Gemischte Finite Elemente in der Magnetostatik

Masterseminar Numerik

Julian Buschbaum, Benjamin Northe

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Numerische
Mathematik

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

Im folgenden werden verschiedene Grundlagen ausgeführt.

1.1 Elektromagnetische Grundgleichungen

Die Theorie der magnetischen und auch elektromegnetischen Felder basiert im allgemeinen auf den Maxwell Gleichungen [1]. Diese lauten:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho \tag{2}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} \tag{3}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \tag{4}$$

Die Variablen entsprechen dabei:

- $\vec{E}$: Elektrische Feldstärke
- $\vec{D}$: Elektrische Flussdichte
- $\vec{H}$: Magnetische Feldstärke
- $\vec{B}$: Magnetische Flussdichte
- $\vec{J}$: Elektrische Stromdichte
- ρ Ladungsdichte

Für unsere Herleitung sind in erster Linie die Gleichungen 3 und 4 relevant. Für die Statische Betrahtung verschwinden zusätzlich die enthaltenen Zeitableitungen, sodass sich 3 vereinfacht zu:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} \tag{5}$$

Diese Sonderform der 3. Maxwellschen Gleichung wird auch das Amperesche Gesetz der Magnetostatik genannt.

Darüber hinaus werden noch Materialbeziehungen benötigt. Diese stellen eine Beziehung zwischen den Feldstärken und den Flussdichten her [1].

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \tag{6}$$

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} \tag{7}$$

$$\vec{J} = \kappa\vec{E} \tag{8}$$

Die Permittivität ϵ, Permeabilität μ und Leitfähigkeit κ stellen dabei die Kopplungsgrößen dar.

1.2 Vektoranalytische Grundgleichungen

Zur Herleitung der gewünschten Formulierung werden zusätzlich mehrere Gleichungen aus der Vektoranalysis benötigt. Diese besagen folgendes.

Ein Wirbelfeld ist immer Divergenzfrei:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{u} = 0 \tag{9}$$

Ein Quellenfeld ist Wirbelfrei:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Phi = 0 \tag{10}$$

Der Wirbel eines Wirbels lässt sich aufteilen:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} - \Delta\vec{u} \tag{11}$$

1.3 De-Rham-Komplex

Die eingeführten Grundgleichungen lassen sich auch in einen Komplex überführen. Die genauen Funktionenräume, werden später noch eingeführt.

$$\begin{array}{c} H^1 \\ \Phi \end{array} \xrightarrow{\quad\text{grad}\quad} \begin{array}{c} \text{H-curl} \\ \vec{E}/\vec{H}/\vec{A} \end{array} \xrightarrow{\quad\text{rot}\quad} \begin{array}{c} \text{H-div} \\ \vec{B}/\vec{D} \end{array} \xrightarrow{\quad\text{div}\quad} \begin{array}{c} L^2 \\ \rho \end{array}$$

2 Das Magnetische Vektorpotential

3 De-Rham-Komplex

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c} H^1 \\ \Phi \end{array} \arrow[r, "\text{grad}"] \arrow[d, "I^W"] & \begin{array}{c} \text{H-curl} \\ \vec{E}/\vec{H}/\vec{A} \end{array} \arrow[r, "\text{rot}"] \arrow[d, "I^V"] & \begin{array}{c} \text{H-div} \\ \vec{B}/\vec{D} \end{array} \arrow[r, "\text{div}"] \arrow[d, "I^Q"] & \begin{array}{c} L^2 \\ \rho \end{array} \arrow[d, "I^S"] \\
\begin{array}{c} \text{Volumen} \\ S_h \end{array} \arrow[r, "\text{grad}"] & \begin{array}{c} \text{Flächen} \\ Q_h \end{array} \arrow[r, "\text{rot}"] & \begin{array}{c} \text{Kanten} \\ V_h \end{array} \arrow[r, "\text{div}"] & \begin{array}{c} \text{Knoten} \\ W_h \end{array}
\end{tikzcd}$$

Mit I^W: Knoteninterpolation, I^V: Kanteninterpolation, I^Q: Flächeninterpolation und I^S: L_2 Projektion.

Literatur

[1] James Clerk Maxwell. “VIII. A dynamical theory of the electromagnetic field”. In: *Philosophical transactions of the Royal Society of London* 155 (1865), S. 459–512.