



Rapport de Télécommunications - Partie 3 - Introduction à la synchronisation - Impact d'une erreur de phase porteuse et méthode de récupération

AUGEREAU Robin, FRESCO Alan, HUANG Julien

Département Sciences du Numérique - Première année
2022-2023

Table des matières

1	Introduction	3
2	Impact d'une erreur de phase porteuse	3
2.1	Etude théorique	3
2.2	Implantation sous Matlab	5
3	Estimation et correction de l'erreur de phase porteuse	9
3.1	Etude théorique	9
3.2	Implantation sous Matlab	11
4	Utilisation d'un codage par transition	13
4.1	Étude théorique	13
4.2	Implantation sur Matlab	14

Table des figures

1	Constellation en sortie de l'échantillonneur	5
2	Constellation en sortie de l'échantillonneur avec une erreur de phase de 40°	5
3	Constellation en sortie de l'échantillonneur avec une erreur de phase de 100°	6
4	Constellation en sortie de l'échantillonneur avec une erreur de phase de 180°	6
5	Comparaison TEB pratique/théorique avec une erreur de phase de 40°	7
6	Constellation obtenue avec une erreur de phase de 40° (2dB)	7
7	Constellation obtenue avec une erreur de phase de 40° (6dB)	7
8	Comparaison : TEB avec une erreur de phase de 40° et TEB sans erreur de phase	8
9	Comparaison : TEB avec une erreur de phase de $40^\circ/100^\circ$ et TEB sans erreur de phase	8
10	Comparaison : TEB théorique/pratique avec une erreur de phase de 100°	9
11	TEB obtenus avec une correction d'erreur de phase de 40°	11
12	Comparaison TEB ($\varphi = 40^\circ$) : avec erreur et correction/ avec erreur et sans correction / sans erreur ($\varphi = 0^\circ$)	11
13	TEB obtenus avec une correction d'erreur de phase de 100°	12
14	Comparaison TEB ($\varphi = 100^\circ$) : avec erreur et correction/ avec erreur et sans correction / sans erreur ($\varphi = 0^\circ$)	12
15	Comparaison des TEB avec correction et sans correction d'erreur de phase/ avec et sans codage ($\varphi = 40^\circ$)	14
16	Comparaison des TEB avec correction et sans correction d'erreur de phase/ avec et sans codage ($\varphi = 100^\circ$)	15

1 Introduction

Soit la chaîne de transmission présentée dans la figure 1. Elle représente la chaîne passe-bas équivalente associée à une transmission BPSK sur canal AWGN : $x_e(t)$ représente l'enveloppe complexe associée au signal modulé sur porteuse (voie en phase uniquement en BPSK : $x_e(t) = I(t)$), tandis que $I_n(t)$ représente l'enveloppe complexe associée au bruit introduit par le canal de propagation (voie en phase uniquement également).

Cette chaîne passe-bas équivalente suppose que, dans la chaîne de transmission sur porteuse associée (figure 2), le récepteur dispose localement d'une onde porteuse avec exactement la même fréquence et la même phase que celle utilisée à l'émission (démodulation cohérente). On suppose également ici que l'horloge du récepteur dispose localement d'une horloge avec la même phase et la même fréquence que celle de l'émetteur, lui permettant d'échantillonner aux instants optimaux. En résumé, on suppose une synchronisation idéale, à la fois « en fréquence » (sur la porteuse) et « en temps » (sur l'horloge).

En pratique, des méthodes de synchronisation doivent être mise en oeuvre pour assurer une démodulation cohérente et une synchronisation temporelle. L'objectif de ce projet n'est pas de développer complètement la mise en place de la synchronisation au niveau du récepteur, mais d'en introduire quelques concepts. Après avoir étudié l'impact d'une erreur de synchronisation sur la phase porteuse, nous allons vous proposer d'implanter une méthode de synchronisation basée sur le calcul de l'estimée de l'erreur pour correction.

2 Impact d'une erreur de phase porteuse

La figure 3 présente la chaîne passe-bas équivalente associée à une transmission sur porteuse de type BPSK lorsqu'il existe une erreur de phase porteuse φ . On va supposer que sont placés en émission et en réception deux filtres de même réponse impulsionnelle : fonction porte de largeur T_s et de hauteur égale à 1. L'enveloppe complexe associée au bruit introduit par le canal de transmission, $n_e(t)$, est ici réelle avec une densité spectrale de puissance égale à N_0 quelle que soit la fréquence.

2.1 Etude théorique

Pour réaliser cette étude, la chaîne passe-bas équivalente de la figure 3 sera utilisée.

1. Comme on sait que le filtre de mise en forme est égal au filtre de réception : rectangulaire de largeur T_s (on a également un passe-bas équivalent),

$$g(t) = \frac{N_0}{2} h(t) * h_r(t).$$

Ainsi, avec $t_0 = T_s$, on respectera le critère de Nyquist.

2. Soit $\varphi \in \mathbb{R}$ une erreur de phase porteuse. Soit x_{ech} le signal en sortie de l'échantillonneur, on aura :

$$x_{ech} = e^{j\varphi} x_c(t) * h_r(t) + I_w(t)$$

3. En prenant la partie réelle :

$$\Re(e^{j\varphi} g(t_0) + I_w(t)) = \cos(\varphi) g(t_0) + w(t)$$

Calculons la probabilité pour qu'un symbole soit erroné :

$$\begin{aligned}
p(z_n < 0 | a_n = 1) &= p(\cos(\varphi)g(t_0) + w < 0) \\
&= p(w < -\cos(\varphi)g(t_0)) \\
&= p(w > \cos(\varphi)g(t_0))
\end{aligned}$$

En effet, w est pair. De plus, w suit une loi normale de paramètres 0 et $\sigma_{I_w}^2$, ainsi :

$$p(z_n < 0 | a_n = 1) = \int_{\cos(u)g(t_0)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{I_w}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_{I_w}^2}} du$$

Changement de variables : $u = \frac{x}{\sigma_{I_w}}$ et $\sigma_{I_w} du = dx$.

$$\begin{aligned}
p(z_n < 0 | a_n = 1) &= \int_{\frac{\cos(u)g(t_0)}{\sigma_{I_w}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
&= Q\left(\frac{\cos(\varphi)g(t_0)}{\sigma_{I_w}}\right) \\
&= Q\left(\frac{\cos(\varphi)T_s}{\sigma_{I_w}}\right)
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\sigma_{I_w}^2 &= \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |h_r(t)|^2 dt \\
&= \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |\Pi_{T_s}(t)|^2 dt \\
&= \frac{N_0}{2} T_s \implies \sigma_{I_w} = \sqrt{\frac{N_0 T_s}{2}}
\end{aligned}$$

5. $E_s = P_x T_s = E_b$

$$\begin{aligned}
P_x &= \int_{\mathbb{R}} S_x(f) df \\
&= \frac{\sigma_a^2}{T_s} \int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 df \\
&= \frac{1}{T_s} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc, $E_s = T_s$.

6.

$$\begin{aligned}
TEB &= Q\left(\frac{\cos(\varphi)T_s}{\sigma_{I_w}}\right) \\
&= Q\left(\frac{\sqrt{2}\cos(\varphi)\sqrt{T_s}}{0}\right) \\
&= Q(\cos(\varphi))\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}
\end{aligned} \tag{1}$$

2.2 Implantation sous Matlab

Sans erreur de phase : on constate bien que le taux d'erreur binaire est nul.
Attendus : TEB = 0%.



FIGURE 1 – Constellation en sortie de l'échantillonneur

Avec une erreur de phase (40°) : Il y a une rotation de 40° de la constellation (ce qui est attendu). On constate bien que le taux d'erreur binaire est nul.

Attendus : Sans bruit il est normal que le TEB soit nul, les constellations n'ont pas été « assez tourné » pour qu'il y ait des erreurs. Comme le seuil de décision se fait à 0. Lorsque l'on va prendre la partie réelle les 1 resteront des 1 et les -1 resteront des -1.

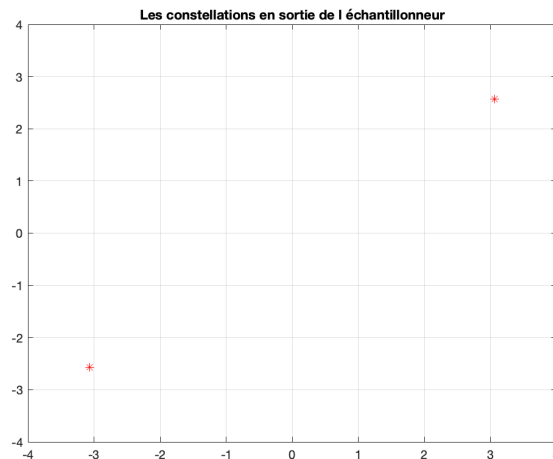


FIGURE 2 – Constellation en sortie de l'échantillonneur avec une erreur de phase de 40°

Avec une erreur de phase (100°) : Il y a une rotation de 100° de la constellation (ce qui est attendu). On constate bien que le taux d'erreur binaire est de 100

Attendus : TEB = 100%, l'erreur de phase est $> 90^\circ$. Comme le seuil de décision se fait à 0. Les 1 sont devenu des 0 et les 0 des 1.

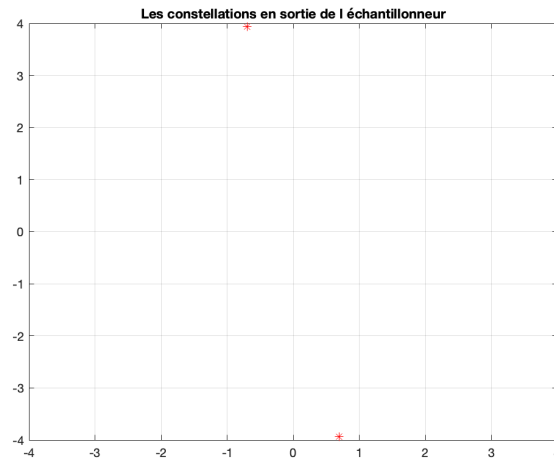


FIGURE 3 – Constellation en sortie de l'échantillonneur avec une erreur de phase de 100°

Avec une erreur de phase (180°) : Il y a une rotation de 180° de la constellation (ce qui est attendu). On constate bien que le taux d'erreur binaire est de 100%.

Attendus : TEB = 100%, l'erreur de phase est $> 90^\circ$. Comme le seuil de décision se fait à 0. Lorsque l'on va prendre la partie réelle les 1 se transformeront en -1 et les -1 en 1.



FIGURE 4 – Constellation en sortie de l'échantillonneur avec une erreur de phase de 180°

Ce qui colle à la théorie.

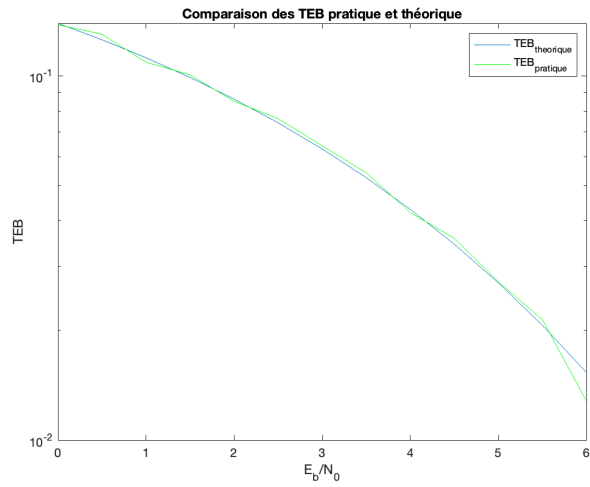


FIGURE 5 – Comparaison TEB pratique/théorique avec une erreur de phase de 40°

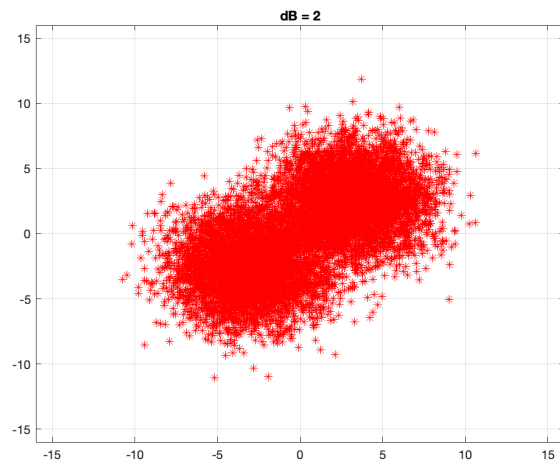


FIGURE 6 – Constellation obtenue avec une erreur de phase de 40° (2dB)

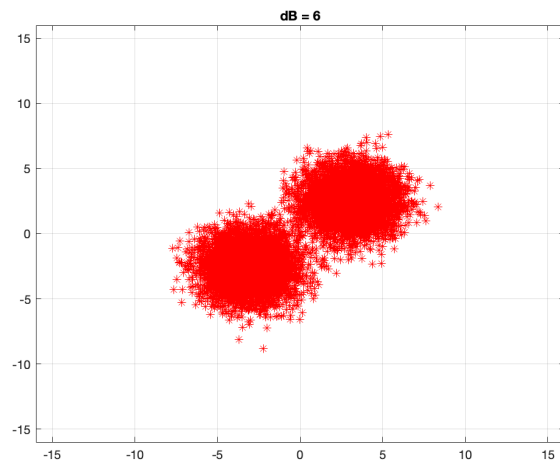


FIGURE 7 – Constellation obtenue avec une erreur de phase de 40° (6dB)

Ce qui est tout à fait normal.

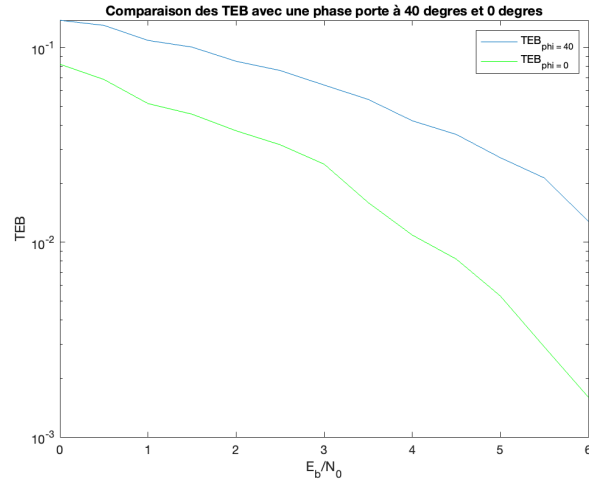


FIGURE 8 – Comparaison : TEB avec une erreur de phase de 40° et TEB sans erreur de phase

Pas trop de surprise quand on observe les TEBs obtenus.

Il est normal que le TEB avec une erreur de phase de 100° soit aussi proche de 100%.

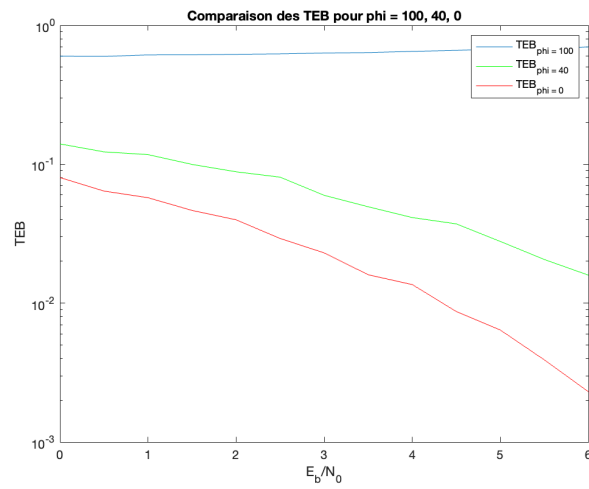


FIGURE 9 – Comparaison : TEB avec une erreur de phase de $40^\circ/100^\circ$ et TEB sans erreur de phase

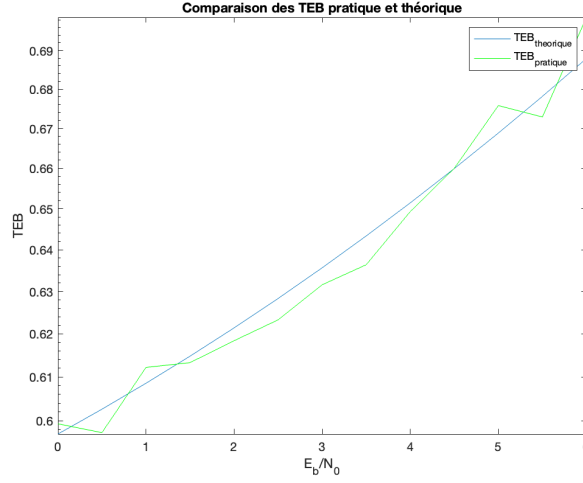


FIGURE 10 – Comparaison : TEB théorique/pratique avec une erreur de phase de 100°

3 Estimation et correction de l'erreur de phase porteuse

3.1 Etude théorique

Considérons la chaîne de transmission de la figure 3 avec erreur de phase porteuse φ . Les échantillons reçus, après échantillonnage aux instants optimaux $t_0 + mT_s$, peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$z_m = a_m g(t_0) e^{j\varphi} + w_m$$

où w_m représente l'échantillon de bruit filtré à l'instant $t_0 + mT_s$, a_m le m^{ime} symbole issu du mapping et $g(t)$ la réponse impulsionnelle globale de la chaîne de transmission : $g(t) = h(t) * h_r(t)$ ici.

Soient \tilde{a}_m et $\tilde{\varphi}_m$ des valeurs test pour a_m et φ , il est possible d'écrire la vraisemblance en fonction de \tilde{a}_m et $\tilde{\varphi}_m$ pour un vecteur d'observation $\mathbf{z} = [z_0, \dots, z_N]$ de la manière suivante :

$$L(\tilde{a}_m, \tilde{\varphi}_m) = P[\mathbf{z} | \tilde{a}_m, \tilde{\varphi}_m] = \prod_{m=0}^N P[z_m | \tilde{a}_m, \tilde{\varphi}_m] = \prod_{m=0}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w} e^{-\frac{|z_m - \tilde{a}_m g(t_0) e^{j\tilde{\varphi}_m}|^2}{\sigma_w^2}}$$

si l'on suppose les échantillons z_m indépendants.

Nous allons, à partir de là, supprimer la dépendance vis-à-vis des données en adoptant une stratégie Non Data Aided :

$$L(\tilde{\varphi}_m) = E_{\tilde{a}_m} [L(\tilde{a}_m, \tilde{\varphi}_m)]$$

pour obtenir l'estimée de l'erreur de phase porteuse recherchée :

$$\hat{\varphi} = \underset{\varphi_m}{\operatorname{argmax}} L(\tilde{\varphi}_m)$$

Remarquons tout d'abord que le seul terme qui dépend de $\tilde{\varphi}_m$ dans $|z_m - \tilde{a}_m g(t_0) e^{j\tilde{\varphi}_m}|^2$ est le terme $-\tilde{a}_m g(t_0) \operatorname{Re}[z_m e^{-j\tilde{\varphi}_m}]$. On peut donc définir une fonction de vraisemblance équivalente :

$$L(\tilde{a}_m, \tilde{\varphi}_m) \propto \prod_{m=0}^N e^{\frac{2}{\sigma_w^2} \tilde{a}_m g(t_0) \operatorname{Re}[z_m e^{-j\tilde{\varphi}_m}]} \propto e^{\sum_{m=0}^N \tilde{a}_m \operatorname{Re}[z_m e^{-j\tilde{\varphi}_m}]}$$

On obtient alors, en considérant que les symboles \tilde{a}_m sont indépendants et équiprobables :

$$L(\tilde{\varphi}_m) = E_{\tilde{a}_m}[L(\tilde{a}_m, \tilde{\varphi}_m)] = \prod_m E_{\tilde{a}_m}[e^{\tilde{a}_m \operatorname{Re}[z_m e^{-j\tilde{\varphi}}]}] \propto \prod_m \cosh \operatorname{Re}[z_m e^{-j\tilde{\varphi}}]$$

Ce qui donne la log-vraisemblance suivante :

$$\Lambda(\tilde{\varphi}) \propto \sum_m \ln \cosh \operatorname{Re}[z_m e^{-j\tilde{\varphi}}]$$

que nous devons dériver et annuler afin d'obtenir l'estimée de l'erreur de phase porteuse $\hat{\varphi}$:

$$\hat{\varphi} = \operatorname{argmax} \Lambda(\tilde{\varphi})$$

En utilisant le développement en série de $\ln \cosh x$, nous pouvons, dans un premier temps, réécrire la log-vraisemblance de la manière suivante :

$$\Lambda(\tilde{\varphi}) \propto \sum_m \operatorname{Re}[z_m e^{-j\tilde{\varphi}}]$$

D'où :

$$\frac{\partial \Lambda(\tilde{\varphi})}{\partial \tilde{\varphi}} \propto \sum_m \operatorname{Im}[z_m^2 e^{-2j\tilde{\varphi}}]$$

L'estimée de l'erreur de phase porteuse $\hat{\varphi}$ est donc la phase $\hat{\varphi}$ qui vérifie :

$$\sum_m \operatorname{Im}[z_m^2 e^{-2j\hat{\varphi}}] = 0$$

D'où :

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{2} \arctan \left\{ \frac{\sum_m \operatorname{Im}[z_m^2]}{\sum_m \operatorname{Re}[z_m^2]} \right\}$$

L'arctangente étant définie à π près, l'erreur de phase estimée en utilisant l'expression (4) va être estimée à $\frac{\pi}{2}$ près. On dit que la phase est estimée avec une ambiguïté de $k\frac{\pi}{2}$. Afin de réduire cette ambiguïté, on montre qu'il est possible d'estimer l'erreur de phase en utilisant l'argument (estimateur de Viterbi) :

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{2} \arg \left\{ \sum_m z_m^2 \right\}$$

L'argument étant défini à 2π près, la phase sera alors estimée avec une ambiguïté de $k\pi$. Une fois l'erreur de phase estimée, le signal reçu pourra être corrigé.

3.2 Implantation sous Matlab

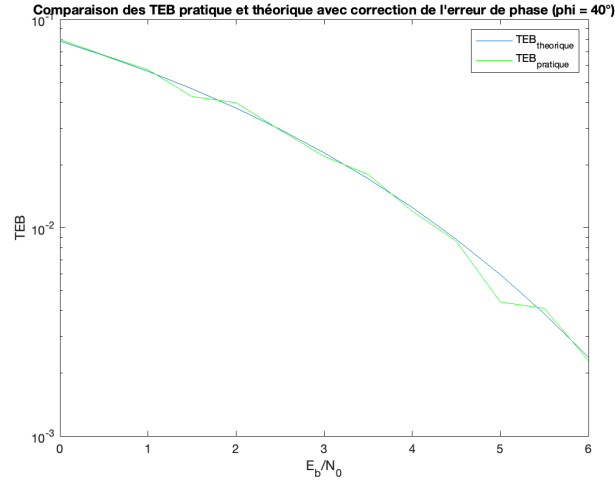


FIGURE 11 – TEB obtenus avec une correction d'erreur de phase de 40°

Quand on estime $\varphi = 40^\circ$, il n'y a pas d'ambiguïté.

Mais lorsque l'on essaye d'estimer φ , lorsque l'erreur de phase est de 100° , il y a une ambiguïté de π . On trouve -80° .

Pour une erreur de phase de 40° , il n'y a pas de problème la correction se déroule sans accros. ($40^\circ - 40^\circ = 0$).

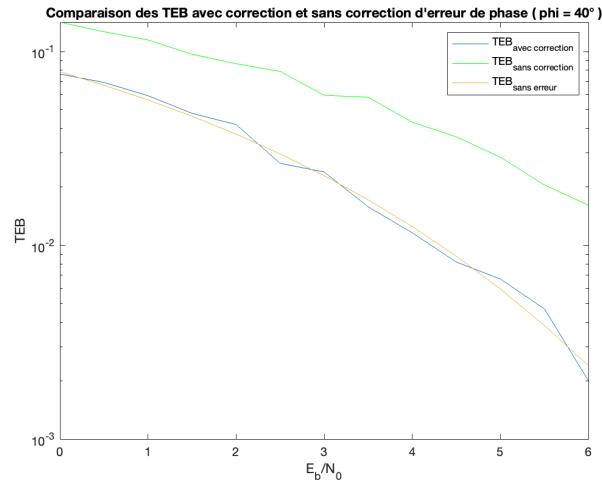


FIGURE 12 – Comparaison TEB ($\varphi = 40^\circ$) : avec erreur et correction / avec erreur et sans correction / sans erreur ($\varphi = 0^\circ$)

Pour une erreur de phase de 100° , là il y a un problème : la correction se passe très mal, cela empire même le TEB.

($100^\circ - (-80^\circ) = 180^\circ$) Donc cela change complètement les bits initiaux (TEB proche de 100%).

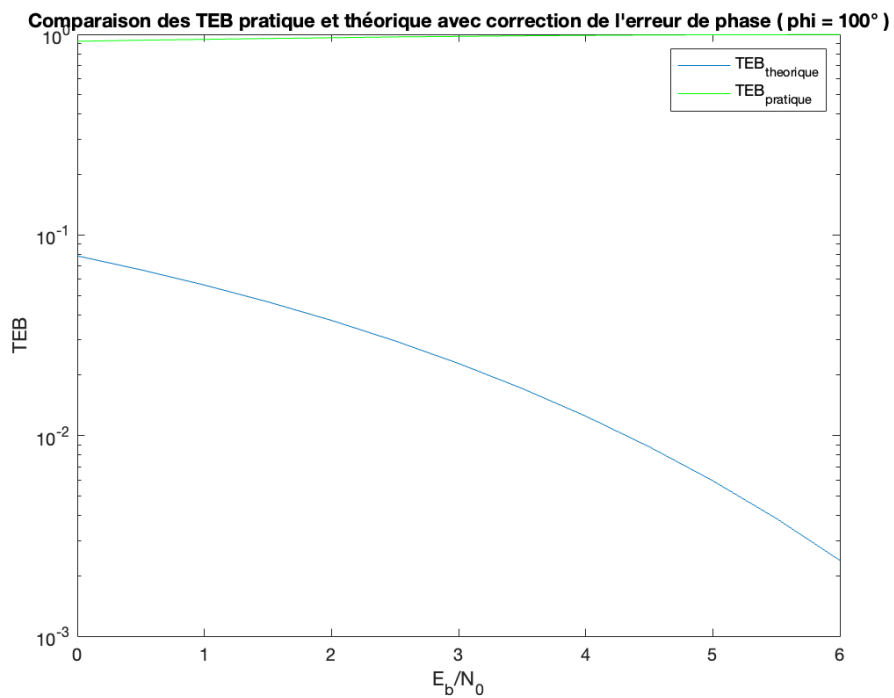


FIGURE 13 – TEB obtenus avec une correction d'erreur de phase de 100°

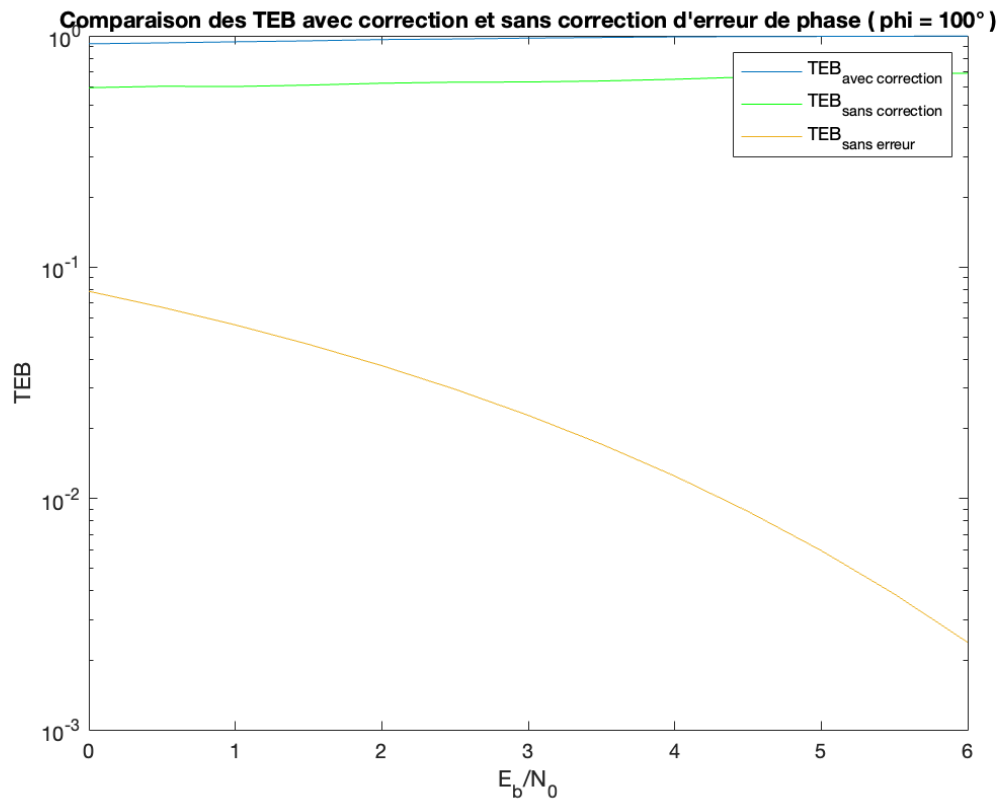


FIGURE 14 – Comparaison TEB ($\varphi = 100^\circ$) : avec erreur et correction / avec erreur et sans correction / sans erreur ($\varphi = 0^\circ$)

4 Utilisation d'un codage par transition

4.1 Étude théorique

Partons de l'exemple a_k , a_k étant égal à :

$$a_k = [1 -1 -1 1 1 -1 1]$$

Après codage par condition, on a :

$$c_k = [1 -1 1 1 1 -1 -1]$$

Raisonnons par disjonction de cas :

— Dans le cas où il y a l'apparition d'une ambiguïté de π , c_k devient :

$$c_k = [-1 1 -1 -1 -1 1 1]$$

Donc, on obtient a_k estimé, qui vaut :

$$a_{k\text{estime}} = [-1 -1 -1 1 1 -1 1]$$

— Dans le cas où il n'y a pas d'ambiguïté, on a directement a_k estimé qui vaut :

$$a_{k\text{estime}} = [1 -1 -1 1 1 -1 1]$$

A travers cet exemple, on montre bien qu'avec le codage, on supprime cette ambiguïté π . Avec les calculs suivants on déduit :

$$\begin{aligned} a_k &= c_k c_{k-1} \\ &= (c_{k-1} a_k) c_{k-1} \\ a_k &= a_k [2\pi] \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} c_k &= c_{k-1} a_k \\ c_{k+1} &= c_k a_{k+1} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$a_{k+1} = \frac{c_{k+1}}{c_k}$$

Toutefois s'ajoute un nouveau problème : le taux d'erreur binaire a été doublé. Cela signifie que chaque symbole non codé correspond à deux transitions dans les symboles codés. Par conséquent, une erreur de décodage dans les symboles codés se produit si et seulement si les deux transitions correspondantes aux symboles non codés sont erronées.

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{c_k}{c_{k-1}} \\ a_{k+1} &= \frac{c_{k+1}}{c_k} \end{aligned}$$

Si c_k est erroné alors cela entraîne une erreur sur a_k et a_{k+1} estimé.

Cela signifie que le TEB sur les symboles codés (par codage par transition) est le double du TEB obtenu sur les symboles non codés.

4.2 Implantation sur Matlab

On constate bien que le TEB avec codage et correction est le double du TEB sans erreur de phase. (On a multiplié par deux le TEB théorique et les TEB théoriques se superposent avec les TEB pratiques avec codage par transition et correction de l'erreur de phase).

On constate également que le codage par transition permet de s'affranchir de cette ambiguïté de π .

Comparaison des TEB avec correction et sans correction d'erreur de phase/ avec et sans codage ($\phi = 40^\circ$)

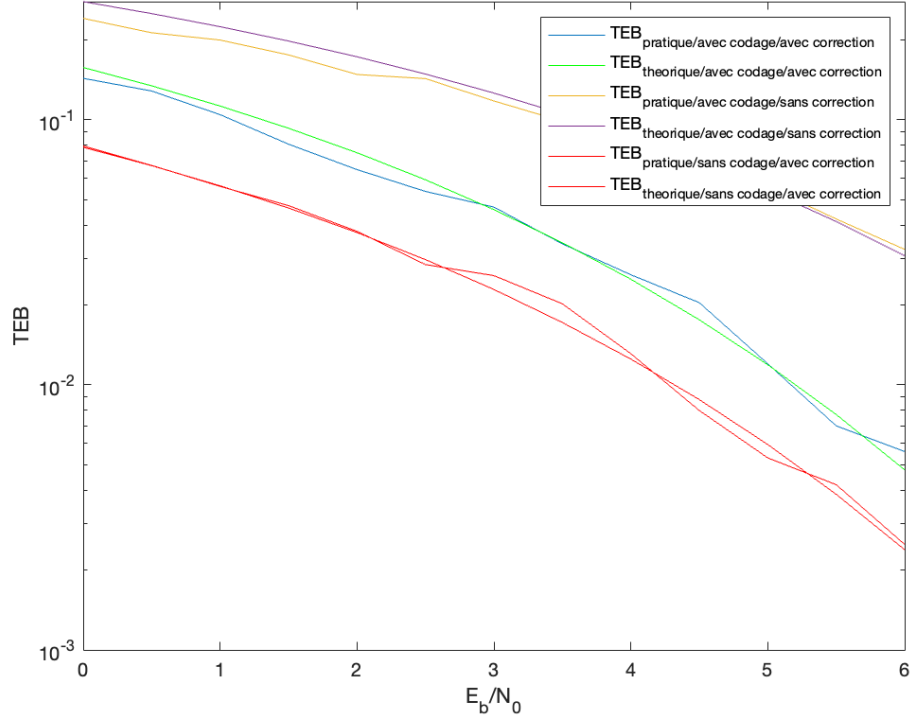


FIGURE 15 – Comparaison des TEB avec correction et sans correction d'erreur de phase/ avec et sans codage ($\phi = 40^\circ$)

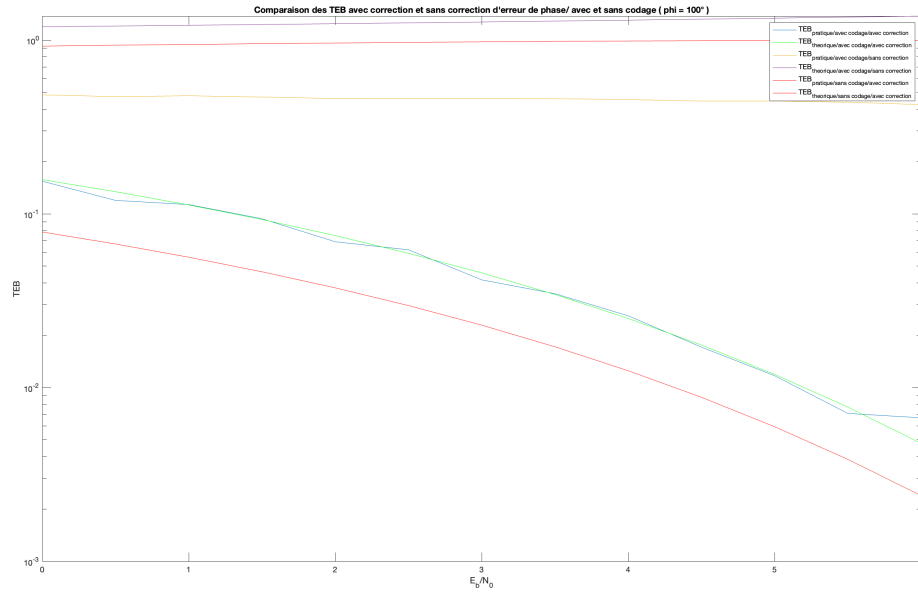


FIGURE 16 – Comparaison des TEB avec correction et sans correction d'erreur de phase/ avec et sans codage ($\varphi = 100^\circ$)