DM RNDP

Jules Berry, Thomas Poisson

Table des matières

1 Préliminaires

1.1 Question 1

On cherche une fonction $u \in \mathscr{C}^2([-1,1])$ telle que

$$\begin{cases} -(\alpha(x)u'(x))' + \gamma(x)u(x) = f(x) \quad \forall x \in]-1,1[, \\ u(-1) = c_1,\ u(1) = c_2 \end{cases} . \tag{1}$$

Soit u un solution de ce problème et on pose

$$v(x) = u(x) - c_1\frac{x-1}{2} - c_2\frac{x+1}{2}$$

cette fonction est alors aussi $\mathscr{C}^2([-1,1])$ et on a de plus

$$v'(x) = u'(x) - \frac{c_1+c_2}{2}, \quad v''(x) = u''(x).$$

En injectant cette fonction dans l'EDO de (1) on a

$$\begin{aligned} -(\alpha(x)v'(x))' + \gamma(x)v(x) &= -\alpha'(x)v'(x) - \alpha(x)v''(x) + \gamma(x)v(x) \\ &= -(\alpha(x)u'(x))' + \frac{c_1+c_2}{2}\alpha'(x) + \gamma(x)u(x) - \gamma(x)\left(c_1\frac{x-1}{2} + c_2\frac{x+1}{2}\right) \end{aligned}$$

On a donc que la fonction v est solution du problème

$$\begin{cases} -(\alpha(x)v'(x))' + \gamma(x)v(x) = \tilde{f}(x) \\ v(-1) = v(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

où $\tilde{f}(x) = f(x) + \gamma(x)\left(c_1\frac{x-1}{2} + c_2\frac{x+1}{2}\right) - \frac{c_1+c_2}{2}\alpha'(x)$.

De plus il est clair que $v(-1) = v(1) = 0$ et comme $f \in L^2(]-1,1[)$, $\alpha \in \mathscr{C}^1([-1,1])$ et $\gamma \in L^\infty([-1,1]) \subset L^2(]-1,1[)$ on a aussi $\tilde{f} \in L^2([-1,1])$.

On voit alors que le problème (2) est de la forme souhaitée. De plus si v est une solution de ce problème et en posant $w(x) = v(x) + c_1\frac{x-1}{2} + c_2\frac{x+1}{2}$, on peut voir que w est une solution de (1). On a donc montré que l'étude de ce dernier se ramène à l'étude de (2).

1.2 Question 2

On pose $u = \rho v$ où $\rho : x \in [-1,1] \mapsto \exp\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{x} \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}\,dt\right)$. Alors si u est une solution de l'EDO

$$-(\alpha u')' + \beta u' + \gamma u = f \tag{3}$$

On remarque alors que

$$\rho'(x) = \frac{d}{dx} \exp\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{x} \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}\, dt\right) = \frac{\beta(x)}{2\alpha(x)} \exp\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{x} \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}\, dt\right)$$
$$= \frac{\beta(x)}{2\alpha(x)}\rho(x).$$

Et par suite

$$\rho'' = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta'\alpha - \beta\alpha'}{\alpha^2}\rho + \frac{\beta}{\alpha}\rho'\right) = \frac{\beta'\alpha + 2\beta^2 - \beta\alpha'}{2\alpha^2}\rho.$$

En réétudiant l'EDO on trouve donc

$$-(\alpha u')' + \beta u' + \gamma u = -\alpha'(\rho' v + \rho v') - \alpha(\rho'' v + 2\rho' v' + \rho v'') + \beta(\rho' v + \rho v') + \gamma\rho v$$
$$= \rho\left(-\frac{\alpha'\beta v}{\alpha} - \alpha' v' - \frac{\beta' v}{2} - \frac{\beta^2 v}{\alpha} + \frac{\beta\alpha' v}{\alpha} - \beta v' - \alpha v'' + \frac{\beta^2 v}{\alpha} + \beta v' + \gamma v\right) = f$$

Par définition de la fonction de ρ celle-ci est strictement positive et on peut donc diviser par ρ dans l'équation. Alors en simplifiant le membre de gauche on trouve

$$-\alpha' v' - \alpha v'' - \frac{1}{2}\beta' v + \gamma v = \frac{f}{\rho}.$$

Alors en posant $\delta = \gamma - \frac{1}{2}\beta'$ et $g = \frac{f}{\rho}$. On trouve donc

$$-(\alpha v')' + \delta v = g. \tag{4}$$

On remarque au passage que nous avons supposé que la fonction β était au moins $\mathscr{C}^1$.

1.3 Question 3

On considère l'EDO $-(\alpha u')' + \gamma u = f$ sur $[a, b]$. En posant

$$h : x \in [-1, 1] \mapsto a\frac{x-1}{2} + b\frac{x+1}{2}$$

et on considérant la fonction $v : x \in [-1, 1] \mapsto u \circ h(x)$ on trouve que $v(-1) = u(a)$ et $v(1) = u(b)$. De plus en posant aussi $\tilde{\alpha} = \alpha \circ h$, $\tilde{\gamma} = \frac{b-a}{2}\gamma \circ h$ on a en supposant que u est une solution de l'EDO

$$-(\tilde{\alpha}(x)v'(x))' + \tilde{\gamma}(x)v(x) = -(\alpha(h(x))(u(h(x)))')' + \frac{a+b}{2}\gamma(h(x))v(h(x))$$
$$= -\frac{a+b}{2}(\alpha(h(x))u'(h(x)))' + \frac{a+b}{2}\gamma(h(x))u(h(x))$$
$$= \frac{a+b}{2}f(h(x)).$$

On peut alors poser $\tilde{f}(x) = \frac{a+b}{2} f \circ h(x)$ et on a alors que v est solution de la nouvelle EDO

$$-(\tilde{\alpha}(x)v'(x))' + \tilde{\gamma}(x)u(x) = \tilde{f}(x).$$

Comme la fonction h est un polynôme de degrés un elle est bijective de $[-1,1]$ dans $[a,b]$. Alors si v est solution de la dernière EDO on peut inverser la construction en posant $u = h^{-1} \circ v$ on voit que u est solution de la première EDO.

1.4 Quastion 4

On cherche ici une solution $u \in H^2(]-1,1[)$ de

$$\begin{cases} -(\alpha(x)u'(x))' + \gamma(x)u(x) = f(x) & \forall x \in]-1,1[\\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}. \tag{5}$$

On commence par trouver une solution à la formulation variationnelle de (5) dans l'espace $H_0^1(]-1,1[)$. Soit $\phi \in H_0^1(]-1,1[)$ on a alors

$$-\int_{-1}^{1} (\alpha(t)u'(t))'\phi(t)\,dt + \int_{-1}^{1} \gamma(t)u(t)\phi(t)\,dt = \int_{-1}^{1} f(t)\phi(t)\,dt.$$

En intégrant par parties on trouve

$$\int_{-1}^{1} (\alpha(t)u'(t))\phi'(t)\,dt + \int_{-1}^{1} \gamma(t)u(t)\phi(t)\,dt = \int_{-1}^{1} f(t)\phi(t)\,dt.$$

On cherche ensuite à appliquer le théorème de Lax-Milgram dans $H_0^1(]-1,1[)$. Pour cela on pose a la forme bilinéaire

$$a : (\phi,\psi) \in (H_0^1(]-1,1[))^2 \mapsto \int_{-1}^{1} (\alpha(t)\phi'(t))\psi'(t)\,dt + \int_{-1}^{1} \gamma(t)\phi(t)\psi(t)\,dt$$

et l la forme linéaire

$$l : \phi \in H_0^1(]-1,1[) \mapsto \int_{-1}^{1} f(t)\phi(t)\,dt.$$

On a alors

$$\left|\langle l,\phi\rangle\right| \leq \int_{-1}^{1} \left|f(t)\phi(t)\right|\,dt \leq \|f\|_{L^2}\|\phi\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}\|\phi\|_{H^1}$$

ce qui montre que l est une forme linéaire continue sur $H_0^1(]-1,1[)$. De plus on a aussi

$$\begin{aligned}
\left|a(\phi,\psi)\right| &\leq \int_{-1}^{1} \left|\alpha(t)\phi'(t)\psi'(t)\right| \, dt + \int_{-1}^{1} \left|\gamma(t)\phi(t)\psi(t)\right| \, dt \\
&\leq \|\alpha\|_{L^\infty} \int_{-1}^{1} \left|\phi'(t)\psi'(t)\right| \, dt + \|\gamma\|_{L^\infty} \int_{-1}^{1} \left|\phi(t)\psi(t)\right| \, dt \\
&\leq M\left(\|\phi'\|_{L^2}\|\psi'\|_{L^2} + \|\phi\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}\right) \\
&\leq M\sqrt{\|\phi\|_{L^2}^2 + \|\phi'\|_{L^2}^2}\sqrt{\|\psi\|_{L^2}^2 + \|\psi'\|_{L^2}^2} \\
&= M\|\phi\|_{H^1}\|\psi\|_{H^1}
\end{aligned}$$

Ce qui montre que a est une forme bilinéaire continue sur $H_0^1(]-1,1[)$.

Il reste donc a montrer que a est coercive. Pour cela il suffit de voir que

$$a(\phi,\phi) = \int_{-1}^{1} \alpha(t)\left|\phi'(t)\right|^2 \, dt + \int_{-1}^{1} \gamma(t)\left|\phi(t)\right|^2 \, dt \geq \alpha_0\|\phi'\|_{L^2}^2$$

et par l'inégalité de Poincaré on sait que la norme $\phi \mapsto \|\phi'\|_{L^2}$ est équivalente à la norme usuelle de $H_0^1(]-1,1[)$.

On peut à présent appliquer le théorème de Lax-Milgram pour obtenir l'existence d'une unique solution u à la formulation variationnelle du problème (5) dans $H_0^1(]-1,1[)$. Il nous faut à présent montrer que cette solution est dans $H_0^2(]-1,1[)$, c'est-à-dire qu'elle admet une dérivée faible seconde qui soit dans $L^2(]-1,1[)$. On cherche donc une fonction $g \in L^2(]-1,1[)$ qui vérifie

$$-\int u\phi' = \int g\phi$$

pour toute fonction test $\phi \in \mathscr{D}(]-1,1[)$.

Comme u est solution de la formulation variationnelle du problème, on sait déjà que

$$\int_{-1}^{1} (\alpha(t)u'(t))\phi'(t) \, dt = \int_{-1}^{1} (f(t) - \gamma(t)u(t))\phi(t) \, dt.$$

Ce qui signifie que la fonction $\alpha u'$ admet comme dérivée faible $\gamma u - f$ qui se trouve être dans L^2. On a donc que $\alpha u \in H^1$. Or on sait que $(\alpha u')' = \alpha' u' + \alpha u''$. Ce qui donne

$$u'' = \frac{\gamma u - \alpha' u' - f}{\alpha}$$

qui a bien un sens car α est supposée strictement positive.De plus peut voir que u'' est dans L^2. Ce qui montre que la solution u de (5) est dans H^2.

1.5 Question 5

On se donne la fonction

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

et on cherche à montrer que la forme bilinéaire

$$\langle \phi, \psi \rangle_\omega = \int_{-1}^{1} \phi(x)\psi(x)\omega(x)\, dx$$

définit un produit scalaire sur $\mathscr{C}^0([-1,1])$.

La forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle \omega$ est clairement symétrique et on a

$$\langle \phi, \phi \rangle_\omega = \int \frac{|\phi(x)|^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \geq 0$$

et on remarque que $\langle \phi, \phi \rangle_\omega = 0$ si, et seulement si, $\phi = 0$ car ω est strictement positive sur $]-1,1[$. Il reste juste à monter que l'intégrale est bien définie. Or on a

$$\left|\langle \phi, \psi \rangle_\omega\right| \leq \|\phi\|_\infty \|\psi\|_\infty \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Or on a

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx &= 2\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}\, dx \\
&\leq 2\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx < +\infty.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ définit un produit scalaire.

2 Polynômes de Tchebychev

2.1 Question 1

On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ in existe une unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $T_n(\cos(\omega)) = \cos(n\omega)$. On procède par récurrence en commençant par remarquer que que l'on a clairement $T_0(X) = 1$ et $T_1(X) = X$. Ensuite on a

$$\begin{aligned}
(\cos(\omega))^n = \left(\frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2}\right)^n &= 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ik\omega} e^{-i(n-k)\omega} \\
&= 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i(2k-n)\omega}.
\end{aligned}$$

On note de plus que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ et on note alors cette quantité h_k^n. On a alors

$$\begin{aligned}(\cos(\omega))^n &= 2^{-n}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} h_k^n\left(e^{i(2k-n)\omega}+e^{i(n-2k)\omega}\right)\\ &= 2^{-(n-1)}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} h_k^n \cos((n-2k)\omega)).\end{aligned}$$

On note à présent $m = \lfloor n/2\rfloor$ et d'après l'hypothèse de récurrence pour tout $k \in \{1,\dots,m\}$ il existe un polynôme $T_{n-2k}(X)$ tel que $T_{n-2k}(\cos(\omega)) = \cos((n-2k)\omega)$. On peut alors poser

$$T_n(X) = 2^{(n-1)}X^n - \sum_{k=1}^{m}\widetilde{h_k^n}\,T_{n-2k}(X).$$

où on a noté $\widetilde{h_k^n} = \begin{cases} 0 & \text{si } h_k^n = 0 \\ \frac{1}{h_k^n} & \text{sinon}\end{cases}$.

Pour l'unicité, si on suppose qu'il existe un autre polynôme $R_n(X)$ vérifiant que $R_n(\cos(\omega)) = \cos(n\omega)$. Alors pour tout $\omega \in [0,2\pi]$ $\cos(\omega)$ est une racine du polynôme $T_n - R_n$ ce qui implique $T_n - R_n = 0$.

2.2 Question 2

a. On montre que $T_{n+2}(x) + T_n(x) = 2xT_{n+1}(x)$. Pour cela on a

$$\begin{aligned}T_{n+2}(cos(\omega)) + T_n(\cos(\omega)) &= \cos((n+2)\omega)+\cos(n\omega)\\ &= \frac{e^{i((n+2)\omega)}+e^{-i((n+2)\omega)}+e^{in\omega}+e^{in\omega}}{2}\\ &= \frac{e^{i((n+1)\omega)}(e^{in\omega}+e^{-in\omega})+e^{-i((n+1)\omega)}(e^{in\omega}+e^{-in\omega})}{2}\\ &= 2\cos(\omega)\cos((n+1)\omega)\\ &= 2\cos(\omega)\,T_{n+1}(\cos(\omega)).\end{aligned}$$

Comme de plus cos est une bijection de $[0,2\pi]$ dans $[-1,1]$ on a montré que pour tout $x \in [-1,1]$ on a $T_{n+2}(x) + T_n(x) = 2xT_{n+1}(x)$.

b. La relation $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ nous donne nécessairement $T_0(x) = 1$ et $T_1(x) = x$. En utilisant la question *a.* on trouve alors

$$\begin{aligned}T_2(x) &= 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1\\ T_3(x) &= 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2-1) - x = 4x^3 - 3x.\end{aligned}$$

c. On montre que pour tout $n \geq 2$ et pour tout $x \in [-1,1]$ on a

$$2T_n(x) = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x) - \frac{1}{n-1} T'_{n-1}(x). \tag{6}$$

On a

$$\begin{aligned} T'_{n+1} &= \frac{n+1}{\sqrt{1-x^2}} \sin((n-1)\arccos(c)) \quad \text{et} \\ T'_{n-1}(x) &= \frac{n-1}{\sqrt{1-x^2}} \sin((n-1)\arccos(x)), \end{aligned}$$

on a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x) - \frac{1}{n-1} T'_{n-1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} [\sin((n+1)\arccos(x)) - \sin((n-1)\arccos(x))] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} [\sin(n\arccos(x))x + \sqrt{1-x^2}\cos(n\arccos(x)) \\ &\quad - \sin(n\arccos(x))x + \sqrt{1-x^2}\cos(n\arccos(x))] \\ &= 2\cos(n\arccos(x)) = 2T_n(x) \end{aligned}$$

Ce qui montre la relation (6).

d. On montre les deux affirmations simultanément par récurrence. On vérifie facilement que l'on a $T'_1(x) = 1 = T_0(x) = 2\sum^\star T_k(x)$, $T'_2(x) = 4x = 4T_1(x) = 4\sum^\star T_k$ et $T''_2(x) = 4 = 8\sum^\star T_k$, ce qui initialise la récurrence.

On suppose à présent $n > 2$ et que le résultat est vrai pour tout $k < n$. On a alors

$$\begin{aligned} 2T_{n-1}(x) &= \frac{1}{n} T'_n(x) - \frac{1}{n-2} T_{n-2}(x), \quad \text{alors} \\ \frac{1}{n} T'_n(x) &= 2T_{n-1}(x) + \frac{1}{n-2} T_{n-2}(x), \quad \text{ce qui donne} \\ T'_n(x) &= 2nT_{n-1}(x) + \frac{n}{n-2} T'_{n-2}(x) \\ &= 2nT_{n-1}(x) + \frac{n}{n-2}\, 2(n-2) \sum_{k=0}^{n-3}{}^\star T_k \\ &= 2n \sum_{k=0}^{n-1}{}^\star T_k(x). \end{aligned}$$

A noter que l'on a inclus la condition de parité dans la définition du symbole $\sum^\star$. On a donc montré la première relation. Pour la seconde on a

Pour la seconde relation on a

$$
\begin{aligned}
T_n''(x) &= 2nT_{n-1}'(x) + \frac{n}{n-2}T_{n-2}''(x) \\
&= 4n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}{}^{\star}\, T_k(x) + n\sum_{k=0}^{n-4}{}^{\star}\,((n-4)^2-k^2)\,T_k(x) \\
&= n\left[4(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}{}^{\star}\, T_k(x) + \sum_{k=0}^{n-4}{}^{\star}\,((n-2)^2-k^2)\,T_k(x)\right] \\
&= n\left[(4n-4)\,T_{n-2}(x) + \sum_{k=0}^{n-4}{}^{\star}(4(n-1)+(n-2)^2-k^2)\,T_k(x)\right] \\
&= n\left[(n^2-(n-2)^2)\,T_{n-2}(x) + \sum_{k=0}^{n-4}{}^{\star}(n^2-k^2)\,T_k(x)\right] \\
&= n\sum_{k=0}^{n-2}{}^{\star}(n^2-k^2)\,T_k(x).
\end{aligned}
$$

Ce qu'il fallait montrer.

2.3 Question 3

a. Pour tout n on a $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$. Alors en posant $\theta_k = \frac{2k+1}{2n}\pi$ pour $k \in \{0,\dots,n-1\}$ on a $\cos(n\theta_k) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = 0$ et donc $T_n(\cos(\theta_k)) = 0$. Alors la famille $\{\cos(\theta_k)\}_{k\in\{0,\dots,n-1\}}$ donne n racines distinctes de $\widetilde{T_n} = 2^{-(n-1)}T_n$ qui est unitaire. Par le théorème fondamentale de l'algèbre on sait qu'il ne peut pas exister d'autre racine du polynôme $\widetilde{T_n}$ et on a de plus la factorisation

$$T_n(x) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}(x-\cos(\theta_k)).$$

b. A partir de la relation $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$ on trouve facilement que $T_n(1) = 1$ et $T_n(-1) = (-1)^n$. De plus on avait déjà que le coefficient dominant était 2^{n-1}.

2.4 Question 4

On a

$$
\begin{aligned}
\langle T_n,\ T_m\rangle_\omega = \int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)\,T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} T_n(\cos(\xi))\,T_m(\cos(\xi))\,d\xi \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\xi)\cos(m\xi)\,d\xi = \delta_{n,m}.
\end{aligned}
$$

Ce qui montre que la famille est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$. De plus la famille est constituée de $n+1$ polynômes indépendants (car de degrés différents) dans un espace de dimension $n+1$. Il s'agit donc bien d'une base orthogonale.