МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Э. БАУМАНА

Факультет информатики и систем управления

Кафедра теоретической информатики и компьютерных технологий

Необходимые и достаточные условия существования безусловного и условного экстремума

Исполнитель: Ю.А. Волкова

Группа: ИУ9-111

29 Октября, 2016

1 Постановка задачи

Найти экстремум функций

$$\begin{cases} f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 + x_1 x_2 \to extr \\ g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 52 \leq 0 \end{cases}$$

На множестве R^n:

1. Записать необходимые условия экстремума первого порядка.
2. Проверить выполнение достаточных и необходимых условий второго порядка в каждой стационарной точке двумя способами.
3. Найти все стационарные точки и значения функций соответствующие этим точкам.

2 Решение

Обобщённая функция Лагранжа:

$$L(x, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0(x_1^2 - 4x_1 + 4 + x_2^2 - 6x_2 + 9 + x_1x_2)$$

Необходимые условия экстремума:

$$\frac{\delta L(x, \lambda_0, \lambda_1)}{\delta x_i} = 0, i = 1 \ldots n$$
$$\frac{\delta L(x, \lambda_0, \lambda_1)}{\delta x_1} = \lambda_0(2x_1 - 4 + x_2) + \lambda_1(2x_1) = 0$$
$$\frac{\delta L(x, \lambda_0, \lambda_1)}{\delta x_2} = \lambda_0(2x_1 - 4 + x_2) + \lambda_1(2x_1) = 0$$
$$\lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 52) = 0$$

Пусть $\lambda_0 = 0$:

$$2\lambda_1 x_1 = 0$$
$$2\lambda_1 x_2 = 0$$
$$x_1 = x_2 = 0$$

Пусть $\lambda_1 = 1$:

$$\lambda_1 = -\frac{\lambda_0(2x_2 - 6 + x_1)}{2x_2}$$
$$6x_1 - 4x_2 - x_1^2 + x_2^2 = 0$$
$$x_2 = 2 \pm \sqrt{x_1^2 - 6x_1 + 4}$$
$$x_1^2 - 3x_1 + 2 = 2(1 - x)\sqrt{x_1^2 - 6x_1 + 4}$$
$$x_1 = 1, x_1 = \frac{2}{3}, x_1 = 6$$
$$x_2 = 2\frac{2}{3}$$

Получили две точки $x = [0, 0]$, $x = [\frac{2}{3}, 2\frac{2}{3}]$.

Проверим достаточные условия первого порядка: число ограничений-неравенств и число активных ограничений-неравенств совпадают и равны 1. $\lambda_1 \geq 0$ значит – локальные минимумы.

Проверим достаточные условия второго порядка:

$$d^2L(x, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 + 2\lambda_0 + \lambda_1 + 2\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_0 \geq 0$$

$d^2L(x, \lambda_0, \lambda_1) \geq 0$ – значит локальные минимумы.

Высчитываем значения в точках $x = [0, 0]$, $x = [\frac{2}{3}, 2\frac{2}{3}]$:

$$f(0, 0) = 4 + 9 + 0 = 13$$
$$f(\frac{2}{3}, 2\frac{2}{3}) = \frac{16}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{3}\frac{8}{3} = \frac{11}{3}$$