

DM RNDP

Jules Berry, Thomas Poisson

Table des matières

1 Préliminaires

1.1 Question 1

On cherche une fonction $u \in \mathcal{C}^2([-1, 1])$ telle que

$$\begin{cases} -(\alpha(x)u'(x))' + \gamma(x)u(x) = f(x) & \forall x \in]-1, 1[, \\ u(-1) = c_1, u(1) = c_2 \end{cases}. \quad (1)$$

Soit u un solution de ce problème et on pose

$$v(x) = u(x) - c_1 \frac{x-1}{2} - c_2 \frac{x+1}{2}$$

cette fonction est alors aussi $\mathcal{C}^2([-1, 1])$ et on a de plus

$$v'(x) = u'(x) - \frac{c_1 + c_2}{2}, \quad v''(x) = u''(x).$$

En injectant cette fonction dans l'EDO de (??) on a

$$\begin{aligned} -(\alpha(x)v'(x))' + \gamma(x)v(x) &= -\alpha'(x)v'(x) - \alpha(x)v''(x) + \gamma(x)v(x) \\ &= -(\alpha(x)u'(x))' + \frac{c_1 + c_2}{2}\alpha'(x) + \gamma(x)u(x) - \gamma(x)\left(c_1 \frac{x-1}{2} + c_2 \frac{x+1}{2}\right) \end{aligned}$$

On a donc que la fonction v est solution du problème

$$\begin{cases} -(\alpha(x)v'(x))' + \gamma(x)v(x) = \tilde{f}(x) \\ v(-1) = v(1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

où $\tilde{f}(x) = f(x) + \gamma(x)\left(c_1 \frac{x-1}{2} + c_2 \frac{x+1}{2}\right) - \frac{c_1 + c_2}{2}\alpha'(x)$.

De plus il est clair que $v(-1) = v(1) = 0$ et comme $f \in L^2(]-1, 1[)$, $\alpha \in \mathcal{C}^1([-1, 1])$ et $\gamma \in L^\infty([-1, 1]) \subset L^2(]-1, 1[)$ on a aussi $\tilde{f} \in L^2([-1, 1])$.

On voit alors que le problème (??) est de la forme souhaitée. De plus si v est une solution de ce problème et en posant $w(x) = v(x) + c_1 \frac{x-1}{2} + c_2 \frac{x+1}{2}$, on peut voir que w est une solution de (??). On a donc montré que l'étude de ce dernier se ramène à l'étude de (??).

1.2 Question 2

On pose $u = \rho v$ où $\rho : x \in [-1, 1] \mapsto \exp\left(\frac{1}{2} \int_{-1}^x \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} dt\right)$. Alors si u est une solution de l'EDO

$$-(\alpha u')' + \beta u' + \gamma u = f \quad (3)$$

On remarque alors que

$$\begin{aligned}\rho'(x) &= \frac{d}{dx} \exp\left(\frac{1}{2} \int_{-1}^x \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} dt\right) = \frac{\beta(x)}{2\alpha(x)} \exp\left(\frac{1}{2} \int_{-1}^x \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} dt\right) \\ &= \frac{\beta(x)}{2\alpha(x)} \rho(x).\end{aligned}$$

Et par suite

$$\rho'' = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta' \alpha - \beta \alpha'}{\alpha^2} \rho + \frac{\beta}{\alpha} \rho' \right) = \frac{\beta' \alpha + 2\beta^2 - \beta \alpha'}{2\alpha^2} \rho.$$

En réétudiant l'EDO on trouve donc

$$\begin{aligned}-(\alpha u')' + \beta u' + \gamma u &= -\alpha'(\rho' v + \rho v') - \alpha(\rho'' v + 2\rho' v' + \rho v'') + \beta(\rho' v + \rho v') + \gamma \rho v \\ &= \rho \left(-\frac{\alpha' \beta v}{\alpha} - \alpha' v' - \frac{\beta' v}{2} - \frac{\beta^2 v}{\alpha} + \frac{\beta \alpha' v}{\alpha} - \beta v' - \alpha v'' + \frac{\beta^2 v}{\alpha} + \beta v' + \gamma v \right) = f\end{aligned}$$

Par définition de la fonction de ρ celle-ci est strictement positive et on peut donc diviser par ρ dans l'équation. Alors en simplifiant le membre de gauche on trouve

$$-\alpha' v' - \alpha v'' - \frac{1}{2} \beta' v + \gamma v = \frac{f}{\rho}.$$

Alors en posant $\delta = \gamma - \frac{1}{2} \beta'$ et $g = \frac{f}{\rho}$. On trouve donc

$$-(\alpha v')' + \delta v = g. \quad (4)$$

On remarque au passage que nous avons supposé que la fonction β était au moins \mathcal{C}^1 .

1.3 Question 3

On considère l'EDO $-(\alpha u')' + \gamma u = f$ sur $[a, b]$. En posant

$$h : x \in [-1, 1] \mapsto a \frac{x-1}{2} + b \frac{x+1}{2}$$

et on considérant la fonction $v : x \in [-1, 1] \mapsto u \circ h(x)$ on trouve que $v(-1) = u(a)$ et $v(1) = u(b)$. De plus en posant aussi $\tilde{\alpha} = \alpha \circ h$, $\tilde{\gamma} = \frac{b-a}{2} \gamma \circ h$ on a en supposant que u est une solution de l'EDO

$$\begin{aligned}-(\tilde{\alpha}(x) v'(x))' + \tilde{\gamma}(x) v(x) &= -(\alpha(h(x))(u(h(x)))')' + \frac{a+b}{2} \gamma(h(x)) v(h(x)) \\ &= -\frac{a+b}{2} (\alpha(h(x)) u'(h(x)))' + \frac{a+b}{2} \gamma(h(x)) u(h(x)) \\ &= \frac{a+b}{2} f(h(x)).\end{aligned}$$

On peut alors poser $\tilde{f}(x) = \frac{a+b}{2} f \circ h(x)$ et on a alors que v est solution de la nouvelle EDO

$$-(\tilde{\alpha}(x) v'(x))' + \tilde{\gamma}(x) u(x) = \tilde{f}(x).$$

Comme la fonction h est un polynôme de degrés un elle est bijective de $[-1, 1]$ dans $[a, b]$. Alors si v est solution de la dernière EDO on peut inverser la construction en posant $u = h^{-1} \circ v$ on voit que u est solution de la première EDO.