

DM RNDP

Jules Berry, Thomas Poisson

Table des matières

1	Préliminaires	2
1.1	Question 1	2
1.2	Question 2	2
1.3	Question 3	3
1.4	Quastion 4	4
1.5	Question 5	6
2	Méthode des rectangles pour l'approximation de l'intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période	7
2.1	Question 1	7
2.2	Question 2	8
2.2.1	Partie a	8
2.2.2	Partie b	8
2.2.3	Partie c	9
2.3	Question 3	9

1 Préliminaires

1.1 Question 1

On cherche une fonction $u \in \mathcal{C}^2([-1, 1])$ telle que

$$\begin{cases} -(\alpha(x)u'(x))' + \gamma(x)u(x) = f(x) & \forall x \in]-1, 1[, \\ u(-1) = c_1, u(1) = c_2 \end{cases}. \quad (1)$$

Soit u un solution de ce problème et on pose

$$v(x) = u(x) - c_1 \frac{x-1}{2} - c_2 \frac{x+1}{2}$$

cette fonction est alors aussi $\mathcal{C}^2([-1, 1])$ et on a de plus

$$v'(x) = u'(x) - \frac{c_1 + c_2}{2}, \quad v''(x) = u''(x).$$

En injectant cette fonction dans l'EDO de (1) on a

$$\begin{aligned} -(\alpha(x)v'(x))' + \gamma(x)v(x) &= -\alpha'(x)v'(x) - \alpha(x)v''(x) + \gamma(x)v(x) \\ &= -(\alpha(x)u'(x))' + \frac{c_1 + c_2}{2}\alpha'(x) + \gamma(x)u(x) - \gamma(x)\left(c_1 \frac{x-1}{2} + c_2 \frac{x+1}{2}\right) \end{aligned}$$

On a donc que la fonction v est solution du problème

$$\begin{cases} -(\alpha(x)v'(x))' + \gamma(x)v(x) = \tilde{f}(x) \\ v(-1) = v(1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

où $\tilde{f}(x) = f(x) + \gamma(x)\left(c_1 \frac{x-1}{2} + c_2 \frac{x+1}{2}\right) - \frac{c_1 + c_2}{2}\alpha'(x)$.

De plus il est clair que $v(-1) = v(1) = 0$ et comme $f \in L^2(]-1, 1[)$, $\alpha \in \mathcal{C}^1([-1, 1])$ et $\gamma \in L^\infty([-1, 1]) \subset L^2(]-1, 1[)$ on a aussi $\tilde{f} \in L^2([-1, 1])$.

On voit alors que le problème (2) est de la forme souhaitée. De plus si v est une solution de ce problème et en posant $w(x) = v(x) + c_1 \frac{x-1}{2} + c_2 \frac{x+1}{2}$, on peut voir que w est une solution de (1). On a donc montré que l'étude de ce dernier se ramène à l'étude de (2).

1.2 Question 2

On pose $u = \rho v$ où $\rho : x \in [-1, 1] \mapsto \exp\left(\frac{1}{2} \int_{-1}^x \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} dt\right)$. Alors si u est une solution de l'EDO

$$-(\alpha u')' + \beta u' + \gamma u = f \quad (3)$$

On remarque alors que

$$\begin{aligned}\rho'(x) &= \frac{d}{dx} \exp\left(\frac{1}{2} \int_{-1}^x \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} dt\right) = \frac{\beta(x)}{2\alpha(x)} \exp\left(\frac{1}{2} \int_{-1}^x \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} dt\right) \\ &= \frac{\beta(x)}{2\alpha(x)} \rho(x).\end{aligned}$$

Et par suite

$$\rho'' = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta' \alpha - \beta \alpha'}{\alpha^2} \rho + \frac{\beta}{\alpha} \rho' \right) = \frac{\beta' \alpha + 2\beta^2 - \beta \alpha'}{2\alpha^2} \rho.$$

En réétudiant l'EDO on trouve donc

$$\begin{aligned}-(\alpha u')' + \beta u' + \gamma u &= -\alpha'(\rho' v + \rho v') - \alpha(\rho'' v + 2\rho' v' + \rho v'') + \beta(\rho' v + \rho v') + \gamma \rho v \\ &= \rho \left(-\frac{\alpha' \beta v}{\alpha} - \alpha' v' - \frac{\beta' v}{2} - \frac{\beta^2 v}{\alpha} + \frac{\beta \alpha' v}{\alpha} - \beta v' - \alpha v'' + \frac{\beta^2 v}{\alpha} + \beta v' + \gamma v \right) = f\end{aligned}$$

Par définition de la fonction de ρ celle-ci est strictement positive et on peut donc diviser par ρ dans l'équation. Alors en simplifiant le membre de gauche on trouve

$$-\alpha' v' - \alpha v'' - \frac{1}{2} \beta' v + \gamma v = \frac{f}{\rho}.$$

Alors en posant $\delta = \gamma - \frac{1}{2} \beta'$ et $g = \frac{f}{\rho}$. On trouve donc

$$-(\alpha v')' + \delta v = g. \quad (4)$$

On remarque au passage que nous avons supposé que la fonction β était au moins \mathcal{C}^1 .

1.3 Question 3

On considère l'EDO $-(\alpha u')' + \gamma u = f$ sur $[a, b]$. En posant

$$h : x \in [-1, 1] \mapsto a \frac{x-1}{2} + b \frac{x+1}{2}$$

et on considérant la fonction $v : x \in [-1, 1] \mapsto u \circ h(x)$ on trouve que $v(-1) = u(a)$ et $v(1) = u(b)$. De plus en posant aussi $\tilde{\alpha} = \alpha \circ h$, $\tilde{\gamma} = \frac{b-a}{2} \gamma \circ h$ on a en supposant que u est une solution de l'EDO

$$\begin{aligned}-(\tilde{\alpha}(x) v'(x))' + \tilde{\gamma}(x) v(x) &= -(\alpha(h(x))(u(h(x)))')' + \frac{a+b}{2} \gamma(h(x)) v(h(x)) \\ &= -\frac{a+b}{2} (\alpha(h(x)) u'(h(x)))' + \frac{a+b}{2} \gamma(h(x)) u(h(x)) \\ &= \frac{a+b}{2} f(h(x)).\end{aligned}$$

On peut alors poser $\tilde{f}(x) = \frac{a+b}{2} f \circ h(x)$ et on a alors que v est solution de la nouvelle EDO

$$-(\tilde{\alpha}(x)v'(x))' + \tilde{\gamma}(x)u(x) = \tilde{f}(x).$$

Comme la fonction h est un polynôme de degrés un elle est bijective de $[-1, 1]$ dans $[a, b]$. Alors si v est solution de la dernière EDO on peut inverser la construction en posant $u = h^{-1} \circ v$ on voit que u est solution de la première EDO.

1.4 Question 4

On cherche ici une solution $u \in H^2(]-1, 1[)$ de

$$\begin{cases} -(\alpha(x)u'(x))' + \gamma(x)u(x) = f(x) & \forall x \in]-1, 1[\\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases} . \quad (5)$$

On commence par trouver une solution à la formulation variationnelle de (5) dans l'espace $H_0^1(]-1, 1[)$. Soit $\phi \in H_0^1(]-1, 1[)$ on a alors

$$-\int_{-1}^1 (\alpha(t)u'(t))'\phi(t) dt + \int_{-1}^1 \gamma(t)u(t)\phi(t) dt = \int_{-1}^1 f(t)\phi(t) dt.$$

En intégrant par parties on trouve

$$\int_{-1}^1 (\alpha(t)u'(t))\phi'(t) dt + \int_{-1}^1 \gamma(t)u(t)\phi(t) dt = \int_{-1}^1 f(t)\phi(t) dt.$$

On cherche ensuite à appliquer le théorème de Lax-Milgram dans $H_0^1(]-1, 1[)$. Pour cela on pose a la forme bilinéaire

$$a : (\phi, \psi) \in (H_0^1(]-1, 1[))^2 \mapsto \int_{-1}^1 (\alpha(t)\phi'(t))\psi'(t) dt + \int_{-1}^1 \gamma(t)\phi(t)\psi(t) dt$$

et l la forme linéaire

$$l : \phi \in H_0^1(]-1, 1[) \mapsto \int_{-1}^1 f(t)\phi(t) dt.$$

On a alors

$$|\langle l, \phi \rangle| \leq \int_{-1}^1 |f(t)\phi(t)| dt \leq \|f\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|\phi\|_{H^1}$$

ce qui montre que l est une forme linéaire continue sur $H_0^1(]-1, 1[)$. De plus on a aussi

$$\begin{aligned}
|a(\phi, \psi)| &\leq \int_{-1}^1 |\alpha(t)\phi'(t)\psi'(t)| dt + \int_{-1}^1 |\gamma(t)\phi(t)\psi(t)| dt \\
&\leq \|\alpha\|_{L^\infty} \int_{-1}^1 |\phi'(t)\psi'(t)| dt + \|\gamma\|_{L^\infty} \int_{-1}^1 |\phi(t)\psi(t)| dt \\
&\leq M(\|\phi'\|_{L^2}\|\psi'\|_{L^2} + \|\phi\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}) \\
&\leq M\sqrt{\|\phi\|_{L^2}^2 + \|\phi'\|_{L^2}^2} \sqrt{\|\psi\|_{L^2}^2 + \|\psi'\|_{L^2}^2} \\
&= M\|\phi\|_{H^1}\|\psi\|_{H^1}
\end{aligned}$$

Ce qui montre que a est une forme bilinéaire continue sur $H_0^1(]-1, 1[)$.

Il reste donc à montrer que a est coercive. Pour cela il suffit de voir que

$$a(\phi, \phi) = \int_{-1}^1 \alpha(t) |\phi'(t)|^2 dt + \int_{-1}^1 \gamma(t) |\phi(t)|^2 dt \geq \alpha_0 \|\phi'\|_{L^2}^2$$

et par l'inégalité de Poincaré on sait que la norme $\phi \mapsto \|\phi'\|_{L^2}$ est équivalente à la norme usuelle de $H_0^1(]-1, 1[)$.

On peut à présent appliquer le théorème de Lax-Milgram pour obtenir l'existence d'une unique solution u à la formulation variationnelle du problème (5) dans $H_0^1(]-1, 1[)$. Il nous faut à présent montrer que cette solution est dans $H_0^2(]-1, 1[)$, c'est-à-dire qu'elle admet une dérivée faible seconde qui soit dans $L^2(]-1, 1[)$. On cherche donc une fonction $g \in L^2(]-1, 1[)$ qui vérifie

$$-\int u\phi' = \int g\phi$$

pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{D}(]-1, 1[)$.

Comme u est solution de la formulation variationnelle du problème, on sait déjà que

$$\int_{-1}^1 (\alpha(t)u'(t))\phi'(t) dt = \int_{-1}^1 (f(t) - \gamma(t)u(t))\phi(t) dt.$$

Ce qui signifie que la fonction $\alpha u'$ admet comme dérivée faible $\gamma u - f$ qui se trouve être dans L^2 . On a donc que $\alpha u \in H^1$. Or on sait que $(\alpha u)' = \alpha' u' + \alpha u''$. Ce qui donne

$$u'' = \frac{\gamma u - \alpha' u' - f}{\alpha}$$

qui a bien un sens car α est supposée strictement positive. De plus peut voir que u'' est dans L^2 . Ce qui montre que la solution u de (5) est dans H^2 .

1.5 Question 5

On se donne la fonction

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

et on cherche à montrer que la forme bilinéaire

$$\langle \phi, \psi \rangle_\omega = \int_{-1}^1 \phi(x) \psi(x) \omega(x) dx$$

définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([-1, 1])$.

La forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ est clairement symétrique et on a

$$\langle \phi, \phi \rangle_\omega = \int \frac{|\phi(x)|^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \geq 0$$

et on remarque que $\langle \phi, \phi \rangle_\omega = 0$ si, et seulement si, $\phi = 0$ car ω est strictement positive sur $] -1, 1[$. Il reste juste à montrer que l'intégrale est bien définie. Or on a

$$|\langle \phi, \psi \rangle_\omega| \leq \|\phi\|_\infty \|\psi\|_\infty \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} dx \\ &\leq 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx < +\infty. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ définit un produit scalaire.

2 Méthode des rectangles pour l'approximation de l'intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période

On rappelle ici le résultat suivant (utilisé à plusieurs reprises par la suite) : En considérant une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , périodique de période 2π assez régulière. Alors la série de Fourier associée à f , notée $S_N f$ converge normalement (et donc uniformément) vers f sur $[0, 2\pi]$ lorsque N tend vers l'infini

2.1 Question 1

Soient n et k deux entiers naturels tels que $n \geq 2$ et $k \geq 2$.

. On pose $k = pn + r$, avec $0 < r \leq n - 1$, la division euclidienne de k par n . Montrons que $S_{n,k} = 0$ si $r = 0$ et $S_{n,k} = n$ sinon :

$$S_{n,k} = \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2kj\pi}{n}\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2pnj\pi}{n} + \frac{2rj\pi}{n}\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(2pj\pi + \frac{2rj\pi}{n}\right)$$

la fonction cosinus étant périodique de période 2π , on a donc :

$$S_{n,k} = \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2rj\pi}{n}\right)$$

Si $r=0$, on a directement le résultat :

$$S_{n,k} = \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \sum_{j=0}^{n-1} 1 = n$$

Sinon, on utilise la formule d'Euler pour le cosinus :

$$\cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix})$$

Où Re désigne la partie réelle d'un complexe. Ce qui nous donne :

$$S_{n,k} = \sum_{j=0}^{n-1} \operatorname{Re}\left(e^{i\frac{2rj\pi}{n}}\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{j=0}^{n-1} e^{i\frac{2rj\pi}{n}}\right)$$

OR, les $e^{i\frac{2rj\pi}{n}}$ sont les n -ièmes racines de l'unité. On a donc la propriété que leur somme vaut 0. Ceci nous permet de conclure :

$$S_{n,k} = \operatorname{Re}\left(\sum_{j=0}^{n-1} e^{i\frac{2rj\pi}{n}}\right) = \operatorname{Re}(0) = 0$$

2.2 Question 2

2.2.1 Partie a

Soit $(x_j)_{0 \leq j \leq n}$ une subdivision uniforme de l'intervalle $[0, \pi]$. Notons h le pas de la subdivision.

On a par définition de la formule de quadrature des rectangles à gauche et d'après le développement en série de f :

$$I_n = \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \cdot h = \frac{2\pi}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) = \frac{2\pi}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kx_j) \right)$$

Puisque la série converge, on peut intervertir les sommes :

$$I_n = \frac{2\pi}{n} \cdot n a_0 + \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_k \cos(kx_j) \right) = 2\pi a_0 + \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \sum_{j=0}^{n-1} \cos(kx_j) \right)$$

En remarquant que les $x_j = \frac{2\pi j}{n}$ on a donc :

$$I_n = 2\pi a_0 + \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_k \cos\left(\frac{2kj\pi}{n}\right) \right) = 2\pi a_0 + \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k S_{n,k}$$

Ce qui conclut cette question.

2.2.2 Partie b

Posons $I = \int_0^{2\pi} f(x) dx$. On s'intéresse à l'erreur $I_n - I$. On a d'un part :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(kx) dx = \int_0^{2\pi} a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kx) dx \\ &= \int_0^{2\pi} a_0 dx + \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kx) dx = 2\pi a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} a_k \cos(kx) dx \\ &= 2\pi a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{\sin(kx)}{k} \right]_0^{2\pi} = 2\pi a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 0 = 2\pi a_0 + 0 = 2\pi a_0 \end{aligned}$$

L'interversion série intégrale est justifiée car la série de Fourier converge uniformément vers f .

D'autre part, on a par la question précédente (et puisque la série converge) :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k S_{n,k} = \sum_{p=1}^{+\infty} a_{pn} S_{n,pn} = \sum_{p=1}^{+\infty} a_{pn} \cdot n = n \cdot \sum_{p=1}^{+\infty} a_{pn}$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned} I_n - I &= I_n - 2\pi a_0 = 2\pi a_0 + \frac{2\pi}{n} n \cdot \sum_{p=1}^{+\infty} a_{pn} - 2\pi a_0 \\ &= 2\pi \sum_{p=1}^{+\infty} a_{pn} \end{aligned}$$

Ce qui conclut.

2.2.3 Partie c

On s'intéresse au comportement de la quantité $I_n - I$ lorsque n tend vers l'infini. On peut encore une fois utiliser la convergence uniforme de la série de Fourier pour l'interversion limite-série.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} I_n - I &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \sum_{p=1}^{+\infty} a_{pn} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \sum_{p=1}^{+\infty} a_{pn} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \sum_{p=1}^{+\infty} a_{pn} \end{aligned}$$

Justifions l'utilisation du théorème de convergence dominée. HELP. L'interversion limite-série est donc bien justifiée et on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} I_n - I &= 2\pi \sum_{p=1}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{pn} \\ &= 2\pi \sum_{p=1}^{+\infty} 0 = 0 \end{aligned}$$

2.3 Question 3

Supposons que f est de classe \mathcal{C}^q (et vérifiant les autres hypothèses de l'énoncé). Les a_k vérifient donc $a_k = \frac{\alpha_k}{n^q}$, où α_k est une suite réelle tendant vers 0 lorsque k tend vers l'infini. On a alors en particulier qu'il existe M réel positif tel que : $|\alpha_k| \leq M$. Cela nous donne que quel que soient p et n entiers positifs, on a : $|a_{pn}| \leq \frac{M}{(pn)^q}$. Et

donc :

$$\begin{aligned} I_n - I &= 2\pi \sum_{p=1}^{+\infty} a_{pn} \\ &\leq 2\pi \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{M}{(pn)^q} \\ &\leq \frac{2\pi}{n^q} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{M}{p^q} \end{aligned}$$

Puisque la série converge (série de Riemann) on a bien qu'il existe une constante réelle C telle que : $|I_n - I| \leq \frac{C}{n^q}$.

On peut interpréter ce résultat de la manière suivante : l'ordre de convergence de la méthode des rectangles pour le type de fonction que nous étudions (paires et périodiques sur $[0; 2\pi]$) est égal à l'ordre q de la classe de régularité de la fonction étudiée.