Методы оптимизации

Волкова Юлия

29 Октября, 2015

1 Постановка задачи

Найти экстремум функции

$$f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_1 x_2 + 2x_3 \tag{1}$$

Необходимо на множестве R^n найти:

1. Записать необходимые условия экстремума первого порядка.
2. Проверить выполнение достаточных и необходимых условий второго порядка в каждой стационарной точке двумя способами.
3. Найти все стационарные точки и значения функций соответствующие этим точкам.

2 Решение

2.1 Поиск экстремума первого порядка

Необходимое условие экстремума 1-ого порядка в точке x^e – равенство нулю градиента ф-ции f в этой точке. Вычислим градиент ф-ции f:

$$\nabla f(x) =< -2x_1 - 1 + x_2; -2x_2 + x_1; -2x_3 + 2 >$$

$$\nabla f(x) = 0$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 1 + x_2 = 0 \\ -2x_2 + x_1 = 0 \\ -2x_3 + 2 = 0 \end{cases}$$

Из последнего уравнения можно сделать вывод, что $x_3 = 1$, из предпоследнего - что $x_1 = 2x_2$. Тогда

$$-4x_2 - 1 + x_2 = 0$$

$$-3x_2 = 1$$

$$x_2 = -1/3$$

$$x_1 = -2/3$$

Из этого множества решений, решением системы является $x^e = (x_1, x_2, x_3) = (-1/3, -2/3, 1)$ — единственная стационарная точка уравнения 1.

2.2 Проверка необходимых и достаточных условий в стационарных точках

Проверим необходимое условие экстремума первого порядка в стационарных точках.

2.2.1 Первый способ (с помощью угловых миноров)

Необходимо убедиться, что матрица Гессе в точке x^e является положительно (отрицательно) полуопределенной, т.е.

$$H(x^e) \geq 0$$

$$H(x^e) \leq 0$$

Вычислим матрицу Гессе от уравнения 1:

$$H(f(x)) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

При подстановке x^e, матрица Гессе для будет иметь вид:

$$H(f(x^e)) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Пользуясь критерием Сильвестра, вычислим угловые минторы матрицы Гессе, и получим

$$\Delta_1 = -2 < 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 2 = -6 < 0$$

Согласно вычислениям $\Delta_i, i = \overline{1..3}$, матрица Гессе в точке x^e является отрицательно определенной.

2.2.2 Второй способ (с помощью собственных значений матрицы Гессе)

Собственные значения матрицы Гессе $\lambda_i, i = \overline{1..n}$, должны быть положительно определенными в в стационарных точках т.е. $\forall \lambda_i > 0, i = \overline{1..n}$

$$|H(x^e) - \lambda E| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Получаем уравнение

$$-(\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6) = 0$$

Вещественными корнями этого уравнения являются $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$. Таким образом, в R^N, все решения данного уравнения являются отрицательными.

3 Поиск значений ф-ции в стационарных точках

Вычислим значение ф-ции 1 в стационарной точке $x^e = (-2/3, -1/3, 1)$, и получим

$$f(x^e) = -4/9 - 1/9 - 1 + 2/3 + 2/9 + 2 = 4/3 \tag{2}$$