

# DM RNDP

Jules Berry, Thomas Poisson

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>2</b>
1.1	Question 1 . . . . .	2
1.2	Question 2 . . . . .	2
1.3	Question 3 . . . . .	3
1.4	Question 4 . . . . .	4
1.5	Question 5 . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Polynômes de Tchebychev</b>	<b>6</b>
2.1	Question 1 . . . . .	6
2.2	Question 2 . . . . .	7
2.3	Question 3 . . . . .	9
2.4	Question 4 . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Système linéaire issu de la méthode des résidus pondérés</b>	<b>10</b>
3.1	Question 1 . . . . .	10
3.2	Question 2 . . . . .	10
3.3	Question 3 . . . . .	11
3.4	Question 4 . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Transformée de Fourier rapide</b>	<b>13</b>
4.1	Question 2.a . . . . .	13
4.2	Question 2.c . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Méthode de Gauss</b>	<b>15</b>
5.1	Question 1 . . . . .	15
5.2	Question 2 . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Mise en œuvre numérique</b>	<b>15</b>

# 1 Préliminaires

## 1.1 Question 1

On cherche une fonction  $u \in \mathcal{C}^2([-1, 1])$  telle que

$$\begin{cases} -(\alpha(x)u'(x))' + \gamma(x)u(x) = f(x) & \forall x \in ]-1, 1[, \\ u(-1) = c_1, u(1) = c_2 \end{cases}. \quad (1)$$

Soit  $u$  un solution de ce problème et on pose

$$v(x) = u(x) - c_1 \frac{x-1}{2} - c_2 \frac{x+1}{2}$$

cette fonction est alors aussi  $\mathcal{C}^2([-1, 1])$  et on a de plus

$$v'(x) = u'(x) - \frac{c_1 + c_2}{2}, \quad v''(x) = u''(x).$$

En injectant cette fonction dans l'EDO de (1) on a

$$\begin{aligned} -(\alpha(x)v'(x))' + \gamma(x)v(x) &= -\alpha'(x)v'(x) - \alpha(x)v''(x) + \gamma(x)v(x) \\ &= -(\alpha(x)u'(x))' + \frac{c_1 + c_2}{2}\alpha'(x) + \gamma(x)u(x) - \gamma(x)\left(c_1 \frac{x-1}{2} + c_2 \frac{x+1}{2}\right) \end{aligned}$$

On a donc que la fonction  $v$  est solution du problème

$$\begin{cases} -(\alpha(x)v'(x))' + \gamma(x)v(x) = \tilde{f}(x) \\ v(-1) = v(1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

où  $\tilde{f}(x) = f(x) + \gamma(x)\left(c_1 \frac{x-1}{2} + c_2 \frac{x+1}{2}\right) - \frac{c_1 + c_2}{2}\alpha'(x)$ .

De plus il est clair que  $v(-1) = v(1) = 0$  et comme  $f \in L^2(]-1, 1[)$ ,  $\alpha \in \mathcal{C}^1([-1, 1])$  et  $\gamma \in L^\infty([-1, 1]) \subset L^2(]-1, 1[)$  on a aussi  $\tilde{f} \in L^2([-1, 1])$ .

On voit alors que le problème (2) est de la forme souhaitée. De plus si  $v$  est une solution de ce problème et en posant  $w(x) = v(x) + c_1 \frac{x-1}{2} + c_2 \frac{x+1}{2}$ , on peut voir que  $w$  est une solution de (1). On a donc montré que l'étude de ce dernier se ramène à l'étude de (2).

## 1.2 Question 2

On pose  $u = \rho v$  où  $\rho : x \in [-1, 1] \mapsto \exp\left(\frac{1}{2} \int_{-1}^x \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} dt\right)$ . Alors si  $u$  est une solution de l'EDO

$$-(\alpha u')' + \beta u' + \gamma u = f \quad (3)$$

On remarque alors que

$$\begin{aligned}\rho'(x) &= \frac{d}{dx} \exp\left(\frac{1}{2} \int_{-1}^x \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} dt\right) = \frac{\beta(x)}{2\alpha(x)} \exp\left(\frac{1}{2} \int_{-1}^x \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} dt\right) \\ &= \frac{\beta(x)}{2\alpha(x)} \rho(x).\end{aligned}$$

Et par suite

$$\rho'' = \frac{1}{2} \left( \frac{\beta' \alpha - \beta \alpha'}{\alpha^2} \rho + \frac{\beta}{\alpha} \rho' \right) = \frac{\beta' \alpha + 2\beta^2 - \beta \alpha'}{2\alpha^2} \rho.$$

En réétudiant l'EDO on trouve donc

$$\begin{aligned}-(\alpha u')' + \beta u' + \gamma u &= -\alpha'(\rho' v + \rho v') - \alpha(\rho'' v + 2\rho' v' + \rho v'') + \beta(\rho' v + \rho v') + \gamma \rho v \\ &= \rho \left( -\frac{\alpha' \beta v}{\alpha} - \alpha' v' - \frac{\beta' v}{2} - \frac{\beta^2 v}{\alpha} + \frac{\beta \alpha' v}{\alpha} - \beta v' - \alpha v'' + \frac{\beta^2 v}{\alpha} + \beta v' + \gamma v \right) = f\end{aligned}$$

Par définition de la fonction de  $\rho$  celle-ci est strictement positive et on peut donc diviser par  $\rho$  dans l'équation. Alors en simplifiant le membre de gauche on trouve

$$-\alpha' v' - \alpha v'' - \frac{1}{2} \beta' v + \gamma v = \frac{f}{\rho}.$$

Alors en posant  $\delta = \gamma - \frac{1}{2} \beta'$  et  $g = \frac{f}{\rho}$ . On trouve donc

$$-(\alpha v')' + \delta v = g. \quad (4)$$

On remarque au passage que nous avons supposé que la fonction  $\beta$  était au moins  $\mathcal{C}^1$ .

### 1.3 Question 3

On considère l'EDO  $-(\alpha u')' + \gamma u = f$  sur  $[a, b]$ . En posant

$$h : x \in [-1, 1] \mapsto a \frac{x-1}{2} + b \frac{x+1}{2}$$

et on considérant la fonction  $v : x \in [-1, 1] \mapsto u \circ h(x)$  on trouve que  $v(-1) = u(a)$  et  $v(1) = u(b)$ . De plus en posant aussi  $\tilde{\alpha} = \alpha \circ h$ ,  $\tilde{\gamma} = \frac{b-a}{2} \gamma \circ h$  on a en supposant que  $u$  est une solution de l'EDO

$$\begin{aligned}-(\tilde{\alpha}(x) v'(x))' + \tilde{\gamma}(x) v(x) &= -(\alpha(h(x))(u(h(x)))')' + \frac{a+b}{2} \gamma(h(x)) v(h(x)) \\ &= -\frac{a+b}{2} (\alpha(h(x)) u'(h(x)))' + \frac{a+b}{2} \gamma(h(x)) u(h(x)) \\ &= \frac{a+b}{2} f(h(x)).\end{aligned}$$

On peut alors poser  $\tilde{f}(x) = \frac{a+b}{2} f \circ h(x)$  et on a alors que  $v$  est solution de la nouvelle EDO

$$-(\tilde{\alpha}(x)v'(x))' + \tilde{\gamma}(x)u(x) = \tilde{f}(x).$$

Comme la fonction  $h$  est un polynôme de degrés un elle est bijective de  $[-1, 1]$  dans  $[a, b]$ . Alors si  $v$  est solution de la dernière EDO on peut inverser la construction en posant  $u = h^{-1} \circ v$  on voit que  $u$  est solution de la première EDO.

## 1.4 Question 4

On cherche ici une solution  $u \in H^2(]-1, 1[)$  de

$$\begin{cases} -(\alpha(x)u'(x))' + \gamma(x)u(x) = f(x) & \forall x \in ]-1, 1[ \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases} . \quad (5)$$

On commence par trouver une solution à la formulation variationnelle de (5) dans l'espace  $H_0^1(]-1, 1[)$ . Soit  $\phi \in H_0^1(]-1, 1[)$  on a alors

$$-\int_{-1}^1 (\alpha(t)u'(t))'\phi(t) dt + \int_{-1}^1 \gamma(t)u(t)\phi(t) dt = \int_{-1}^1 f(t)\phi(t) dt.$$

En intégrant par parties on trouve

$$\int_{-1}^1 (\alpha(t)u'(t))\phi'(t) dt + \int_{-1}^1 \gamma(t)u(t)\phi(t) dt = \int_{-1}^1 f(t)\phi(t) dt.$$

On cherche ensuite à appliquer le théorème de Lax-Milgram dans  $H_0^1(]-1, 1[)$ . Pour cela on pose  $a$  la forme bilinéaire

$$a : (\phi, \psi) \in (H_0^1(]-1, 1[))^2 \mapsto \int_{-1}^1 (\alpha(t)\phi'(t))\psi'(t) dt + \int_{-1}^1 \gamma(t)\phi(t)\psi(t) dt$$

et  $l$  la forme linéaire

$$l : \phi \in H_0^1(]-1, 1[) \mapsto \int_{-1}^1 f(t)\phi(t) dt.$$

On a alors

$$|\langle l, \phi \rangle| \leq \int_{-1}^1 |f(t)\phi(t)| dt \leq \|f\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|\phi\|_{H^1}$$

ce qui montre que  $l$  est une forme linéaire continue sur  $H_0^1(]-1, 1[)$ . De plus on a aussi

$$\begin{aligned}
|a(\phi, \psi)| &\leq \int_{-1}^1 |\alpha(t)\phi'(t)\psi'(t)| dt + \int_{-1}^1 |\gamma(t)\phi(t)\psi(t)| dt \\
&\leq \|\alpha\|_{L^\infty} \int_{-1}^1 |\phi'(t)\psi'(t)| dt + \|\gamma\|_{L^\infty} \int_{-1}^1 |\phi(t)\psi(t)| dt \\
&\leq M(\|\phi'\|_{L^2}\|\psi'\|_{L^2} + \|\phi\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}) \\
&\leq M\sqrt{\|\phi\|_{L^2}^2 + \|\phi'\|_{L^2}^2}\sqrt{\|\psi\|_{L^2}^2 + \|\psi'\|_{L^2}^2} \\
&= M\|\phi\|_{H^1}\|\psi\|_{H^1}
\end{aligned}$$

Ce qui montre que  $a$  est une forme bilinéaire continue sur  $H_0^1(]-1, 1[)$ .

Il reste donc à montrer que  $a$  est coercive. Pour cela il suffit de voir que

$$a(\phi, \phi) = \int_{-1}^1 \alpha(t) |\phi'(t)|^2 dt + \int_{-1}^1 \gamma(t) |\phi(t)|^2 dt \geq \alpha_0 \|\phi'\|_{L^2}^2$$

et par l'inégalité de Poincaré on sait que la norme  $\phi \mapsto \|\phi'\|_{L^2}$  est équivalente à la norme usuelle de  $H_0^1(]-1, 1[)$ .

On peut à présent appliquer le théorème de Lax-Milgram pour obtenir l'existence d'une unique solution  $u$  à la formulation variationnelle du problème (5) dans  $H_0^1(]-1, 1[)$ . Il nous faut à présent montrer que cette solution est dans  $H_0^2(]-1, 1[)$ , c'est-à-dire qu'elle admet une dérivée faible seconde qui soit dans  $L^2(]-1, 1[)$ . On cherche donc une fonction  $g \in L^2(]-1, 1[)$  qui vérifie

$$-\int u\phi' = \int g\phi$$

pour toute fonction test  $\phi \in \mathcal{D}(]-1, 1[)$ .

Comme  $u$  est solution de la formulation variationnelle du problème, on sait déjà que

$$\int_{-1}^1 (\alpha(t)u'(t))\phi'(t) dt = \int_{-1}^1 (f(t) - \gamma(t)u(t))\phi(t) dt.$$

Ce qui signifie que la fonction  $\alpha u'$  admet comme dérivée faible  $\gamma u - f$  qui se trouve être dans  $L^2$ . On a donc que  $\alpha u \in H^1$ . Or on sait que  $(\alpha u)' = \alpha' u' + \alpha u''$ . Ce qui donne

$$u'' = \frac{\gamma u - \alpha' u' - f}{\alpha}$$

qui a bien un sens car  $\alpha$  est supposée strictement positive. De plus peut voir que  $u''$  est dans  $L^2$ . Ce qui montre que la solution  $u$  de (5) est dans  $H^2$ .

## 1.5 Question 5

On se donne la fonction

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

et on cherche à montrer que la forme bilinéaire

$$\langle \phi, \psi \rangle_\omega = \int_{-1}^1 \phi(x) \psi(x) \omega(x) dx$$

définit un produit scalaire sur  $\mathcal{C}^0([-1, 1])$ .

La forme bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$  est clairement symétrique et on a

$$\langle \phi, \phi \rangle_\omega = \int \frac{|\phi(x)|^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \geq 0$$

et on remarque que  $\langle \phi, \phi \rangle_\omega = 0$  si, et seulement si,  $\phi = 0$  car  $\omega$  est strictement positive sur  $] -1, 1[$ . Il reste juste à montrer que l'intégrale est bien définie. Or on a

$$|\langle \phi, \psi \rangle_\omega| \leq \|\phi\|_\infty \|\psi\|_\infty \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} dx \\ &\leq 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx < +\infty. \end{aligned}$$

Ce qui montre que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$  définit un produit scalaire.

## 2 Polynômes de Tchebychev

### 2.1 Question 1

On montre que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  il existe une unique polynôme  $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $T_n(\cos(\omega)) = \cos(n\omega)$ . On procède par récurrence en commençant par remarquer que l'on a clairement  $T_0(X) = 1$  et  $T_1(X) = X$ . Ensuite on a

$$\begin{aligned} (\cos(\omega))^n &= \left( \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2} \right)^n = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ik\omega} e^{-i(n-k)\omega} \\ &= 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(2k-n)\omega}. \end{aligned}$$

On note de plus que  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  et on note alors cette quantité  $h_k^n$ . On a alors

$$\begin{aligned} (\cos(\omega))^n &= 2^{-n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} h_k^n \left( e^{i(2k-n)\omega} + e^{i(n-2k)\omega} \right) \\ &= 2^{-(n-1)} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} h_k^n \cos((n-2k)\omega). \end{aligned}$$

On note à présent  $m = \lfloor n/2 \rfloor$  et d'après l'hypothèse de récurrence pour tout  $k \in \{1, \dots, m\}$  il existe un polynôme  $T_{n-2k}(X)$  tel que  $T_{n-2k}(\cos(\omega)) = \cos((n-2k)\omega)$ . On peut alors poser

$$T_n(X) = 2^{(n-1)} X^n - \sum_{k=1}^m \widetilde{h}_k^n T_{n-2k}(X).$$

où on a noté  $\widetilde{h}_k^n = \begin{cases} 0 & \text{si } h_k^n = 0 \\ \frac{1}{h_k^n} & \text{sinon} \end{cases}$ .

Pour l'unicité, si on suppose qu'il existe un autre polynôme  $R_n(X)$  vérifiant que  $R_n(\cos(\omega)) = \cos(n\omega)$ . Alors pour tout  $\omega \in [0, 2\pi]$   $\cos(\omega)$  est une racine du polynôme  $T_n - R_n$  ce qui implique  $T_n - R_n = 0$ .

## 2.2 Question 2

**a.** On montre que  $T_{n+2}(x) + T_n(x) = 2xT_{n+1}(x)$ . Pour cela on a

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos(\omega)) + T_n(\cos(\omega)) &= \cos((n+2)\omega) + \cos(n\omega) \\ &= \frac{e^{i((n+2)\omega)} + e^{-i((n+2)\omega)} + e^{in\omega} + e^{-in\omega}}{2} \\ &= \frac{e^{i((n+1)\omega)}(e^{in\omega} + e^{-in\omega}) + e^{-i((n+1)\omega)}(e^{in\omega} + e^{-in\omega})}{2} \\ &= 2\cos(\omega)\cos((n+1)\omega) \\ &= 2\cos(\omega)T_{n+1}(\cos(\omega)). \end{aligned}$$

Comme de plus  $\cos$  est une bijection de  $[0, 2\pi]$  dans  $[-1, 1]$  on a montré que pour tout  $x \in [-1, 1]$  on a  $T_{n+2}(x) + T_n(x) = 2xT_{n+1}(x)$ .

**b.** La relation  $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$  nous donne nécessairement  $T_0(x) = 1$  et  $T_1(x) = x$ . En utilisant la question *a.* on trouve alors

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x. \end{aligned}$$

c. On montre que pour tout  $n \geq 2$  et pour tout  $x \in [-1, 1]$  on a

$$2T_n(x) = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x) - \frac{1}{n-1} T'_{n-1}(x). \quad (6)$$

On a

$$\begin{aligned} T'_{n+1} &= \frac{n+1}{\sqrt{1-x^2}} \sin((n+1) \arccos(x)) \quad \text{et} \\ T'_{n-1}(x) &= \frac{n-1}{\sqrt{1-x^2}} \sin((n-1) \arccos(x)), \end{aligned}$$

on a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x) - \frac{1}{n-1} T'_{n-1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} [\sin((n+1) \arccos(x)) - \sin((n-1) \arccos(x))] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} [\sin(n \arccos(x))x + \sqrt{1-x^2} \cos(n \arccos(x)) \\ &\quad - \sin(n \arccos(x))x + \sqrt{1-x^2} \cos(n \arccos(x))] \\ &= 2 \cos(n \arccos(x)) = 2T_n(x) \end{aligned}$$

Ce qui montre la relation (6).

d. On montre les deux affirmations simultanément par récurrence. On vérifie facilement que l'on a  $T'_1(x) = 1 = T_0(x) = 2 \sum^* T_k(x)$ ,  $T'_2(x) = 4x = 4T_1(x) = 4 \sum^* T_k$  et  $T''_2(x) = 4 = 8 \sum^* T_k$ , ce qui initialise la récurrence.

On suppose à présent  $n > 2$  et que le résultat est vrai pour tout  $k < n$ . On a alors

$$\begin{aligned} 2T_{n-1}(x) &= \frac{1}{n} T'_n(x) - \frac{1}{n-2} T'_{n-2}(x), \quad \text{alors} \\ \frac{1}{n} T'_n(x) &= 2T_{n-1}(x) + \frac{1}{n-2} T'_{n-2}(x), \quad \text{ce qui donne} \\ T'_n(x) &= 2nT_{n-1}(x) + \frac{n}{n-2} T'_{n-2}(x) \\ &= 2nT_{n-1}(x) + \frac{n}{n-2} 2(n-2) \sum_{k=0}^{n-3}^* T_k \\ &= 2n \sum_{k=0}^{n-1}^* T_k(x). \end{aligned}$$

A noter que l'on a inclus la condition de parité dans la définition du symbole  $\sum^*$ . On a donc montré la première relation. Pour la seconde on a



Pour la seconde relation on a

$$\begin{aligned}
T_n''(x) &= 2nT_{n-1}'(x) + \frac{n}{n-2}T_{n-2}''(x) \\
&= 4n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} {}^*T_k(x) + n \sum_{k=0}^{n-4} {}^*((n-4)^2 - k^2)T_k(x) \\
&= n \left[ 4(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} {}^*T_k(x) + \sum_{k=0}^{n-4} {}^*((n-2)^2 - k^2)T_k(x) \right] \\
&= n \left[ (4n-4)T_{n-2}(x) + \sum_{k=0}^{n-4} {}^*(4(n-1) + (n-2)^2 - k^2)T_k(x) \right] \\
&= n \left[ (n^2 - (n-2)^2)T_{n-2}(x) + \sum_{k=0}^{n-4} {}^*(n^2 - k^2)T_k(x) \right] \\
&= n \sum_{k=0}^{n-2} {}^*(n^2 - k^2)T_k(x).
\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait montrer.

### 2.3 Question 3

**a.** Pour tout  $n$  on a  $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ . Alors en posant  $\theta_k = \frac{2k+1}{2n}\pi$  pour  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  on a  $\cos(n\theta_k) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = 0$  et donc  $T_n(\cos(\theta_k)) = 0$ . Alors la famille  $\{\cos(\theta_k)\}_{k \in \{0, \dots, n-1\}}$  donne  $n$  racines distinctes de  $\widetilde{T}_n = 2^{-(n-1)}T_n$  qui est unitaire. Par le théorème fondamentale de l'algèbre on sait qu'il ne peut pas exister d'autre racine du polynôme  $\widetilde{T}_n$  et on a de plus la factorisation

$$T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (x - \cos(\theta_k)).$$

**b.** A partir de la relation  $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$  on trouve facilement que  $T_n(1) = 1$  et  $T_n(-1) = (-1)^n$ . De plus on avait déjà que le coefficient dominant était  $2^{n-1}$ .

### 2.4 Question 4

On a

$$\begin{aligned}
\langle T_n, T_m \rangle_\omega &= \int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi T_n(\cos(\xi))T_m(\cos(\xi)) d\xi \\
&= \int_0^\pi \cos(n\xi)\cos(m\xi) d\xi = \begin{cases} \pi & \text{si } n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que la famille est orthogonale pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ . De plus la famille est constituée de  $n + 1$  polynômes indépendants (car de degrés différents) dans un espace de dimension  $n + 1$ . Il s'agit donc bien d'une base orthogonale.

### 3 Système linéaire issu de la méthode des résidus pondérés

On considère le problème : trouver une fonction  $u$  telle que

$$\begin{aligned} -\alpha u''(x) + \gamma u(x) &= f(x) \quad \forall x \in ]-1, 1[, \\ u(-1) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on désigne par  $\phi_k$  la fonction définie sur  $] - 1, 1[$  par

$$\phi_k(x) = \begin{cases} T_{k+2}(x) - T_0(x) & \text{si } k \text{ est pair,} \\ T_{k+2}(x) - T_1(x) & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}.$$

#### 3.1 Question 1

On montre que la famille  $\Phi = \{\phi_0, \dots, \phi_{N-2}\}$  est une base de l'espace vectoriel

$$V_N = \{v \in \mathbb{R}_N[X] : v(-1) = v(1) = 0\}.$$

$V_N$  est un sous-espace de l'espace vectoriel des polynômes de degrés compris entre 2 et  $N$ , en effet un polynôme de  $V_N$  doit admettre au moins deux racines. Cet espace est donc de dimension au plus  $N - 1$ . Or la famille  $\Phi$  contient  $N - 1$  polynômes linéairement indépendants de  $V_N$ , car ils sont tous de degrés différents et que  $\phi_k(1) = \phi_k(-1) = 0$  d'après la question 2.3.b, elle est donc libre maximale dans  $V_N$ , c'est donc une base de  $V_N$ .

#### 3.2 Question 2

On a l'opérateur différentiel  $\mathcal{L}u = -\alpha u'' + \gamma u$ . On cherche  $\widehat{u}_N \in V_N$  tel que pour tout  $v_N \in V_N$  on ait

$$\langle \mathcal{L}[\widehat{u}_N], v_N \rangle_\omega = \langle f, v_N \rangle_\omega.$$

Ce qui revient à

$$\int_{-1}^1 \frac{(-(\alpha \widehat{u}_N')' + \gamma \widehat{u}_N) v_N}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{f v_N}{\sqrt{1-x^2}},$$

or comme la fonction  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  est une fonction strictement positive sur  $] -1, 1[$ , cela revient à

$$\int_{-1}^1 -(\alpha \widehat{u_N}')' v_N dx + \int_{-1}^1 \gamma \widehat{u_N} v_N dx = \int_{-1}^1 f v_N dx$$

et en intégrant par partie on trouve

$$\int_{-1}^1 \alpha \widehat{u_N}' v_N dx + \int_{-1}^1 \gamma \widehat{u_N} v_N dx = \int_{-1}^1 f v_N dx$$

car  $v_N(-1) = v_N(1) = 0$ . On retrouve bien une formulation variationnelle exprimée dans un espace vectoriel de dimension finie. D'où le parallèle avec la méthode de Galerkin.

### 3.3 Question 3

On commence par utiliser la question 2.4 pour déterminer la valeur de  $\langle \phi_l, \phi_k \rangle_\omega$ .

— Si  $k = l$  est pair, on a

$$\langle \phi_k, \phi_k \rangle_\omega = \langle T_{k+2}, T_{k+2} \rangle_\omega + \langle T_0, T_0 \rangle_\omega = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}.$$

— Si  $k = l$  est impaire :

$$\langle \phi_k, \phi_k \rangle_\omega = \langle T_{k+2}, T_{k+2} \rangle_\omega + \langle T_1, T_1 \rangle_\omega = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

— Si  $k \neq l$  tous deux pairs :

$$\langle \phi_l, \phi_k \rangle_\omega = \langle T_0, T_0 \rangle_\omega = \pi.$$

— Si  $k \neq l$  tous deux impairs :

$$\langle \phi_l, \phi_k \rangle_\omega = \langle T_0, T_0 \rangle_\omega = \frac{\pi}{2}.$$

— Enfin si  $k$  et  $l$  sont de parité opposée on a clairement

$$\langle \phi_k, \phi_l \rangle_\omega = 0.$$

On a bien trouvé les valeurs recherchées.

On a de plus  $\phi_k'' = T_{k+2}'' = (k+2) \sum_{i=0}^{k*} ((k+2)^2 - i^2) T_i$ . Ce qui nous permet de déterminer la valeur de  $\langle \phi_l'', \phi_k \rangle_\omega$ .

— Si  $k$  et  $l$  sont pairs et  $0 \leq k \leq l-2$  on a

$$\begin{aligned}
\langle \phi_l'', \phi_k \rangle_\omega &= \langle T_{l+2}'', T_{k+2} - T_0 \rangle_\omega = (l+2) \sum_{i=0}^l {}^* ((l+2)^2 - i^2) (\langle T_i, T_{k+2} \rangle_\omega - \langle T_i, T_0 \rangle_\omega) \\
&= (l+2) ((l+2)^2 - (k+2)^2) \langle T_{k+2}, T_{k+2} \rangle_\omega - (l+2)^2 \left\langle \frac{T_0}{2}, T_0 \right\rangle_\omega \\
&= (l+2) ((l+2)^2 - (k+2)^2) \frac{\pi}{2} - (l+2)^2 \frac{\pi}{2} \\
&= -(l+2)(k+2)^2 \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

— Si  $k$  et  $l$  sont pairs et  $0 \leq l-2 < k$  :

$$\begin{aligned}
\langle \phi_l'', \phi_k \rangle_\omega &= \langle T_{l+2}'', T_{k+2} - T_0 \rangle_\omega = (l+2) \sum_{i=0}^l {}^* ((l+2)^2 - i^2) (\langle T_i, T_{k+2} \rangle_\omega - \langle T_i, T_0 \rangle_\omega) \\
&= -(l+2)(l+2)^2 \left\langle \frac{T_0}{2}, T_0 \right\rangle_\omega \\
&= -(l+2)^3 \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

— Si  $k$  et  $l$  sont impairs et  $0 \leq k \leq l-2$  :

$$\begin{aligned}
\langle \phi_l'', \phi_k \rangle_\omega &= \langle T_{l+2}'', T_{k+2} - T_1 \rangle_\omega = (l+2) \sum_{i=0}^l {}^* ((l+2)^2 - i^2) (\langle T_i, T_{k+2} \rangle_\omega - \langle T_i, T_1 \rangle_\omega) \\
&= (l+2) ((l+2)^2 - (k+2)^2) \langle T_{k+2}, T_{k+2} \rangle_\omega - ((l+2)^2 - 1) \langle T_1, T_1 \rangle_\omega \\
&= (l+2) ((l+2)^2 - (k+2)^2) \frac{\pi}{2} - ((l+2)^2 - 1) \frac{\pi}{2} \\
&= -(l+2)((k+2)^2 + 1) \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

— Si  $k$  et  $l$  sont impairs et  $0 \leq l-2 < k$  :

$$\begin{aligned}
\langle \phi_l'', \phi_k \rangle_\omega &= \langle T_{l+2}'', T_{k+2} - T_1 \rangle_\omega = (l+2) \sum_{i=0}^l {}^* ((l+2)^2 - i^2) (\langle T_i, T_{k+2} \rangle_\omega - \langle T_i, T_1 \rangle_\omega) \\
&= -(l+2)((l+2)^2 - 1) \langle T_1, T_1 \rangle_\omega \\
&= -(l+2)((l+2)^2 - 1) \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

— Enfin il est facile de voir que si  $k$  et  $l$  sont de parité opposée on a  $\langle \phi_l'', \phi_k \rangle_\omega = 0$ .

### 3.4 Question 4

On considère une fonction  $f \in L^2([-1, 1])$ , on s'intéresse à  $\langle f, T_n \rangle_\omega$ .

a. On a

$$\begin{aligned}\langle f, T_n \rangle_\omega &= \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi \frac{f(\cos(t)) T_n(\cos(t))}{\sqrt{1-\cos^2(t)}} \sin(t) dt \\ &= \int_0^\pi f(\cos(t)) \cos(nt) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(\cos(t)) \cos(nt) dt.\end{aligned}$$

Où l'on a commencé par faire le changement de variable  $x = \cos(t)$  puis on a utilisé la parité de la fonction  $t \mapsto \cos(t)$ .

b. La méthode des rectangles donne

$$\begin{aligned}I_n &= \frac{2\pi}{2(N+1)} \sum_{j=0}^N f\left(\cos\left(\frac{2j\pi}{N+1}\right)\right) \cos\left(\frac{n2\pi j}{N+1}\right) \\ &= \frac{\pi}{N+1} \sum_{j=0}^N f\left(\cos\left(\frac{2j\pi}{N+1}\right)\right) \Re\left[e^{-i\frac{2n\pi j}{N+1}}\right] \\ &= \frac{\pi}{N+1} \sum_{j=0}^N w_j \Re\left[e^{-2i\pi \frac{nj}{N+1}}\right] \\ &= \frac{\pi}{N+1} \Re\left[\sum_{j=0}^N w_j e^{-2i\pi \frac{nj}{N+1}}\right].\end{aligned}$$

c. Dans le cas pair on a

$$\begin{aligned}\langle f, \phi_n \rangle_\omega &= \langle f, T_{n+2} \rangle_\omega - \langle f, T_0 \rangle_\omega \\ &= \frac{\pi}{N+1} \Re\left[\sum_{j=0}^N w_j \left(e^{-2i\pi \frac{(n+2)j}{N+1}} - 1\right)\right].\end{aligned}$$

Dans le cas impair on a

$$\begin{aligned}\langle f, \phi_n \rangle_\omega &= \langle f, T_{n+2} \rangle_\omega - \langle f, T_1 \rangle_\omega \\ &= \frac{\pi}{N+1} \Re\left[\sum_{j=0}^N w_j e^{-2i\pi \frac{j}{N+1}} (e^{n+2} - 1)\right].\end{aligned}$$

## 4 Transformée de Fourier rapide

### 4.1 Question 2.a

Soit  $p$  et  $n$  deux entiers naturels tels que  $p > 0$ . On calcule les valeurs exactes des intégrales de la manière suivante : (on suppose premièrement  $n$  strictement positif)

$$\begin{aligned}\langle f, T_n \rangle_\omega &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(\cos(t)) \cos(nt) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} t^p (2\pi - t)^p \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [t(2\pi - t)]^p \cos(nt) dt\end{aligned}$$

On effectue une IPP avec  $u = [t(2\pi - t)]^p$  et  $v' = \cos(nt)$ .  
On a donc  $u' = 2p(pi - t)[t(2\pi - t)]^{p-1}$  et  $v = \frac{1}{n} \sin(nt)$ . Ainsi :

$$\begin{aligned}\langle f, T_n \rangle_\omega &= \frac{1}{2} \left[ [t(2\pi - t)]^p \frac{1}{n} \sin(nt) \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{n} 2p(pi - t)[t(2\pi - t)]^{p-1} \sin(nt) dt \\ &= \frac{p}{n} \int_0^{2\pi} (pi - t)[t(2\pi - t)]^{p-1} \sin(nt) dt\end{aligned}$$

Dans le cas ou  $p=1$ , on a alors :

$$\begin{aligned}\langle f, T_0 \rangle_\omega &= \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} (pi - t) \sin(nt) dt \\ &= \frac{1}{n^2} [(\pi - t) \cos(nt)]_0^{2\pi} + \frac{1}{n^2} \int_0^{2\pi} \cos(nt) dt \\ &= -\frac{\pi}{n^2} + \frac{1}{n^3} \int_0^{2\pi n} \cos(\phi) d\phi \\ &= -\frac{\pi}{n^2}\end{aligned}$$

Lorsque  $n=0$ , on a :

$$\begin{aligned}\langle f, T_n \rangle_\omega &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(\cos(t)) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} t^p (2\pi - t)^p dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2\pi t - t^2)^p dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2\pi t - t^2) dt = \left[ \pi t^2 - \frac{t^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi^3}{3}\end{aligned}$$

Dans le cas ou  $p=4$ , on a :

$$\langle f, T_n \rangle_\omega = \frac{p}{n} \int_0^{2\pi} (pi - t)[t(2\pi - t)]^3 \sin(nt) dt$$

Lorsque  $n=0$ , on a :

$$\langle f, T_0 \rangle_\omega = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(\cos(t)) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} t^4 (2\pi - t)^4 dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2\pi t - t^2)^4 dt$$

## 4.2 Question 2.c

# 5 Méthode de Gauss

## 5.1 Question 1

Pour chaque ligne  $j > 1$ , et en partant la dernière ligne  $j = n$ , l'idée est de soustraire la ligne  $j - 1$  à la ligne  $j$ . La structure particulière de la matrice nous permet de ne pas réaliser la totalité des calculs. Pour chaque ligne  $j$  on peut directement fixer les  $j - 2$  premiers coefficients à 0 et il ne reste plus qu'à réaliser  $n - j + 2$  soustractions. Cette méthode donne une matrice de la forme souhaitée en réalisant  $\sum_{k=1}^n (n - k + 2) = \sum_{k=0}^{n-1} (k + 2) \sim n^2 / 2$  soustractions.

## 5.2 Question 2

Pour chaque colonne  $c_k$  pour  $k > 1$  et en partant de la colonne la plus à droite  $k = n$ , on élimine le coefficient  $\hat{b}_{k-1}$  en calculant

$$c_{k-1} = c_{k-1} - \frac{\hat{b}_{k-1}}{\hat{a}_{k,k}} c_k.$$

Ce qui donne lieu à  $3n(n - 1)$  opérations. On obtient alors une matrice triangulaire supérieure qui nous permet de résoudre le système linéaire en  $n^2$  opérations comme dans le cas de la méthode de Gauss classique. Au final on a donc bien résolu le système linéaire avec un algorithme demandant de l'ordre de  $n^2$  opérations.

**Remarque 5.1.** Il faut remarquer que nous avons fait l'hypothèse que les coefficients diagonaux restaient non-nuls tout au long de la procédure.

# 6 Mise en œuvre numérique

1) On sait déjà que l'on a le système linéaire  $AU = F$  où  $A = (a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq N-2}$  et  $a_{i,j} = 0$  dès que  $i$  et  $j$  sont de parité opposée. De plus en notant  $F = (f_i)_{0 \leq i \leq N-2}$  on a avec les conventions de l'énoncé

$$f_i = \sum_{k=0}^K (\alpha \langle \phi''_{2k}, \phi_i \rangle - \gamma \langle \phi_{2k}, \phi_i \rangle) u_{2k}$$

lorsque  $i$  est pair et

$$f_i = \sum_{k=0}^K (\alpha \langle \phi''_{2k+1}, \phi_i \rangle - \gamma \langle \phi_{2k+1}, \phi_i \rangle) u_{2k+1}$$

lorsque  $i$  est impair. Alors en notant  $G = \begin{pmatrix} G^1 \\ G^2 \end{pmatrix}$  avec  $G^1 = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{2K} \end{pmatrix}$  et  $G^2 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{2K+1} \end{pmatrix}$ . On trouve bien un système équivalent  $MV = G$  où  $M$  est de la forme souhaitée.