arvo	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_k
Todennäköisyys	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	p_k

- Taulukossa x_1, x_2, etc ovat arvoja mitä satunnaismuuttuja X voi saada, ne määrittelevät satunnaismuuttujan **arvojoukon**.
- Diskreetin satunnaismuuttujan kohdalla arvojoukko on siis mahdollisten (numeeristen) arvojen listaus.
- Jos satunnaismuuttujan mahdollisten arvojen määrä on numeroituvasti ääretön, niin silloin mahdollisten arvojen joukolla ei ole viimeistä arvoa, ja arvojoukko merkitään $x_1, x_2, \ldots$
- Toisella rivillä ovat pistetodennäköisyysfunktion arvot p_i , jotka kuvaavat todennäköisyyttä, että satunnaismuuttuja X saa arvon x_i, eli $p_i = P(X = x_i)$

Lisää pistetodennäköisyydestä

- Arvoilla, jotka eivät kuulu arvojoukkoon, pistetodennäköisyysfunktio saa arvon 0.
- Jokainen diskreetin satunnaismuuttujan saama todennäköisyys p_i saa arvon välillä $[0, 1]$.
- Satunnaismuuttujan todennäköisyyksien summa $\sum_{i=1} p_i = 1$.

Esimerkki 6.1

Kolikon heitto kaksi kertaa. Satunnaiskokeen otosavaruus on

$$S = \{\text{krkr}, \text{krkl}, \text{klkr}, \text{klkl}\} \tag{31}$$

Oletetaan kolikon olevan harhaton, eli

$$P(\text{"kr"}) = P(\text{"kl"}) = \frac{1}{2} \tag{32}$$

Merkitään satunnaismuuttujalla X kruunien lukumäärää kahdessa heitosssa. Nyt satunnaismuuttuja X voi siis saada arvon 0,1 tai 2. X on atunnaismuuttuja, jonka arvo määräytyy satunnaiskokeen tuloksen perusteella, ja sen en arvojoukko on $S = \{0, 1, 2\}$.

Esimerkki 6.1 (jatkuu)

Pistetodennäköisyysfunktion määrittämiseksi lasketaan kunkin arvon todennäköisyys:

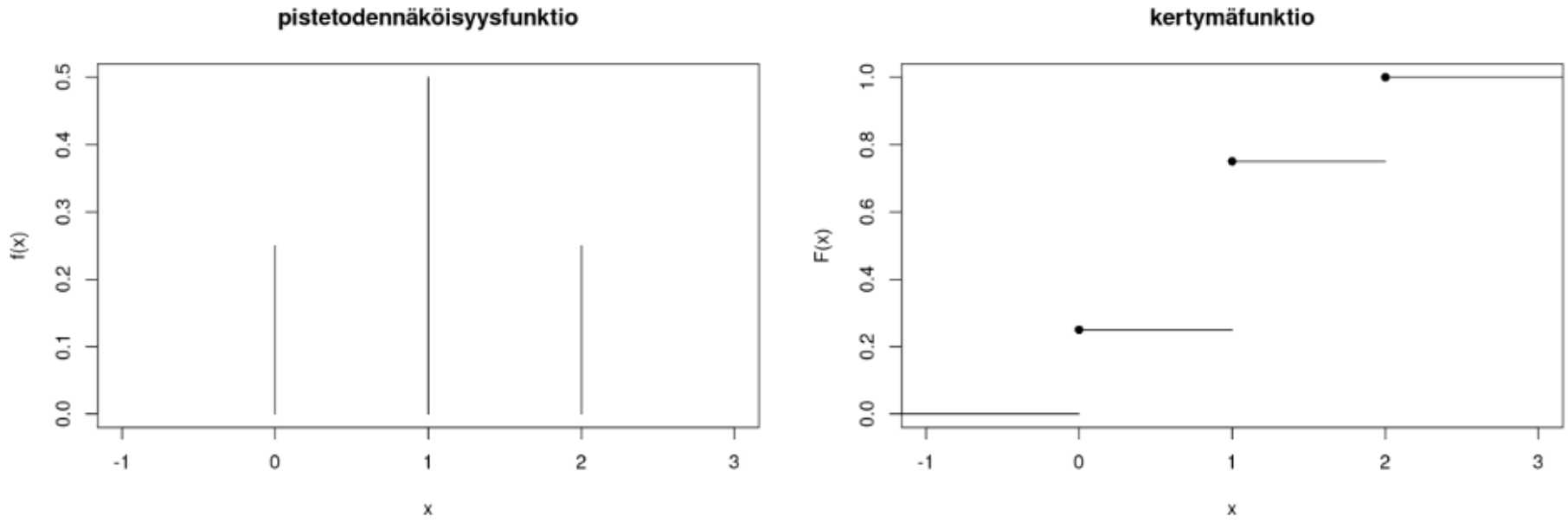
$$
\begin{aligned}
P(X=0) &= P(\text{klkl}) = \frac{1}{4} \\
P(X=1) &= P(\text{"krkl" tai "klkr"}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\
P(X=1) &= P(\text{krkr}) = \frac{1}{4}
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Satunnaismuuttujan X pistetodennäköisyysfunktio on siis

X:n arvo	0	1	2
Todennäköisyys	1/4	1/2	1/4

Esimerkki 6.1 (jatkuu)

Funktion kuvaaja on esitetty vasemmassa kuvassa



Voidaan laskea

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{3}{4} \qquad (34)$$

ja

$$P(X > 0) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{3}{4} \qquad (35)$$

Kertymäfunktio diskreetille satunnaismuuttujalle

- **Kertymäfunktioksi** kutsutaan

$$F(x) = P(X \leq x) \tag{36}$$

- Kertymäfunktio (engl. cumulative distribution function, cdf, tai vain distribution function)
- Pistetodennäköisyysfunktio ilmaisee siis yksittäisiin tapahtumiin liittyvät todennäköisyydet ja kertymäfunktio ilmaisee todennäköisyyden, jolla satunnaismuuttuja saa enintään arvon x.
- Diskreetin satunnaismuuttujan kertymäfunktiolle on voimassa:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) \tag{37}$$

Esimerkki 6.2

Satunnaismuuttujan X arvo on kruunujen lukumäärä kahden kolikon heitossa. Kertymäfunktion $F(x)$ arvot ovat:

$$\begin{aligned} F(0) &= P(X \leq 0) = P(X = 0) = 1/4 \\ F(1) &= P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 3/4 \\ F(2) &= P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1 \end{aligned} \tag{38}$$

Joka voidaan kirjoittaa taulukkona

x_i	0	1	2
$f(x_i) = P(X = x_i)$	1/4	1/2	1/4
$F(x_i)$	1/4	3 / 4	1

Esimerkki 6.2 (jatkuu)

Matemaattisesti satunnaismuuttujan X kertymäfunktio voidaan ilmaista

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/4 & 0 \leq x < 1 \\ 3/4 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & \geq 2 \end{cases} \tag{39}$$

Huomaa että oikean puoleinen raja ei kuuluu välille!

Jatkuva satunnaisfunktio

- **Jatkuva satunnaismuuttuja** voi saada minkä tahansa arvon jollain välillä. Mahdollisia arvoja on siis ääretön (ylinumeroituva) määrä.
- **Tiheysfunktio** $f(x)$ on jatkuvan satunnaismuuttujan todennäköisyyden jakautumista kuvaava funktio.
- Tiheysfunktio on englanniksi **probability density function** (pdf)
- Tiheysfunktion arvot eivät kuitenkaan ole yksittäisen arvon esiintymisen todennäköisyyksiä; jatkuvalla satunnaismuuttujalla yksittäisen arvon todennäköisyys on aina nolla.

Tiheysfunktion ominaisuuksia

Tiheysfunktiolla on seuraavat ominaisuudet:

1. $f(x) \geq 0$, kaikilla x:n arvoilla. Eli tiheysfunktio ei voi saada negatiivisia arvoja.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, eli tiheysfunktion ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala on 1.

Jatkuvalle satunnaismuuttujalle X tapahtuman $x_1 \leq X \leq x_2$ voidaan laskea integroimalla:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx. \tag{40}$$

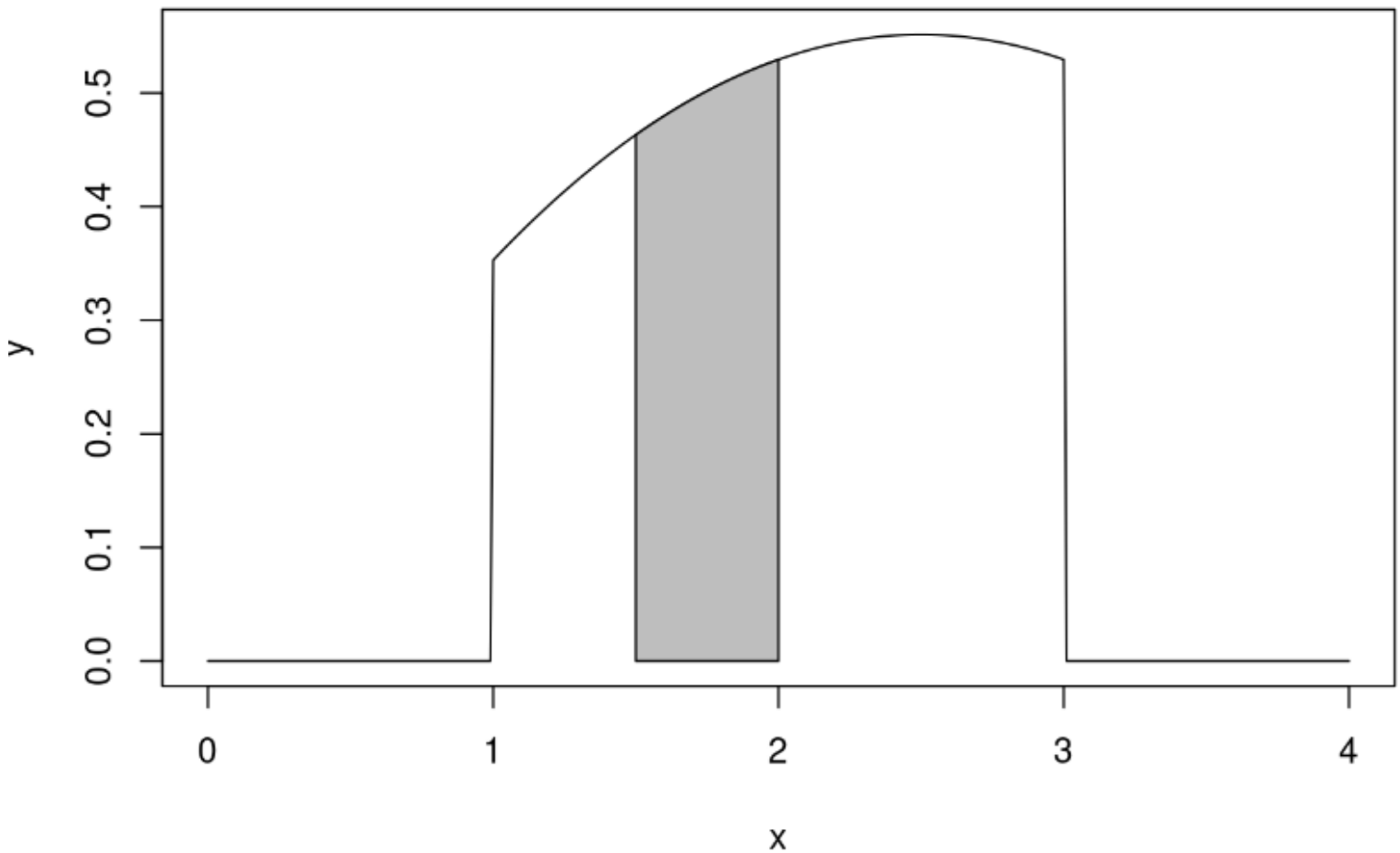
Todennäköisyys saadaan siis laskemalla tiheysfunktion ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala välillä $[x_1, x_2]$.

Esimerkki 6.3

Määritellään satunnaismuuttujan X tiheysfunktio kaavalla

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{34}x^2 + \frac{15}{34}x & \text{kun } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{, muulloin} \end{cases} \tag{41}$$

a. Piirrä tiheysfunktion kuvaaja



Esimerkki 6.3 (jatkuu)

b. Osoita että funktio toteuttaa em. tiheysfunktion ominaisuudet. Funktio saa vain positiivisia arvoja (millä perusteella??), joten se toteuttaa em. ominaisuuksista ensimmäisen. Funktion ja x-akselin välille jäävä pinta-ala välillä $[1, 3]$ lasketaan (tarkkaan ottaen approksimoidaan, mutta approksimaatio on hyvin tarkka) ao. koodissa funktiolla

```
    # määritetään tiheysfunktio R-funktiona
fx <- function(x) -3/34*x^2+15/34*x
integrate(fx, 1, 3) # käyrän alle jäävä pinta-ala

## 1 with absolute error < 1.1e-14
```

Esimerkki 6.3 (jatkuu)

c. Laske todennäköisyys $P(1.5 \leq X < 2)$
Kysytty todennäköisyys voidaan laskea integraalina $\int_{1.5}^{2} f(x)dx$, jota approksimoidaan ao. koodissa funktiolla. Tulokseksi saadaan

$$P(1.5 \leq X < 2) = 0.25 \tag{42}$$

Kertymäfunktio jatkuvalle satunnaismuuttujalle

- Jatkuvan satunnaismuuttujan X kertymäfunktio määritellään samalla tavalla kuin diskreetille satunnaismuuttujalle:

$$F(x) = P(X \leq x) \tag{43}$$

- Kertymäfunktio on siis jatkuva ja yhtenäinen käyrä (vertaa diskreettiin tapaukseen!)
- Jatkuvan satunnaismuuttujan tiheysfunktio $f(x)$ on on kertymäfunktion derivaatta x: suhteen $f(x) = F'(x)$

Kertymäfunktion ominaisuuksia

- Jatkuvan satunnaismuuttujan kertymäfunktiolle on voimassa

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds \tag{44}$$

- Määritelmästä johtuen

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) \tag{45}$$

- Tästä seuraa, että kun $x_2 \to x_2$, niin $F(x_2) \to F(x_1)$, joten jatkuvalle satunnaismuuttujalle $P(X = x_1) = 0$ aina!
- Eli yksittäisen arvon x todennäköisyys on aina nolla!

Jatkuvan ja diskreetin satunnaismuuttujan eroista

- Jatkuvaan satunnaismuuttujaan liittyvät todennäköisyydet lasketaan välien avulla - toisin kuin diskreettien satunnaismuuttujien tapauksessa!
- Diskreetti jakauma siis liittää todennäköisyydet yksittäisiin arvoihin ja jatkuva jakauma liittää todennäköisyydet väleihin.
- Jatkuvalla satunnaismuuttujalla ei ole merkitystä, ovatko välit avoimia, suljettuja vai puoliavoimia, esim:

$$P(X \leq x) = P(X < x). \tag{46}$$

Odotusarvo

- Satunnaismuuttujan odotusarvo $\mathrm{E}[X]$ kuvaa sitä, minkä arvon ympärille satunnaismuuttujan arvot keskittyvät.
- **Diskreetin satunnaismuuttujan** X odotusarvo määritellään lausekkeella

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^{k} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i \tag{47}$$

- Odotusarvo saadaan siis kertomalla jokaisen satunnaismuuttujan arvo kyseiseen arvoon liittyvällä todennäköisyydellä ja laskemalla tulot yhteen.
- Kyseessä on siis painotettu keskiarvo.
- Odotusarvoa merkitään myös symbolilla μ.

Odostusarvosta lisää

- Satunnaismuuttujalla, jonka arvojoukko on numeroituvasti ääretön, summassa on äärettömän monta termiä eli odotusarvo on

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \tag{48}$$

- Huomaa, että satunnaismuuttujan odotusarvo ei kuulu välttämättä satunnaismuuttujan arvojoukkoon; esimerkiksi harhattomalla nopalla heitettäessä nopan silmäluvun arvojoukko on $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, mutta odotusarvo on 3.5

Esimerkki 6.4

Jatkoa esimerkille 6.1, jossa määriteltiin pistetodennäköisyysfunktio

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/4 & 0 \leq x < 1 \\ 3/4 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & \geq 2 \end{cases} \tag{49}$$

Kruunujen lukumäärän odotusarvo kahta kolikkoa heitettäessä on

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = 0 \times 1/4 + 1 \times 1/2 + 2 \times 1/4 = 1 \tag{50}$$

Eli keskimäärin kahta kolikkoa heitettäessä saat yhden kruunun.

Jatkuvan satunnaismuuttujan odotusarvo

- Jatkuvan satunnaismuuttujan odotusarvo määritellään lausekkeella

$$\mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \tag{51}$$

- Mistä huomaamme että määritelmä on analoginen diskreetin satunnaismuuttujan tapauksen kanssa.

Odotusarvon laskusääntöjä

Lause 6.1

Odotusarvon laskusääntöjä

1. $\mathrm{E}[c] = c$ mille tahansa vakiolle c.
2. $\mathrm{E}[cX] = c\mathrm{E}[X]$ satunnaismuuttujalle X, kun c on vakio.
3. $\mathrm{E}[X + Y] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y]$, satunnaismuuttujille X ja Y.