CCS変換メモ

山本 充子

2021年7月19日

1 DS項の定義

ここでは、CPS 変換前の項、すなわち CPS 変換を行う対象の言語を示す。

1.1 構文

$$
\begin{array}{lcll}
\tau & ::= & \mathsf{Nat} \mid \mathsf{bool} \mid \tau_1 \to \tau_2@\mathrm{cps}[\tau_3, \tau_4] & 型 \\
v & ::= & n \mid x \mid \lambda x.\, e \mid \mathcal{S} & 値 \\
e & ::= & v \mid e_1 \mathbin{@} e_2 \mid \langle e \rangle \mid \mathsf{let}\ x = e_1\ \mathsf{in}\ e_2 & 項
\end{array}
$$

1.2 DS項の型付け規則

$$
\frac{\Gamma(x) = \tau_1}{\Gamma \vdash x : \tau_1 \mathbin{@}\mathrm{cps}[\tau, \tau]}\ (\textsc{TVar}) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash n : \mathsf{Nat} \mathbin{@}\mathrm{cps}[\tau, \tau]}\ (\textsc{TNum})
$$

$$
\frac{\Gamma, x : \tau_2 \vdash e : \tau_1 \mathbin{@}\mathrm{cps}[\tau_3, \tau_4]}{\Gamma \vdash \lambda x.\, e : (\tau_2 \to \tau_1@\mathrm{cps}[\tau_3, \tau_4]) \mathbin{@}\mathrm{cps}[\tau, \tau]}\ (\textsc{TFun})
$$

$$
\frac{}{\Gamma \vdash \mathcal{S} : (((\tau_3 \to \tau_4@\mathrm{cps}[\tau, \tau]) \to \tau_1@\mathrm{cps}[\tau_1, \tau_2]) \to \tau_3@\mathrm{cps}[\tau_4, \tau_2]) \mathbin{@}\mathrm{cps}[\tau, \tau]}\ (\textsc{TShift})
$$

$$
\frac{\Gamma \vdash e_1 : (\tau_2 \to \tau_1@\mathrm{cps}[\tau_3, \tau_4]) \mathbin{@}\mathrm{cps}[\tau_5, \tau_6] \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau_2 \mathbin{@}\mathrm{cps}[\tau_4, \tau_5]}{\Gamma \vdash e_1 \mathbin{@} e_2 : \tau_1 \mathbin{@}\mathrm{cps}[\tau_3, \tau_6]}\ (\textsc{TApp})
$$

$$
\frac{\Gamma \vdash e : \tau_1 \mathbin{@}\mathrm{cps}[\tau_1, \tau_2]}{\Gamma \vdash \langle e \rangle : \tau_2 \mathbin{@}\mathrm{cps}[\tau_3, \tau_3]}\ (\textsc{TReset})
$$

$$
\frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau_1 \mathbin{@}\mathrm{cps}[\beta, \gamma] \quad \Gamma, x : \tau_1 \vdash e_2 : \tau_2 \mathbin{@}\mathrm{cps}[\alpha, \beta]}{\Gamma \vdash (\mathsf{let}\ x = e_1\ \mathsf{in}\ e_2) : \tau_2 \mathbin{@}\mathrm{cps}[\alpha, \gamma]}\ (\textsc{TLet})
$$

1.3 DS 項の代入規則

代入規則は、$e[v/x] = e'$ と表現することができ、「項 e の中に現れる変数 x を値 v に置き換える」と読む。

今回用いる代入規則は以下である。

$$\frac{}{x[v/x] = x}\ (\textsc{sVar=}) \qquad \frac{}{y[v/x] = y}\ (\textsc{sVar} \neq) \qquad \frac{}{n[v/x] = n}\ (\textsc{sNum})$$

$$\frac{\forall x.(e[v/y] = e')}{(\lambda x.\, e)[v/y] = \lambda x.\, e'}\ (\textsc{sFun}) \qquad \frac{e_1[v/x] = e_1' \quad e_2[v/x] = e_2'}{(e_1 \mathbin{@} e_2)[v/x] = (e_1' \mathbin{@} e_2')}\ (\textsc{sApp})$$

$$\frac{}{\mathcal{S}[v/x] = \mathcal{S}}\ (\textsc{sShift}) \qquad \frac{e_1[v/x] = e_1'}{\langle e_1 \rangle[v/x] = \langle e_1' \rangle}\ (\textsc{sReset})$$

$$\frac{e_1[v/y] = e_1' \quad \forall x.(e_2[v/y] = e_2')}{(\mathsf{let}\ x = e_1\ \mathsf{in}\ e_2)[v/y] = \mathsf{let}\ x = e_1'\ \mathsf{in}\ e_2'}\ (\textsc{sLet})$$

1.4 DS 項の簡約規則

次に、簡約規則について示す。ただし、簡約規則を示す前に、フレームを定義する必要がある。フレームを定義することによって、簡約の順序を決めることができる。

$$\begin{array}{rcl} \text{フレーム}\quad F & = & [\ ] \mathbin{@} e_2 \mid v_1 \mathbin{@} [\ ] \mid \langle\, [\ ]\, \rangle \mid \mathsf{let}\ x = [\ ]\ \mathsf{in}\ e_2 \\ \text{評価文脈 (コンテキスト)}\quad E & = & [\ ] \mid F \circ E \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_2 : \tau_2 \mathbin{@} \mathrm{cps}[\tau_4, \tau_6]}{\Gamma \vdash ([\ ] \mathbin{@} e_2) : [\ (\tau_2 \to \tau_1 @\mathrm{cps}[\tau_3, \tau_4]) @\mathrm{cps}[\tau_5, \tau_6]\ ]_{\mathsf{f}}\ \tau_1 @\mathrm{cps}[\tau_3, \tau_6]}\ (\text{F-}\textsc{App}_1)$$

$$\frac{\Gamma \vdash v_1 : (\tau_2 \to \tau_1 @\mathrm{cps}[\tau_3, \tau_4]) \mathbin{@} \mathrm{cps}[\tau_5, \tau_5]}{\Gamma \vdash (v_1 \mathbin{@} [\ ]) : [\ \tau_2 @\mathrm{cps}[\tau_4, \tau_5]\ ]_{\mathsf{f}}\ \tau_1 @\mathrm{cps}[\tau_3, \tau_5]}\ (\text{F-}\textsc{App}_2)$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \langle [\ ] \rangle : [\ \tau_1 @\mathrm{cps}[\tau_1, \tau_2]\ ]_{\mathsf{f}}\ \tau_2 @\mathrm{cps}[\tau_3, \tau_3]}\ (\text{F-}\textsc{Reset})$$

$$\frac{\Gamma, x : \tau_1 \vdash e_2 : \tau_2 \mathbin{@} \mathrm{cps}[\alpha, \beta]}{\Gamma \vdash \mathsf{let}\ x = [\ ]\ \mathsf{in}\ e_2 : [\ \tau_1 @\mathrm{cps}[\beta, \gamma]\ ]_{\mathsf{f}}\ \tau_2 @\mathrm{cps}[\alpha, \gamma]}\ (\text{F-}\textsc{Let})$$

[ ] は、「次に計算を行う部分」である。「それ以外の部分」は、「文脈」と呼ぶ。評価文脈はフレームを何枚も重ね合わせたものであり、フレームの列として表すことができる。そのように表せるとすると、評価文脈 E に式 e を入れる関数 $plug_F$ を以下のように定義できる。

$$\begin{array}{rcl} plug_F([\ ] \mathbin{@} e_2, e_1) & = & e_1 \mathbin{@} e_2 \\ plug_F(v_1 \mathbin{@} [\ ], e_2) & = & v_1 \mathbin{@} e_2 \\ plug_F(\langle [\ ] \rangle, e_1) & = & \langle e_1 \rangle \\ plug_F(\mathsf{let}\ x = [\ ]\ \mathsf{in}\ e_2, e_1) & = & \mathsf{let}\ x = e_1\ \mathsf{in}\ e_2 \end{array}$$

次に、reset を含まないフレームである、ピュアフレームを定義する。

$$\begin{array}{rcl} \text{ピュアフレーム}\quad F_p & = & [\;]\,@\,e_2 \mid v_1\,@\,[\;] \mid \mathsf{let}\ x = [\;]\ \mathsf{in}\ e_2 \\ \text{ピュアコンテキスト}\quad E_p & = & [\;] \mid F_p \circ E_p \end{array}$$

$\boxed{\text{ピュアフレーム}\quad F_p}$

$$\frac{\Gamma \vdash e_2 : \tau_2\,@\mathrm{cps}[\tau_4, \tau_5]}{\Gamma \vdash ([\;]\,@\,e_2) : [\;(\tau_2 \to \tau_1@\mathrm{cps}[\tau_3, \tau_4])@\mathrm{cps}[\tau_5, \tau_6]\;]_{\mathsf{pf}}\ \tau_1@\mathrm{cps}[\tau_3, \tau_6]}\ (\mathrm{F}_p\text{-}\mathrm{App}_1)$$

$$\frac{\Gamma \vdash v_1 : (\tau_2 \to \tau_1@\mathrm{cps}[\tau_3, \tau_4])\,@\mathrm{cps}[\tau_5, \tau_5]}{\Gamma \vdash (v_1\,@\,[\;]) : [\;\tau_2@\mathrm{cps}[\tau_4, \tau_5]\;]_{\mathsf{pf}}\ \tau_1@\mathrm{cps}[\tau_3, \tau_5]}\ (\mathrm{F}_p\text{-}\mathrm{App}_2)$$

$$\frac{\Gamma, x : \tau_1 \vdash e_2 : \tau_2\,@\mathrm{cps}[\alpha, \beta]}{\Gamma \vdash \mathsf{let}\ x = [\;]\ \mathsf{in}\ e_2 : [\;\tau_1@\mathrm{cps}[\beta, \gamma]\;]_{\mathsf{pf}}\ \tau_2@\mathrm{cps}[\alpha, \gamma]}\ [(\mathrm{F}_p\text{-}\mathrm{Let})$$

$\boxed{\text{ピュアコンテキスト}\quad E_p}$

$$\frac{}{\Gamma \vdash [\;] : [\;\tau_1@\mathrm{cps}[\tau_2, \tau_3]\;]_{\mathsf{pc}}\ \tau_1@\mathrm{cps}[\tau_2, \tau_3]}\ (\mathrm{E}_p\text{-}\mathrm{Hole})$$

$$\frac{\Gamma \vdash F_p : [\;\tau_4@\mathrm{cps}[\tau_5, \tau_6]\;]_{\mathsf{pf}}\ \tau_7@\mathrm{cps}[\tau_8, \tau_9] \quad \Gamma \vdash E_p : [\;\tau_1@\mathrm{cps}[\tau_2, \tau_3]\;]_{\mathsf{pc}}\ \tau_4@\mathrm{cps}[\tau_5, \tau_6]}{\Gamma \vdash F_p \circ E_p : [\;\tau_1@\mathrm{cps}[\tau_2, \tau_3]\;]_{\mathsf{pc}}\ \tau_7@\mathrm{cps}[\tau_8, \tau_9]}\ (\mathrm{E}_p\text{-}\mathrm{Frame})$$

$\boxed{\text{ピュアフレーム同士の関係}\quad F_p \cong_{\mathsf{c}} F_p}$

$$\frac{}{([\;]\,@\,e_2) \cong_{\mathsf{f}} ([\;]\,@\,e_2)}\ (\cong_{\mathsf{pf}}\text{-}\mathrm{App}_1)$$

同様に、関数 $plug_{F_p}$ を定義する。

$$\begin{array}{rcl} plug_{F_p}([\;]\,@\,e_2, e_1) & = & e_1\,@\,e_2 \\ plug_{F_p}(v_1\,@\,[\;], e_2) & = & v_1\,@\,e_2 \\ plug_{F_p}(\mathsf{let}\ x = [\;]\ \mathsf{in}\ e_2, e_1) & = & \mathsf{let}\ x = e_1\ \mathsf{in}\ e_2 \end{array}$$

関数 $plug_{E_p}$ は以下のように定義できる。

$$\begin{array}{rcl} plug_{E_p}([\;], e) & = & e \\ plug_{E_p}(F_p \circ E_p, e) & = & plug_{F_p}(F_p, plug_{E_p}(E_p, e)) \end{array}$$

以上より、簡約規則は以下のように表せる。

$$\frac{e_1[v_2/x] = e_1'}{(\lambda x.\, e_1)\,@\,v_2 \rightsquigarrow e_1'}\ (\mathrm{RBeta}) \qquad \frac{e_1 \rightsquigarrow e_2}{plug_F(F, e_1) \rightsquigarrow plug_F(F, e_2)}\ (\mathrm{RFrame})$$

$$\frac{E_{p_1} \cong_{\mathsf{c}} E_{p_2}}{\langle E_{p_1}[\;\mathcal{S}\,@\,v_2\;]\rangle \rightsquigarrow \langle v_2\,@\,(\lambda y.\, \langle E_{p_2}[\;y\;]\rangle)\rangle}\ (\mathrm{RShift}) \qquad \frac{}{\langle v_1\rangle \rightsquigarrow v_1}\ (\mathrm{RReset})$$

$$\frac{e_2[v_1/x] = e_2'}{\mathsf{let}\ x = v_1\ \mathsf{in}\ e_2 \rightsquigarrow e_2'}\ (\mathrm{RLet})$$

2 CPS 項の定義

2.1 CPS 項の構文

$$
\begin{array}{rcll}
\tau & ::= & \mathsf{Nat} \mid \mathsf{bool} \mid \tau_1 \to \tau_2 & \text{型} \\
v & ::= & n \mid x \mid \lambda x.\, \lambda k.\, e \mid \mathcal{S} & \text{値} \\
\mathcal{S} & ::= & \lambda w.\, \lambda k.\, (w \,@\, (\lambda a.\, \lambda k'.\, k' \,@\, (k \,@\, a))) \,@\, (\lambda m.\, m) & \texttt{shift} \\
e & ::= & c \,@\, v \mid (v_1 \,@\, v_2) \,@\, c \mid c \,@\, e_2 & \text{項} \\
c & ::= & k \mid \lambda x.\, x \mid \lambda x.\, e & \text{継続}
\end{array}
$$

2.2 CPS 項の型付け規則

$$
\frac{\Gamma(x) = \tau_1}{\Gamma \vdash x : \tau_1}\ (\text{TV}{\scriptstyle\text{AR}}_{\mathsf{C}})
\qquad
\frac{}{\Gamma \vdash n : \mathsf{Nat}}\ (\text{TN}{\scriptstyle\text{UM}}_{\mathsf{C}})
\qquad
\frac{\Gamma, x : \tau_2, (\Delta = k) : \tau_1 \to \tau_3 \vdash e_k : \tau_4}{\Gamma \vdash \lambda x.\, \lambda k.\, e : \tau_2 \to (\tau_1 \to \tau_3) \to \tau_4}\ (\text{TF}{\scriptstyle\text{UN}}_{\mathsf{C}})
$$

$$
\frac{}{\Gamma \vdash \mathcal{S} : ((\tau_1 \to (\tau_2 \to \tau_3) \to \tau_3) \to (\tau_4 \to \tau_4) \to \tau_5) \to (\tau_1 \to \tau_2) \to \tau_5}\ (\text{TS}{\scriptstyle\text{HIFT}}_{\mathsf{C}})
$$

$$
\frac{\Delta : \tau_4 \to \tau_3 \vdash c_\Delta : \tau_2 \to \tau_1 \quad \Gamma \vdash v : \tau_2}{\Gamma, \Delta : \tau_4 \to \tau_3 \vdash c \,@\, v : \tau_1}\ (\text{TR}{\scriptstyle\text{ET}}_{\mathsf{C}})
$$

$$
\frac{\Delta : \tau_4 \to \tau_3 \vdash c_\Delta : \tau_2 \to \tau_1 \quad \Gamma, (\Delta = \bullet) : \tau_0 \to \tau_0 \vdash e_\bullet : \tau_2}{\Gamma, \Delta : \tau_4 \to \tau_3 \vdash (c_\Delta \,@\, e_\bullet) : \tau_1}\ (\text{TR}{\scriptstyle\text{ET}}\text{E}_{\mathsf{C}})
$$

$$
\frac{\Gamma \vdash v_1 : \tau_2 \to (\tau_1 \to \tau_3) \to \tau_4 \quad \Gamma \vdash v_2 : \tau_2 \quad \Delta : \tau_6 \to \tau_5 \vdash c_\Delta : \tau_1 \to \tau_3}{\Gamma, \Delta : \tau_6 \to \tau_5 \vdash (v_1 \,@\, v_2) \,@\, c_\Delta : \tau_1}\ (\text{TA}{\scriptstyle\text{PP}}_{\mathsf{C}})
$$

$$
\frac{\Delta(k) = \tau_1 \to \tau_2}{(\Delta = k) : \tau_1 \to \tau_2 \vdash k : \tau_1 \to \tau_2}\ (\text{TC}{\scriptstyle\text{ONT}}\text{V}{\scriptstyle\text{AR}}_{\mathsf{C}})
\qquad
\frac{}{(\Delta = \bullet) : \tau_1 \to \tau_1 \vdash \lambda x.\, x : \tau_1 \to \tau_1}\ (\text{TC}{\scriptstyle\text{ONT}}\text{I}{\scriptstyle\text{D}}_{\mathsf{C}})
$$

$$
\frac{\Gamma, x : \tau_1, \Delta : \tau_4 \to \tau_3 \vdash e_\Delta : \tau_2}{\Delta : \tau_4 \to \tau_3 \vdash \lambda x.\, e_\Delta : \tau_1 \to \tau_2}\ (\text{TC}{\scriptstyle\text{ONT}}_{\mathsf{C}})
$$

2.3 CPS 項の代入規則

2.4 CPS 項の簡約規則

2.5 CPS 変換の定式化

Biernacki の `shift/reset` を含む computational な $\lambda_{c\mathcal{S}}$ 計算からの CCS 変換を示す。

$$
\begin{array}{lcl}
x^\dagger & = & x \\
\lambda x.\, e^\dagger & = & \lambda xk.\, (e : k) \\
\mathcal{S}^\dagger & = & \lambda wj.\, (w \mathbin{@} (\lambda yk.\, k \mathbin{@} (j \mathbin{@} y))) \mathbin{@} (\lambda m.\, m) \\
\\
v : K & = & K \mathbin{@} v^\dagger \\
(e_1 \mathbin{@} e_2) : K & = & e_1 : (\lambda m.\, (e_1 : (\lambda n.\, m \mathbin{@} n \mathbin{@} K))) \\
(e_1 \mathbin{@} v_2) : K & = & e_1 : (\lambda m.\, m \mathbin{@} {v_2}^\dagger \mathbin{@} K) \\
(v_1 \mathbin{@} e_2) : K & = & e_2 : (\lambda n.\, {v_1}^\dagger \mathbin{@} n \mathbin{@} K) \\
(v_1 \mathbin{@} v_2) : K & = & {v_1}^\dagger \mathbin{@} {v_2}^\dagger \mathbin{@} K \\
(\mathsf{let}\ x = e_1\ \mathsf{in}\ e_2) : K & = & e_1 : (\lambda m.\, (e_2 : K)) \\
\langle e \rangle : K & = & K \mathbin{@} (e : (\lambda m.\, m))
\end{array}
$$

3 DS 項 (kernel) の定義

3.1 DS 項 (kernel) の構文

$$
\begin{array}{lcll}
\tau & ::= & \mathsf{Nat} \mid \mathsf{bool} \mid \tau_1 \to \tau_2 @\mathrm{cps}[\tau_3, \tau_4] & \text{型} \\
v & ::= & n \mid x \mid \lambda x.\, e \mid \mathcal{S} & \text{値} \\
p & ::= & v \mid e_1 \mathbin{@} e_2 \mid \langle e \rangle \mid \mathsf{let}\ x = e_1\ \mathsf{in}\ e_2 & \text{値以外} \\
e & ::= & K[v] \mid K[p] & \text{項}
\end{array}
$$

3.2 DS 変換の定義

$$
\begin{array}{lcl}
x^\natural & = & x \\
(\lambda xk.\, e)^\natural & = & \lambda x.\, \mathcal{S} \mathbin{@} (\lambda k.\, e^\sharp_k) \\
(\lambda wj.\, (w \mathbin{@} (\lambda yk.\, k \mathbin{@} (j \mathbin{@} y))) \mathbin{@} (\lambda m.\, m))^\natural & = & \mathcal{S} \\
\\
k^\flat & = & k \mathbin{@} [\ ] \\
(\lambda x.\, x)^\flat & = & [\ ] \\
(\lambda x.\, e_\Delta)^\flat & = & \mathsf{let}\ x = [\ ]\ \mathsf{in}\ e^\sharp_\Delta \\
\\
(K_\Delta \mathbin{@} v)^\sharp & = & K^\flat_\Delta[v^\natural] \\
(v_1 \mathbin{@} v_2 \mathbin{@} K_\Delta)^\sharp & = & K^\flat_\Delta[{v_1}^\natural \mathbin{@} {v_2}^\natural] \\
(K_\Delta \mathbin{@} e_\bullet)^\sharp & = & K^\flat_\Delta[\langle {e_\bullet}^\sharp \rangle]
\end{array}
$$