Лабораторная работа
Численное решение одномерной краевой задачи
(глобальные базисные функции)

Волкова Юлия

16 Января, 2016

1 Постановка задачи

На интервале числовой оси $x \in [0, l]$ найти приближенное решение краевой задачи

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x)$$
$$\begin{cases} (\alpha_1 \frac{\delta u}{\delta x} + \beta_1 u)_{x=0} = \psi_1 \\ (\alpha_2 \frac{\delta u}{\delta x} + \beta_2 u)_{x=l} = \psi_2 \end{cases}$$

Вариант 1, условия задачи:

- $u = e^x \sin^2 x$
- $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$
- $\beta_1 = \beta_2 = 1$

В качестве метола численного построения исходной функции u необходимо рассмотреть ıметод Бубнова-Галёркина, при использовании алгебраического базиса.

При тестировании, необходимо рассмотреть отклонение численного решения задачи y от аналитического u:

$$\Delta = \sum_{i=0}^{N} (u(x) - y(x))^2$$

2 Решение задачи

Вычислим производные функции u:

$$u'(x) = e^x \sin x(\sin x + 2\cos x)$$
$$u''(x) = 0.5 * e^x * (4 * \sin(2 * x) + 3 * \cos(2 * x) + 1) \quad (1)$$

Подставим функцию u в систему граничных условий:

$$\begin{cases} \psi_1 = (\alpha_1 e^x \sin x(\sin x + 2\cos x) + \beta_1 e^x \sin^2 x)_{x=0} \\ \psi_2 = (\alpha_2 e^x \sin x(\sin x + 2\cos x) + \beta_2 e^x \sin^2 x)_{x=l} \end{cases} \quad \begin{cases} \psi_1 = (e^x \sin^2 x)_{x=0} = 0 \\ \psi_2 = (e^x \sin^2 x)_{x=l} = e^l \sin^2 l \end{cases}$$

Аппроксимация значений функции u заключается в представлении функции в следующем виде:

$$u(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k(x)$$

Где $\varphi_k, k = \overline{1, N}$ – система базисных векторов. Базисный вектор φ_0 можно представить в следующем виде:

$$\varphi_0(x) = A + Bx$$

Вычислим коэффициенты A, B:

$$\varphi_0(0) = A$$

$$\varphi_0(l) = B$$

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{e^l \sin^2 l}{l} \end{cases}$$

На остальные базисные вектора накладываются следующие условия:

$$\begin{cases} \varphi_k|_{x=0} = 0 \\ \varphi_k|_{x=l} = 0 \\ k = \overline{1, N} \end{cases}$$

В качестве такого базиса рассмотрим следующие вектора:

$$\varphi_k(x) = x^k(x - l)$$

Метод Бубнова-Галёркина заключается в поиске коэффициентов $c_m, m = \overline{1, N}$, на основе решения СЛАУ следующего вида:

$$\sum_{m=1}^{N} c_m \int_0^l \varphi_k(x) A \varphi_m(x) dx = \int_0^l f(x) \varphi_k(x) dx$$

$$k = \overline{1, N}$$

Отсюда можно вывести формулу для вычисления коэффициента $a_i j$ для матрицы

СЛАУ, а также формулу для вычисления коэффецента b_i:

$$\begin{cases} a_{ij} = \int_0^l \varphi_i''(x)\varphi_j(x) \\ b_i = \int_0^l \varphi_i(x) f(x) \end{cases}$$

Решив СЛАУ, получим вектор коэффициентов $c_k, k = \overline{1, N}$.

3 Код программы

```
import math, numpy, matplotlib.pyplot as plt
from scipy.misc import derivative

l  = 1
mp = 1
N  = 1
dx = 1e-2

u = lambda x: math.e**x * math.sin(x)**2
f = lambda x: 0.5 * math.e**x * \
              ( 4 * math.sin(2 * x) + 3 * math.cos(2 * x) + 1 )

A = 0
B = math.e**l * math.sin(l)**2 / l

#bas = lambda i: lambda x: x**i * ( l - x )**i
bas = lambda i: lambda x: x**(i + mp) * (x - l)
phi = [ bas(i) for i in range( N ) ]

i0l = lambda f, dx = dx: sum( f(x) * dx for x in numpy.arange(0, l, dx) )
d2 = lambda i: lambda x: derivative(phi[ i ], x, dx, 2)
L  = lambda i, j: lambda x: d2(i)(x) * bas(j)(x)
fp = lambda p: lambda x: f(x) * p(x)
```

```
a = [ [ i0l( L(i, j) ) for j in range(N) ] for i in range(N) ]
b = [ i0l( fp(p) ) for p in phi ]
C = numpy.linalg.solve(a, b)

y = lambda x: A + B * x + sum( c * p(x) for c, p in zip( C, phi ) )

def draw( f, style, label ):
    x = numpy.arange(0, l, dx)
    y = map( f, x )
    plt.plot(x, y, linestyle=style, label=label)

if __name__ == '__main__':
    diff = sum( (u(x) - y(x))**2 for x in numpy.arange(0, l, dx))

    print 'difference is: %s' % diff

    draw(u, 'solid', 'u')
    draw(y, 'dashed', 'y')

    plt.legend()
    plt.show()
```

4 Результат применения метода

В качестве правой границы, коэффициент l принимается равным 1. Увеличивая количество базисных векторов, можно получить повышение качества аппроксимации (основываясь на значении метрики Δ). При длине шага равной 10^-2, были получены следующие результаты:

- $N = 1, \Delta = 0.0453699935957;$
- $N = 2, \Delta = 0.00188795456952;$

- $N = 4, \Delta = 2.36582120867e - 08$

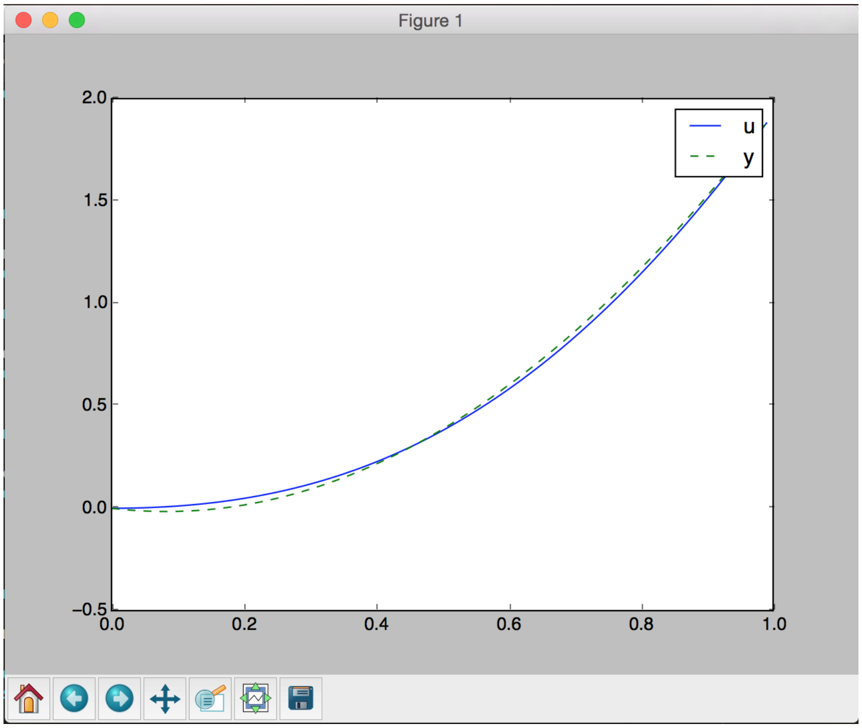

Рис. 1 – Приближение функции u методом аппроксимации Бубнова-Галёркина, при $N = 1$

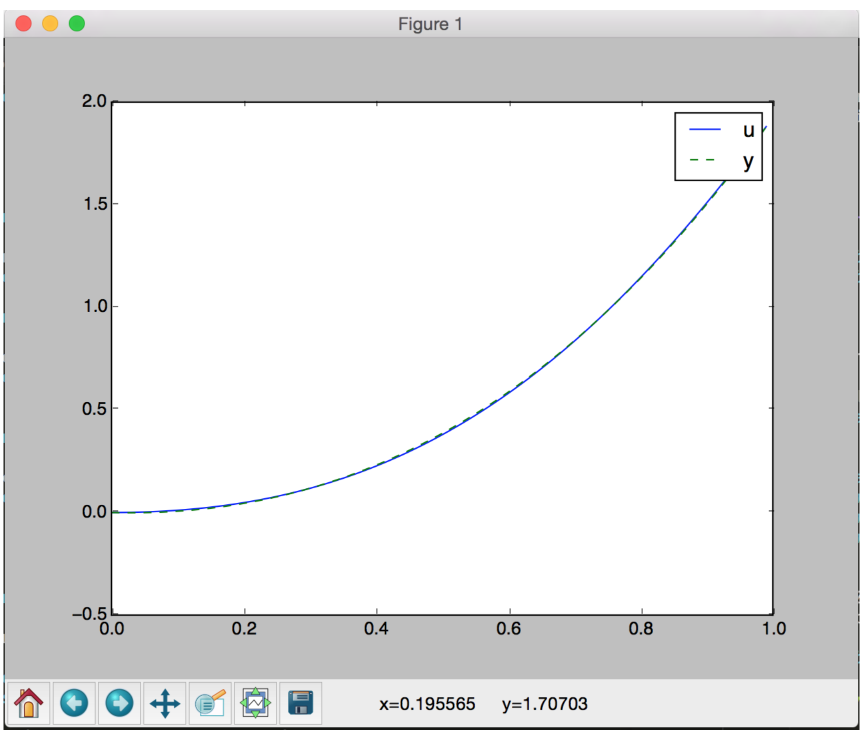

Рис. 2 – Приближение функции u методом аппроксимации Бубнова-Галёркина, при $N = 2$

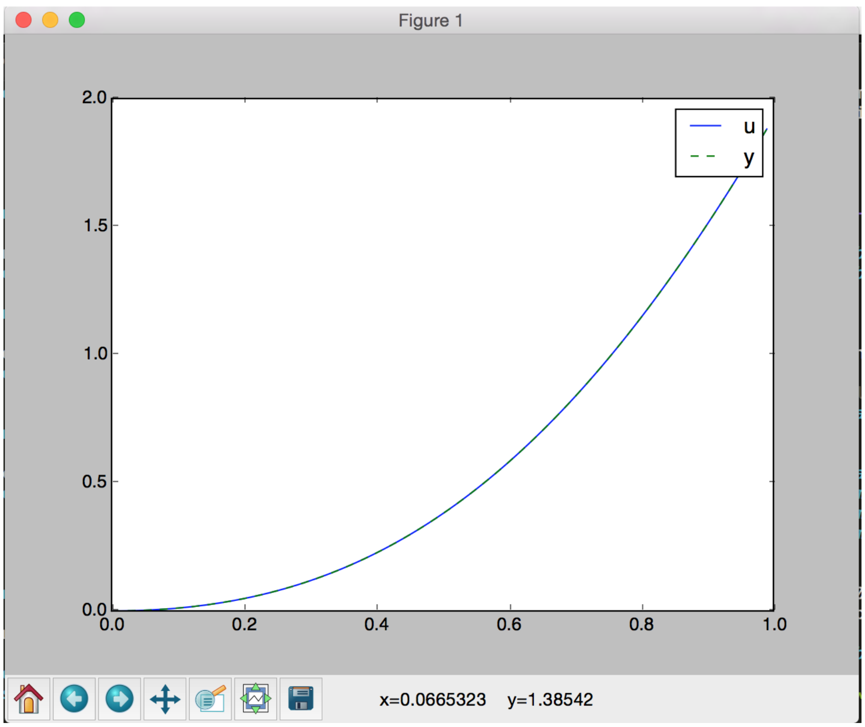

Рис. 3 – Приближение функции u методом аппроксимации Бубнова-Галёркина, при $N = 4$