

# DM RNDP

Jules Berry, Thomas Poisson

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>2</b>
1.1	Question 1 . . . . .	2
1.2	Question 2 . . . . .	2
1.3	Question 3 . . . . .	3
1.4	Quastion 4 . . . . .	4
1.5	Question 5 . . . . .	6

# 1 Préliminaires

## 1.1 Question 1

On cherche une fonction  $u \in \mathcal{C}^2([-1, 1])$  telle que

$$\begin{cases} -(\alpha(x)u'(x))' + \gamma(x)u(x) = f(x) & \forall x \in ]-1, 1[, \\ u(-1) = c_1, u(1) = c_2 \end{cases}. \quad (1)$$

Soit  $u$  un solution de ce problème et on pose

$$v(x) = u(x) - c_1 \frac{x-1}{2} - c_2 \frac{x+1}{2}$$

cette fonction est alors aussi  $\mathcal{C}^2([-1, 1])$  et on a de plus

$$v'(x) = u'(x) - \frac{c_1 + c_2}{2}, \quad v''(x) = u''(x).$$

En injectant cette fonction dans l'EDO de (1) on a

$$\begin{aligned} -(\alpha(x)v'(x))' + \gamma(x)v(x) &= -\alpha'(x)v'(x) - \alpha(x)v''(x) + \gamma(x)v(x) \\ &= -(\alpha(x)u'(x))' + \frac{c_1 + c_2}{2}\alpha'(x) + \gamma(x)u(x) - \gamma(x)\left(c_1 \frac{x-1}{2} + c_2 \frac{x+1}{2}\right) \end{aligned}$$

On a donc que la fonction  $v$  est solution du problème

$$\begin{cases} -(\alpha(x)v'(x))' + \gamma(x)v(x) = \tilde{f}(x) \\ v(-1) = v(1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

où  $\tilde{f}(x) = f(x) + \gamma(x)\left(c_1 \frac{x-1}{2} + c_2 \frac{x+1}{2}\right) - \frac{c_1 + c_2}{2}\alpha'(x)$ .

De plus il est clair que  $v(-1) = v(1) = 0$  et comme  $f \in L^2(]-1, 1[)$ ,  $\alpha \in \mathcal{C}^1([-1, 1])$  et  $\gamma \in L^\infty([-1, 1]) \subset L^2(]-1, 1[)$  on a aussi  $\tilde{f} \in L^2([-1, 1])$ .

On voit alors que le problème (2) est de la forme souhaitée. De plus si  $v$  est une solution de ce problème et en posant  $w(x) = v(x) + c_1 \frac{x-1}{2} + c_2 \frac{x+1}{2}$ , on peut voir que  $w$  est une solution de (1). On a donc montré que l'étude de ce dernier se ramène à l'étude de (2).

## 1.2 Question 2

On pose  $u = \rho v$  où  $\rho : x \in [-1, 1] \mapsto \exp\left(\frac{1}{2} \int_{-1}^x \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} dt\right)$ . Alors si  $u$  est une solution de l'EDO

$$-(\alpha u')' + \beta u' + \gamma u = f \quad (3)$$

On remarque alors que

$$\begin{aligned}\rho'(x) &= \frac{d}{dx} \exp\left(\frac{1}{2} \int_{-1}^x \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} dt\right) = \frac{\beta(x)}{2\alpha(x)} \exp\left(\frac{1}{2} \int_{-1}^x \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} dt\right) \\ &= \frac{\beta(x)}{2\alpha(x)} \rho(x).\end{aligned}$$

Et par suite

$$\rho'' = \frac{1}{2} \left( \frac{\beta' \alpha - \beta \alpha'}{\alpha^2} \rho + \frac{\beta}{\alpha} \rho' \right) = \frac{\beta' \alpha + 2\beta^2 - \beta \alpha'}{2\alpha^2} \rho.$$

En réétudiant l'EDO on trouve donc

$$\begin{aligned}-(\alpha u')' + \beta u' + \gamma u &= -\alpha'(\rho' v + \rho v') - \alpha(\rho'' v + 2\rho' v' + \rho v'') + \beta(\rho' v + \rho v') + \gamma \rho v \\ &= \rho \left( -\frac{\alpha' \beta v}{\alpha} - \alpha' v' - \frac{\beta' v}{2} - \frac{\beta^2 v}{\alpha} + \frac{\beta \alpha' v}{\alpha} - \beta v' - \alpha v'' + \frac{\beta^2 v}{\alpha} + \beta v' + \gamma v \right) = f\end{aligned}$$

Par définition de la fonction de  $\rho$  celle-ci est strictement positive et on peut donc diviser par  $\rho$  dans l'équation. Alors en simplifiant le membre de gauche on trouve

$$-\alpha' v' - \alpha v'' - \frac{1}{2} \beta' v + \gamma v = \frac{f}{\rho}.$$

Alors en posant  $\delta = \gamma - \frac{1}{2} \beta'$  et  $g = \frac{f}{\rho}$ . On trouve donc

$$-(\alpha v')' + \delta v = g. \quad (4)$$

On remarque au passage que nous avons supposé que la fonction  $\beta$  était au moins  $\mathcal{C}^1$ .

### 1.3 Question 3

On considère l'EDO  $-(\alpha u')' + \gamma u = f$  sur  $[a, b]$ . En posant

$$h : x \in [-1, 1] \mapsto a \frac{x-1}{2} + b \frac{x+1}{2}$$

et on considérant la fonction  $v : x \in [-1, 1] \mapsto u \circ h(x)$  on trouve que  $v(-1) = u(a)$  et  $v(1) = u(b)$ . De plus en posant aussi  $\tilde{\alpha} = \alpha \circ h$ ,  $\tilde{\gamma} = \frac{b-a}{2} \gamma \circ h$  on a en supposant que  $u$  est une solution de l'EDO

$$\begin{aligned}-(\tilde{\alpha}(x) v'(x))' + \tilde{\gamma}(x) v(x) &= -(\alpha(h(x))(u(h(x)))')' + \frac{a+b}{2} \gamma(h(x)) v(h(x)) \\ &= -\frac{a+b}{2} (\alpha(h(x)) u'(h(x)))' + \frac{a+b}{2} \gamma(h(x)) u(h(x)) \\ &= \frac{a+b}{2} f(h(x)).\end{aligned}$$

On peut alors poser  $\tilde{f}(x) = \frac{a+b}{2} f \circ h(x)$  et on a alors que  $v$  est solution de la nouvelle EDO

$$-(\tilde{\alpha}(x)v'(x))' + \tilde{\gamma}(x)u(x) = \tilde{f}(x).$$

Comme la fonction  $h$  est un polynôme de degrés un elle est bijective de  $[-1, 1]$  dans  $[a, b]$ . Alors si  $v$  est solution de la dernière EDO on peut inverser la construction en posant  $u = h^{-1} \circ v$  on voit que  $u$  est solution de la première EDO.

## 1.4 Question 4

On cherche ici une solution  $u \in H^2(\ ]-1, 1[ )$  de

$$\begin{cases} -(\alpha(x)u'(x))' + \gamma(x)u(x) = f(x) & \forall x \in \ ]-1, 1[ \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases} . \quad (5)$$

On commence par trouver une solution à la formulation variationnelle de (5) dans l'espace  $H_0^1(\ ]-1, 1[ )$ . Soit  $\phi \in H_0^1(\ ]-1, 1[ )$  on a alors

$$-\int_{-1}^1 (\alpha(t)u'(t))'\phi(t) dt + \int_{-1}^1 \gamma(t)u(t)\phi(t) dt = \int_{-1}^1 f(t)\phi(t) dt.$$

En intégrant par parties on trouve

$$\int_{-1}^1 (\alpha(t)u'(t))\phi'(t) dt + \int_{-1}^1 \gamma(t)u(t)\phi(t) dt = \int_{-1}^1 f(t)\phi(t) dt.$$

On cherche ensuite à appliquer le théorème de Lax-Milgram dans  $H_0^1(\ ]-1, 1[ )$ . Pour cela on pose  $a$  la forme bilinéaire

$$a : (\phi, \psi) \in (H_0^1(\ ]-1, 1[ ))^2 \mapsto \int_{-1}^1 (\alpha(t)\phi'(t))\psi'(t) dt + \int_{-1}^1 \gamma(t)\phi(t)\psi(t) dt$$

et  $l$  la forme linéaire

$$l : \phi \in H_0^1(\ ]-1, 1[ ) \mapsto \int_{-1}^1 f(t)\phi(t) dt.$$

On a alors

$$|\langle l, \phi \rangle| \leq \int_{-1}^1 |f(t)\phi(t)| dt \leq \|f\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|\phi\|_{H^1}$$

ce qui montre que  $l$  est une forme linéaire continue sur  $H_0^1(]-1, 1[)$ . De plus on a aussi

$$\begin{aligned}
|a(\phi, \psi)| &\leq \int_{-1}^1 |\alpha(t)\phi'(t)\psi'(t)| dt + \int_{-1}^1 |\gamma(t)\phi(t)\psi(t)| dt \\
&\leq \|\alpha\|_{L^\infty} \int_{-1}^1 |\phi'(t)\psi'(t)| dt + \|\gamma\|_{L^\infty} \int_{-1}^1 |\phi(t)\psi(t)| dt \\
&\leq M(\|\phi'\|_{L^2}\|\psi'\|_{L^2} + \|\phi\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}) \\
&\leq M\sqrt{\|\phi\|_{L^2}^2 + \|\phi'\|_{L^2}^2} \sqrt{\|\psi\|_{L^2}^2 + \|\psi'\|_{L^2}^2} \\
&= M\|\phi\|_{H^1}\|\psi\|_{H^1}
\end{aligned}$$

Ce qui montre que  $a$  est une forme bilinéaire continue sur  $H_0^1(]-1, 1[)$ .

Il reste donc à montrer que  $a$  est coercive. Pour cela il suffit de voir que

$$a(\phi, \phi) = \int_{-1}^1 \alpha(t) |\phi'(t)|^2 dt + \int_{-1}^1 \gamma(t) |\phi(t)|^2 dt \geq \alpha_0 \|\phi'\|_{L^2}^2$$

et par l'inégalité de Poincaré on sait que la norme  $\phi \mapsto \|\phi'\|_{L^2}$  est équivalente à la norme usuelle de  $H_0^1(]-1, 1[)$ .

On peut à présent appliquer le théorème de Lax-Milgram pour obtenir l'existence d'une unique solution  $u$  à la formulation variationnelle du problème (5) dans  $H_0^1(]-1, 1[)$ . Il nous faut à présent montrer que cette solution est dans  $H_0^2(]-1, 1[)$ , c'est-à-dire qu'elle admet une dérivée faible seconde qui soit dans  $L^2(]-1, 1[)$ . On cherche donc une fonction  $g \in L^2(]-1, 1[)$  qui vérifie

$$-\int u\phi' = \int g\phi$$

pour toute fonction test  $\phi \in \mathcal{D}(]-1, 1[)$ .

Comme  $u$  est solution de la formulation variationnelle du problème, on sait déjà que

$$\int_{-1}^1 (\alpha(t)u'(t))\phi'(t) dt = \int_{-1}^1 (f(t) - \gamma(t)u(t))\phi(t) dt.$$

Ce qui signifie que la fonction  $\alpha u'$  admet comme dérivée faible  $\gamma u - f$  qui se trouve être dans  $L^2$ . On a donc que  $\alpha u \in H^1$ . Or on sait que  $(\alpha u)' = \alpha' u' + \alpha u''$ . Ce qui donne

$$u'' = \frac{\gamma u - \alpha' u' - f}{\alpha}$$

qui a bien un sens car  $\alpha$  est supposée strictement positive. De plus peut voir que  $u''$  est dans  $L^2$ . Ce qui montre que la solution  $u$  de (5) est dans  $H^2$ .

## 1.5 Question 5

On se donne la fonction

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

et on cherche à montrer que la forme bilinéaire

$$\langle \phi, \psi \rangle_\omega = \int_{-1}^1 \phi(x) \psi(x) \omega(x) dx$$

définit un produit scalaire sur  $\mathcal{C}^0([-1, 1])$ .

La forme bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$  est clairement symétrique et on a

$$\langle \phi, \phi \rangle_\omega = \int \frac{|\phi(x)|^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \geq 0$$

et on remarque que  $\langle \phi, \phi \rangle_\omega = 0$  si, et seulement si,  $\phi = 0$  car  $\omega$  est strictement positive sur  $] -1, 1[$ . Il reste juste à montrer que l'intégrale est bien définie. Or on a

$$|\langle \phi, \psi \rangle_\omega| \leq \|\phi\|_\infty \|\psi\|_\infty \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} dx \\ &\leq 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx < +\infty. \end{aligned}$$

Ce qui montre que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$  définit un produit scalaire.