

DM RNDP

Jules Berry, Thomas Poisson

Table des matières

1	Préliminaires	2
1.1	Question 1	2
1.2	Question 2	2
1.3	Question 3	3
1.4	Quastion 4	4
1.5	Question 5	6
2	Polynômes de Tchebychev	6
2.1	Question 1	6
2.2	Question 2	7
2.3	Question 3	9
2.4	Question 4	9
3	Système linéaire issu de la méthode des résidus pondérés	10
3.1	Question 1	10
3.2	Question 2	10
3.3	Question 3	11
3.4	Question 4	12
4	Transformée de Fourier rapide	13
4.1	Question 2.a	13
4.2	Question 2.c	15
5	Méthode de Gauss	15
5.1	Question 1	15
5.2	Question 2	15
6	Mise en œuvre numérique	15

1 Préliminaires

1.1 Question 1

On cherche une fonction $u \in \mathcal{C}^2([-1, 1])$ telle que

$$\begin{cases} -(\alpha(x)u'(x))' + \gamma(x)u(x) = f(x) & \forall x \in]-1, 1[, \\ u(-1) = c_1, \quad u(1) = c_2 \end{cases}. \quad (1)$$

Soit u un solution de ce problème et on pose

$$v(x) = u(x) - c_1 \frac{x-1}{2} - c_2 \frac{x+1}{2}$$

cette fonction est alors aussi $\mathcal{C}^2([-1, 1])$ et on a de plus

$$v'(x) = u'(x) - \frac{c_1 + c_2}{2}, \quad v''(x) = u''(x).$$

En injectant cette fonction dans l'EDO de (1) on a

$$\begin{aligned} -(\alpha(x)v'(x))' + \gamma(x)v(x) &= -\alpha'(x)v'(x) - \alpha(x)v''(x) + \gamma(x)v(x) \\ &= -(\alpha(x)u'(x))' + \frac{c_1 + c_2}{2}\alpha'(x) + \gamma(x)u(x) - \gamma(x)\left(c_1 \frac{x-1}{2} + c_2 \frac{x+1}{2}\right) \end{aligned}$$

On a donc que la fonction v est solution du problème

$$\begin{cases} -(\alpha(x)v'(x))' + \gamma(x)v(x) = \tilde{f}(x) \\ v(-1) = v(1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

où $\tilde{f}(x) = f(x) + \gamma(x)\left(c_1 \frac{x-1}{2} + c_2 \frac{x+1}{2}\right) - \frac{c_1 + c_2}{2}\alpha'(x)$.

De plus il est clair que $v(-1) = v(1) = 0$ et comme $f \in L^2([-1, 1])$, $\alpha \in \mathcal{C}^1([-1, 1])$ et $\gamma \in L^\infty([-1, 1]) \subset L^2([-1, 1])$ on a aussi $\tilde{f} \in L^2([-1, 1])$.

On voit alors que le problème (2) est de la forme souhaitée. De plus si v est une solution de ce problème et en posant $w(x) = v(x) + c_1 \frac{x-1}{2} + c_2 \frac{x+1}{2}$, on peut voir que w est une solution de (1). On a donc montré que l'étude de ce dernier se ramène à l'étude de (2).

1.2 Question 2

On pose $u = \rho v$ où $\rho : x \in [-1, 1] \mapsto \exp\left(\frac{1}{2} \int_{-1}^x \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} dt\right)$. Alors si u est une solution de l'EDO

$$-(\alpha u')' + \beta u' + \gamma u = f \quad (3)$$

On remarque alors que

$$\begin{aligned}\rho'(x) &= \frac{d}{dx} \exp\left(\frac{1}{2} \int_{-1}^x \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} dt\right) = \frac{\beta(x)}{2\alpha(x)} \exp\left(\frac{1}{2} \int_{-1}^x \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} dt\right) \\ &= \frac{\beta(x)}{2\alpha(x)} \rho(x).\end{aligned}$$

Et par suite

$$\rho'' = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta' \alpha - \beta \alpha'}{\alpha^2} \rho + \frac{\beta}{\alpha} \rho' \right) = \frac{\beta' \alpha + 2\beta^2 - \beta \alpha'}{2\alpha^2} \rho.$$

En réétudiant l'EDO on trouve donc

$$\begin{aligned}-(\alpha u')' + \beta u' + \gamma u &= -\alpha'(\rho' v + \rho v') - \alpha(\rho'' v + 2\rho' v' + \rho v'') + \beta(\rho' v + \rho v') + \gamma \rho v \\ &= \rho \left(-\frac{\alpha' \beta v}{\alpha} - \alpha' v' - \frac{\beta' v}{2} - \frac{\beta^2 v}{\alpha} + \frac{\beta \alpha' v}{\alpha} - \beta v' - \alpha v'' + \frac{\beta^2 v}{\alpha} + \beta v' + \gamma v \right) = f\end{aligned}$$

Par définition de la fonction de ρ celle-ci est strictement positive et on peut donc diviser par ρ dans l'équation. Alors en simplifiant le membre de gauche on trouve

$$-\alpha' v' - \alpha v'' - \frac{1}{2} \beta' v + \gamma v = \frac{f}{\rho}.$$

Alors en posant $\delta = \gamma - \frac{1}{2} \beta'$ et $g = \frac{f}{\rho}$. On trouve donc

$$-(\alpha v')' + \delta v = g. \quad (4)$$

On remarque au passage que nous avons supposé que la fonction β était au moins \mathcal{C}^1 .

1.3 Question 3

On considère l'EDO $-(\alpha u')' + \gamma u = f$ sur $[a, b]$. En posant

$$h : x \in [-1, 1] \mapsto a \frac{x-1}{2} + b \frac{x+1}{2}$$

et on considérant la fonction $v : x \in [-1, 1] \mapsto u \circ h(x)$ on trouve que $v(-1) = u(a)$ et $v(1) = u(b)$. De plus en posant aussi $\tilde{\alpha} = \alpha \circ h$, $\tilde{\gamma} = \frac{b-a}{2} \gamma \circ h$ on a en supposant que u est une solution de l'EDO

$$\begin{aligned}-(\tilde{\alpha}(x)v'(x))' + \tilde{\gamma}(x)v(x) &= -(\alpha(h(x))(u(h(x)))')' + \frac{a+b}{2} \gamma(h(x))v(h(x)) \\ &= -\frac{a+b}{2}(\alpha(h(x))u'(h(x)))' + \frac{a+b}{2} \gamma(h(x))u(h(x)) \\ &= \frac{a+b}{2}f(h(x)).\end{aligned}$$

On peut alors poser $\tilde{f}(x) = \frac{a+b}{2} f \circ h(x)$ et on a alors que v est solution de la nouvelle EDO

$$-(\tilde{\alpha}(x)v'(x))' + \tilde{\gamma}(x)v(x) = \tilde{f}(x).$$

Comme la fonction h est un polynôme de degrés un elle est bijective de $[-1, 1]$ dans $[a, b]$. Alors si v est solution de la dernière EDO on peut inverser la construction en posant $u = h^{-1} \circ v$ on voit que u est solution de la première EDO.

1.4 Quastion 4

On cherche ici une solution $u \in H^2([-1, 1])$ de

$$\begin{cases} -(\alpha(x)u'(x))' + \gamma(x)u(x) = f(x) & \forall x \in [-1, 1] \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}. \quad (5)$$

On commence par trouver une solution à la formulation variationnelle de (5) dans l'espace $H_0^1([-1, 1])$. Soit $\phi \in H_0^1([-1, 1])$ on a alors

$$-\int_{-1}^1 (\alpha(t)u'(t))'\phi(t) dt + \int_{-1}^1 \gamma(t)u(t)\phi(t) dt = \int_{-1}^1 f(t)\phi(t) dt.$$

En intégrant par parties on trouve

$$\int_{-1}^1 (\alpha(t)u'(t))\phi'(t) dt + \int_{-1}^1 \gamma(t)u(t)\phi(t) dt = \int_{-1}^1 f(t)\phi(t) dt.$$

On cherche ensuite à appliquer le théorème de Lax-Milgram dans $H_0^1([-1, 1])$. Pour cela on pose a la forme bilinéaire

$$a : (\phi, \psi) \in (H_0^1([-1, 1]))^2 \mapsto \int_{-1}^1 (\alpha(t)\phi'(t))\psi'(t) dt + \int_{-1}^1 \gamma(t)\phi(t)\psi(t) dt$$

et l la forme linéaire

$$l : \phi \in H_0^1([-1, 1]) \mapsto \int_{-1}^1 f(t)\phi(t) dt.$$

On a alors

$$|\langle l, \phi \rangle| \leq \int_{-1}^1 |f(t)\phi(t)| dt \leq \|f\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|\phi\|_{H^1}$$

ce qui montre que l est une forme linéaire continue sur $H_0^1(-1, 1)$. De plus on a aussi

$$\begin{aligned} |a(\phi, \psi)| &\leq \int_{-1}^1 |\alpha(t)\phi'(t)\psi'(t)| dt + \int_{-1}^1 |\gamma(t)\phi(t)\psi(t)| dt \\ &\leq \|\alpha\|_{L^\infty} \int_{-1}^1 |\phi'(t)\psi'(t)| dt + \|\gamma\|_{L^\infty} \int_{-1}^1 |\phi(t)\psi(t)| dt \\ &\leq M (\|\phi'\|_{L^2} \|\psi'\|_{L^2} + \|\phi\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2}) \\ &\leq M \sqrt{\|\phi\|_{L^2}^2 + \|\phi'\|_{L^2}^2} \sqrt{\|\psi\|_{L^2}^2 + \|\psi'\|_{L^2}^2} \\ &= M \|\phi\|_{H^1} \|\psi\|_{H^1} \end{aligned}$$

Ce qui montre que a est une forme bilinéaire continue sur $H_0^1(-1, 1)$.

Il reste donc à montrer que a est coercive. Pour cela il suffit de voir que

$$a(\phi, \phi) = \int_{-1}^1 \alpha(t) |\phi'(t)|^2 dt + \int_{-1}^1 \gamma(t) |\phi(t)|^2 dt \geq \alpha_0 \|\phi'\|_{L^2}^2$$

et par l'inégalité de Poincaré on sait que la norme $\phi \mapsto \|\phi'\|_{L^2}$ est équivalente à la norme usuelle de $H_0^1(-1, 1)$.

On peut à présent appliquer le théorème de Lax-Milgram pour obtenir l'existence d'une unique solution u à la formulation variationnelle du problème (5) dans $H_0^1(-1, 1)$. Il nous faut à présent montrer que cette solution est dans $H_0^2(-1, 1)$, c'est-à-dire qu'elle admet une dérivée faible seconde qui soit dans $L^2(-1, 1)$. On cherche donc une fonction $g \in L^2(-1, 1)$ qui vérifie

$$-\int u\phi' = \int g\phi$$

pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{D}(-1, 1)$.

Comme u est solution de la formulation variationnelle du problème, on sait déjà que

$$\int_{-1}^1 (\alpha(t)u'(t))\phi'(t) dt = \int_{-1}^1 (f(t) - \gamma(t)u(t))\phi(t) dt.$$

Ce qui signifie que la fonction $\alpha u'$ admet comme dérivée faible $\gamma u - f$ qui se trouve être dans L^2 . On a donc que $\alpha u \in H^1$. Or on sait que $(\alpha u')' = \alpha' u' + \alpha u''$. Ce qui donne

$$u'' = \frac{\gamma u - \alpha' u' - f}{\alpha}$$

qui a bien un sens car α est supposée strictement positive. De plus peut voir que u'' est dans L^2 . Ce qui montre que la solution u de (5) est dans H^2 .

1.5 Question 5

On se donne la fonction

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

et on cherche à montrer que la forme bilinéaire

$$\langle \phi, \psi \rangle_\omega = \int_{-1}^1 \phi(x)\psi(x)\omega(x) dx$$

définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([-1, 1])$.

La forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ est clairement symétrique et on a

$$\langle \phi, \phi \rangle_\omega = \int \frac{|\phi(x)|^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \geq 0$$

et on remarque que $\langle \phi, \phi \rangle_\omega = 0$ si, et seulement si, $\phi = 0$ car ω est strictement positive sur $]-1, 1[$. Il reste juste à montrer que l'intégrale est bien définie. Or on a

$$|\langle \phi, \psi \rangle_\omega| \leq \|\phi\|_\infty \|\psi\|_\infty \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} dx \\ &\leq 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx < +\infty. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ définit un produit scalaire.

2 Polynômes de Tchebychev

2.1 Question 1

On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $T_n(\cos(\omega)) = \cos(n\omega)$. On procède par récurrence en commençant par remarquer que l'on a clairement $T_0(X) = 1$ et $T_1(X) = X$. Ensuite on a

$$\begin{aligned} (\cos(\omega))^n &= \left(\frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2} \right)^n = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ik\omega} e^{-i(n-k)\omega} \\ &= 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(2k-n)\omega}. \end{aligned}$$

On note de plus que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ et on note alors cette quantité h_k^n . On a alors

$$\begin{aligned} (\cos(\omega))^n &= 2^{-n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} h_k^n (e^{i(2k-n)\omega} + e^{i(n-2k)\omega}) \\ &= 2^{-(n-1)} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} h_k^n \cos((n-2k)\omega). \end{aligned}$$

On note à présent $m = \lfloor n/2 \rfloor$ et d'après l'hypothèse de récurrence pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$ il existe un polynôme $T_{n-2k}(X)$ tel que $T_{n-2k}(\cos(\omega)) = \cos((n-2k)\omega)$. On peut alors poser

$$T_n(X) = 2^{(n-1)} X^n - \sum_{k=1}^m \widetilde{h}_k^n T_{n-2k}(X).$$

où on a noté $\widetilde{h}_k^n = \begin{cases} 0 & \text{si } h_k^n = 0 \\ \frac{1}{h_k^n} & \text{sinon} \end{cases}$.

Pour l'unicité, si on suppose qu'il existe un autre polynôme $R_n(X)$ vérifiant que $R_n(\cos(\omega)) = \cos(n\omega)$. Alors pour tout $\omega \in [0, 2\pi]$ $\cos(\omega)$ est une racine du polynôme $T_n - R_n$ ce qui implique $T_n - R_n = 0$.

2.2 Question 2

a. On montre que $T_{n+2}(x) + T_n(x) = 2xT_{n+1}(x)$. Pour cela on a

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos(\omega)) + T_n(\cos(\omega)) &= \cos((n+2)\omega) + \cos(n\omega) \\ &= \frac{e^{i((n+2)\omega)} + e^{-i((n+2)\omega)} + e^{in\omega} + e^{-in\omega}}{2} \\ &= \frac{e^{i((n+1)\omega)}(e^{in\omega} + e^{-in\omega}) + e^{-i((n+1)\omega)}(e^{in\omega} + e^{-in\omega})}{2} \\ &= 2 \cos(\omega) \cos((n+1)\omega) \\ &= 2 \cos(\omega) T_{n+1}(\cos(\omega)). \end{aligned}$$

Comme de plus \cos est une bijection de $[0, 2\pi]$ dans $[-1, 1]$ on a montré que pour tout $x \in [-1, 1]$ on a $T_{n+2}(x) + T_n(x) = 2xT_{n+1}(x)$.

b. La relation $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ nous donne nécessairement $T_0(x) = 1$ et $T_1(x) = x$. En utilisant la question a. on trouve alors

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x. \end{aligned}$$

c. On montre que pour tout $n \geq 2$ et pour tout $x \in [-1, 1]$ on a

$$2T_n(x) = \frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x) - \frac{1}{n-1}T'_{n-1}(x). \quad (6)$$

On a

$$\begin{aligned} T'_{n+1} &= \frac{n+1}{\sqrt{1-x^2}} \sin((n-1) \arccos(x)) \quad \text{et} \\ T'_{n-1}(x) &= \frac{n-1}{\sqrt{1-x^2}} \sin((n-1) \arccos(x)), \end{aligned}$$

on a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x) - \frac{1}{n-1}T'_{n-1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} [\sin((n+1) \arccos(x)) - \sin((n-1) \arccos(x))] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} [\sin(n \arccos(x))x + \sqrt{1-x^2} \cos(n \arccos(x)) \\ &\quad - \sin(n \arccos(x))x + \sqrt{1-x^2} \cos(n \arccos(x))] \\ &= 2 \cos(n \arccos(x)) = 2T_n(x) \end{aligned}$$

Ce qui montre la relation (6).

d. On montre les deux affirmations simultanément par récurrence. On vérifie facilement que l'on a $T'_1(x) = 1 = T_0(x) = 2 \sum^\star T_k(x)$, $T'_2(x) = 4x = 4T_1(x) = 4 \sum^\star T_k$ et $T''_2(x) = 4 = 8 \sum^\star T_k$, ce qui initialise la récurrence.

On suppose à présent $n > 2$ et que le résultat est vrai pour tout $k < n$. On a alors

$$\begin{aligned} 2T_{n-1}(x) &= \frac{1}{n}T'_n(x) - \frac{1}{n-2}T_{n-2}(x), \quad \text{alors} \\ \frac{1}{n}T'_n(x) &= 2T_{n-1}(x) + \frac{1}{n-2}T_{n-2}(x), \quad \text{ce qui donne} \\ T'_n(x) &= 2nT_{n-1}(x) + \frac{n}{n-2}T'_{n-2}(x) \\ &= 2nT_{n-1}(x) + \frac{n}{n-2}2(n-2) \sum_{k=0}^{n-3} \star T_k \\ &= 2n \sum_{k=0}^{n-1} \star T_k(x). \end{aligned}$$

A noter que l'on a inclus la condition de parité dans la définition du symbole \sum^\star . On a donc montré la première relation. Pour la seconde on a

Pour la seconde relation on a

$$\begin{aligned}
T_n''(x) &= 2n T_{n-1}'(x) + \frac{n}{n-2} T_{n-2}''(x) \\
&= 4n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} {}^* T_k(x) + n \sum_{k=0}^{n-4} {}^*((n-4)^2 - k^2) T_k(x) \\
&= n \left[4(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} {}^* T_k(x) + \sum_{k=0}^{n-4} {}^*((n-2)^2 - k^2) T_k(x) \right] \\
&= n \left[(4n-4) T_{n-2}(x) + \sum_{k=0}^{n-4} {}^*(4(n-1) + (n-2)^2 - k^2) T_k(x) \right] \\
&= n \left[(n^2 - (n-2)^2) T_{n-2}(x) + \sum_{k=0}^{n-4} {}^*(n^2 - k^2) T_k(x) \right] \\
&= n \sum_{k=0}^{n-2} {}^*(n^2 - k^2) T_k(x).
\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait montrer.

2.3 Question 3

- a. Pour tout n on a $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$. Alors en posant $\theta_k = \frac{2k+1}{2n}\pi$ pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$ on a $\cos(n\theta_k) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = 0$ et donc $T_n(\cos(\theta_k)) = 0$. Alors la famille $\{\cos(\theta_k)\}_{k \in \{0, \dots, n-1\}}$ donne n racines distinctes de $\widetilde{T}_n = 2^{-(n-1)}T_n$ qui est unitaire. Par le théorème fondamental de l'algèbre on sait qu'il ne peut pas exister d'autre racine du polynôme \widetilde{T}_n et on a de plus la factorisation

$$T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (x - \cos(\theta_k)).$$

- b. A partir de la relation $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$ on trouve facilement que $T_n(1) = 1$ et $T_n(-1) = (-1)^n$. De plus on avait déjà que le coefficient dominant était 2^{n-1} .

2.4 Question 4

On a

$$\begin{aligned}
\langle T_n, T_m \rangle_\omega &= \int_{-1}^1 \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi T_n(\cos(\xi)) T_m(\cos(\xi)) d\xi \\
&= \int_0^\pi \cos(n\xi) \cos(m\xi) d\xi = \begin{cases} \pi & \text{si } n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que la famille est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$. De plus la famille est constituée de $n + 1$ polynômes indépendants (car de degrés différents) dans un espace de dimension $n + 1$. Il s'agit donc bien d'une base orthogonale.

3 Système linéaire issu de la méthode des résidus pondérés

On considère le problème : trouver une fonction u telle que

$$\begin{aligned} -\alpha u''(x) + \gamma u(x) &= f(x) \quad \forall x \in]-1, 1[, \\ u(-1) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on désigne pas ϕ_k la fonction définie sur $] -1, 1[$ par

$$\phi_k(x) = \begin{cases} T_{k+2}(x) - T_0(x) & \text{si } k \text{ est pair,} \\ T_{k+2}(x) - T_1(x) & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}.$$

3.1 Question 1

On montre que la famille $\Phi = \{\phi_0, \dots, \phi_{N-2}\}$ est une base de l'espace vectoriel

$$V_N = \{v \in \mathbb{R}_N[X] : v(-1) = v(1) = 0\}.$$

V_N est un sous-espace de l'espace vectoriel des polynômes de degrés compris entre 2 et N , en effet un polynôme de V_N dont admettre au moins deux racines. Cet espace est donc de dimension au plus $N - 1$. Or la famille Φ contient $N - 1$ polynômes linéairement indépendants de V_N , car ils sont tous de degrés différents et que $\phi_k(1) = \phi_k(-1) = 0$ d'après la question 2.3.b, elle est donc libre maximale dans V_N , c'est donc une base de V_N .

3.2 Question 2

On a l'opérateur différentiel $\mathcal{L}u = -\alpha u'' + \gamma u$. On cherche $\widehat{u}_N \in V_N$ tel que pour tout $v_N \in V_N$ on ait

$$\langle \mathcal{L}[\widehat{u}_N], v_N \rangle_\omega = \langle f, v_N \rangle_\omega.$$

Ce qui revient à

$$\int_{-1}^1 \frac{(-(\alpha \widehat{u}_N')' + \gamma \widehat{u}_N)v_N}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{fv_N}{\sqrt{1-x^2}},$$

or comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est une fonction strictement positive sur $]-1, 1[$, cela revient à

$$\int_{-1}^1 -(\alpha \widehat{u_N}')' v_N dx + \int_{-1}^1 \gamma \widehat{u_N} v_N dx = \int_{-1}^1 f v_N dx$$

et en intégrant par partie on trouve

$$\int_{-1}^1 \alpha \widehat{u_N}' v_N dx + \int_{-1}^1 \gamma \widehat{u_N} v_N dx = \int_{-1}^1 f v_N dx$$

car $v_N(-1) = v_N(1) = 0$. On retrouve bien une formulation variationnelle exprimée dans un espace vectoriel de dimension finie. D'où le parallèle avec la méthode de Galerkine.

3.3 Question 3

On commence par utiliser la question 2.4 pour déterminer la valeur de $\langle \phi_l, \phi_k \rangle_\omega$.

— Si $k = l$ est pair, on a

$$\langle \phi_k, \phi_k \rangle_\omega = \langle T_{k+2}, T_{k+2} \rangle_\omega + \langle T_0, T_0 \rangle_\omega = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}.$$

— Si $k = l$ est impaire :

$$\langle \phi_k, \phi_k \rangle_\omega = \langle T_{k+2}, T_{k+2} \rangle_\omega + \langle T_1, T_1 \rangle_\omega = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

— Si $k \neq l$ tous deux pairs :

$$\langle \phi_l, \phi_k \rangle_\omega = \langle T_0, T_0 \rangle_\omega = \pi.$$

— Si $k \neq l$ tous deux impairs :

$$\langle \phi_l, \phi_k \rangle_\omega = \langle T_0, T_0 \rangle_\omega = \frac{\pi}{2}.$$

— Enfin si k et l sont de parité opposée on a clairement

$$\langle \phi_k, \phi_l \rangle_\omega = 0.$$

On a bien trouvé les valeurs recherchées.

On a de plus $\phi_k'' = T_{k+2}'' = (k+2) \sum_{i=0}^{k+1} ((k+2)^2 - i^2) T_i$. Ce qui nous permet de déterminer la valeur de $\langle \phi_l'', \phi_k \rangle_\omega$.

— Si k et l sont pairs et $0 \leq k \leq l - 2$ on a

$$\begin{aligned}
\langle \phi_l'', \phi_k \rangle_\omega &= \langle T_{l+2}'', T_{k+2} - T_0 \rangle_\omega = (l+2) \sum_{i=0}^l \star((l+2)^2 - i^2) (\langle T_i, T_{k+2} \rangle_\omega - \langle T_i, T_0 \rangle_\omega) \\
&= (l+2)((l+2)^2 - (k+2)^2) \langle T_{k+2}, T_{k+2} \rangle_\omega - (l+2)^2 \left\langle \frac{T_0}{2}, T_0 \right\rangle_\omega \\
&= (l+2)((l+2)^2 - (k+2)^2) \frac{\pi}{2} - (l+2)^2 \frac{\pi}{2} \\
&= -(l+2)(k+2)^2 \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

— Si k et l sont pairs et $0 \leq l - 2 < k$:

$$\begin{aligned}
\langle \phi_l'', \phi_k \rangle_\omega &= \langle T_{l+2}'', T_{k+2} - T_0 \rangle_\omega = (l+2) \sum_{i=0}^l \star((l+2)^2 - i^2) (\langle T_i, T_{k+2} \rangle_\omega - \langle T_i, T_0 \rangle_\omega) \\
&= -(l+2)(l+2)^2 \left\langle \frac{T_0}{2}, T_0 \right\rangle_\omega \\
&= -(l+2)^3 \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

— Si k et l sont impairs et $0 \leq k \leq l - 2$:

$$\begin{aligned}
\langle \phi_l'', \phi_k \rangle_\omega &= \langle T_{l+2}'', T_{k+2} - T_1 \rangle_\omega = (l+2) \sum_{i=0}^l \star((l+2)^2 - i^2) (\langle T_i, T_{k+2} \rangle_\omega - \langle T_i, T_1 \rangle_\omega) \\
&= (l+2)((l+2)^2 - (k+2)^2) \langle T_{k+2}, T_{k+2} \rangle_\omega - ((l+2)^2 - 1) \langle T_1, T_1 \rangle_\omega \\
&= (l+2)((l+2)^2 - (k+2)^2) \frac{\pi}{2} - ((l+2)^2 - 1) \frac{\pi}{2} \\
&= -(l+2)((k+2)^2 + 1) \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

— Si k et l sont impairs et $0 \leq l - 2 < k$:

$$\begin{aligned}
\langle \phi_l'', \phi_k \rangle_\omega &= \langle T_{l+2}'', T_{k+2} - T_1 \rangle_\omega = (l+2) \sum_{i=0}^l \star((l+2)^2 - i^2) (\langle T_i, T_{k+2} \rangle_\omega - \langle T_i, T_1 \rangle_\omega) \\
&= -(l+2)((l+2)^2 - 1) \langle T_1, T_1 \rangle_\omega \\
&= -(l+2)((l+2)^2 - 1) \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

— Enfin il est facile de voir que si k et l sont de parité opposée on a $\langle \phi_l'', \phi_k \rangle_\omega = 0$.

3.4 Question 4

On considère une fonction $f \in L^2([-1, 1])$, on s'intéresse à $\langle f, T_n \rangle_\omega$.

a. On a

$$\begin{aligned}\langle f, T_n \rangle_\omega &= \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi \frac{f(\cos(t)) T_n(\cos(t))}{\sqrt{1-\cos^2(t)}} \sin(t) dt \\ &= \int_0^\pi f(\cos(t)) \cos(nt) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(\cos(t)) \cos(nt) dt.\end{aligned}$$

Où l'on a commencé par faire le changement de variable $x = \cos(t)$ puis on a utilisé la parité de la fonction $t \mapsto \cos(t)$.

b. La méthode des rectangles donne

$$\begin{aligned}I_n &= \frac{2\pi}{2(N+1)} \sum_{j=0}^N f\left(\cos\left(\frac{2j\pi}{N+1}\right)\right) \cos\left(\frac{n2\pi j}{N+1}\right) \\ &= \frac{\pi}{N+1} \sum_{j=0}^N f\left(\cos\left(\frac{2j\pi}{N+1}\right)\right) \Re\left[e^{-i\frac{2n\pi j}{N+1}}\right] \\ &= \frac{\pi}{N+1} \sum_{j=0}^N w_j \Re\left[e^{-2i\pi\frac{n j}{N+1}}\right] \\ &= \frac{\pi}{N+1} \Re\left[\sum_{j=0}^N w_j e^{-2i\pi\frac{n j}{N+1}}\right].\end{aligned}$$

c. Dans le cas pair on a

$$\begin{aligned}\langle f, \phi_n \rangle_\omega &= \langle f, T_{n+2} \rangle_\omega - \langle f, T_0 \rangle_\omega \\ &= \frac{\pi}{N+1} \Re\left[\sum_{j=0}^N w_j \left(e^{-2i\pi\frac{(n+2)j}{N+1}} - 1\right)\right].\end{aligned}$$

Dans le cas impair on a

$$\begin{aligned}\langle f, \phi_n \rangle_\omega &= \langle f, T_{n+2} \rangle_\omega - \langle f, T_1 \rangle_\omega \\ &= \frac{\pi}{N+1} \Re\left[\sum_{j=0}^N w_j e^{-2i\pi\frac{j}{N+1}} (e^{n+2} - 1)\right].\end{aligned}$$

4 Transformée de Fourier rapide

4.1 Question 2.a

Soit p et n deux entiers naturels tels que $p > 0$. On calcule les valeurs exactes des intégrales de la manière suivante : (on suppose premièrement n strictement positif)

$$\begin{aligned}\langle f, T_n \rangle_\omega &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(\cos(t)) \cos(nt) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} t^p (2\pi - t)^p \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [t(2\pi - t)]^p \cos(nt) dt\end{aligned}$$

On effectue une IPP avec $u = [t(2\pi - t)]^p$ et $v' = \cos(nt)$.
On a donc $u' = 2p(pi - t)[t(2\pi - t)]^{p-1}$ et $v = \frac{1}{n} \sin(nt)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\langle f, T_n \rangle_\omega &= \frac{1}{2} \left[[t(2\pi - t)]^p \frac{1}{n} \sin(nt) \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{n} 2p(pi - t)[t(2\pi - t)]^{p-1} \sin(nt) dt \\ &= \frac{p}{n} \int_0^{2\pi} (pi - t)[t(2\pi - t)]^{p-1} \sin(nt) dt\end{aligned}$$

Dans le cas où $p=1$, on a alors :

$$\begin{aligned}\langle f, T_0 \rangle_\omega &= \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} (pi - t) \sin(nt) dt \\ &= \frac{1}{n^2} [(\pi - t) \cos(nt)]_0^{2\pi} + \frac{1}{n^2} \int_0^{2\pi} \cos(nt) dt \\ &= -\frac{\pi}{n^2} + \frac{1}{n^3} \int_0^{2\pi n} \cos(\phi) d\phi \\ &= -\frac{\pi}{n^2}\end{aligned}$$

Lorsque $n=0$, on a :

$$\begin{aligned}\langle f, T_n \rangle_\omega &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(\cos(t)) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} t^p (2\pi - t)^p dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2\pi t - t^2)^p dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2\pi t - t^2) dt = \left[\pi t^2 - \frac{t^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi^3}{3}\end{aligned}$$

Dans le cas où $p=4$, on a :

$$\langle f, T_n \rangle_\omega = \frac{p}{n} \int_0^{2\pi} (pi - t)[t(2\pi - t)]^3 \sin(nt) dt$$

Lorsque $n=0$, on a :

$$\langle f, T_0 \rangle_\omega = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(\cos(t)) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} t^4 (2\pi - t)^4 dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2\pi t - t^2)^4 dt$$

4.2 Question 2.c

5 Méthode de Gauss

5.1 Question 1

Pour chaque ligne $j > 1$, et en partant la dernière ligne $j = n$, l'idée est de soustraire la ligne $j - 1$ à la ligne j . La structure particulière de la matrice nous permet de ne pas réaliser la totalité des calculs. Pour chaque ligne j on peut directement fixer les $j - 2$ premiers coefficients à 0 et il ne reste plus qu'à réaliser $n - j + 2$ soustractions. Cette méthode donne une matrice de la forme souhaitée en réalisant $\sum_{k=1}^n (n - k + 2) = \sum_{k=0}^{n-1} (k + 2) \sim n^2/2$ soustractions.

5.2 Question 2

Pour chaque colonne c_k pour $k > 1$ et en partant de la colonne la plus à droite $k = n$, on élimine le coefficient \hat{b}_{k-1} en calculant

$$c_{k-1} = c_{k-1} - \frac{\hat{b}_{k-1}}{\hat{a}_{k,k}} c_k.$$

Ce qui donne lieu à $3n(n - 1)$ opérations. On obtient alors un matrice triangulaire supérieure qui nous permet de résoudre le système linéaire en n^2 opérations comme dans le cas de la méthode de Gauss classique. Au final on a donc bien résolu le système linéaire avec un algorithme demandant de l'ordre de n^2 opérations.

Remarque 5.1. Il faut remarquer que nous avons fait l'hypothèse que le coefficients diagonaux restaient non-nuls tout au long de la procédure.

6 Mise en œuvre numérique

1) On sait déjà que l'on a le système linéaire $AU = F$ où $A = (a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq N-2}$ et $a_{i,j} = 0$ dès que i et j sont de parité opposée. De plus en notant $F = (f_i)_{0 \leq i \leq N-2}$ on a avec les conventions de l'énoncé

$$f_i = \sum_{k=0}^K (\alpha \langle \phi''_{2k}, \phi_i \rangle - \gamma \langle \phi_{2k}, \phi_i \rangle) u_{2k}$$

lorsque i est pair et

$$f_i = \sum_{k=0}^K (\alpha \langle \phi''_{2k+1}, \phi_i \rangle - \gamma \langle \phi_{2k+1}, \phi_i \rangle) u_{2k+1}$$

lorsque i est impair. Alors en notant $G = \begin{pmatrix} G^1 \\ G^2 \end{pmatrix}$ avec $G^1 = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{2K} \end{pmatrix}$ et $G^2 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{2K+1} \end{pmatrix}$. On trouve bien un système équivalent $MV = G$ où M est de la forme souhaitée.