Gemischte Finite Elemente in der Magnetostatik

Masterseminar Numerik

Julian Buschbaum, Benjamin Northe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Numerische Mathematik

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

Im folgenden werden verschiedene Grundlagen ausgeführt.

1.1 Elektromagnetische Grundgleichungen

Die Theorie der magnetischen und auch elektromegnetischen Felder basiert im allgemeinen auf den Maxwell Gleichungen [2]. Diese lauten:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \tag{1}$$
$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho \tag{2}$$
$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} \tag{3}$$
$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \tag{4}$$

Die Variablen entsprechen dabei:

- $\vec{E}$: Elektrische Feldstärke
- $\vec{D}$: Elektrische Flussdichte
- $\vec{H}$: Magnetische Feldstärke
- $\vec{B}$: Magnetische Flussdichte
- $\vec{J}$: Elektrische Stromdichte
- ρ Ladungsdichte

Für unsere Herleitung sind in erster Linie die Gleichungen 3 und 4 relevant. Für die Statische Betrahtung verschwinden zusätzlich die enthaltenen Zeitableitungen, sodass sich 3 vereinfacht zu:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} \tag{5}$$

Diese Sonderform der 3. Maxwellschen Gleichung wird auch das Amperesche Gesetz der Magnetostatik genannt.

Darüber hinaus werden noch Materialbeziehungen benötigt. Diese stellen eine Beziehung zwischen den Feldstärken und den Flussdichten her [2].

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \tag{6}$$
$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} \tag{7}$$
$$\vec{J} = \kappa\vec{E} \tag{8}$$

Die Permittivität ϵ, Permeabilität μ und Leitfähigkeit κ stellen dabei die Kopplungsgrößen dar.

1.2 Vektoranalytische Grundgleichungen

Zur Herleitung der gewünschten Formulierung werden zusätzlich mehrere Gleichungen aus der Vektoranalysis benötigt [1]. Diese besagen folgendes.

Ein Wirbelfeld ist immer Divergenzfrei:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{u} = 0 \tag{9}$$

Ein Quellenfeld ist Wirbelfrei:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Phi = 0 \tag{10}$$

Der Wirbel eines Wirbels lässt sich aufteilen:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} - \Delta\vec{u} \tag{11}$$

1.3 De-Rham-Komplex

Die eingeführten Grundgleichungen lassen sich auch in einen Komplex überführen. Die genauen Funktionenräume, werden später noch eingeführt. Es lässt sich zeigen, dass auf einfach zusammenhängenden

$$\begin{array}{ccccccc} H^1 & \xrightarrow{\text{grad}} & \text{H-curl} & \xrightarrow{\text{rot}} & \text{H-div} & \xrightarrow{\text{div}} & L^2 \\ \Phi & & \vec{E}/\vec{H}/\vec{A} & & \vec{B}/\vec{D} & & \rho \end{array}$$

Gebieten ein Operator in dieser Sequenz exakt dem Kern des nächsten Operators entspricht.

2 Das Magnetische Vektorpotential

Zur Definition eines Vektorpotentials kann nun wieder die Beziehung 9 verwendet werden.

Wird ein Vektorpotential der Form $\exists \vec{A} \in H(curl)$

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} \tag{12}$$

Eingeführt, so ist Gleichung 4 weiterhin erfüllt. Ebenso wird die De Rham Sequenz dadurch weiterhin befolgt.

Anmerkung: Das Vektorpotential ist also vergleichbar mit dem Skalaren Potential, welches Beispielsweise für die Elektrostatik Anwendung findet. Dieses ist definiert als:

$$\operatorname{grad}\Phi = \vec{E} \tag{13}$$

Die De-Rham Sequenz ist folglich ein guter Anhaltspunkt, für die Resultierenden Vektorräume nach Anwendung von Vektoroperationen.

Grafisch kann das Vektorpotential intepretiert werden, als ein Potential, welchen stets parallel zur erzeugenden Stromdichte $\vec{J}$ des Magnetfeldes verläuft.

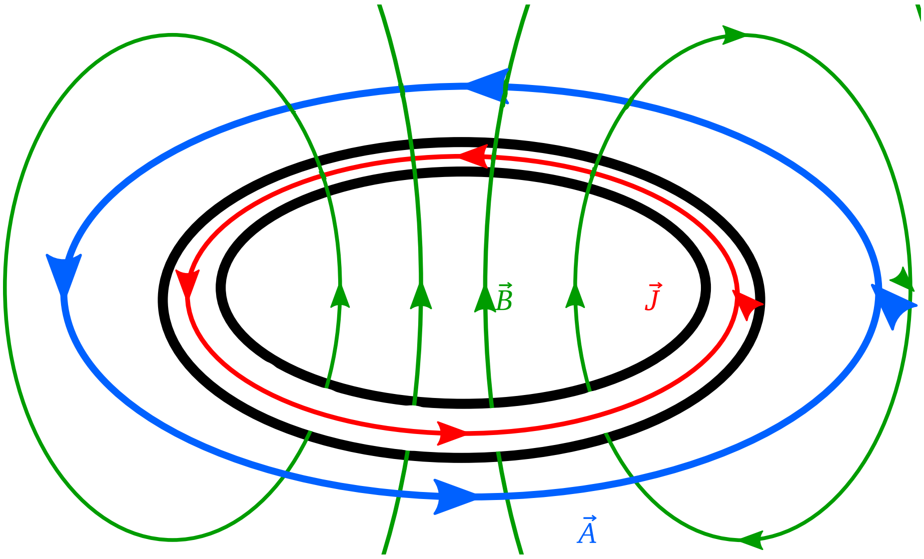

Abbildung 1: Grafische Darstellung des magnetischen Vektorpotentials für ein Magnetfeld, welches durch den Strom innerhalb eines Torus förmigen Leiters erzeugt wird.

Anmerkung: Das magnetische Vektorpotential hat keine physikalische Bedeutung. Es dient lediglich als Hilfsgröße, um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zur Lösung für die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ bilden zu können. Die gesuchte Größe ist also am Ende weiterhin $\vec{B}$.

2.1 Differentialgleichung zweiter Ordnung mittels Vektorpotential

Das Vektorpotential kann anschließend verwendet werden, um die Differentialgleichung zweiter Ordnung herzuleiten. Dazu wird zunächst die Materialbeziehung für das Magnetische Feld betrachtet:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \tag{14}$$

In diese kann das Vektorpotential eingesetzt werden und man erhält:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \mathrm{rot} \vec{A} \tag{15}$$

Diese Beziehung kann nun direkt in 5 eingesetzt werden und man Erhält die Gleichung zweiter Ordnung:

$$\mathrm{rot}\, \vec{H} = \vec{J} \tag{16}$$

$$\mathrm{rot}\, \frac{1}{\mu} \mathrm{rot} \vec{A} = \vec{J} \tag{17}$$

2.2 Coulomb Eichung

Es gilt zu beachten, dass das Vektorpotential nicht eindeutig definiert ist. Mittels der vektoranalytischen Grundgleichungen ist leicht ersichtlich, dass eine Aufteilung des Vektorpotentials in der Form

$$\vec{A} = \vec{A}^* + \operatorname{grad}\Phi \tag{18}$$

Die Lösung nicht verändert, da der Gradiententerm durch die Anwendung des rot-Operators verschwindet.

Folglich kann Φ in diesem Fall so gewählt werden, dass bestimmte Einschränkungen erfüllt sind. Für unseren Fall bietet sich die Coulomb Eichung an. Diese sieht vor, dass Φ so gewählt wird, dass für das Vektorpotential gilt:

$$\operatorname{div}\vec{A} = 0 \tag{19}$$

Warum diese Wahl hilfreich ist wird später erläutert.

3 H(curl) Räume

Für unsere Funktionen müssen nun noch die bereits in der De-Rham Sequenz eingeführten Funktionenräume definiert werden. Für das Vektorpotential wird der Vektorraum H(curl) verwendet. Dieser ist gegeben als:

$$H(curl) = u \in [L_2]^3 : \operatorname{rot} u \in [L_2]^3 \tag{20}$$

Im H(curl) Raum ist die innere Norm gegeben als:

$$||u||_{H(curl)} = \sqrt{||u||_{L_2}^2 + |u|_{H(curl)}^2} \tag{21}$$

bzw.

$$||u||_{H(curl)} = \sqrt{||u||_{L_2}^2 + ||\operatorname{rot} u||_{L_2}^2} \tag{22}$$

4 Die Helmholtz Zerlegung

Für eine Vektorfunktion $u \in L_2$ ist eine Zerlegung in eine Gradientenfunktion, sowie eine Rotationsfunktion möglich [3].

$$u = \nabla\Phi + \operatorname{rot}\psi \tag{23}$$

Dabei wird Φ als Skalarpotential, und ψ als Vektorpotential bezeichnet. Wie bereits unter Abschnitt 2.2 beschrieben, ist das Vektorpotential nicht eindeutig definiert, da dies selbst wieder in der Form

$$\psi = \psi^* + \nabla\chi \tag{24}$$

gesplittet werden kann. Dadurch kann auch hier eine bestimmte Einschränkung gewählt werden, wie die Coulomb Eichung ($\operatorname{div}\psi = 0$).

5 Lösung für homogene und isotrope Materialien

Bevor die schwache Formulierung und folglich die numerische Lösung der Vektorpotentialgleichung diskutiert wird, soll im folgenden ein Fall dargestellt werden, für den auch leicht eine analytische Lösung ist.

6 Schwache Formulierung der Vektorpotentialgleichung

7 Gemischte Formulierung

8 Kommutierendes Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
\begin{array}{c} H^1 \\ \Phi \end{array} \arrow[r, "\text{grad}"] \arrow[d, "I^W"] & \begin{array}{c} \text{H-curl} \\ \vec{E}/\vec{H}/\vec{A} \end{array} \arrow[r, "\text{rot}"] \arrow[d, "I^V"] & \begin{array}{c} \text{H-div} \\ \vec{B}/\vec{D} \end{array} \arrow[r, "\text{div}"] \arrow[d, "I^Q"] & \begin{array}{c} L^2 \\ \rho \end{array} \arrow[d, "I^S"] \\
\begin{array}{c} \text{Volumen} \\ S_h \end{array} \arrow[r, "\text{grad}"] & \begin{array}{c} \text{Flächen} \\ Q_h \end{array} \arrow[r, "\text{rot}"] & \begin{array}{c} \text{Kanten} \\ V_h \end{array} \arrow[r, "\text{div}"] & \begin{array}{c} \text{Knoten} \\ W_h \end{array}
\end{tikzcd}
$$

Mit I^W: Knoteninterpolation, I^V: Kanteninterpolation, I^Q: Flächeninterpolation und I^S: L_2 Projektion.

Literatur

[1] John David Jackson. *klassische Elektrodynamik*. Walter de Gruyter, 1981.

[2] James Clerk Maxwell. “VIII. A dynamical theory of the electromagnetic field”. In: *Philosophical transactions of the Royal Society of London* 155 (1865), S. 459–512.

[3] Joachim Schöberl. “Numerical Methods for Maxwell Equations”. In: 2009.