

DM RNDP

Jules Berry, Thomas Poisson

Table des matières

1	Préliminaires	3
1.1	Question 1	3
1.2	Question 2	3
1.3	Question 3	4
1.4	Quastion 4	5
1.5	Question 5	7
2	Polynômes de Tchebychev	7
2.1	Question 1	7
2.2	Question 2	9
2.3	Question 3	10
2.4	Question 4	11
3	Méthode des rectangles pour l'approximation de l'intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période	11
3.1	Question 1	11
3.2	Question 2	12
3.2.1	Partie a	12
3.2.2	Partie b	13
3.2.3	Partie c	13
3.3	Question 3	14
4	Système linéaire issu de la méthode des résidus pondérés	14
4.1	Question 1	15
4.2	Question 2	15
4.3	Question 3	15
4.4	Question 4	17
5	Transformée de Fourier rapide	18
5.1	Question 2.a	18

6 Méthode de Gauss	21
6.1 Question 1	21
6.2 Question 2	21
7 Mise en œuvre numérique	21
A Fonctions Matlab/Octave	22

1 Préliminaires

1.1 Question 1

On cherche une fonction $u \in \mathcal{C}^2([-1, 1])$ telle que

$$\begin{cases} -(\alpha(x)u'(x))' + \gamma(x)u(x) = f(x) & \forall x \in]-1, 1[, \\ u(-1) = c_1, \quad u(1) = c_2 \end{cases}. \quad (1)$$

Soit u un solution de ce problème et on pose

$$v(x) = u(x) - c_1 \frac{x-1}{2} - c_2 \frac{x+1}{2}$$

cette fonction est alors aussi $\mathcal{C}^2([-1, 1])$ et on a de plus

$$v'(x) = u'(x) - \frac{c_1 + c_2}{2}, \quad v''(x) = u''(x).$$

En injectant cette fonction dans l'EDO de (1) on a

$$\begin{aligned} -(\alpha(x)v'(x))' + \gamma(x)v(x) &= -\alpha'(x)v'(x) - \alpha(x)v''(x) + \gamma(x)v(x) \\ &= -(\alpha(x)u'(x))' + \frac{c_1 + c_2}{2}\alpha'(x) + \gamma(x)u(x) - \gamma(x)\left(c_1 \frac{x-1}{2} + c_2 \frac{x+1}{2}\right) \end{aligned}$$

On a donc que la fonction v est solution du problème

$$\begin{cases} -(\alpha(x)v'(x))' + \gamma(x)v(x) = \tilde{f}(x) \\ v(-1) = v(1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

où $\tilde{f}(x) = f(x) + \gamma(x)\left(c_1 \frac{x-1}{2} + c_2 \frac{x+1}{2}\right) - \frac{c_1 + c_2}{2}\alpha'(x)$.

De plus il est clair que $v(-1) = v(1) = 0$ et comme $f \in L^2([-1, 1])$, $\alpha \in \mathcal{C}^1([-1, 1])$ et $\gamma \in L^\infty([-1, 1]) \subset L^2([-1, 1])$ on a aussi $\tilde{f} \in L^2([-1, 1])$.

On voit alors que le problème (2) est de la forme souhaitée. De plus si v est une solution de ce problème et en posant $w(x) = v(x) + c_1 \frac{x-1}{2} + c_2 \frac{x+1}{2}$, on peut voir que w est une solution de (1). On a donc montré que l'étude de ce dernier se ramène à l'étude de (2).

1.2 Question 2

On pose $u = \rho v$ où $\rho : x \in [-1, 1] \mapsto \exp\left(\frac{1}{2} \int_{-1}^x \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} dt\right)$. Alors si u est une solution de l'EDO

$$-(\alpha u')' + \beta u' + \gamma u = f \quad (3)$$

On remarque alors que

$$\begin{aligned}\rho'(x) &= \frac{d}{dx} \exp\left(\frac{1}{2} \int_{-1}^x \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} dt\right) = \frac{\beta(x)}{2\alpha(x)} \exp\left(\frac{1}{2} \int_{-1}^x \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} dt\right) \\ &= \frac{\beta(x)}{2\alpha(x)} \rho(x).\end{aligned}$$

Et par suite

$$\rho'' = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta' \alpha - \beta \alpha'}{\alpha^2} \rho + \frac{\beta}{\alpha} \rho' \right) = \frac{\beta' \alpha + 2\beta^2 - \beta \alpha'}{2\alpha^2} \rho.$$

En réétudiant l'EDO on trouve donc

$$\begin{aligned}-(\alpha u')' + \beta u' + \gamma u &= -\alpha'(\rho' v + \rho v') - \alpha(\rho'' v + 2\rho' v' + \rho v'') + \beta(\rho' v + \rho v') + \gamma \rho v \\ &= \rho \left(-\frac{\alpha' \beta v}{\alpha} - \alpha' v' - \frac{\beta' v}{2} - \frac{\beta^2 v}{\alpha} + \frac{\beta \alpha' v}{\alpha} - \beta v' - \alpha v'' + \frac{\beta^2 v}{\alpha} + \beta v' + \gamma v \right) = f\end{aligned}$$

Par définition de la fonction de ρ celle-ci est strictement positive et on peut donc diviser par ρ dans l'équation. Alors en simplifiant le membre de gauche on trouve

$$-\alpha' v' - \alpha v'' - \frac{1}{2} \beta' v + \gamma v = \frac{f}{\rho}.$$

Alors en posant $\delta = \gamma - \frac{1}{2} \beta'$ et $g = \frac{f}{\rho}$. On trouve donc

$$-(\alpha v')' + \delta v = g. \quad (4)$$

On remarque au passage que nous avons supposé que la fonction β était au moins \mathcal{C}^1 .

1.3 Question 3

On considère l'EDO $-(\alpha u')' + \gamma u = f$ sur $[a, b]$. En posant

$$h : x \in [-1, 1] \mapsto a \frac{x-1}{2} + b \frac{x+1}{2}$$

et on considérant la fonction $v : x \in [-1, 1] \mapsto u \circ h(x)$ on trouve que $v(-1) = u(a)$ et $v(1) = u(b)$. De plus en posant aussi $\tilde{\alpha} = \alpha \circ h$, $\tilde{\gamma} = \frac{b-a}{2} \gamma \circ h$ on a en supposant que u est une solution de l'EDO

$$\begin{aligned}-(\tilde{\alpha}(x)v'(x))' + \tilde{\gamma}(x)v(x) &= -(\alpha(h(x))(u(h(x)))')' + \frac{a+b}{2} \gamma(h(x))v(h(x)) \\ &= -\frac{a+b}{2}(\alpha(h(x))u'(h(x)))' + \frac{a+b}{2} \gamma(h(x))u(h(x)) \\ &= \frac{a+b}{2}f(h(x)).\end{aligned}$$

On peut alors poser $\tilde{f}(x) = \frac{a+b}{2} f \circ h(x)$ et on a alors que v est solution de la nouvelle EDO

$$-(\tilde{\alpha}(x)v'(x))' + \tilde{\gamma}(x)v(x) = \tilde{f}(x).$$

Comme la fonction h est un polynôme de degrés un elle est bijective de $[-1, 1]$ dans $[a, b]$. Alors si v est solution de la dernière EDO on peut inverser la construction en posant $u = h^{-1} \circ v$ on voit que u est solution de la première EDO.

1.4 Quastion 4

On cherche ici une solution $u \in H^2([-1, 1])$ de

$$\begin{cases} -(\alpha(x)u'(x))' + \gamma(x)u(x) = f(x) & \forall x \in [-1, 1] \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}. \quad (5)$$

On commence par trouver une solution à la formulation variationnelle de (5) dans l'espace $H_0^1([-1, 1])$. Soit $\phi \in H_0^1([-1, 1])$ on a alors

$$-\int_{-1}^1 (\alpha(t)u'(t))'\phi(t) dt + \int_{-1}^1 \gamma(t)u(t)\phi(t) dt = \int_{-1}^1 f(t)\phi(t) dt.$$

En intégrant par parties on trouve

$$\int_{-1}^1 (\alpha(t)u'(t))\phi'(t) dt + \int_{-1}^1 \gamma(t)u(t)\phi(t) dt = \int_{-1}^1 f(t)\phi(t) dt.$$

On cherche ensuite à appliquer le théorème de Lax-Milgram dans $H_0^1([-1, 1])$. Pour cela on pose a la forme bilinéaire

$$a : (\phi, \psi) \in (H_0^1([-1, 1]))^2 \mapsto \int_{-1}^1 (\alpha(t)\phi'(t))\psi'(t) dt + \int_{-1}^1 \gamma(t)\phi(t)\psi(t) dt$$

et l la forme linéaire

$$l : \phi \in H_0^1([-1, 1]) \mapsto \int_{-1}^1 f(t)\phi(t) dt.$$

On a alors

$$|\langle l, \phi \rangle| \leq \int_{-1}^1 |f(t)\phi(t)| dt \leq \|f\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|\phi\|_{H^1}$$

ce qui montre que l est une forme linéaire continue sur $H_0^1(-1, 1)$. De plus on a aussi

$$\begin{aligned} |a(\phi, \psi)| &\leq \int_{-1}^1 |\alpha(t)\phi'(t)\psi'(t)| dt + \int_{-1}^1 |\gamma(t)\phi(t)\psi(t)| dt \\ &\leq \|\alpha\|_{L^\infty} \int_{-1}^1 |\phi'(t)\psi'(t)| dt + \|\gamma\|_{L^\infty} \int_{-1}^1 |\phi(t)\psi(t)| dt \\ &\leq M (\|\phi'\|_{L^2} \|\psi'\|_{L^2} + \|\phi\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2}) \\ &\leq M \sqrt{\|\phi\|_{L^2}^2 + \|\phi'\|_{L^2}^2} \sqrt{\|\psi\|_{L^2}^2 + \|\psi'\|_{L^2}^2} \\ &= M \|\phi\|_{H^1} \|\psi\|_{H^1} \end{aligned}$$

Ce qui montre que a est une forme bilinéaire continue sur $H_0^1(-1, 1)$.

Il reste donc à montrer que a est coercive. Pour cela il suffit de voir que

$$a(\phi, \phi) = \int_{-1}^1 \alpha(t) |\phi'(t)|^2 dt + \int_{-1}^1 \gamma(t) |\phi(t)|^2 dt \geq \alpha_0 \|\phi'\|_{L^2}^2$$

et par l'inégalité de Poincaré on sait que la norme $\phi \mapsto \|\phi'\|_{L^2}$ est équivalente à la norme usuelle de $H_0^1(-1, 1)$.

On peut à présent appliquer le théorème de Lax-Milgram pour obtenir l'existence d'une unique solution u à la formulation variationnelle du problème (5) dans $H_0^1(-1, 1)$. Il nous faut à présent montrer que cette solution est dans $H_0^2(-1, 1)$, c'est-à-dire qu'elle admet une dérivée faible seconde qui soit dans $L^2(-1, 1)$. On cherche donc une fonction $g \in L^2(-1, 1)$ qui vérifie

$$-\int u\phi' = \int g\phi$$

pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{D}(-1, 1)$.

Comme u est solution de la formulation variationnelle du problème, on sait déjà que

$$\int_{-1}^1 (\alpha(t)u'(t))\phi'(t) dt = \int_{-1}^1 (f(t) - \gamma(t)u(t))\phi(t) dt.$$

Ce qui signifie que la fonction $\alpha u'$ admet comme dérivée faible $\gamma u - f$ qui se trouve être dans L^2 . On a donc que $\alpha u \in H^1$. Or on sait que $(\alpha u')' = \alpha' u' + \alpha u''$. Ce qui donne

$$u'' = \frac{\gamma u - \alpha' u' - f}{\alpha}$$

qui a bien un sens car α est supposée strictement positive. De plus peut voir que u'' est dans L^2 . Ce qui montre que la solution u de (5) est dans H^2 .

1.5 Question 5

On se donne la fonction

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

et on cherche à montrer que la forme bilinéaire

$$\langle \phi, \psi \rangle_\omega = \int_{-1}^1 \phi(x)\psi(x)\omega(x) dx$$

définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([-1, 1])$.

La forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ est clairement symétrique et on a

$$\langle \phi, \phi \rangle_\omega = \int \frac{|\phi(x)|^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \geq 0$$

et on remarque que $\langle \phi, \phi \rangle_\omega = 0$ si, et seulement si, $\phi = 0$ car ω est strictement positive sur $]-1, 1[$. Il reste juste à montrer que l'intégrale est bien définie. Or on a

$$|\langle \phi, \psi \rangle_\omega| \leq \|\phi\|_\infty \|\psi\|_\infty \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} dx \\ &\leq 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx < +\infty. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ définit un produit scalaire.

2 Polynômes de Tchebychev

2.1 Question 1

On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $T_n(\cos(\omega)) = \cos(n\omega)$. On procède par récurrence en commençant par remarquer que l'on a clairement $T_0(X) = 1$ et $T_1(X) = X$. Ensuite on a

$$\begin{aligned} (\cos(\omega))^n &= \left(\frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2} \right)^n = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ik\omega} e^{-i(n-k)\omega} \\ &= 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(2k-n)\omega}. \end{aligned}$$

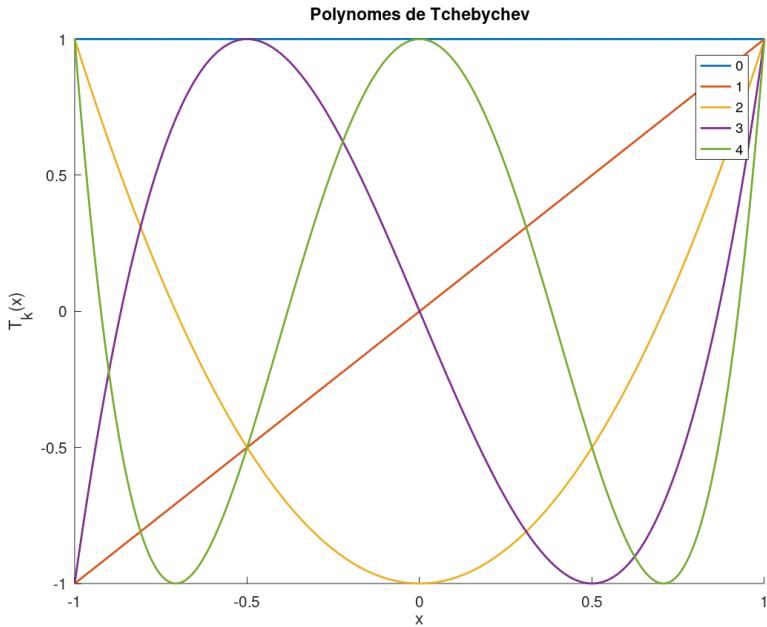


FIGURE 1 – Premiers polynômes de Tchebychev

On note de plus que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ et on note alors cette quantité h_k^n . On a alors

$$\begin{aligned} (\cos(\omega))^n &= 2^{-n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} h_k^n (e^{i(2k-n)\omega} + e^{i(n-2k)\omega}) \\ &= 2^{-(n-1)} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} h_k^n \cos((n-2k)\omega). \end{aligned}$$

On note à présent $m = \lfloor n/2 \rfloor$ et d'après l'hypothèse de récurrence pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$ il existe un polynôme $T_{n-2k}(X)$ tel que $T_{n-2k}(\cos(\omega)) = \cos((n-2k)\omega)$. On peut alors poser

$$T_n(X) = 2^{(n-1)} X^n - \sum_{k=1}^m \widetilde{h}_k^n T_{n-2k}(X).$$

où on a noté $\widetilde{h}_k^n = \begin{cases} 0 & \text{si } h_k^n = 0 \\ \frac{1}{h_k^n} & \text{sinon} \end{cases}$.

Pour l'unicité, si on suppose qu'il existe un autre polynôme $R_n(X)$ vérifiant que $R_n(\cos(\omega)) = \cos(n\omega)$. Alors pour tout $\omega \in [0, 2\pi]$ $\cos(\omega)$ est une racine du polynôme $T_n - R_n$ ce qui implique $T_n - R_n = 0$.

2.2 Question 2

- a. On montre que $T_{n+2}(x) + T_n(x) = 2xT_{n+1}(x)$. Pour cela on a

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos(\omega)) + T_n(\cos(\omega)) &= \cos((n+2)\omega) + \cos(n\omega) \\ &= \frac{e^{i((n+2)\omega)} + e^{-i((n+2)\omega)} + e^{in\omega} + e^{-in\omega}}{2} \\ &= \frac{e^{i((n+1)\omega)}(e^{in\omega} + e^{-in\omega}) + e^{-i((n+1)\omega)}(e^{in\omega} + e^{-in\omega})}{2} \\ &= 2 \cos(\omega) \cos((n+1)\omega) \\ &= 2 \cos(\omega) T_{n+1}(\cos(\omega)). \end{aligned}$$

Comme de plus \cos est une bijection de $[0, 2\pi]$ dans $[-1, 1]$ on a montré que pour tout $x \in [-1, 1]$ on a $T_{n+2}(x) + T_n(x) = 2xT_{n+1}(x)$.

- b. La relation $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ nous donne nécessairement $T_0(x) = 1$ et $T_1(x) = x$. En utilisant la question a. on trouve alors

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x. \end{aligned}$$

- c. On montre que pour tout $n \geq 2$ et pour tout $x \in [-1, 1]$ on a

$$2T_n(x) = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x) - \frac{1}{n-1} T'_{n-1}(x). \quad (6)$$

On a

$$\begin{aligned} T'_{n+1} &= \frac{n+1}{\sqrt{1-x^2}} \sin((n-1) \arccos(x)) \quad \text{et} \\ T'_{n-1}(x) &= \frac{n-1}{\sqrt{1-x^2}} \sin((n-1) \arccos(x)), \end{aligned}$$

on a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x) - \frac{1}{n-1} T'_{n-1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} [\sin((n+1) \arccos(x)) - \sin((n-1) \arccos(x))] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} [\sin(n \arccos(x))x + \sqrt{1-x^2} \cos(n \arccos(x)) \\ &\quad - \sin(n \arccos(x))x + \sqrt{1-x^2} \cos(n \arccos(x))] \\ &= 2 \cos(n \arccos(x)) = 2T_n(x) \end{aligned}$$

Ce qui montre la relation (6).

d. On montre les deux affirmations simultanément par récurrence. On vérifie facilement que l'on a $T'_1(x) = 1 = T_0(x) = 2 \sum^* T_k(x)$, $T'_2(x) = 4x = 4T_1(x) = 4 \sum^* T_k$ et $T''_2(x) = 4 = 8 \sum^* T_k$, ce qui initialise la récurrence.

On suppose à présent $n > 2$ et que le résultat est vrai pour tout $k < n$. On a alors

$$\begin{aligned} 2T_{n-1}(x) &= \frac{1}{n} T'_n(x) - \frac{1}{n-2} T_{n-2}(x), \quad \text{alors} \\ \frac{1}{n} T'_n(x) &= 2T_{n-1}(x) + \frac{1}{n-2} T_{n-2}(x), \quad \text{ce qui donne} \\ T'_n(x) &= 2nT_{n-1}(x) + \frac{n}{n-2} T'_{n-2}(x) \\ &= 2nT_{n-1}(x) + \frac{n}{n-2} 2(n-2) \sum_{k=0}^{n-3} {}^* T_k \\ &= 2n \sum_{k=0}^{n-1} {}^* T_k(x). \end{aligned}$$

A noter que l'on a inclus la condition de parité dans la définition du symbole \sum^* . On a donc montré la première relation. Pour la seconde on a

Pour la seconde relation on a

$$\begin{aligned} T''_n(x) &= 2nT'_{n-1}(x) + \frac{n}{n-2} T''_{n-2}(x) \\ &= 4n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} {}^* T_k(x) + n \sum_{k=0}^{n-4} {}^* ((n-4)^2 - k^2) T_k(x) \\ &= n \left[4(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} {}^* T_k(x) + \sum_{k=0}^{n-4} {}^* ((n-2)^2 - k^2) T_k(x) \right] \\ &= n \left[(4n-4) T_{n-2}(x) + \sum_{k=0}^{n-4} {}^* (4(n-1) + (n-2)^2 - k^2) T_k(x) \right] \\ &= n \left[(n^2 - (n-2)^2) T_{n-2}(x) + \sum_{k=0}^{n-4} {}^* (n^2 - k^2) T_k(x) \right] \\ &= n \sum_{k=0}^{n-2} {}^* (n^2 - k^2) T_k(x). \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait montrer.

2.3 Question 3

a. Pour tout n on a $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$. Alors en posant $\theta_k = \frac{2k+1}{2n}\pi$ pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$ on a $\cos(n\theta_k) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = 0$ et donc $T_n(\cos(\theta_k)) = 0$. Alors la famille $\{\cos(\theta_k)\}_{k \in \{0, \dots, n-1\}}$

donne n racines distinctes de $\widetilde{T}_n = 2^{-(n-1)} T_n$ qui est unitaire. Par le théorème fondamental de l'algèbre on sait qu'il ne peut pas exister d'autre racine du polynôme \widetilde{T}_n et on a de plus la factorisation

$$T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (x - \cos(\theta_k)).$$

b. A partir de la relation $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$ on trouve facilement que $T_n(1) = 1$ et $T_n(-1) = (-1)^n$. De plus on avait déjà que le coefficient dominant était 2^{n-1} .

2.4 Question 4

On a

$$\begin{aligned} \langle T_n, T_m \rangle_\omega &= \int_{-1}^1 \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi T_n(\cos(\xi)) T_m(\cos(\xi)) d\xi \\ &= \int_0^\pi \cos(n\xi) \cos(m\xi) d\xi = \begin{cases} \pi & \text{si } n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \end{aligned}$$

Ce qui montre que la famille est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$. De plus la famille est constituée de $n+1$ polynômes indépendants (car de degrés différents) dans un espace de dimension $n+1$. Il s'agit donc bien d'une base orthogonale.

3 Méthode des rectangles pour l'approximation de l'intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période

On rappelle ici le résultat suivant (utilisé à plusieurs reprises par la suite) : En considérant une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , périodique de période 2π assez régulière. Alors la série de fourier associée à f , notée $S_N f$ converge normalement (et donc uniformément) vers f sur $[0, 2\pi]$ lorsque N tend vers l'infini

3.1 Question 1

Soient n et k deux entiers naturels tels que $n \geq 2$ et $k \geq 2$.

. On pose $k = pn + r$, avec $0 < r \leq n - 1$, la division euclidienne de k par n . Montrons que $S_{n,k} = 0$ si $r = 0$ et $S_{n,k} = n$ sinon :

$$S_{n,k} = \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2kj\pi}{n}\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2pnj\pi}{n} + \frac{2rj\pi}{n}\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(2pj\pi + \frac{2rj\pi}{n}\right)$$

la fonction cosinus étant périodique de période 2π , on a donc :

$$S_{n,k} = \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2rj\pi}{n}\right)$$

Si $r = 0$, on a directement le résultat :

$$S_{n,k} = \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \sum_{j=0}^{n-1} 1 = n$$

Sinon, on utilise la formule d'Euler pour le cosinus :

$$\cos(x) = \Re(e^{ix})$$

Où \Re désigne la partie réelle d'un complexe. Ce qui nous donne :

$$S_{n,k} = \sum_{j=0}^{n-1} \Re\left(e^{i\frac{2rj\pi}{n}}\right) = \Re\left(\sum_{j=0}^{n-1} e^{i\frac{2rj\pi}{n}}\right)$$

Or, les $e^{i\frac{2rj\pi}{n}}$ sont les n -ièmes racines de l'unité. On a donc la propriété que leur somme vaut 0. Ceci nous permet de conclure :

$$S_{n,k} = \Re\left(\sum_{j=0}^{n-1} e^{i\frac{2rj\pi}{n}}\right) = \Re(0) = 0$$

3.2 Question 2

3.2.1 Partie a

Soit $(x_j)_{0 \leq j \leq n}$ une subdivision uniforme de l'intervalle $[0, \pi]$. Notons h le pas de la subdivision.

On a par définition de la formule de quadrature des rectangles à gauche et d'après le développement en série de f :

$$I_n = \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \cdot h = \frac{2\pi}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) = \frac{2\pi}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kx_j) \right)$$

Puisque la série converge, on peut intervertir les sommes :

$$I_n = \frac{2\pi}{n} \cdot n a_0 + \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_k \cos(kx_j) \right) = 2\pi a_0 + \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \sum_{j=0}^{n-1} \cos(kx_j) \right)$$

En remarquant que les $x_j = \frac{2\pi j}{n}$ on a donc :

$$I_n = 2\pi a_0 + \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_k \cos\left(\frac{2kj\pi}{n}\right) \right) = 2\pi a_0 + \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k S_{n,k}$$

Ce qui conclut cette question.

3.2.2 Partie b

Posons $I = \int_0^{2\pi} f(x) dx$. On s'intéresse à l'erreur $I_n - I$. On a d'un part :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(kx) dx = \int_0^{2\pi} a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kx) dx \\ &= \int_0^{2\pi} a_0 dx + \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kx) dx = 2\pi a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} a_k \cos(kx) dx \\ &= 2\pi a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{\sin(kx)}{k} \right]_0^{2\pi} = 2\pi a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 0 = 2\pi a_0 + 0 = 2\pi a_0 \end{aligned}$$

L'interversion série intégrale est justifiée car la série de Fourier converge uniformément vers f .

D'autre part, on a par la question précédente (et puisque la série converge) :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k S_{n,k} = \sum_{p=1}^{+\infty} a_{pn} S_{n,pn} = \sum_{p=1}^{+\infty} a_{pn} \cdot n = n \cdot \sum_{p=1}^{+\infty} a_{pn}$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned} I_n - I &= I_n - 2\pi a_0 = 2\pi a_0 + \frac{2\pi}{n} n \cdot \sum_{p=1}^{+\infty} a_{pn} - 2\pi a_0 \\ &= 2\pi \sum_{p=1}^{+\infty} a_{pn} \end{aligned}$$

Ce qui conclut.

3.2.3 Partie c

On s'intéresse au comportement de la quantité $I_n - I$ lorsque n tend vers l'infini. On peut encore une fois utiliser la convergence uniforme de la série de Fourier pour l'interversion limite-série.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} I_n - I &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \sum_{p=1}^{+\infty} a_{pn} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \sum_{p=1}^{+\infty} |a_{pn}| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \sum_{p=1}^{+\infty} a_{pn} \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} I_n - I &= 2\pi \sum_{p=1}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{pn} \\ &= 2\pi \sum_{p=1}^{+\infty} 0 = 0\end{aligned}$$

3.3 Question 3

Supposons que f est de classe \mathcal{C}^q (et vérifiant les autres hypothèses de l'énoncé). Les a_k vérifient donc $a_k = \frac{\alpha_k}{n^q}$, où α_k est une suite réelle tendant vers 0 lorsque k tend vers l'infini. On a alors en particulier qu'il existe M réel positif tel que : $|\alpha_k| \leq M$. Cela nous donne que quel que soient p et n entiers positifs, on a : $|a_{pn}| \leq \frac{M}{(pn)^q}$. Et donc :

$$\begin{aligned}I_n - I &= 2\pi \sum_{p=1}^{+\infty} a_{pn} \\ &\leq 2\pi \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{M}{(pn)^q} \\ &\leq \frac{2\pi}{n^q} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{M}{p^q}\end{aligned}$$

Puisque la série converge (série de Riemann) on a bien qu'il existe une constante réelle C telle que : $|I_n - I| \leq \frac{C}{n^q}$.

On peut interpréter ce résultat de la manière suivant : l'ordre de convergence de la méthode des rectangles pour le type de fonction que nous étudions (paires et périodiques sur $[0; 2\pi]$) est égal à l'ordre q de la classe de régularité de la fonction étudiée.

4 Système linéaire issu de la méthode des résidus pondérés

On considère le problème : trouver une fonction u telle que

$$\begin{aligned}-\alpha u''(x) + \gamma u(x) &= f(x) \quad \forall x \in]-1, 1[, \\ u(-1) &= u(1) = 0.\end{aligned}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on désigne par ϕ_k la fonction définie sur $] -1, 1[$ par

$$\phi_k(x) = \begin{cases} T_{k+2}(x) - T_0(x) & \text{si } k \text{ est pair,} \\ T_{k+2}(x) - T_1(x) & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}.$$

4.1 Question 1

On montre que la famille $\Phi = \{\phi_0, \dots, \phi_{N-2}\}$ est une base de l'espace vectoriel

$$V_N = \{v \in \mathbb{R}_N[X] : v(-1) = v(1) = 0\}.$$

V_N est un sous-espace de l'espace vectoriel des polynômes de degrés compris entre 2 et N , en effet un polynôme de V_N dont admettre au moins deux racines. Cet espace est donc de dimension au plus $N-1$. Or la famille Φ contient $N-1$ polynômes linéairement indépendants de V_N , car ils sont tous de degrés différents et que $\phi_k(1) = \phi_k(-1) = 0$ d'après la question 2.3.b, elle est donc libre maximale dans V_N , c'est donc une base de V_N .

4.2 Question 2

On a l'opérateur différentiel $\mathcal{L}u = -\alpha u'' + \gamma u$. On cherche $\widehat{u}_N \in V_N$ tel que pour tout $v_N \in V_N$ on ait

$$\langle \mathcal{L}[\widehat{u}_N], v_N \rangle_\omega = \langle f, v_N \rangle_\omega.$$

Ce qui revient à

$$\int_{-1}^1 \frac{(-(\alpha \widehat{u}_N')' + \gamma \widehat{u}_N) v_N}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{f v_N}{\sqrt{1-x^2}},$$

or comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est une fonction strictement positive sur $]-1, 1[$, cela revient à

$$\int_{-1}^1 -(\alpha \widehat{u}_N')' v_N dx + \int_{-1}^1 \gamma \widehat{u}_N v_N dx = \int_{-1}^1 f v_N dx$$

et en intégrant par partie on trouve

$$\int_{-1}^1 \alpha \widehat{u}_N' v_N dx + \int_{-1}^1 \gamma \widehat{u}_N v_N dx = \int_{-1}^1 f v_N dx$$

car $v_N(-1) = v_N(1) = 0$. On retrouve bien une formulation variationnelle exprimée dans un espace vectoriel de dimension finie. D'où le parallèle avec la méthode de Galerkine.

4.3 Question 3

On commence par utiliser la question 2.4 pour déterminer la valeur de $\langle \phi_l, \phi_k \rangle_\omega$.

— Si $k = l$ est pair, on a

$$\langle \phi_k, \phi_k \rangle_\omega = \langle T_{k+2}, T_{k+2} \rangle_\omega + \langle T_0, T_0 \rangle_\omega = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}.$$

— Si $k = l$ est impaire :

$$\langle \phi_k, \phi_k \rangle_\omega = \langle T_{k+2}, T_{k+2} \rangle_\omega + \langle T_1, T_1 \rangle_\omega = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

— Si $k \neq l$ tous deux pairs :

$$\langle \phi_l, \phi_k \rangle_\omega = \langle T_0, T_0 \rangle_\omega = \pi.$$

— Si $k \neq l$ tous deux impairs :

$$\langle \phi_l, \phi_k \rangle_\omega = \langle T_0, T_0 \rangle_\omega = \frac{\pi}{2}.$$

— Enfin si k et l sont de parité opposée on a clairement

$$\langle \phi_k, \phi_l \rangle_\omega = 0.$$

On a bien trouvé les valeurs recherchées.

On a de plus $\phi''_k = T''_{k+2} = (k+2) \sum_{i=0}^{k+1} ((k+2)^2 - i^2) T_i$. Ce qui nous permet de déterminer la valeur de $\langle \phi''_l, \phi_k \rangle_\omega$.

— Si k et l sont pairs et $0 \leq k \leq l-2$ on a

$$\begin{aligned} \langle \phi''_l, \phi_k \rangle_\omega &= \langle T''_{l+2}, T_{k+2} - T_0 \rangle_\omega = (l+2) \sum_{i=0}^l \star((l+2)^2 - i^2) (\langle T_i, T_{k+2} \rangle_\omega - \langle T_i, T_0 \rangle_\omega) \\ &= (l+2)((l+2)^2 - (k+2)^2) \langle T_{k+2}, T_{k+2} \rangle_\omega - (l+2)^2 \left\langle \frac{T_0}{2}, T_0 \right\rangle_\omega \\ &= (l+2)((l+2)^2 - (k+2)^2) \frac{\pi}{2} - (l+2)^2 \frac{\pi}{2} \\ &= -(l+2)(k+2)^2 \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

— Si k et l sont pairs et $0 \leq l-2 < k$:

$$\begin{aligned} \langle \phi''_l, \phi_k \rangle_\omega &= \langle T''_{l+2}, T_{k+2} - T_0 \rangle_\omega = (l+2) \sum_{i=0}^l \star((l+2)^2 - i^2) (\langle T_i, T_{k+2} \rangle_\omega - \langle T_i, T_0 \rangle_\omega) \\ &= -(l+2)(l+2)^2 \left\langle \frac{T_0}{2}, T_0 \right\rangle_\omega \\ &= -(l+2)^3 \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

— Si k et l sont impairs et $0 \leq k \leq l-2$:

$$\begin{aligned} \langle \phi''_l, \phi_k \rangle_\omega &= \langle T''_{l+2}, T_{k+2} - T_1 \rangle_\omega = (l+2) \sum_{i=0}^l \star((l+2)^2 - i^2) (\langle T_i, T_{k+2} \rangle_\omega - \langle T_i, T_1 \rangle_\omega) \\ &= (l+2)((l+2)^2 - (k+2)^2) \langle T_{k+2}, T_{k+2} \rangle_\omega - ((l+2)^2 - 1) \langle T_1, T_1 \rangle_\omega \\ &= (l+2)((l+2)^2 - (k+2)^2) \frac{\pi}{2} - ((l+2)^2 - 1) \frac{\pi}{2} \\ &= -(l+2)((k+2)^2 + 1) \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

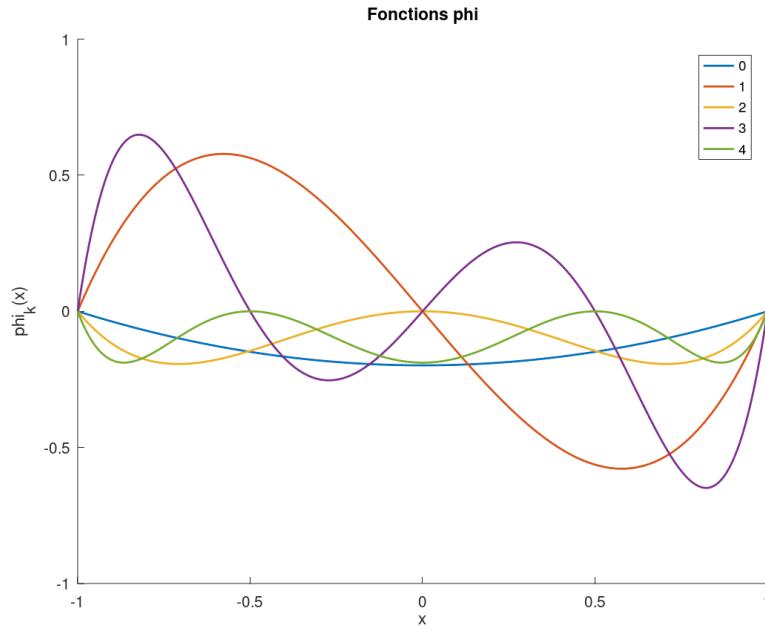


FIGURE 2 – Premières fonction ϕ_i

— Si k et l sont impairs et $0 \leq l-2 < k$:

$$\begin{aligned}
\langle \phi_l'', \phi_k \rangle_\omega &= \langle T_{l+2}'', T_{k+2} - T_1 \rangle_\omega = (l+2) \sum_{i=0}^l \star ((l+2)^2 - i^2) (\langle T_i, T_{k+2} \rangle_\omega - \langle T_i, T_1 \rangle_\omega) \\
&= -(l+2)((l+2)^2 - 1) \langle T_1, T_1 \rangle_\omega \\
&= -(l+2)((l+2)^2 - 1) \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

— Enfin il est facile de voir que si k et l sont de parité opposée on a $\langle \phi_l'', \phi_k \rangle_\omega = 0$.

4.4 Question 4

On considère une fonction $f \in L^2([-1, 1])$, on s'intéresse à $\langle f, T_n \rangle_\omega$.

a. On a

$$\begin{aligned}
\langle f, T_n \rangle_\omega &= \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi \frac{f(\cos(t)) T_n(\cos(t))}{\sqrt{1-\cos^2(t)}} \sin(t) dt \\
&= \int_0^\pi f(\cos(t)) \cos(nt) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(\cos(t)) \cos(nt) dt.
\end{aligned}$$

Où l'on a commencé par faire le changement de variable $x = \cos(t)$ puis on a utilisé la parité de la fonction $t \mapsto \cos(t)$.

b. La méthode des rectangles donne

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2\pi}{2(N+1)} \sum_{j=0}^N f\left(\cos\left(\frac{2j\pi}{N+1}\right)\right) \cos\left(\frac{n2\pi j}{N+1}\right) \\ &= \frac{\pi}{N+1} \sum_{j=0}^N f\left(\cos\left(\frac{2j\pi}{N+1}\right)\right) \Re\left[e^{-i\frac{2n\pi j}{N+1}}\right] \\ &= \frac{\pi}{N+1} \sum_{j=0}^N w_j \Re\left[e^{-2i\pi\frac{n j}{N+1}}\right] \\ &= \frac{\pi}{N+1} \Re\left[\sum_{j=0}^N w_j e^{-2i\pi\frac{n j}{N+1}}\right]. \end{aligned}$$

c. Dans le cas pair on a

$$\begin{aligned} \langle f, \phi_n \rangle_\omega &= \langle f, T_{n+2} \rangle_\omega - \langle f, T_0 \rangle_\omega \\ &= \frac{\pi}{N+1} \Re\left[\sum_{j=0}^N w_j \left(e^{-2i\pi\frac{(n+2)j}{N+1}} - 1\right)\right]. \end{aligned}$$

Dans le cas impair on a

$$\begin{aligned} \langle f, \phi_n \rangle_\omega &= \langle f, T_{n+2} \rangle_\omega - \langle f, T_1 \rangle_\omega \\ &= \frac{\pi}{N+1} \Re\left[\sum_{j=0}^N w_j e^{-2i\pi\frac{j}{N+1}} (e^{n+2} - 1)\right]. \end{aligned}$$

5 Transformée de Fourier rapide

5.1 Question 2.a

Soit p et n deux entiers naturels tels que $p > 0$. On calcule les valeurs exactes des intégrales de la manière suivante : (on suppose premièrement n strictement positif)

$$\begin{aligned} \langle f, T_n \rangle_\omega &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(\cos(t)) \cos(nt) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} t^p (2\pi - t)^p \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [t(2\pi - t)]^p \cos(nt) dt \end{aligned}$$

On effectue une IPP avec $u = [t(2\pi - t)]^p$ et $v' = \cos(nt)$.
On a donc $u' = 2p(pi - t)[t(2\pi - t)]^{p-1}$ et $v = \frac{1}{n}\sin(nt)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\langle f, T_n \rangle_\omega &= \frac{1}{2} \left[[t(2\pi - t)]^p \frac{1}{n} \sin(nt) \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{n} 2p(\pi - t) [t(2\pi - t)]^{p-1} \sin(nt) dt \\ &= \frac{p}{n} \int_0^{2\pi} (\pi - t) [t(2\pi - t)]^{p-1} \sin(nt) dt\end{aligned}$$

Dans le cas où $p = 1$, on a alors :

$$\begin{aligned}\langle f, T_0 \rangle_\omega &= \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} (\pi - t) \sin(nt) dt \\ &= \frac{1}{n^2} [(\pi - t) \cos(nt)]_0^{2\pi} + \frac{1}{n^2} \int_0^{2\pi} \cos(nt) dt \\ &= -\frac{\pi}{n^2} + \frac{1}{n^3} \int_0^{2\pi n} \cos(\phi) d\phi \\ &= -\frac{\pi}{n^2}\end{aligned}$$

Lorsque $n = 0$, on a a :

$$\begin{aligned}\langle f, T_n \rangle_\omega &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(\cos(t)) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} t^p (2\pi - t)^p dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2\pi t - t^2)^p dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2\pi t - t^2)^p dt = \left[\pi t^2 - \frac{t^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi^3}{3}\end{aligned}$$

Dans le cas où $p = 4$, on a :

$$\langle f, T_n \rangle_\omega = \frac{p}{n} \int_0^{2\pi} (pi - t) [t(2\pi - t)]^3 \sin(nt) dt$$

Lorsque $n = 0$, on a a :

$$\langle f, T_0 \rangle_\omega = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(\cos(t)) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} t^4 (2\pi - t)^4 dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2\pi t - t^2)^4 dt$$

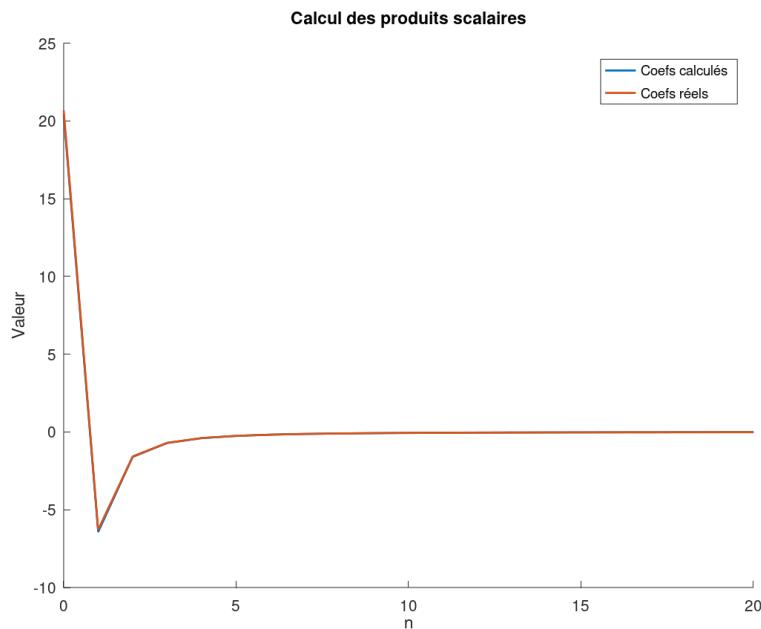


FIGURE 3 – Valeurs de produits scalaires pour $p = 1$

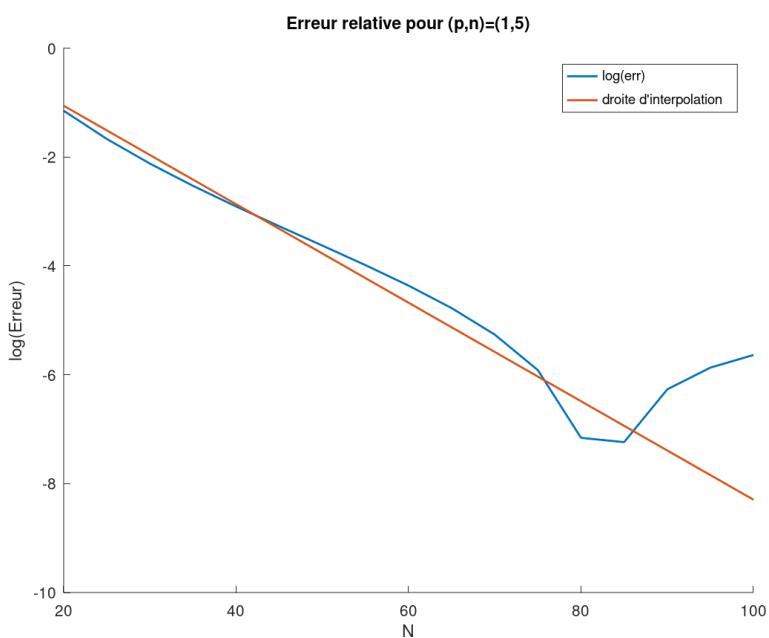


FIGURE 4 – Erreur relative pour $p = 1$

6 Méthode de Gauss

6.1 Question 1

Pour chaque ligne $j > 1$, et en partant la dernière ligne $j = n$, l'idée est de soustraire la ligne $j - 1$ à la ligne j . La structure particulière de la matrice nous permet de ne pas réaliser la totalité des calculs. Pour chaque ligne j on peut directement fixer les $j - 2$ premiers coefficients à 0 et il ne reste plus qu'à réaliser $n - j + 2$ soustractions. Cette méthode donne une matrice de la forme souhaitée en réalisant $\sum_{k=1}^n (n - k + 2) = \sum_{k=0}^{n-1} (k + 2) \sim n^2/2$ soustractions.

6.2 Question 2

Pour chaque colonne c_k pour $k > 1$ et en partant de la colonne la plus à droite $k = n$, on élimine le coefficient \hat{b}_{k-1} en calculant

$$c_{k-1} = c_{k-1} - \frac{\hat{b}_{k-1}}{\hat{a}_{k,k}} c_k.$$

Ce qui donne lieu à $3n(n - 1)$ opérations. On obtient alors un matrice triangulaire supérieure qui nous permet de résoudre le système linéaire en n^2 opérations comme dans le cas de la méthode de Gauss classique. Au final on a donc bien résolu le système linéaire avec un algorithme demandant de l'ordre de n^2 opérations.

Remarque 6.1. Il faut remarquer que nous avons fait l'hypothèse que le coefficients diagonaux restaient non-nuls tout au long de la procédure.

7 Mise en œuvre numérique

On sait déjà que l'on a le système linéaire $AU = F$ où $A = (a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq N-2}$ et $a_{i,j} = 0$ dès que i et j sont de parité opposée. De plus en notant $F = (f_i)_{0 \leq i \leq N-2}$ on a avec les conventions de l'énoncé

$$f_i = \sum_{k=0}^K (\alpha \langle \phi''_{2k}, \phi_i \rangle - \gamma \langle \phi_{2k}, \phi_i \rangle) u_{2k}$$

lorsque i est pair et

$$f_i = \sum_{k=0}^K (\alpha \langle \phi''_{2k+1}, \phi_i \rangle - \gamma \langle \phi_{2k+1}, \phi_i \rangle) u_{2k+1}$$

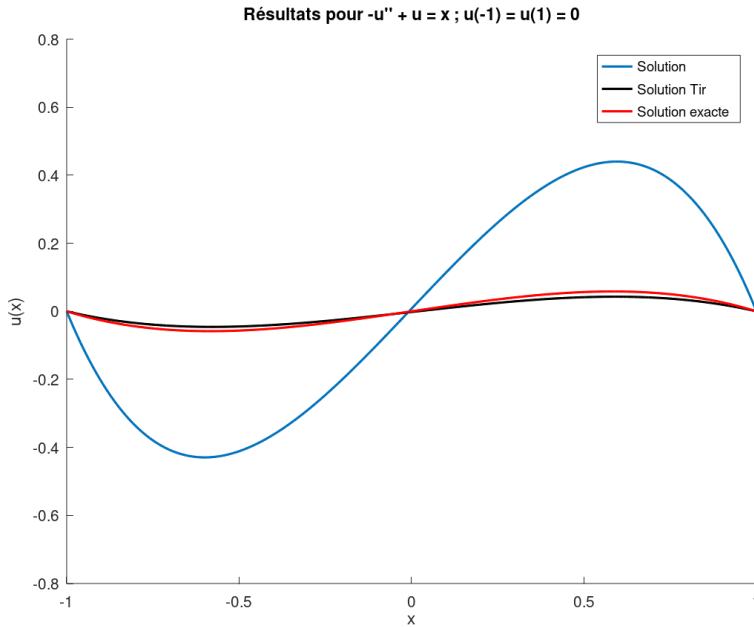


FIGURE 5 – Résulats obtenus pour le problème $-u'' + u = x$

lorsque i est impair. Alors en notant $G = \begin{pmatrix} G^1 \\ G^2 \end{pmatrix}$ avec $G^1 = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{2K} \end{pmatrix}$ et $G^2 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{2K+1} \end{pmatrix}$. On trouve bien un système équivalent $MV = G$ où M est de la forme souhaitée.

Nous avons testé la méthode sur le problème suivant : trouver u telle que

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = x & \forall x \in]-1, 1[, \\ u(-1) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Nous avons déterminé la solution exacte de ce problème par une méthode de tir et comparé la performances de cette méthode avec la résolution par méthode d'Euler combinée à la méthode de tir. La forme générale de la solution semble correcte mais il reste manifestement un problème de normalisation que nous n'avons pas su résoudre. Les fonctions Matlab/Octave sont reproduites en annexe.

A Fonctions Matlab/Octave

```
function I=pswft(f,N)
```

```

% f : fonction dont on veut calculer le produit scalaire avec les polyomes
% de Tchebychev
% N : nombre de produits scalaires calcules
%
% I : vecteur contenant les valeurs successives des produits scalaires

tt=linspace(0,2*pi,N);
w=f(tt);
fft=fft(w);
m=length(tt);
I=pi*real(fft)./N;
endfunction



---


function I = pswft2(f,N)
% f : fonction dont on veut calculer le produit scalaire avec les polyomes
% de Tchebychev
% N : nombre de produits scalaires calcules
%
% I : vecteur contenant les valeurs successives des produits scalaires
fcos = @(x)(f(cos(x)));
I = pswft(fcos,N);
endfunction



---


function U = gauss(A,F)
% Resout le systeme lineaire AU = F en utilisant la methode de Gauss
% decrite dans l'exercice 6
N = size(A)(1);
% On realise les operations sur les lignes
for k = [N:-1:2]
    A(k,:) -= A(k-1,:);
    F(k) -= F(k-1);
endfor

% On realise les operations sur les colonnes
lams = zeros(1,length([N:-1:2]));
for k = [N:-1:2]
    lam = A(k,k-1)/A(k,k);
    lams(k-1) = lam;
    A(:,k-1) -= lam .* A(:,k);
endfor

```

```

U = solve_gauss(A,F);
U = transpose(U);
endfunction

function U = solve_gauss(A,F)
N = size(A)(1);
U = zeros(1,N);
U(N) = F(N)/A(N,N);
for k = [N-1:-1:1]
    U(k) = (F(k) - sum(A(k,k+1:end).*U(k+1:end)))/A(k,k);
endfor
endfunction

function U = reorder(V)
l = length(V);
U = zeros(l,1);
K = floor(l/2);
for k = [1:K]
    U(2*k-1) = V(k);
    U(2*k) = V(K+k);
endfor
endfunction

% Retourne les N premiers polynomes de tchebychev calcules sur x
function T = tchebychev(N,x)
l = length(x);
T = zeros(N,l);
T(1,:) = ones(1,1);
T(2,:) = x;
for k = [3:N]
    T(k,:) = cos((k-1)*acos(x));
endfor
endfunction

function [M1,M2,G1,G2] = syslin(alpha,gamma,f,N)
% On commence par creer le systeme lineaire pour lequel on
% n'a pas pris en compte la parite
A = zeros(N,N);
B = zeros(N,N);
F = zeros(N,1);
ps = pswft2(f,max(80,N+2));
display(num2str(size(ps)));

```

```

for l = [0:N-1]
  for k = [0:N-1]
    if mod(l,2) == mod(k,2)
      if mod(l,2) == 0
        if l==k
          A(l+1,k+1) += 3*pi/2;
        else
          A(l+1,k+1) += pi;
        endif
        if l < k
          B(l+1,k+1) += -pi/2 * l**2 * k;
        else
          B(l+1,k+1) += -pi/2 * k**3;
        endif
      else
        if l==k
          A(l+1,k+1) += pi;
        else
          A(l+1,k+1) += pi/2;
        endif
        if l < k
          B(l+1,k+1) += -pi/2 * (l**2 - 1) * k;
        else
          B(l+1,k+1) += -pi/2 * (k**2 - 1)*k;
        endif
      endif
    endif
  endfor
%F(l+1) = pswft(f, l+2,200) - pswft2(f,mod(l,2),200);
F(l+1) = ps(l+3) - ps(mod(l,2)+1);
j = mod(l,2);
Tl = @(t)(cos((l+2)*t));
Tj = @(t)(cos(j*t));
norm_l = (abs(pswft(Tl,max(80,N+3))(l+3)) + abs(pswft(Tj,max(80,N+3))(j+1)));
F(l+1)/= norm_l;
endfor
A = -alpha* B + gamma * A;
%display(["A = "; num2str(A)]);
% On modifie a present le systeme pour prendre en compte la parite
K = floor(N/2);

```

```

M1 = zeros(K,K);
M2 = zeros(K,K);
G1 = zeros(K,1);
G2 = zeros(K,1);
for l = [1:K]
    for k = [1:K]
        M1(l,k) = A(2*l-1,2*k-1);
        M2(l,k) = A(2*l,2*k);
    endfor
    G1(l) = F(2*l-1);
    G2(l) = F(2*l);
    endfor
endfunction

```

% Script qui permet de tester la méthode

```

clear; clc; close all;
p = 1;
f = @(x)(x);
alpha = 1;
gamma = 1;
N = 20;
[M1,M2,G1,G2] = syslin(alpha,gamma,f,N);
%display(["M1 = "; num2str(M1)])
%display(["M2 = "; num2str(M2)])
%display(["G1 = "; num2str(G1)])
%display(["G2 = "; num2str(G2)])

U1 = gauss(M1,G1);
U2 = gauss(M2,G2);

%display(["U1 = "; num2str(U1)])
%display(["U2 = "; num2str(U2)])

V1 = M1\G1;
V2 = M2\G2;

%display(["V1 = "; num2str(V1)])
%display(["V2 = "; num2str(V2)])

```

% On trouve que les deux méthodes de résolution donnent le même résultat.

```

U = [V1;V2];
%display(["U = "; num2str(U)])

% On r ordonne les lments de U
U = reorder(U);
%display(["U = "; num2str(U)])

J = 250;
x = linspace(-1,1,J);
T = tchebychev(N+2,x);
figure
hold on
for k = [1:5]
    plot(x,T(k,:)," DisplayName ",num2str(k-1),"LineWidth ",1.3)
endfor
title("Polynomes de Tchebychev")
xlabel("x")
ylabel("T_k(x)")
legend
hold off

Phi = zeros(N,J);
figure
hold on
for k = [1:N]
    j = mod(k-1,2);
    Phi(k,:) = T(k+2,:)-T(j+1,:);
    Tk = @(t)(cos((k+1)*t));
    Tj = @(t)(cos(j*t));
    norm_k = (abs(pswft(Tk,max(80,N+3))(k+3)) + abs(pswft(Tj,max(80,N+3))(j+1)));
    Phi(k,:) /= norm_k;
    if k < 6
        plot(x,Phi(k,:)," DisplayName ",num2str(k-1),"LineWidth ",1.3)
    endif
endfor
xlabel("x")
ylabel("phi_k(x)")
title("Fonctions phi")
legend
hold off

```

```

[M1,M2,G1,G2] = syslin(alpha,gamma,f,N);
U1 = gauss(M1,G1);
U2 = gauss(M2,G2);
V1 = M1\G1;
V2 = M2\G2;
U = [V1;V2];
U = reorder(U);
sol = transpose(U) * Phi;

%sol_ex = @(x)(f(x)/gamma *(1 - cosh(sqrt(gamma) * x).* 1/cosh(sqrt(gamma)))); % pas de resultat
u1 = @(x)(2*exp(-x - 1) - exp(x + 1) + x);
u2 = @(x)(1/2 * (exp(x + 1) - exp(-x-1)));
kappa = - u1(1)/u2(1) ;
sol_ex = @(x)(u1(x) + kappa * u2(x));

u1_exp = sedoci(x,@(xt)(alpha),@(t)(0),@(t)(0),@(t)(gamma),f,[0;0]);
u2_exp = sedoci(x,@(xt)(alpha),@(t)(0),@(t)(0),@(t)(gamma),f,[0;1]);
kappa = - u1_exp(J)/u2_exp(J);

sol_exp = u1_exp + kappa* u2_exp;

figure
hold on
plot(x,sol,"Displayname","Solution","LineWidth",1.5)
plot(x,sol_exp,"Displayname","Solution Tir","Color","black","LineWidth",1.5)
plot(x,sol_ex(x),"Displayname","Solution exacte","Color","red","LineWidth",1.5);
xlabel("x")
ylabel("u(x)")
title("R sultats pour -u' '+u=x; u(-1)=u(1)=0")
legend
hold off



---


%% Script pour l'exercice 5 – transformee de Fourier rapide %%%%%%%%%%%%%%
clear; clc; close all;

%% Trace de fcos =====
p=1;
fcos = @(t) ((t.^p).*((2*pi.-t)).^p);

```

```

figure();
fplot(fcos , [0 , 2*pi] , "DisplayName" , "fcos");
xlabel("tet");
ylabel("f(cos(tet))");
title(["Trace de fcos pour p=",num2str(p)]);

%%%% Trace des coefficients -----
J = 20; N=85;
res=zeros(1,J);
K = 1:J;
coefs_reels = -2*pi./(K.^2);
coefs_reels = [2*pi**3/3,coefs_reels];
ps = pswft(fcos ,N);
display(num2str(size(ps)));
%resint=[];
for i=0:J
    res(i+1)=ps(i+1);
endfor

figure();
hold on;
plot(0:J,res,"DisplayName","Coefs calculs","LineWidth",1.3);
plot(0:J,coefs_reels,"DisplayName","Coefs reels","LineWidth",1.3);
xlabel("n");
ylabel("Valeur");
title("Calcul des produits scalaires dans le cas p=1");
legend;
hold off;

%%%% Convergence de la FFT -----
p=1; n=5;
fcos = @(t) ((t.^p).*((2*pi.-t)).^p);
N = [20:5:100];
coefs = zeros(1,length(N));
errs = zeros(1,length(N));
for i=[1:length(N)]
    coefs(i) = pswft(fcos ,N(i))(n+1);
    errs(i) = abs(-2*pi/(n^2)-coefs(i))/(2*pi/(n^2));

```

```

endfor

upto=length(N)-3;
P=polyfit(N(1:upto), log(errs)(1:upto),1);
disp([" coefficient directeur par interpolation : ",num2str(P(1))]);

figure;
hold on;
plot(N,[log(errs); P(2).+P(1).*N],"LineWidth",1.3);
legend(["log(err)"; "droite d'interpolation"]);
title(["Erreur relative pour (p,n)=(", num2str(p),",", num2str(n),")"]);
xlabel("N");
ylabel("log(Erreur)");
hold off;

%%%% Trace de fcos =====
p=4;
fcos = @(t) ((t.^p).*((2*pi.-t)).^p);
figure();
hold on;
fplot(fcos, [0 , 2*pi], "DisplayName", "fcos");
xlabel("tet");
ylabel("f(cos(tet))");
title(["Trace de fcos pour p=",num2str(p)]);
hold off;

%{
%%%% Convergence de la FFT =====
p=4; n=0;
fcos = @(t) ((t.^p).*((2*pi.-t)).^p);
N = [20:5:300];
coefs = zeros(1,length(N));
errs = zeros(1,length(N));

fun=@(x) fcos(x).*cos(n.*x);
valex=256*pi/(2*315); %pswft(fcos,85)(n+1); %a remplacer par la valeur exacte
for i=[1:length(N)]
    coefs(i) = pswft(fcos,N(i))(n+1);
    errs(i) = abs((valex-coefs(i))/(valex));
end
%}

```

```

endfor

upto=length(N)-3;
P=polyfit(N(1:upto), log(errs)(1:upto),1);
disp([" coefficient directeur par interpolation : ",num2str(P(1))]);

figure;
plot(N,[log(errs); P(2).+P(1).*N]);
legend(["log(err)"; "droite d'interpolation"]);
title([" Erreur relative pour (p,n)=(", num2str(p),",", num2str(n),")"]);
xlabel("N");
ylabel("log(Erreur)");
%}

%% Temps de calcul compare a une methode d'integration naive =====
p=4; N=255;
Iint=zeros(1,N);
Ifft=zeros(1,N);

ts=cputime;
fcos = @(tet) (tet.^p).*((2*pi.-tet).^p);
Ifft=pswft(fcos ,N);
te=cputime;
tft=te-ts;

ts=cputime;
for n=0:N
    fun=@(x) fcos(x).*cos(n.*x);
    Iint(n+1)=integral(fun,0,2*pi)/2;
endfor
te=cputime;
tint=te-ts;

disp(["temps total de calcul par transforme de fourier : ",num2str(tft)," s"]);
disp(["temps total de calcul par integration numerique : ",num2str(tint)," s"]);

```