Gemischte Finite Elemente in der Magnetostatik

Masterseminar Numerik
Julian Buschbaum, Benjamin Northe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Numerische Mathematik

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

Im folgenden werden verschiedene Grundlagen ausgeführt.

1.1 Elektromagnetische Grundgleichungen

Die Theorie der magnetischen und auch elektromegnetischen Felder basiert im allgemeinen auf den Maxwell Gleichungen [1]. Diese lauten:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho \tag{2}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} \tag{3}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \tag{4}$$

Die Variablen entsprechen dabei:

- $\vec{E}$: Elektrische Feldstärke
- $\vec{D}$: Elektrische Flussdichte
- $\vec{H}$: Magnetische Feldstärke
- $\vec{B}$: Magnetische Flussdichte
- $\vec{J}$: Elektrische Stromdichte
- ρ Ladungsdichte

Für unsere Herleitung sind in erster Linie die Gleichungen 3 und 4 relevant. Für die Statische Betrahtung verschwinden zusätzlich die enthaltenen Zeitableitungen, sodass sich 3 vereinfacht zu:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} \tag{5}$$

Diese Sonderform der 3. Maxwellschen Gleichung wird auch das Amperesche Gesetz der Magnetostatik genannt.

Darüber hinaus werden noch Materialbeziehungen benötigt. Diese stellen eine Beziehung zwischen den Feldstärken und den Flussdichten her [1].

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \tag{6}$$

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} \tag{7}$$

$$\vec{J} = \kappa\vec{E} \tag{8}$$

Die Permittivität ϵ, Permeabilität μ und Leitfähigkeit κ stellen dabei die Kopplungsgrößen dar.

1.2 Vektoranalytische Grundgleichungen

Zur Herleitung der gewünschten Formulierung werden zusätzlich mehrere Gleichungen aus der Vektoranalysis benötigt. Diese besagen folgendes.

Ein Wirbelfeld ist immer Divergenzfrei:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{u} = 0 \tag{9}$$

Ein Quellenfeld ist Wirbelfrei:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Phi = 0 \tag{10}$$

Der Wirbel eines Wirbels lässt sich aufteilen:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} - \Delta\vec{u} \tag{11}$$

1.3 De-Rham-Komplex

Die eingeführten Grundgleichungen lassen sich auch in einen Komplex überführen. Die genauen Funktionenräume, werden später noch eingeführt. Es lässt sich zeigen, dass auf einfach zusammenhängenden

$$\begin{array}{ccccccc} H^1 & \xrightarrow{\quad\text{grad}\quad} & \text{H-curl} & \xrightarrow{\quad\text{rot}\quad} & \text{H-div} & \xrightarrow{\quad\text{div}\quad} & L^2 \\ \Phi & & \vec{E}/\vec{H}/\vec{A} & & \vec{B}/\vec{D} & & \rho \end{array}$$

Gebieten ein Operator in dieser Sequenz exakt dem Kern des nächsten Operators entspricht.

2 Das Magnetische Vektorpotential

Zur Definition eines Vektorpotentials kann nun wieder die Beziehung 9 verwendet werden.

Wird ein Vektorpotential der Form $\exists\vec{A} \in H(curl)$

$$\vec{A} = \operatorname{rot}\vec{B} \tag{12}$$

Eingeführt, so ist Gleichung 4 weiterhin erfüllt. Ebenso wird die De Rham Sequenz dadurch weiterhin befolgt.

Anmerkung: Das Vektorpotential ist also vergleichbar mit dem Skalaren Potential, welches Beispielsweise für die Elektrostatik Anwendung findet. Dieses ist definiert als:

$$\operatorname{grad}\Phi = \vec{E} \tag{13}$$

Die De-Rham Sequenz ist folglich ein guter Anhaltspunkt, für die Resultierenden Vektorräume nach Anwendung von Vektoroperationen.

Grafisch kann das Vektorpotential intepretiert werden, als ein Potential, welchen stets parallel zur erzeugenden Stromdichte $\vec{J}$ des Magnetfeldes verläuft.

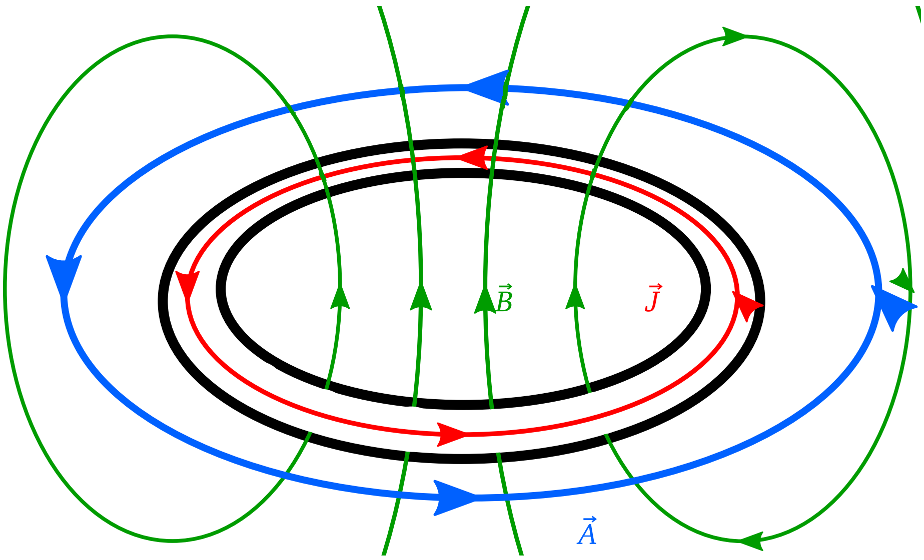

Abbildung 1: Grafische Darstellung des magnetischen Vektorpotentials für ein Magnetfeld, welches durch den Strom innerhalb eines Torus förmigen Leiters erzeugt wird.

3 Kommutierendes Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\begin{matrix} H^1 \\ \Phi \end{matrix} \arrow[r, "\mathrm{grad}"] \arrow[d, "I^W"] & \begin{matrix} \text{H-curl} \\ \vec{E}/\vec{H}/\vec{A} \end{matrix} \arrow[r, "\mathrm{rot}"] \arrow[d, "I^V"] & \begin{matrix} \text{H-div} \\ \vec{B}/\vec{D} \end{matrix} \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, "I^Q"] & \begin{matrix} L^2 \\ \rho \end{matrix} \arrow[d, "I^S"] \\
\begin{matrix} \text{Volumen} \\ S_h \end{matrix} \arrow[r, "\mathrm{grad}"] & \begin{matrix} \text{Flächen} \\ Q_h \end{matrix} \arrow[r, "\mathrm{rot}"] & \begin{matrix} \text{Kanten} \\ V_h \end{matrix} \arrow[r, "\mathrm{div}"] & \begin{matrix} \text{Knoten} \\ W_h \end{matrix}
\end{tikzcd}$$

Mit I^W: Knoteninterpolation, I^V: Kanteninterpolation, I^Q: Flächeninterpolation und I^S: L_2 Projektion.

Literatur

[1] James Clerk Maxwell. “VIII. A dynamical theory of the electromagnetic field”. In: *Philosophical transactions of the Royal Society of London* 155 (1865), S. 459–512.