

Gemischte Finite Elemente in der Magnetostatik

Masterseminar Numerik
Julian Buschbaum, Benjamin Northe



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



**Numerische
Mathematik**

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	1
1.1 Elektromagnetische Grundgleichungen	1
1.2 Vektoranalytische Grundgleichungen	2
1.3 De-Rham-Komplex	2
2 Das Magnetische Vektorpotential	2
2.1 Differentialgleichung zweiter Ordnung mittels Vektorpotential	3
2.2 Coulomb Eichung	4
3 $H(\text{curl})$ Räume	4
4 Die Helmholtz Zerlegung	4
4.1 Sonderfall für $u \in H(\text{curl})$	5
5 Friedrichs Ungleichung für $H(\text{curl})$ Funktionenräume	6
6 Lösung für homogene und isotrope Materialien im Freiraum	6
7 Schwache Formulierung der Vektorpotentialgleichung	7
7.1 Lax-Milgram	7
8 Gemischte Formulierung	9
8.1 Inf-Sup-Bedingung nach Brezzi	9
9 Kommutierendes Diagramm	9
Literatur	10

1 Grundlagen

Im folgenden werden verschiedene Grundlagen ausgeführt.

1.1 Elektromagnetische Grundgleichungen

Die Theorie der magnetischen und auch elektromagnetischen Felder basiert im allgemeinen auf den Maxwell Gleichungen [2]. Diese lauten:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (4)$$

Die Variablen entsprechen dabei:

- \vec{E} : Elektrische Feldstärke
- \vec{D} : Elektrische Flussdichte
- \vec{H} : Magnetische Feldstärke
- \vec{B} : Magnetische Flussdichte
- \vec{J} : Elektrische Stromdichte
- ρ Ladungsdichte

Für unsere Herleitung sind in erster Linie die Gleichungen 3 und 4 relevant. Für die statische Betrachtung verschwinden zusätzlich die enthaltenen Zeitableitungen, sodass sich 3 vereinfacht zu:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} \quad (5)$$

Diese Sonderform der 3. Maxwellschen Gleichung wird auch das Amperesche Gesetz der Magnetostatik genannt.

Darüber hinaus werden noch Materialbeziehungen benötigt. Diese stellen eine Beziehung zwischen den Feldstärken und den Flussdichten her [2].

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (6)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (7)$$

$$\vec{J} = \kappa \vec{E} \quad (8)$$

Die Permittivität ϵ , Permeabilität μ und Leitfähigkeit κ stellen dabei die Kopplungsgrößen dar.

1.2 Vektoranalytische Grundgleichungen

Zur Herleitung der gewünschten Formulierung werden zusätzlich mehrere Gleichungen aus der Vektoranalysis benötigt [1]. Diese besagen folgendes.

Ein Wirbelfeld ist immer Divergenzfrei:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{u} = 0 \quad (9)$$

Ein Quellenfeld ist Wirbelfrei:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi = 0 \quad (10)$$

Der Wirbel eines Wirbels lässt sich aufteilen:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - \Delta \vec{u} \quad (11)$$

1.3 De-Rham-Komplex

Die eingeführten Grundgleichungen lassen sich auch in einen Komplex überführen. Die genauen Funktionenräume, werden später noch eingeführt. Es lässt sich zeigen, dass auf einfach zusammenhängenden

$$\begin{array}{ccccccc} H^1 & \xrightarrow{\operatorname{grad}} & \text{H-curl} & \xrightarrow{\operatorname{rot}} & \text{H-div} & \xrightarrow{\operatorname{div}} & L^2 \\ \Phi & & \vec{E}/\vec{H}/\vec{A} & & \vec{B}/\vec{D} & & \rho \end{array}$$

Gebieten ein Operator in dieser Sequenz exakt dem Kern des nächsten Operators entspricht.

2 Das Magnetische Vektorpotential

Zur Definition eines Vektorpotentials kann nun wieder die Beziehung 9 verwendet werden.

Wird ein Vektorpotential der Form $\exists \vec{A} \in H(\operatorname{curl})$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad (12)$$

Eingeführt, so ist Gleichung 4 weiterhin erfüllt. Ebenso wird die De Rham Sequenz dadurch weiterhin befolgt.

Anmerkung: Das Vektorpotential ist also vergleichbar mit dem Skalaren Potential, welches beispielsweise für die Elektrostatik Anwendung findet. Dieses ist definiert als:

$$\operatorname{grad} \Phi = \vec{E} \quad (13)$$

Die De-Rham Sequenz ist folglich ein guter Anhaltspunkt, für die Resultierenden Vektorräume nach Anwendung von Vektoroperationen.

Grafisch kann das Vektorpotential interpretiert werden, als ein Potential, welches stets parallel zur erzeugenden Stromdichte \vec{J} des Magnetfeldes verläuft.

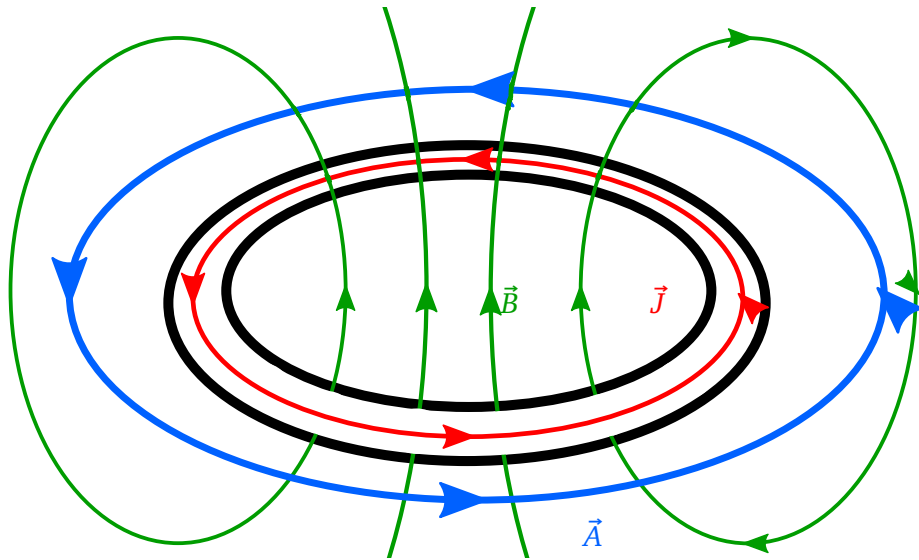


Abbildung 1: Grafische Darstellung des magnetischen Vektorpotentials für ein Magnetfeld, welches durch den Strom innerhalb eines Torus förmigen Leiters erzeugt wird.

Anmerkung: Das magnetische Vektorpotential hat keine physikalische Bedeutung. Es dient lediglich als Hilfsgröße, um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zur Lösung für die magnetische Flussdichte \vec{B} bilden zu können. Die gesuchte Größe ist also am Ende weiterhin \vec{B} .

2.1 Differentialgleichung zweiter Ordnung mittels Vektorpotential

Das Vektorpotential kann anschließend verwendet werden, um die Differentialgleichung zweiter Ordnung herzuleiten. Dazu wird zunächst die Materialbeziehung für das Magnetische Feld betrachtet:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (14)$$

In diese kann das Vektorpotential eingesetzt werden und man erhält:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A} \quad (15)$$

Diese Beziehung kann nun direkt in 5 eingesetzt werden und man erhält die Gleichung zweiter Ordnung:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} \quad (16)$$

$$\text{rot} \frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A} = \vec{J} \quad (17)$$

2.2 Coulomb Eichung

Es gilt zu beachten, dass das Vektorpotential nicht eindeutig definiert ist. Mittels der vektoranalytischen Grundgleichungen ist leicht ersichtlich, dass eine Aufteilung des Vektorpotentials in der Form

$$\vec{A} = \vec{A}^* + \text{grad } \Phi \quad (18)$$

Die Lösung nicht verändert, da der Gradiententerm durch die Anwendung des rot-Operators verschwindet.

Folglich kann Φ in diesem Fall so gewählt werden, dass bestimmte Einschränkungen erfüllt sind. Für unseren Fall bietet sich die Coulomb Eichung an. Diese sieht vor, dass Φ so gewählt wird, dass für das Vektorpotential gilt:

$$\text{div } \vec{A} = 0 \quad (19)$$

Warum diese Wahl hilfreich ist wird später erläutert.

3 $H(\text{curl})$ Räume

Für unsere Funktionen müssen nun noch die bereits in der De-Rham Sequenz eingeführten Funktionenräume definiert werden. Für das Vektorpotential wird der Vektorraum $H(\text{curl})$ verwendet. Dieser ist gegeben als:

$$H(\text{curl}) = \{u \in [L_2]^3 : \text{rot } u \in [L_2]^3\} \quad (20)$$

Im $H(\text{curl})$ Raum ist die innere Norm gegeben als:

$$\|u\|_{H(\text{curl})} = \sqrt{\|u\|_{L_2}^2 + \|\text{rot } u\|_{L_2}^2} \quad (21)$$

bzw.

$$\|u\|_{H(\text{curl})} = \sqrt{\|u\|_{L_2}^2 + \|\text{rot } u\|_{L_2}^2} \quad (22)$$

4 Die Helmholtz Zerlegung

Für eine Vektorfunktion $u \in L_2$ ist eine Zerlegung in eine Gradientenfunktion, sowie eine Rotationsfunktion möglich [3].

$$u = \nabla \Phi + \text{rot } \psi \quad (23)$$

Dabei wird Φ als Skalarpotential, und ψ als Vektorpotential bezeichnet. Wie bereits unter Abschnitt 2.2 beschrieben, ist das Vektorpotential nicht eindeutig definiert, da dies selbst wieder in der Form

$$\psi = \psi^* + \nabla \chi \quad (24)$$

gesplittet werden kann. Dadurch kann auch hier eine bestimmte Einschränkung gewählt werden, wie die Coulomb Eichung ($\text{div } \psi = 0$).

4.1 Sonderfall für $u \in H(\text{curl})$

Für den Fall, dass die Vektorfunktion u im $H(\text{curl})$ Raum liegt, kann eine Zerlegung in der Form

$$u = \nabla \Phi + z \quad (25)$$

wobei $Z = \text{rot } \psi$ ist, gefunden werden. Dabei gilt: $\Phi \in H^1$ und $z \in [H^1]^3$

Außerdem gilt hierbei, dass ein $q \in H(\text{div})$ existiert, sodass:

$$\text{rot } z = q = \text{rot } u \quad (26)$$

Diese Beziehung folgt erneut aus der Gleichung der Vektoranalysis, nach der der Gradiententerm durch Anwendung einer Rotation verschwindet.

Weniger trivial ist die Beziehung der Funktionenräume. Hierzu werden zunächst Einschränkungen eingeführt:

$$\text{div } z = 0 \quad (27)$$

$$z \cdot n = 0 \quad (28)$$

In ([3], S.24ff) Wird der Beweis geführt, indem die Funktion q mit null auf ganz \mathfrak{R}^3 erweitert wird. Über die Fouriertransformation von q (29 - 31) kann daraufhin die H^1 Seminorm von z unter der Einschränkung $\text{div } z = 0$ in ganz \mathfrak{R}^3 bestimmt werden.

$$\mathcal{F}(\nabla q) = 2\pi i \xi \mathcal{F} q \quad (29)$$

$$\mathcal{F}(\text{rot } q) = 2\pi i \xi \times \mathcal{F} q \quad (30)$$

$$\mathcal{F}(\text{div } q) = 2\pi i \xi \cdot \mathcal{F} q \quad (31)$$

$$\|\nabla z\|_{L_2(\mathfrak{R}^3)} = \|2\pi i \xi \tilde{z}\|_{L_2(\mathfrak{R}^3)} = \left\| \frac{\xi \xi \times \tilde{q}}{|\xi|^2} \right\| = \|\tilde{q}\|_{L_2(\mathfrak{R}^3)} = \|q\|_{L_2(\Omega)} \quad (32)$$

Da q nur erweitert wurde, lässt sich aus der Allgemeinen Beziehung daraufhin wieder die Einschränkung tätigen, sodass die Beziehung auf jedem Teilgebiet $\Omega \in \mathfrak{R}^3$ gültig ist.

5 Friedrichs Ungleichung für $H(\text{curl})$ Funktionenräume

Unter Verwendung der Helmholtz Zerlegung:

$$u = \nabla \Phi + z \quad (33)$$

mit $z = \text{rot } \psi$

Sowie der Forderung:

$$(u, \nabla \psi) = 0 \quad \forall \psi \in H_0^1 \quad (34)$$

ORTHOGONALITÄT VON z UND $\text{grad } \Phi$
MIT HELMHOLTZ DANN BEWEIS NACH NOTES
NACH POSTULAT DANN FRIEDRICHSUNGL. HINSCHREIBEN

6 Lösung für homogene und isotrope Materialien im Freiraum

Bevor die schwache Formulierung und folglich die numerische Lösung der Vektorpotentialgleichung diskutiert wird, soll im folgenden ein Fall dargestellt werden, für den auch leicht eine analytische Lösung ist. Dieser Fall tritt ein, wenn die betrachtete Umgebung mit homogenem und isotropen Material gefüllt ist, und keine Ränder besitzt (Freiraum).

Dazu werden zunächst Homogenität und Isotropie definiert. Im Allgemeinen ist die Permeabilität eines Materials gegeben als ein Tensor zweiter Stufe folgender Form:

$$\mu(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \mu_1(\vec{r}) & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2(\vec{r}) & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3(\vec{r}) \end{pmatrix} \quad (35)$$

Homogenität besagt nun, dass μ in jedem Raumpunkt identisch ist ($\mu(\vec{r}) = \mu$), und Isotropie, dass die Permeabilität in jede Richtung identisch ist, also dass $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$. Folglich kann μ als Skalare Größe angenommen werden, die nicht vom Ort abhängt.

Für die Differentialgleichung zweiter Ordnung kann in diesem Fall eine Vereinfachung vorgenommen werden:

$$\vec{J} = \text{rot } \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{\mu} \text{rot rot } \vec{A} \quad (36)$$

Mit Beziehung 11 kann der rot rot -Term umgeschrieben werden:

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu} \text{rot rot } \vec{A} = \frac{1}{\mu} (\text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}) \quad (37)$$

Der erste Summand der rechten Seite verschwindet, da durch die Coulomb-Eichung gefordert ist, dass $\text{div } \vec{A} = 0$, sodass folgt:

$$\vec{J} = -\frac{1}{\mu} \Delta \vec{A} \quad (38)$$

Oder umgestellt:

$$-\mu \vec{J} = \Delta \vec{A} \quad (39)$$

also eine Poisson Gleichung. Diese lässt sich analytisch lösen. Da allerdings keine Ränder betrachtet werden können, ist eine numerische Lösung erforderlich, sobald ein Problem in einem berandeten Gebiet betrachtet wird.

7 Schwache Formulierung der Vektorpotentialgleichung

7.1 Lax-Milgram

1. Hilbertraum:

Der Raum $H(\text{curl})$ besitzt ein inneres Produkt und ist komplett:

$$(u, v)_{H(\text{curl})} = (u, v)_{L_2} + (\text{rot } u, \text{rot } v)_{L_2} \quad (40)$$

$$H(\text{curl}, \Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H(\text{curl}, \Omega)}} \quad (41)$$

2. Elliptizität:

$$a(u, u) \geq c \|u\|_{H(\text{curl})}^2 \quad (42)$$

Wir verwendet die Definition der $H(\text{curl})$ Norm:

$$\|u\|_{H(\text{curl})}^2 = \|u\|_{L_2}^2 + \|\text{rot } u\|_{L_2}^2 \quad (43)$$

Mittels der Friedrichs-Typ Ungleichung für $H(\text{curl})$:

$$\|u\|_{L_2} \leq c \|\text{rot } u\|_{L_2} \quad (44)$$

folgt nach einsetzen:

$$\|u\|_{H(\text{curl})}^2 \leq C^2 \|\text{rot } u\|_{L_2}^2 + \|\text{rot } u\|_{L_2}^2 \quad (45)$$

$$\|u\|_{H(\text{curl})}^2 \leq (1 + C^2) \|\text{rot } u\|_{L_2}^2 \quad (46)$$

$$\|\text{rot } u\|_{L_2}^2 \geq \frac{1}{1 + C^2} \|u\|_{H(\text{curl})}^2 \quad (47)$$

$$(48)$$

Für $a(u, u)$ gilt:

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} u \operatorname{rot} u \, dx \quad (49)$$

$$= \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} (\operatorname{rot} u)^2 \, dx \quad (50)$$

$$\geq \inf_{\mu \in L_2} \frac{1}{\mu} \|\operatorname{rot} u\|_{L_2}^2 \quad (51)$$

$$\geq \inf_{\mu \in L_2} \frac{1}{\mu} \frac{1}{1 + C^2} \|u\|_{H(\operatorname{curl})}^2 \quad (52)$$

$$= \frac{1}{\mu_1} \|u\|_{H(\operatorname{curl})}^2 \quad (53)$$

Folglich ist die schwache Formulierung elliptisch mit $\frac{1}{\mu_1} = \inf_{\mu \in L_2} \frac{1}{\mu} \frac{1}{1 + C^2}$.

3. Stetig $a(\vec{A}, v)$:

$$a(\vec{A}, v) \leq C \|\vec{A}\|_{H(\operatorname{curl})} \|v\|_{H(\operatorname{curl})} \quad (54)$$

Beweis mittels Hölder Ungleichung:

$$a(\vec{A}, v) = \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A} \operatorname{rot} v \, dx \quad (55)$$

$$\leq \frac{1}{\mu} \|\operatorname{rot} \vec{A}\|_{L_1} \|\operatorname{rot} v\|_{L_1} \quad (\text{Mit Hölder}) \quad (56)$$

$$\leq \frac{1}{\mu} \|\operatorname{rot} \vec{A}\|_{L_2} \|\operatorname{rot} v\|_{L_2} \quad (57)$$

$$\leq \frac{1}{\mu} \|\vec{A}\|_{H(\operatorname{curl})} \|v\|_{H(\operatorname{curl})} \quad (58)$$

$$(59)$$

4. Stetig $l(v)$:

$$l(v) \leq \|v\|_{H(\operatorname{curl})} \quad (60)$$

Beweis:

$$l(v) = \int_{\Omega} \vec{J} \cdot v \, dx \quad \text{mit C-S} \quad (61)$$

$$\leq \|\vec{J}\|_{L_2} \|v\|_{L_2} \quad (62)$$

$$\leq \|\vec{J}\|_{L_2} \|v\|_{H(\operatorname{curl})} \quad (63)$$

$$(64)$$

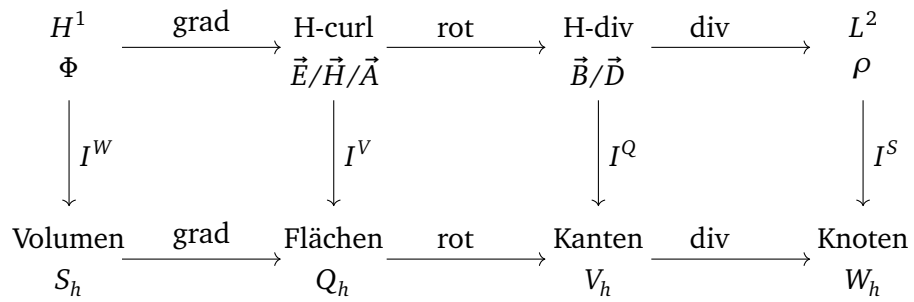
Funktioniert, solange das Feld div-frei ist. Sonst ergibt sich:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A} \cdot \operatorname{rot} v \, dx + \int_{\Omega} v \cdot \nabla \varphi = \int_{\Omega} \vec{J} \cdot v \quad \forall v \in H(\operatorname{curl}) \quad (65)$$

8 Gemischte Formulierung

8.1 Inf-Sup-Bedingung nach Brezzi

9 Kommutierendes Diagramm



Mit I^W : Knoteninterpolation, I^V : Kanteninterpolation, I^Q : Flächeninterpolation und I^S : L_2 Projektion.

Literatur

- [1] John David Jackson. *klassische Elektrodynamik*. Walter de Gruyter, 1981.
- [2] James Clerk Maxwell. "VIII. A dynamical theory of the electromagnetic field". In: *Philosophical transactions of the Royal Society of London* 155 (1865), S. 459–512.
- [3] Joachim Schöberl. "Numerical Methods for Maxwell Equations". In: 2009.