* 1. motivación

La Diabetes Mellitus tipo 1 (DM1) es una enfermedad crónica autoinmune caracterizada por la destrucción de las células beta del páncreas, lo que le imposibilita producir insulina. Los pacientes con esta enfermedad no tienen la capacidad de generar suficiente insulina para llevar la glucosa del torrente sanguíneo a las células. Esto da lugar a un aumento de la glucosa en sangre (GS). Esta situación se conoce como hiperglucemia, y puede provocar problemas sanguíneos deteriorando la hemoglobina o los vasos sanguíneos. Si no se trata a tiempo, los efectos a largo plazo sobre el organismo pueden llevar al paciente a un estado de coma o incluso provocar su muerte.

Para poder llevar una vida normal, los pacientes de DM1 necesitan administrarse insulina subcutánea de por vida para suplir su déficit y evitar la hiperglucemia. Por otro lado, un exceso de insulina puede dar lugar a una situación de hipoglucemia, donde los niveles de GS son muy bajos, que es asimismo peligroso. El control glucémico es un punto crítico en este tipo de pacientes, que deben encontrar un punto de balance entre ambos extremos.

Para obtener el control glucémico autónomo es necesario que el pacien-te mida de forma regular su nivel de GS. Esto se puede hacer utilizando Monitores Continuos de Glucosa (MCG). Estos dispositivos no miden la GS directamente, sino que trabajan con la glucosa intersticial (GI), es decir, la que se encuentra en el espacio intercelular, siendo menos intrusivos para el paciente. Los MCG permiten medir la GI del paciente a intervalos de tiempo regulares, del orden de minutos.

El MCG por sí solo no basta para llevar a cabo un buen control glucémico. Necesita trabajar conjuntamente con un algoritmo que sea capaz de anticiparse al desarrollo del estado del paciente. Debe ser capaz de realizar predicciones con los datos proporcionados por dicho monitor. Una bomba de insulina proporciona esta sustancia al paciente según lo considere necesario el MCG. Juntos, estos elementos formarían un sistema conocido como Páncreas Artificial (PA).

Sin embargo el PA aún no se ha desarrollado plenamente, presentando todavía ciertos problemas y dificultades. A continuación se listan una serie de problemas relacionados con los MCG:

El sensor de glucosa que llevan incorporado introduce ruidos asociados a la medición. Además, se degradan progresivamente a lo largo de su vida útil. Esto dificulta la interpretación de los datos obtenidos y genera la necesidad de procesarlos primero.

La glucosa se distribuye por el organismo a través del torrente sanguíneo y, antes de llegar a las células pasa por el ruido intersticial, que es donde el MCG efectúa las medidas para ser lo menos invasivo posible para el paciente. Debido a que el transporte de la glucosa de un medio a otro no es instantáneo el valor de la GI presenta cierto retraso frente al valor de la GS, por lo que los valores recogidos por el sensor no son los correspondientes a la GS del paciente en ese momento.

El MCG necesita una calibración frecuente. Para ello se usa como referencia un muestreo de la GC del propio paciente.

Es necesario ajustar de forma personalizada los parámetros de los otros incluidos en el MCG para adaptarlos a las características individuales de cada paciente. Además, para un mismo paciente, factores como la edad, la alimentación, los hábitos de salud y la actividad diaria hacen que varíe el comportamiento de la glucosa en su organismo.

Una solución propuesta actualmente para estos problemas es la utilización de filtros Kalman. Éstos hacen uso de algoritmos recursivos que permiten identificar el estado oculto de un sistema utilizando medidas indirectas del mismo, al mismo tiempo que predicen su comportamiento futuro y eliminan el ruido de la señal. Las equivalencias con el monitor de glucosa son:

El estado oculto del sistema es la glucosa en sangre, ya que se quiere medir sin actuar directamente sobre ella.

La glucosa intersticial será la medida indirecta para identificar la GS debido a la relación que tiene con la misma.

El principal problema de esta propuesta es que la implementación de este tipo de filtros se hace mediante software. De esta manera, no pueden trabajar con otros datos que no estén procesados y tratados en primer lugar por el sensor. A causa de esto, los problemas listados anteriormente pueden verse agravados y el filtro no puede mostrar todo su potencial.

Para ofrecer una solución viable y factible a los problemas de los MCG existentes y de las implementaciones software del filtro Kalman, en este proyecto se implementa sobre una FPGA un filtro Kalman de tres estados (glucosa, velocidad de variación de la glucosa y aceleración de la velocidad de dicha variación). Éste podrá utilizar como entrada las medidas reales de GI proporcionadas por un MCG sin que estén adulteradas por el tratamiento previo de los filtros digitales hardware de los sensores.

Filtros que vamos a estudiar:

Filtro kalman extendido

Fitros kalman unscented

Filtro de partículas

Filtro bayesiano

* 1. MODELO DE SISTEMA DINAMICO Y MODELO DE OBSERVACIÓN

Para poder aplicar filtros bayesianos hay que definir tanto el modelo dinámico del sistema como el modelo de observación. En este trabajo como modelo dinámico del sistema vamos a utilizar el propuesto por Acedo et al en 2016 y como modelo de observación el propuesto por kinsey en 2006.

* + 1. Modelo dinámico del sistema

Este modelo se desarrolló con el objetivo de conseguir controlar los niveles de la glucosa post pandrial y contiene seis parámetros que se ajustan a cada uno de los pacientes de manera individual. Estos parámetros están relacionados con la biodisponibilidad de la comida, la absorción de insulina y la sensibilidad a la insulina, la producción de glucosa endógena producida y la efectividad a cero insulina.

Donde:

* es la absorción de glucosa en el intestino en el instante t medido en
* la ratio de variación de la absorción de glucosa en el intestino medida en
* es el nivel de glucosa en el instante t medido en
* es la acción de la insulina en
* es el nivel de carbohidratos ingeridos en el instante t en
* es el nivel de insulina inyectada en el instante t medida en
* es y una constante dada por
* es la inversa de la constante de tiempo de comida medida en
* is the unitless bioavailability of the meal of interest,
* is the inverse of the insulin absorption/action time constant measured in 1/min,
* es la sensibilidad a la insulina medida en
* Producción de glucosa endógena independiente de la insulina medida en
* La eficacia de la glucosa en cero insulina medido en
* peso del paciente en kilogramos

Visto lo anterior el vector de estado del sistema dinámico es

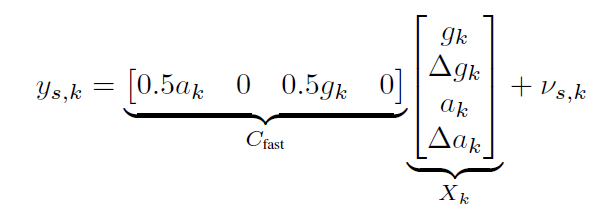
Y

Son los parámetros de modelos que se tienen que ajustar para cada paciente.

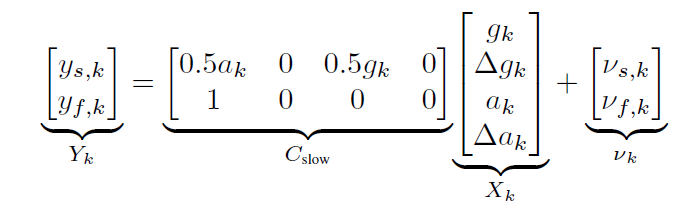
* + 1. Modelos de observación

Como se ha indicado hay dos modelos de observación. Uno de ellos es el rápido en el que el dato se obtiene mediante cgm cada cinco minutos. Este es un modelo no lineal:

Que representado en forma matricial queda:



El otro modelo que llamamos lento es una combinación de la observación obtenida por el cgm y el pinchazo



Resumiendo indicar que el tipo de modelos tanto de proceso como de observación son no lineales.

1. FILTROS BAYESIANOS

(simo\_libro\_2013)

El término *filtrado óptimo* se refiere a una clase de métodos que pueden usarse para estimar el estado de un sistema dinámico que se observa indirectamente a través de medidas ruidosas. En este contexto el término *óptimo* hay que entenderlo dentro del contexto de *optimización estadística*. Los *filtros bayesianos* son aquellos que utilizan una aproximación bayesiana para formular el algoritmo de filtrado óptimo.

En este tipo de filtros el *estado del sistema* se refiere a una colección de variables dinámicas tales como posición, velocidad,… que describen totalmente el sistema. El *ruido de una medida* es la incertidumbre existente en el valor obtenido. Incluso si se conoce el verdadero valor del estado del sistema la medida no sería una función determinista del estado, sino que sería una distribución de posibles valores. La evolución en el tiempo del estado se modela como un sistema dinámico que es perturbado por un cierto ruido de proceso. Este ruido se usa para modelar las incertidumbres en el sistema dinámico. En la mayoría de los casos el sistema no es estocástico, pero esta propiedad se utiliza para representar las incertidumbres del modelo.

El filtrado bayesiano no hace suposiciones sobre la naturaleza de la evolución dinámica del sistema (lineal o no lineal), las características de los ruidos relacionados con la evolución del estado o las estadísticas de los ruidos usados para obtener la estimación del estado. Lo que si supone es que los modelos de la evolución del estado (incluyendo las incertidumbres) y los modelos de observación con su correspondiente ruido están disponibles.

Por lo tanto, para definir formalmente el problema de filtrado hay que determinar, por un lado, el modelo dinámico del sistema que establece la evolución en el tiempo del vector de estados, x:

Donde es una función sobre la cual no se hacen suposiciones, y es el ruido del proceso, para ser más exactos es una representación funcional de la incertidumbre del modelo de evolución de los estados.

Por otro lado hay que definir el modelo de observación que relaciona el vector de estado con las medidas realizadas :

donde es la función de observación y es una representación estadística del ruido que corrompe la medida tomada en el instante k.

En términos matemáticos un filtrado óptimo es un problema de inversión estadística, donde la cantidad desconocida es un serie temporal de estados {x0, x1, x2} que se observa a través de un conjunto de medidas ruidosas {y1, y2,…}. El propósitos de la inversión estadísticas es estimar los estados ocultos a partir de las medidas observadas lo que en sentido bayesiano significa calcular la distribución posterior total de todos los estados dadas todas las medidas. Esto se consigue mediante la aplicación directa de la regla de Bayes:

Donde:

* es la distribución a posteriori (probabilidad de condicionada a )
* es la distribución a priori definida por el modelo dinámico de estados
* es el modelo de probabilidad para las observaciones (probabilidad de condicionada a ) y viene dado por el modelo de observación
* es una constante de normalización definida por

El teorema de Bayes permite la realización de sucesivas estimaciones de forma recursiva. El teorema es una ecuación que trabaja con probabilidades, por lo tanto se deben usar distribuciones de probabilidad. Estas distribuciones son discretas en el caso de un filtro basado en grid.

El filtrado se realiza en dos pasos: **predicción y corrección**. Durante la fase de predicción se toma el vector de estados (formado por las distribuciones de probabilidad de cada estado) en el instante k-1, y se usa un modelo dinámico de estado *f* para evolucionarlo al instante actual k. En otras palabras se parte de la distribución de probabilidad posterior de la iteración anterior para obtener la distribución de probabilidad a priori del instante actual.

En la fase de corrección se aplica el teorema de Bayes para conocer, en función de los datos observados, cuán probable es que la distribución de probabilidad a priori sea cierta. *El resultado será la distribución de probabilidad posteriori en el instante k y el máximo de esta distribución de probabilidad se toma como la estimación realizada por el filtro*. En la figura se muestra un esquema sobre el funcionamiento del filtro.

La diferencia entre la inferencia bayesiana y otros métodos (por ejemplo el método de máxima verosimilitud) es que supone que los estados son variables aleatorias lo que permite aplicar el teorema de Bayes.

Esta formulación presenta el siguiente problema, para cada nueva observación hay que recalcular completamente la distribución total a posteriori. Este es un problema importante sobre todo en la estimación dinámica, puesto que se obtiene una medición en cada instante de tiempo y se desea realizar la estimación para cada medida. Por lo tanto cuando incrementa el tiempo también incrementa la distribución posterior y por lo tanto aumenta la complejidad computacional del algoritmo.

Sin embargo este problema solo aparece si se quiere calcular la distribución a posteriori total en cada instante de tiempo. Si se puede relajar esta característica y es suficiente tener una distribución posterior marginal, la complejidad computacional no aumenta tanto con el paso del tiempo. Para poder relajar las condiciones también es necesario limitar la clase de modelos dinámicos a secuencias de Markov probabilísticas. Los modelos de estado y observación deberían, según lo anterior, ser de la siguiente forma:

* Una distribución inicial que especifica la distribución de probabilidad a priori p(x0) del estado oculto x0 en el paso inicial k=0
* Un modelo de estado dinámico que describe el sistema y sus incertidumbres como una secuencia de Markov definida en términos de la distribución de la probabilidad de transición , es decir el estado sólo depende el estado en el instante anterior , que es una de las características que definen una cadena de Markov.
* Un modelo de observación que describe como la medida depende del estado actual . Esta dependencia se modela especificando la distribución de probabilidad condicional de la medida dada un estado

Visto lo anterior un modelo de estado y de observación se expresan desde un punto de vista probabilístico como:

Existen algunas clases de filtros bayesianos que son soluciones cerradas a determinados tipos de problemas, como los filtros Kalman que se centran en sistemas lineales gaussianos. Debido a estas condiciones la distribución a posteriori es exactamente gaussiana y no necesita aproximaciones numéricas.

Pero pocos sistemas tiene estas características por lo tanto se han realizado diversas aproximaciones numéricas para solucionar el problema de la complejidad computacional como pueden ser:

* **El filtro Kalman extendido.** Este método numérico se aplica a modelos dinámicos de estado y modelos de observación no lineales no gaussianos**.** Supone que las variables aleatorias son gaussianos que se representan mediante su media y covarianza y linealiza los modelos no lineales mediante series de expansión de Taylor, de manera que las distribuciones a posteriori también se puedan considerar gaussianas.
* **El filtro Kalman unscented**. Igual que antes este método numérico también se aplica a sistemas no lineales no gaussianos. Supone que las variables aleatorias son gaussianas, pero ahora las representa mediante un conjunto de puntos sigma de muestreo que genera mediante la transformada unscented, y propaga cada uno de estos puntos sin linealizar la función.
* **Filtros de partículas o métodos secuenciales de Monte Carlo.** Este método numérico se aplica a sistemas no lineales no gaussianos, pero a diferencia de los otros dos casos no supone que las variables son gaussianas. En este caso la aproximación usada es el método de monte Carlo. La distribución a posteriori al representa como un conjunto pesado de muestreo de Monte Carlo

En los próximos capítulos se estudiarán el filtro Kalman discreto, el filtro Kalman extendido, el unscented y el de partículas indicando sus ventajas, inconvenientes y los sistemas que mejor se ajustan a cada uno de ellos.

1. FILTRO KALMAN

Vamos a estudiar tres tipos de filtros Kalman:

* **Discreto**: Las ecuaciones de los modelos de proceso y de medición son lineales. Y los ruidos se suponen aditivos, blancos y gaussianos
* **Extendido**: Las ecuaciones de los modelos de proceso y/o medición no son lineales. Y los ruidos se suponen gaussianos
* **Unscented**: las ecuaciones de los modelos de proceso y/o medición no son lineales, los ruidos no tienen que considerarse gaussianos
  1. FILTRO KALMAN DISCRETO

[kalman\_intro\_welch\_bishop\_2006.pdf]

El filtro Kalman es un algoritmo propuesto por Rudolf E. Kalman en 1960 como solución recursiva al problema del filtrado de datos lineales discretos. Desde su introducción, debido a su robustez y simplicidad, se ha usado en muchos ámbitos como en predicciones financieras, rastreo de misiles o navegación autónoma y asistida. Su objetivo es estimar de manera óptima el estado oculto de un sistema a partir de medidas indirectas del mismo. Es útil para el filtrado de ruidos blancos y gaussianos aditivos. Los ruidos blancos son aquellos cuyo valor no está correlacionado en el tiempo. Los ruidos gaussianos son aquellos cuya amplitud en un instante de tiempo sigue una distribución de Gauss.

El estado se considera una variable aleatoria gaussiana que viene definida por su media y su covarianza. La idea es transmitir la media y la covarianza a través del modelo lineal de proceso dinámico y del modelo de observación y después corregirlas mediante las ecuaciones del filtro. Estas ecuaciones intentan encontrar una estimación de la media del estado mediante una ecuación lineal de la estimación a priori y una diferencia pesada entre las observaciones reales y las observaciones estimadas. El peso se llama ganancia de Kalman y su objetivo es minimizar la covarianza del estado a posteriori.

[kalman\_intro\_welch\_bishop\_2006.pdf]

El filtro Kalman es una solución cerrada para las ecuaciones de filtrado bayesianas donde los modelos de proceso dinámico y de observación son lineales gaussianos, y donde los ruidos son blancos gaussianos aditivos. Supongamos que los modelos de proceso dinámico y observación lineales vienen dados por las siguientes expresiones:

Donde:

* es el estado en el instante k
* A es la matriz que relaciona el estado en el instante k con en estado en el instante anterior
* es el ruido del modelo en el instante k
* es la observación en el instante k
* H es la matriz que me relaciona la observación con el estado
* es el ruido de observación en el instante k

Supongamos también que los ruidos de proceso y de observación son independientes entre sí y blancos gaussianos con una distribución de probabilidad normal, luego

Donde Q es la covarianza del proceso y R la covarianza de la observación. En términos probabilísticos los modelos se expresan:

Visto lo anterior se puede decir que las ecuaciones de filtrado bayesianas para modelos lineales se pueden evaluar de forma analítica y las distribuciones resultantes son gaussianas:

Los parámetros estadísticos de las anteriores distribuciones se pueden calcular según las siguientes expresiones:

Fase de predicción:

Fase de actualización:

Donde:

* es la media del estado a priori en el instante k
* es la media del estado a posteriori en el instante k
* A es la matriz que relaciona el estado en el instante k y en el instante k-1
* es la covarianza de estado a priori en el instante k
* es la covarianza de estado a posteriori en el instante k-1
* Q es la covarianza de error de proceso
* es la ganancia de Kalman
* se llama innovación o residual y muestra la discrepancia entre la medida predicha y la medida real.

Como se ha indicado, este filtro sólo es útil para sistemas lineales con ciertos tipos de ruidos. Se introduce para simplificar el entendimiento de los dos siguientes filtros que se estudian, el extendido y el unscented.

* 1. FILTRO KALMAN EXTENDIDO

Como se ha visto en secciones anteriores, a menudo ocurre que en aplicaciones prácticas los modelos tanto de proceso como de observación son no lineales y por lo tanto el filtro Kalman discreto no es apropiado para la estimación. Sin embargo en ocasiones los modelos no lineales pueden aproximarse por distribuciones gaussianas. Este es el caso del filtro Kalman extendido en el que la aproximación gaussiana se lleva a cabo mediante series de expansión de Taylor.

En este filtro la distribución de estado se aproxima mediante una variable aleatoria que se supone gaussiana definida por su media y covarianza y que se propaga analíticamente a través de una linealización de primer orden del sistema no lineal mediante serie de expansión de Taylor. Es importante recordar que, al contrario de lo que ocurre en el filtro Kalman discreto, las distribuciones de las variables aleatorias dejan de ser normales al propagarse a través de transformaciones no lineales y por lo tanto este filtro sólo proporciona una aproximación al valor óptimo. Existen dos aproximaciones de filtro Kalman extendido, una para ruidos de observación aditivos y otra para ruidos no aditivos. En este tutorial nos centraremos en los ruidos aditivos. Para ver un desarrollo para ruidos no aditivos mirar en sino\_libro\_2013.

Los modelos de proceso dinámico y de observación se pueden expresar como sigue

Donde :

* es el estado
* es la medida
* es el ruido gaussiano de proceso
* es el ruido gaussiano de observación
* es el modelo de proceso dinámico
* es el modelo de observación

La idea del filtro Kalman extendido es asumir aproximaciones gaussianas de manera que

Y linealizar las funciones de no lineales mediante series de Taylor. Los modelos y las ecuaciones resultantes son las siguientes:

Fase de Predicción:

Fase de corrección:

Donde:

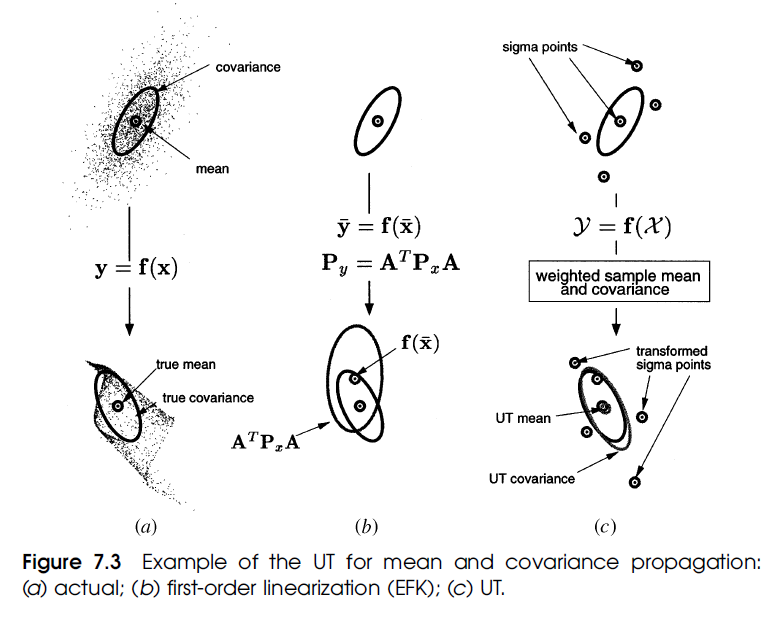
* es la matriz jacobiana de evaluada en
* es la matriz jacobiana de evaluada en

Nota: La matriz jacobiana es una matriz formada por las derivadas parciales de primer orden de una función. Una de las aplicaciones más interesantes de esta matriz es la posibilidad de aproximar linealmente a la función en un punto. En este sentido, el jacobiano representa la derivada de una función multivariable.

La ventaja del EFK con respecto a otros métodos de filtrado no lineal es su relativa simplicidad comparada con su rendimiento. La desventaja es que debido a que se basa en una aproximación lineal local no funcionará bien con problemas fuertemente no lineales. También este filtro tiene restricciones en el sentido de que sólo se permite ruidos gaussianos del proceso. Por otro lado los modelos tienen que ser diferenciables, lo que es una restricción. En algunos casos simplemente la matriz jacobiana no se puede calcular lo que hace inservible la técnica. Incluso cuando las matrices jacobianas existen y pueden ser calculadas su cálculo puede ser muy propenso a errores.

Otro problema del filtro es que solo consigue una exactitud de primer orden en la serie de expansión de Taylor por lo que la linealización utilizada puede producir grandes errores en la verdadera media y covarianza a posteriori de la variable aleatoria gaussiana transformada. Esto puede dar lugar a rendimientos subóptimos y en algunas ocasiones provocar la divergencia del filtro.

* 1. FILTRO KALMAN UNSCENTED



(Simo\_libro\_2013 y capítulo\_7)

Representa una alternativa al filtro Kalman extendido sin necesidad de aplicar jacobianos y obtiene un rendimiento superior con un nivel de complejidad similar. ***En este caso la distribución del estado también se representa mediante una variable aleatoria gaussiana***, pero ahora se especifica mediante un conjunto mínimo de puntos de muestreo escogidos mediante la transformación unscented. Estos puntos capturan completamente la auténtica media y covarianza de la variable y se pueden propagar a través del verdadero sistema no lineal capturando exactamente la media y covarianza a posteriori hasta el segundo orden de una serie de expansión de Taylor para cualquier no linealidad.

Para poder comprender el UKF primero hay que explicar la transformación unscented en la que se basa. La UT es un método para calcular las estadísticas de una variable aleatoria que sufre una transformación no lineal.

Transformada unscented

Es una función matemática que se usa para estimar el resultado de aplicar una función no lineal a una distribución de probabilidad que está caracterizada por un conjunto finito de muestras

La filosofía difiere de la linealización en que esta transformada intenta aproximar directamente la media y la covarianza de la distribución objetivo en lugar de intentar aproximar la función no lineal.

La idea es escoger deterministamente un número fijo de puntos sigma que capturen exactamente la media y la covarianza de la distribución inicial de x. A continuación cada uno de estos puntos sigma se propaga a través de la función no lineal y la media y la covarianza de la variable transformada se calculan a partir de estos puntos. La principal diferencia con la aproximación de Monte Carlo (utilizada en el filtro de partículas) es que la elección de los puntos de muestreo es determinística. El proceso es el siguiente:

**1. Se generan los puntos sigma**

Se forma un conjunto de 2n+1 puntos sigma, siendo n las dimensiones del estado, aplicando las siguientes expresiones:

,

Donde

* m es la media de la distribución inicial
* P es la covarianza de la distribución inicial
* es la iesima columna de la matriz raíz cuadrada de P que cumple
* es un parámetro de escalado. La constante α determina la distribución de los puntos sigma alrededor de y generalmente se le da un valor muy pequeño (1≤α≤10-4)
* La constante k es un parámetro de escalado secundario, cuya valor se suele fijar a 3-L. y *k* determinan la dispersión de los puntos sigma alrededor de la media m

**2.- Propagación de los puntos sigma**

Se propaga cada uno de los puntos sigma a través de la función no lineal g

**3.- Se estima la media y la nueva covarianza de la nueva distribución**

Y la media y la covarianza se aproximan usando las siguientes expresiones:

Donde los pesos para cálculo de la media y los pesos para el cálculo de la covarianza vienen dados por las siguientes expresiones

Siendo β un valor que se usa para incorporar conocimiento previo de la distribución de x (para distribuciones gaussianas β=2)

Nota: la transformada que se muestra es la general. Existen transformadas particulares para los casos en los que los ruidos son aditivos o no aditivos que se pueden ver en el libro sino\_libro\_2013

A continuación se muestran las ecuaciones del UKF para el caso en el que el ruido es aditivo de media cero, es decir cuando los modelos se pueden expresar como sigue

La idea del filtro Kalman unscented es asumir aproximaciones gaussianas de manera que

Donde son la media y la covarianza calculadas por el algoritmo .Las expresiones del algoritmo para modelos no lineales aditivos son las siguientes:

**Predicción**

1.- Calcular los puntos sigma

,

2.- Propagar los puntos sigma a través del modelo de proceso dinámico

3.- Calcular la media a priori y la covarianza a priori :

**Actualización**

1.- Se forman los puntos sigma:

,

2.- Se propaga a través del modelo de observación

3.- Se calcula la media predicha , la covarianza predicha y la covarianza cruzada

4.- Calcular la ganancia Kalman, la media del estado a posteriori y la covarianza a posteriori, condicionado a las medidas yk

Nota: una variación del algoritmo para ruidos no aditivos se puede encontrar en el libro sino\_libro\_2013

1. El FILTRO DE PARTÍCULAS
   1. Método de montecarlo

En la inferencia bayesiana el mayor problema que se encuentra es resolver la ecuación de la distribución posterior que viene dada por:

Donde es la densidad de probabilidad posterior de x dada las medidas y1,…,yt. El problema, como hemos visto con anterioridad es que dicha integral solo puede evaluarse en forma cerrada en contadas ocasiones y por lo tanto hay que utilizar métodos numéricos para solucionarla. Uno de estos métodos es el de Monte Carlo, que aproxima este tipo de integrales generando un conjunto de muestras aleatorias a partir de la distribución y estimando las estadísticas mediante los promedios de las muestras. En una aproximación perfecta de Monte Carlo se generan N muestras aleatorias independientes y la media estimada viene dada por:

)

La convergencia del método de monte carlo está asegurada por el teorema del límite central. El error es independiente de la dimensión de N lo que hace al método superior a cualquier otro cuando la dimensión de x es considerable

* 1. Importance sampling

A menudo en modelos bayesianos no es posible obtener muestreos directamente de debido a su forma funcional. El importance samplig es una técnica general para estimar las propiedades de una distribución particular, teniendo sólo muestreos generados de una distribución diferente a la distribución de interés. El algoritmo del importance sampling es el siguiente:

Dado un modelo de observación y una probabilidad de distribución a priori se puede formar una aproximación a la distribución posterior como sigue:

1 seleccionar N muestras a partir de la distribución de importancia

2.- calcular los pesos no normalizados

Y los pesos normalizados

3.- aproximación a la media de g(x)

Una aproximación a la densidad de probabilidad a posteriori obtenida del anterior algoritmo se puede escribir como

Donde es la función delta de Dirac

* 1. Sequential importance sampling

Es una versión secuencial del importance sampling. Se usa para generar aproximaciones importance sampling para modelos de la forma:

Este algoritmo utiliza un conjunto de partículas con sus pesos, es decir muestras de una distribución de importancia y sus pesos para representar la distribución de manera que a cada paso k la aproximación a la media (expectación) de una función g puede calcularse como

Algoritmo:

Generar un conjunto de muestras a partir de la distribución a priori

Y un conjunto de pesos

Para cada k hacer lo siguiente:

1 extraer muestras de la distribución de importancia

2.-calcular los pesos según:

Un problema que encontramos en las EFK y UFK es la suposición gaussiana que utilizan para simplificar la estimación bayesiana recursiva óptima. El problema de esta aproximación es que en muchas ocasiones no captura el comportamiento del sistema. En definitiva se podrían necesitar no una sino varias gaussianas o funciones multimodales para describir el comportamiento del sistema. En estos casos las distribuciones no tendrían una representación matemática sencilla. [0000\_particle filtes]

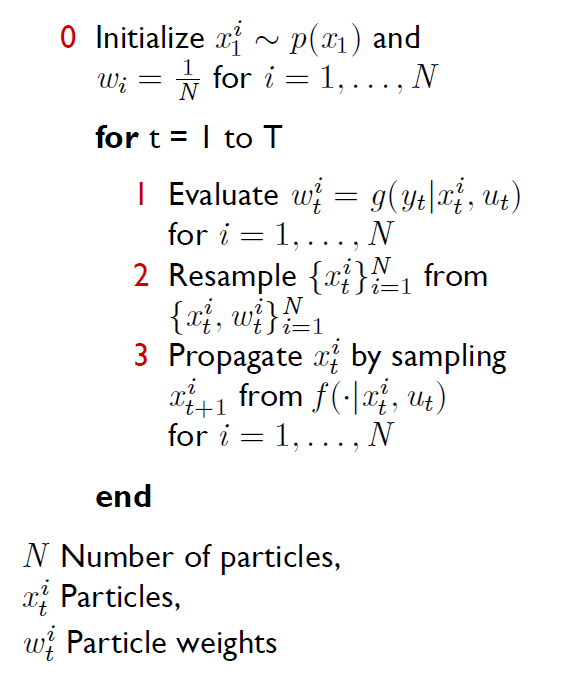
Como alternativa se puede usar el filtro de partículas que no hacen suposiciones sobre la forma de la densidad de probabilidad, es decir emplean una estimación no gaussiana totalmente no lineal. Este es un método secuencial de Monte Carlo que utiliza un conjunto de estados probables del sistema que se llama grid de partículas para solucionar el problema del filtrado.

Como todos los filtros bayesianos tiene una fase de predicción en la que se aplican la llamada “proposal distribution” que suele ser el modelo del proceso teniendo en cuenta los ruidos de proceso, una fase de corrección, en la que se utilizan las mediciones obtenidas y las mediciones predichas mediante el modelo de observación para corregir las predicciones de la fase anterior. Estas medidas se relacionan mediante una función de distribución de probabilidades que es la que nos dará el peso de cada partícula. Generalmente se utiliza una función de distribución de probabilidad normal, como la que se puede ver a continuación:

Dónde:

* σ es la covarianza del ruido de medición
* Y es la medición

pero se puede utilizar cualquier otra que se aproxime mejor a las características del problema. Existe una tercera fase que se llama resampling muy similar a la fase de generación de una nueva población de los algoritmos genéticos. Consiste en obtener un nuevo grid de partículas de manera que sólo permanezcan en este las partículas de mayor peso. De hecho en casi toda la literatura utilizan el método de la ruleta para obtener las partículas que formarán parte de la siguiente generación. A continuación se puede ver el algoritmo.



Donde

* N es el número de partículas
* es una partícula
* es el peso de una partícula
* g es un pdf que relaciona las medidas reales con las medidas estimadas mediante el modelo de observación.
* f es la función no lineal que modela el proceso

Para estimar el valor del estado en cada instante de tiempo se aplica la expresión: