



Rapport du projet de Traitement Numérique du Signal

HUANG Julien - FRESCO Alan

Département Sciences du Numérique - Première année
2022-2023

Table des matières

1	Introduction	3
2	Modem de fréquence	3
2.1	Construction du signal modulé en fréquence	3
2.1.1	Génération du signal NRZ	3
2.1.2	Génération du signal modulé en fréquence	4
3	Canal de transmission à bruit additif, blanc et Gaussien	6
4	Démodulation par filtrage	6
4.1	Synthèse du filtre passe-bas	7
4.2	Synthèse du filtre passe-haut	7
4.3	Filtres d'ordre 61	8
4.4	Modification de l'ordre des filtres	9
4.5	Utilisation des fréquences de la recommandation V21	11
5	Démodulateur de fréquence adapté à la norme V21	13
5.1	Contexte de synchronisation idéale	13
5.1.1	Principe de fonctionnement de ce récepteur	13
5.1.2	Résultats obtenus	14
5.2	Gestion d'une erreur de synchronisation de phase porteuse	15
5.2.1	Impact d'une erreur de phase porteuse sur le modem implanté précédemment	15
5.2.2	Principe de fonctionnement de cette nouvelle version du modem de fréquence	16
5.2.3	Résultats obtenus	17
6	Conclusion	18
7	Références	18

Table des figures

1	Signal modulé en fréquence	3
2	Signal NRZ et sa DSP	4
3	Signal $x(t)$ et ses DSP théorique et pratique	6
4	Signal bruité.	7
5	Démodulation par filtrage.	7
6	Signal filtré	8
7	Caractéristiques des filtres passe-bas et passe-haut utilisés	8
8	Détermination du Seuil K	9
9	Les signaux de sortie en comparaison avec le signal de départ	9
10	Filtre et DSP lorsque l'ordre du filtre est de 201	10
11	Signal filtré lorsque l'ordre du filtre est de 201	10
12	Signal retrouvé en sortie lorsque l'ordre du filtre est de 201	11
13	Le signal filtré avec les normes V21	11
14	Les DSP du signal avec la norme V21	12
15	Le signal en sortie avec les normes V21	12
16	Démodulation FSK. Synchronisation supposée idéale.	13
17	Signal de sortie obtenu avec la démodulation FSK	14
18	Démodulation FSK - Gestion d'une erreur de phase porteuse.	15
19	Démodulateur avec un erreur de phase porteuse.	16
20	Image retrouvée	17

1 Introduction

L'objectif de ce projet est de réaliser un modem selon la recommandation V21 de l'ITU (Union Internationale des Télécommunications), via la plateforme de programmation Matlab. Pour cela, plusieurs étapes vont être suivies : la construction d'un signal modulé en fréquence, la démodulation par filtrage, et enfin, la démodulation FSK (Frequency-shift key) sans et avec une erreur de synchronisation.

2 Modem de fréquence

2.1 Construction du signal modulé en fréquence

La première étape du projet consiste à réaliser la modulation de fréquence, i.e. transformer l'information binaire à transmettre en un signal modulé en fréquence (exemple sur la figure 1).

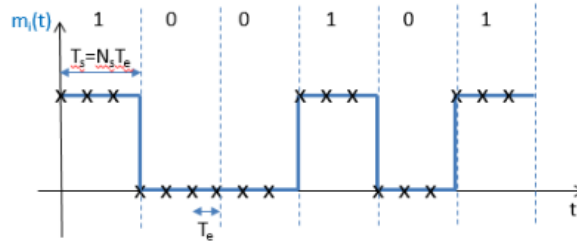


FIGURE 1 – Signal modulé en fréquence

Le signal modulé en fréquence $x(t)$ est généré de la manière suivante :

$$x(t) = (1 - NRZ(t)) \times \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) + NRZ(t) \times \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) \quad (1)$$

où $NRZ(t)$ est un signal de type NRZ unipolaire formé à partir de la suite de bits à transmettre en codant les 0 et les 1 par des niveaux 0 et 1 de durée T_s secondes. ϕ_0 et ϕ_1 sont des variables aléatoires indépendantes uniformément réparties sur $[0, 2\pi]$ qui peuvent être obtenues sous Matlab en utilisant `rand*2*pi`.

2.1.1 Génération du signal NRZ

Le principe est le suivant : on génère N (ici 20) bits aléatoirement, puis on duplique chaque bit N_s fois.

```
1. % Codage de la fonction NRZ
Fe = 48000; % Frequence d'echantillonnage
Te = 1/Fe;
debit = 300; % Debit par seconde
Ns = 160; % Nombre d'echantillon
Ts = Ns*Te; % Duree
transmettre = randi(0:1,1,taille);
NRZ = repelem(transmettre,Ns);
```

En appliquant les formules données, on trouve la densité spectrale de puissance théorique (en rouge sur la figure 2), et la densité spectrale de puissance expérimentale du signal (en vert) :

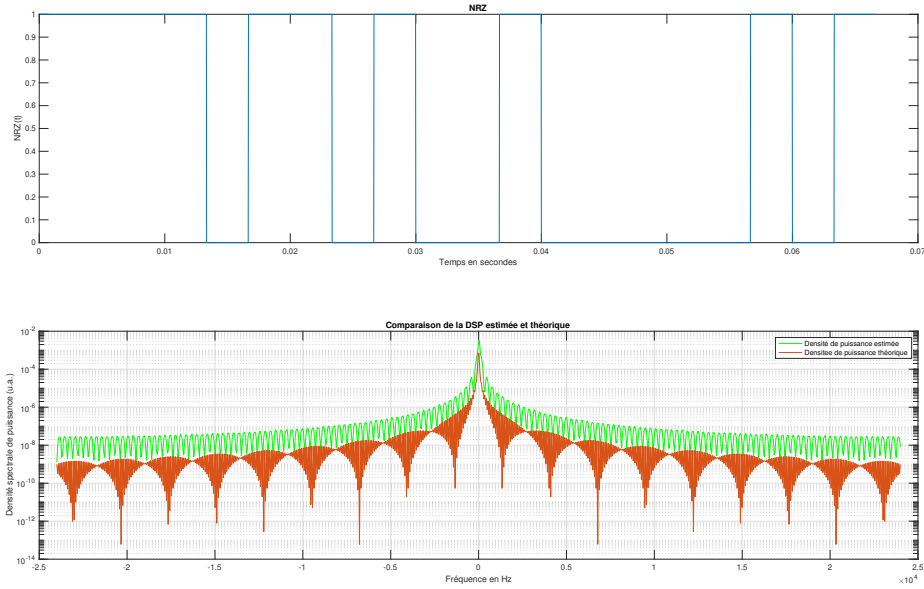


FIGURE 2 – Signal NRZ et sa DSP

2.1.2 Génération du signal modulé en fréquence

```

— % Generation de x(t)
x = (1 - NRZ).*cos(2*pi*F_0*echelle + phi0) + NRZ.*cos(2*pi*
    F_1*echelle + phi1);

% DSP de x(t)
% Estimee
DSP=pwelch(x,[],[],[],Fe,'twosided');

% Theorique
Voir demonstration...

```

On sait que :

$$S_x(f) = TF^{-1}[R_x(\tau)]$$

Calculons la fonction d'autocorrélation :

$$R_x(\tau) = E[x(t).x^*(t - \tau)]$$

En sachant que :

$$x(t) = NRZ(t) \cdot \underbrace{[\cos(2\pi F_1 t + \phi_1) - \cos(2\pi F_0 t + \phi_0)]}_{\Lambda(t)} + \underbrace{\cos(2\pi F_0 t + \phi_0)}_{\Delta(t)}$$

On déduit :

$$R_x(\tau) = E[(NRZ(t)\Lambda(t) + \Delta(t)).(NRZ(t - \tau)\Lambda(t - \tau) + \Delta(t - \tau))]$$

On développe :

$$R_x(\tau) = \begin{cases} E[NRZ(t)NRZ(t - \tau)\Lambda(t)\Lambda(t - \tau) + NRZ(t)\Lambda(t)\Delta(t - \tau) \\ + NRZ(t - \tau)\Lambda(t - \tau)\Delta(t) + \Delta(t)\Delta(t - \tau)] \end{cases}$$

Ainsi, par linéarité de l'espérance :

$$R_x(\tau) = R_{NRZ}(\tau)E[\Lambda(t)\Lambda(t)] + \frac{1}{2}E[\Lambda(t)\Delta(t-\tau)] + \frac{1}{2}E[\Lambda(t-\tau)\Delta(t)] + E[\Delta(t)\Delta(t-\tau)] \quad (2)$$

On calcule :

$$E[\Lambda(t)\Lambda(t-\tau)] = E[(\cos(2\pi F_1 t + \phi_1) - \cos(2\pi F_0 t + \phi_0)) \cdot (\cos(2\pi F_1(t-\tau) + \phi_1) - \cos(2\pi F_0(t-\tau) + \phi_0))]$$

On développe :

$$E[\Lambda(t)\Lambda(t-\tau)] = \begin{cases} E[\cos(2\pi F_1 t + \phi_1)\cos(2\pi F_1(t-\tau) + \phi_1) - \cos(2\pi F_1 t + \phi_1)\cos(2\pi F_0(t-\tau) + \phi_0) \\ - \cos(2\pi F_0 t + \phi_0)\cos(2\pi F_1(t-\tau) + \phi_1) + \cos(2\pi F_0 t + \phi_0)\cos(2\pi F_0(t-\tau) + \phi_0)] \end{cases}$$

En utilisant les formules trigonométriques, on obtient :

$$E[\Lambda(t)\Lambda(t-\tau)] = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos(2\pi F_1 \tau) + \frac{1}{2}\cos(2\pi F_0 \tau) - E[\cos(2\pi F_1 t + \phi_1)]E[\cos(2\pi F_0(t-\tau) + \phi_0)] \\ - E[\cos(2\pi F_1(t-\tau) + \phi_1)]E[\cos(2\pi F_0 t + \phi_0)] \end{cases}$$

Comme ϕ_1 et ϕ_2 suivent une loi uniforme sur $[0, 2\pi]$, on déduit :

$$E[\Lambda(t)\Lambda(t-\tau)] = \frac{1}{2}(\cos(2\pi F_1 \tau) + \cos(2\pi F_0 \tau))$$

De plus, on trouve de la même manière :

$$E[\Lambda(t)\Delta(t-\tau)] = -\frac{1}{2}\cos(2\pi F_0 \tau)$$

$$E[\Lambda(t-\tau)\Delta(t)] = -\frac{1}{2}\cos(2\pi F_0 \tau)$$

$$E[\Delta(t)\Delta(t-\tau)] = \frac{1}{2}\cos(2\pi F_0 \tau)$$

Ainsi, en utilisant (2), on a :

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2}R_{NRZ}(\tau)(\cos(2\pi F_1 \tau) + \cos(2\pi F_0 \tau)) - \frac{1}{4}\cos(2\pi F_0 \tau) - \frac{1}{4}\cos(2\pi F_0 \tau) + \frac{1}{2}\cos(2\pi F_0 \tau)$$

D'où :

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2}R_{NRZ}(\tau)(\cos(2\pi F_1 \tau) + \cos(2\pi F_0 \tau))$$

Enfin, par transformée de Fourier inverse, on trouve :

$$S_x(f) = \frac{1}{4}[S_{NRZ}(f - F_0) + S_{NRZ}(f - F_1) + S_{NRZ}(f + F_1) + S_{NRZ}(f + F_0)]$$

En traçant les résultats obtenu on obtient la figure 3

- $F_0 = 6000$ et $F_1 = 4000$, de plus la DSP est bien centrée en 0 et on observe bien les 4 fréquences ($-F_0$, F_1 , F_1 , F_0). On conclut que l'estimation de la DSP du signal modulé en fréquence est une bonne estimation de la DSP théorique.

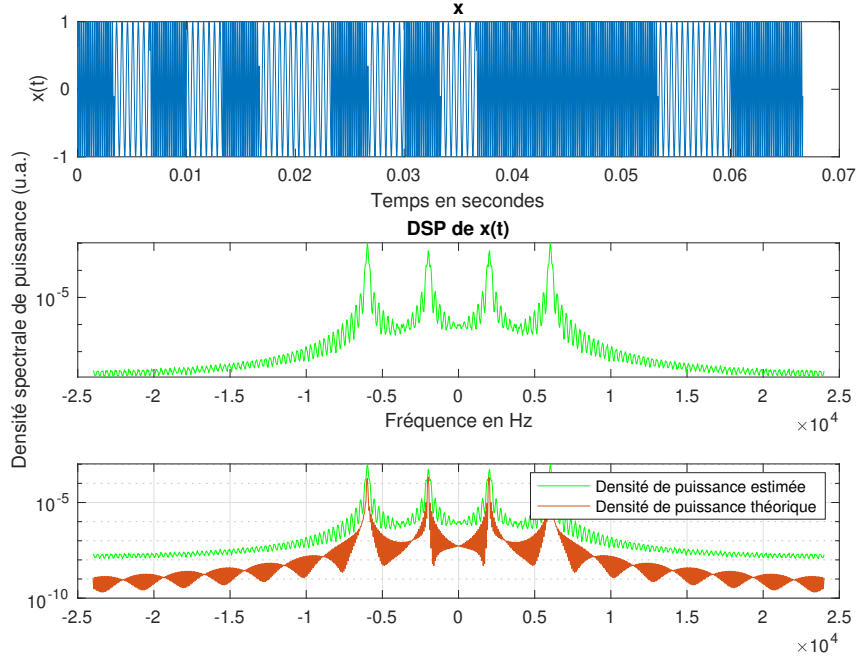


FIGURE 3 – Signal $x(t)$ et ses DSP théorique et pratique

3 Canal de transmission à bruit additif, blanc et Gaussien

Nous allons considérer que le canal de propagation ajoute au signal émis un bruit que l'on suppose blanc et Gaussien et qui modélise les perturbations introduites.

La puissance du bruit Gaussien à ajouter devra être déduite du rapport signal sur bruit (SNR : Signal to Noise Ratio) souhaité pour la transmission donné en dB :

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_x}{P_b}$$

où P_x représente la puissance du signal modulé en fréquence et P_b la puissance du bruit ajouté.

4 Démodulation par filtrage

La figure 5 présente le récepteur implanté pour retrouver, à partir du signal modulé en fréquence bruité, le message binaire envoyé.

Un filtre passe-bas permet de filtrer les morceaux de cosinus à la fréquence $F_0 = 6000\text{Hz}$, tandis qu'un filtre passe-haut permet de filtrer les morceaux de cosinus à la fréquence $F_1 = 2000\text{Hz}$. Une détection d'énergie réalisée tous les T_s secondes permet de récupérer, à partir des signaux filtrés, les bits 0 et 1 transmis.

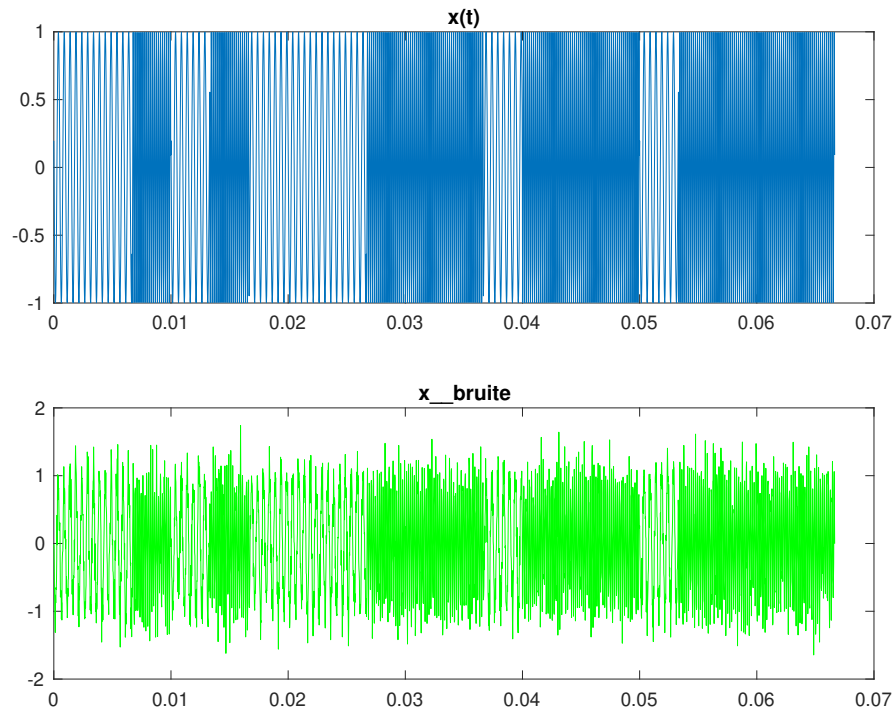


FIGURE 4 – Signal bruité.

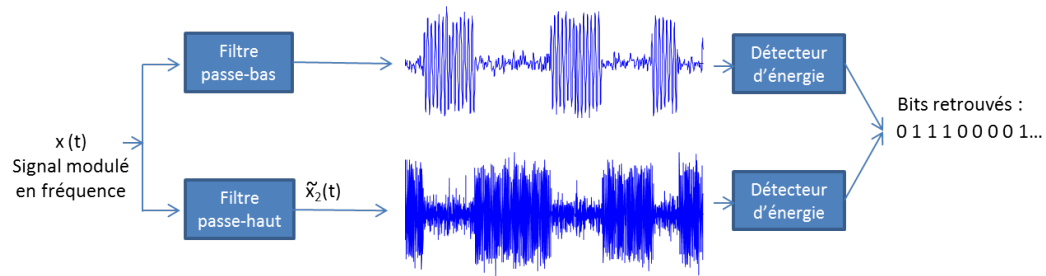


FIGURE 5 – Démodulation par filtrage.

4.1 Synthèse du filtre passe-bas

La synthèse du filtre passe-bas se fait de cette manière :

```
ordre = 61; % ordre
t = (-(ordre-1)/2:(ordre-1)/2)*Te;
Fc1 = Fc; % on prend la fréquence de coupure entre F_0 et F_1
passe_bas = 2*Fc1/Fe*sinc(2*Fc1*t);
x_bruite_pb = filter(passe_bas,1,x_bruite);
```

4.2 Synthèse du filtre passe-haut

Pour obtenir le filtre passe-haut, on a simplement réutilisé le filtre passe-bas précédemment créé :

```

passe_haut = -passe_bas;
lambda = length(t)/2 + 1;
lambda = floor(lambda);
passe_haut(lambda) = passe_haut(lambda) + 1; % Ajout d'un dirac au
milieu
x_bruite_ph = filter(passe_haut,1,x_bruite); %Filtrage du signal

```

4.3 Filtres d'ordre 61

On obtient les résultats suivants avec un seuil $K = 42$. Pour déterminer ce seuil, on a effectué plusieurs essais représentés par la figure 8 qui représente le taux d'erreur binaire en fonction de K ; on a choisi le K minimisant le taux d'erreur binaire.

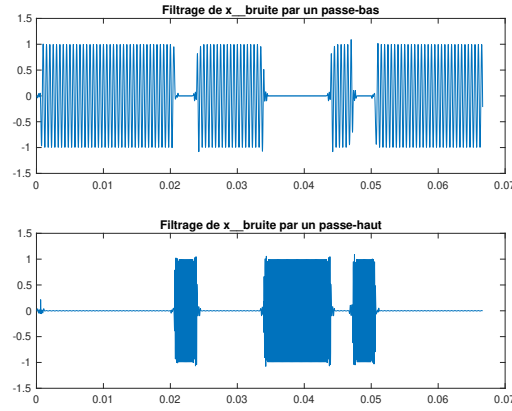


FIGURE 6 – Signal filtré

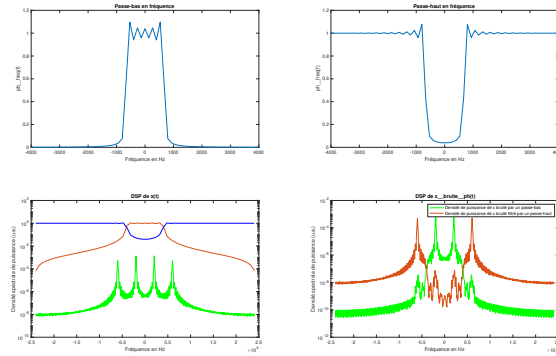


FIGURE 7 – Caractéristiques des filtres passe-bas et passe-haut utilisés

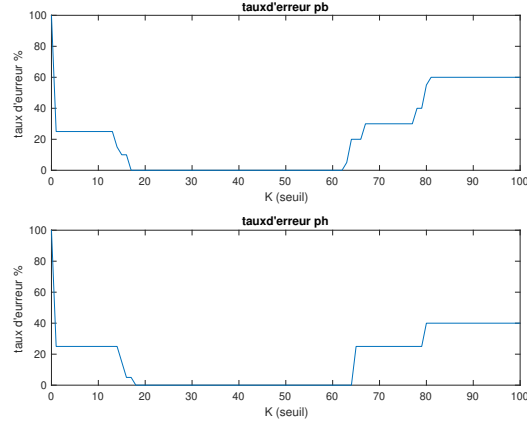


FIGURE 8 – Détermination du Seuil K

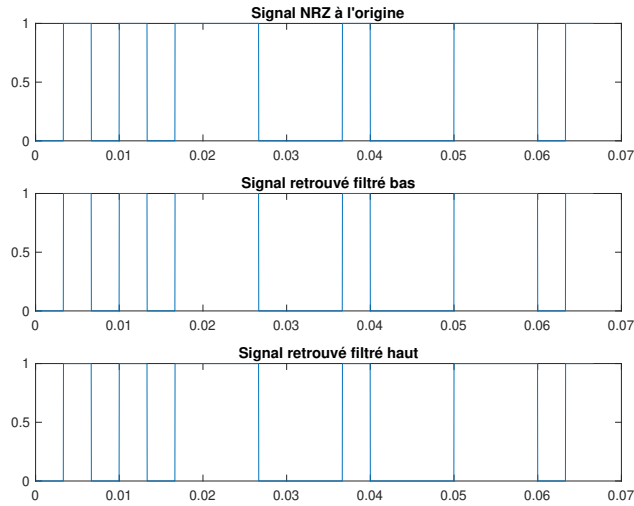


FIGURE 9 – Les signaux de sortie en comparaison avec le signal de départ

4.4 Modification de l'ordre des filtres

Lorsqu'on élève l'ordre du filtre à 201, on remarque que les signaux retrouvés en sortie de filtre sont en retard par rapport au signal NRZ à l'origine. De plus, la dernière composante du signal à l'origine a été supprimée, et pour le filtre passe-haut, une composante a été ajoutée au début du signal.

Comme on connaît la formule du retard qui est :

$$Retard = \frac{Ordre - 1}{2} T_e$$

Nous pouvons déplacer le signal pour compenser ce retard, et modifier les bits problématique.

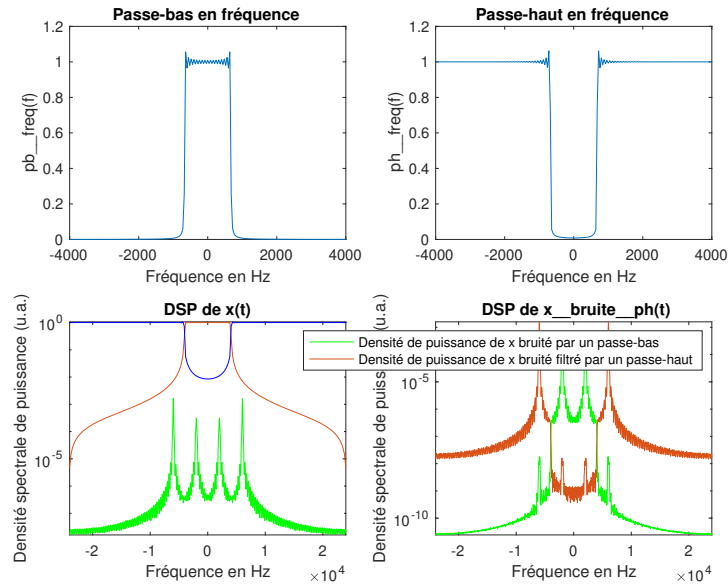


FIGURE 10 – Filtre et DSP lorsque l'ordre du filtre est de 201

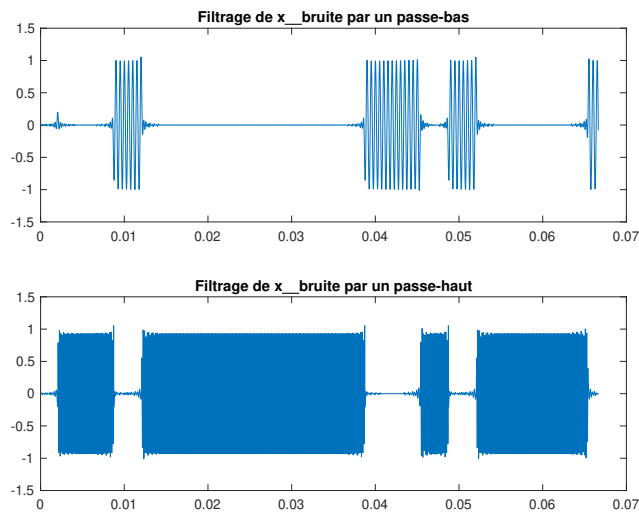


FIGURE 11 – Signal filtré lorsque l'ordre du filtre est de 201

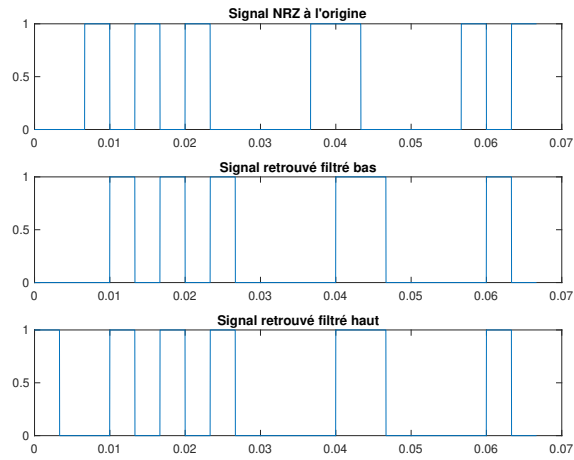


FIGURE 12 – Signal retrouvé en sortie lorsque l'ordre du filtre est de 201

4.5 Utilisation des fréquences de la recommandation V21

On observe que malgré le fait qu'il n'y ait aucun bruit cette méthode a ses limites.

Le problème de la recommandation V21 est qu'elle nécessite des fréquences trop proches pour gérer notre démodulateur. De ce fait même en modifiant les filtre le taux d'erreur binaire ne sera jamais nul. Pour corriger notre démodulateur on fera appel à la synchronisation.

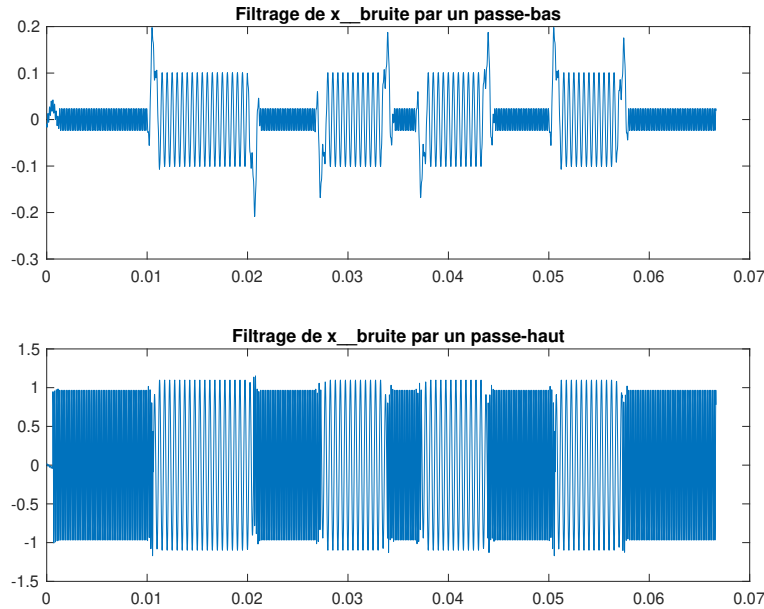


FIGURE 13 – Le signal filtré avec les normes V21

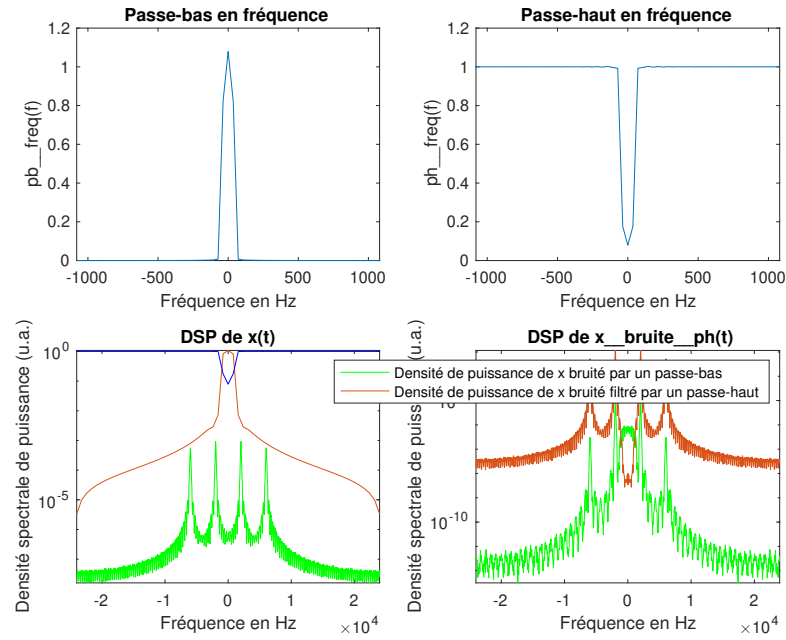


FIGURE 14 – Les DSP du signal avec la norme V21

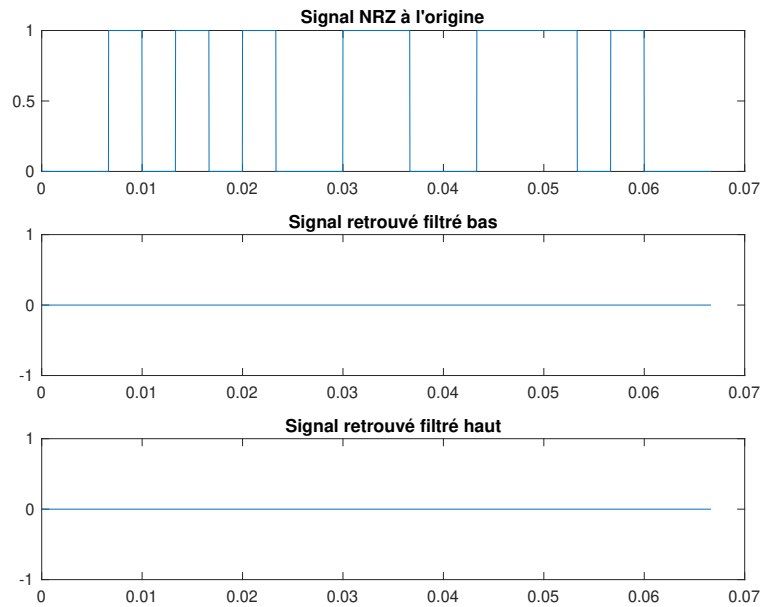


FIGURE 15 – Le signal en sortie avec les normes V21

5 Démodulateur de fréquence adapté à la norme V21

5.1 Contexte de synchronisation idéale

La figure 16 présente le récepteur implanté afin de retrouver, dans un contexte de synchronisation idéale, le message binaire envoyé à partir du signal modulé en fréquence suivant la recommandation V21.

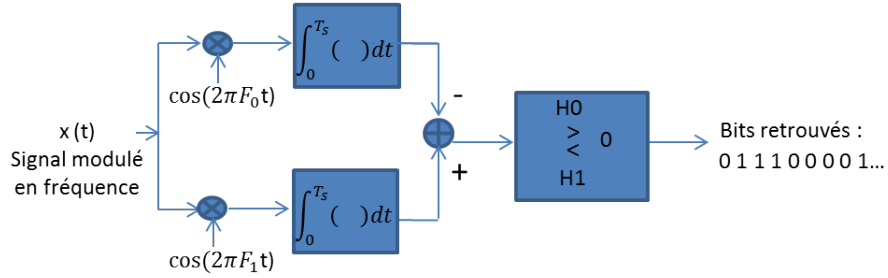


FIGURE 16 – Démodulation FSK. Synchronisation supposée idéale.

5.1.1 Principe de fonctionnement de ce récepteur

Supposons tout d'abord que :

$$x(t) = \cos(2\pi F_0 t + \phi_0)$$

Suivons les étapes de la figure 16 :

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{Ts} \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) dt \\ &= \int_0^{Ts} \frac{1 + \cos(4\pi F_0 t + 2\phi_0)}{2} dt \\ &= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(4\pi F_0 t + 2\phi_0)}{8\pi F_0} \right]_0^{Ts} \\ &= \frac{Ts}{2} + \frac{\sin(4\pi F_0 Ts + 2\phi_0)}{8\pi F_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= \int_0^{Ts} \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{Ts} [\cos(2\pi(F_0 + F_1)t + \phi_0 + \phi_1) + \cos(2\pi(F_0 - F_1)t + \phi_0 - \phi_1)] dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{\sin(2\pi(F_0 + F_1)t + \phi_0 + \phi_1)}{2\pi(F_0 + F_1)} \right]_0^{Ts} + \left[\frac{\sin(2\pi(F_0 - F_1)t + \phi_0 - \phi_1)}{2\pi(F_0 - F_1)} \right]_0^{Ts} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\sin(2\pi(F_0 + F_1)Ts + \phi_0 + \phi_1) - \sin(\phi_0 + \phi_1)}{F_0 + F_1} + \frac{\sin(2\pi(F_0 - F_1)Ts + \phi_0 - \phi_1) - \sin(\phi_0 - \phi_1)}{F_0 - F_1} \right) \end{aligned}$$

Ainsi en supposant les phases nulles on a :

$$N - M = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\sin(2\pi(F_0 + F_1)Ts)}{F_0 + F_1} + \frac{\sin(2\pi(F_0 - F_1)Ts)}{F_0 - F_1} \right) - \frac{Ts}{2} - \frac{\sin(4\pi F_0 Ts)}{8\pi F_0}$$

Approximativement, avec les valeurs numériques, on obtient :

$$N - M \simeq -0.0164 < 0$$

Donc, on déduit que le bit est nul pour une entrée dont la fréquence vaut F_0 .

De manière analogue, pour :

$$x(t) = \cos(2\pi F_1 t + \phi_1)$$

On obtiendra :

$$N' - M' \simeq 0.0164 > 0$$

Donc, on déduit que le bit vaut un pour une entrée dont la fréquence vaut F_1 .

5.1.2 Résultats obtenus

On observe que le taux d'erreur binaire est nul s'il n'y a pas de problème de phase, c'est-à-dire quand les phases des cosinus en émission et en réception sont identiques.

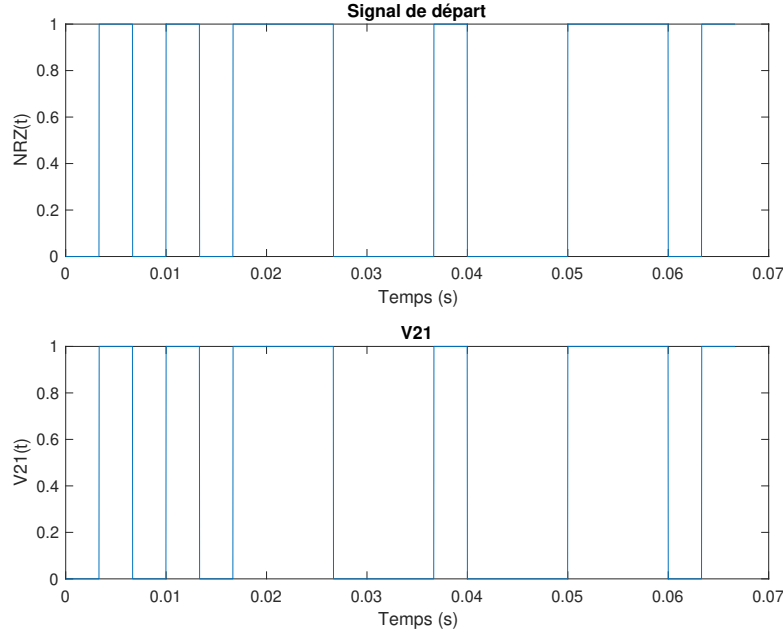


FIGURE 17 – Signal de sortie obtenu avec la démodulation FSK

On constate qu'avec cette dernière méthode le taux d'erreur binaire reste nul peu importe les phases des cosinus en émission et en réception. On va donc utiliser cette méthode de démodulation pour résoudre le dernier problème.

5.2 Gestion d'une erreur de synchronisation de phase porteuse

Le problème de la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur est un problème important lorsque l'on réalise une transmission. Les deux doivent être parfaitement synchronisés en temps et en fréquence pour que le démodulateur implanté précédemment fonctionne, ce qui en pratique n'est bien entendu pas possible. Afin que le modem puisse continuer à fonctionner en présence d'une erreur de phase porteuse, celui-ci doit être modifié. La figure 18 présente un démodulateur permettant de s'affranchir de problèmes de synchronisation de phase entre les oscillateurs d'émission et de réception.

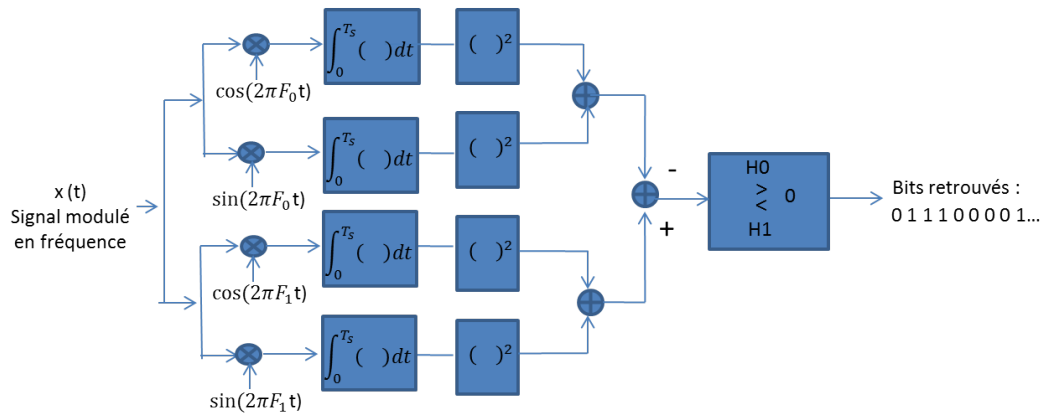


FIGURE 18 – Démodulation FSK - Gestion d'une erreur de phase porteuse.

5.2.1 Impact d'une erreur de phase porteuse sur le modem implanté précédemment

Comme le montre la figure 19, le signal retrouvé en sortie est complètement erroné, car les bits reçus sont différents des bits envoyés.

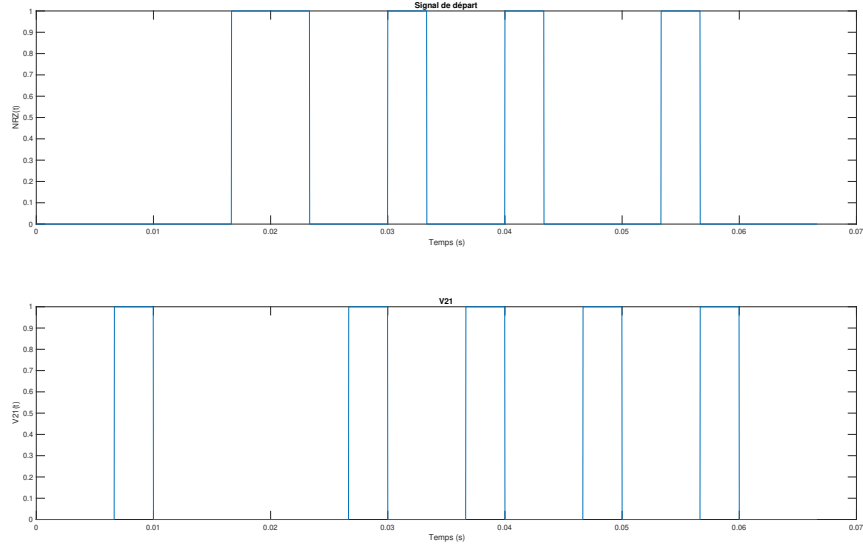


FIGURE 19 – Démodulateur avec un erreur de phase porteuse.

5.2.2 Principe de fonctionnement de cette nouvelle version du modem de fréquence

Pour pallier cette erreur indésirable, on va utiliser une version améliorée du démodulateur FSK qui va corriger cette erreur de phase porteuse.

On décrit ci-dessous le fonctionnement théorique, par des équations, de ce démodulateur amélioré. Ainsi, en reprenant les calculs précédemment réalisés dans la section 5.1.1, on déduit d'une part :

$$\begin{aligned}\chi &= \int_0^{Ts} \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) \cos(2\pi F_0 t + \theta_0) dt \\ \chi &= \frac{Ts}{2} \cos(\phi_0 - \theta_0) + \frac{\sin(4\pi F_0 Ts + \phi_0 + \theta_0) - \sin(\phi_0 + \theta_0)}{8\pi F_0}\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\psi &= \int_0^{Ts} \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) \sin(2\pi F_0 t + \theta_0) dt \\ \psi &= \frac{Ts}{2} \cos(\phi_0 - \theta_0) - \frac{\cos(4\pi F_0 Ts + \phi_0 + \theta_0) + \cos(\phi_0 + \theta_0)}{8\pi F_0}\end{aligned}$$

Donc, on a :

$$\chi^2 + \psi^2 = \frac{Ts^2}{4} + \frac{2}{(8\pi F_0)^2} + \frac{2\cos(4\pi F_0 Ts + 2(\phi_0 + \theta_0))}{(8\pi F_0)^2} + Ts \frac{\sin(4\pi F_0 Ts + 2\phi_0) - \sin(2\theta_0)}{8\pi F_0}$$

Donc, on peut approximer par :

$$\boxed{\chi^2 + \psi^2 \simeq \frac{Ts^2}{4}}$$

De plus :

$$\zeta = \int_0^{Ts} \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) \cos(2\pi F_0 t + \theta_0) dt$$

$$\zeta = \frac{\sin(2\pi(F_1 - F_0)Ts + \phi_1 - \theta_0) - \sin(\phi_1 - \theta_0)}{4\pi(F_1 - F_0)} + \frac{\sin(2\pi(F_1 + F_0)Ts + \phi_1 + \theta_0) - \sin(\phi_1 + \theta_0)}{4\pi(F_1 + F_0)}$$

Et de la même manière :

$$\eta = \int_0^{Ts} \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) \cos(2\pi F_0 t + \theta_0) dt$$

$$\eta = \frac{\cos(\theta_0 - \phi_1) - \cos(2\pi(F_0 - F_1)Ts + \theta_0 - \phi_1)}{4\pi(F_0 - F_1)} + \frac{\cos(\theta_0 + \phi_1) - \cos(2\pi(F_0 + F_1)Ts + \theta_0 + \phi_1)}{4\pi(F_0 + F_1)}$$

Par analyse des ordres de grandeur, on déduit que ζ et η sont négligeables devant χ et ψ , donc $\zeta^2 + \eta^2$ est négligeable devant $\frac{Ts^2}{4}$.

5.2.3 Résultats obtenus

Après récupération des différents morceaux de l'image mystère, on réussit à l'aide de notre modem, à reconstituer l'image ci-dessous.



FIGURE 20 – Image retrouvée

6 Conclusion

Nous avons réussi à réaliser via le logiciel Matlab, un modem selon la recommandation V21, grâce notamment à la documentation fournie par l'école. De plus, nous avons réussi à créer plusieurs démodulateurs : les filtres et le démodulateur FSK. En outre, nous avons réussi à reconstituer l'image à retrouver, représentée figure 20.

7 Références

- Cours de traitement du signal
- TP et TD de traitement du signal
- Documentation Matlab (MathWorks)