MÉMOIRE M2

Les espaces de Hardy et leurs applications

Institut de Mathématiques de Bordeaux

Soutenu le 5 juin 2025 devant :

Karim KELLAY - Institut de Mathématiques de Bordeaux
Andreas HARTMANN - Institut de Mathématiques de Bordeaux

Auteur :
Jules GAGNAIRE

Directeur de recherche :
Karim KELLAY

Table des matières

Notations

- $\mathbb{D}$ est le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{T}$ est le cercle unité de $\mathbb{C}$.
- $D(a, R)$ est le disque ouvert de centre a et de rayon R.
- $\Gamma(a, R)$ est le cercle de centre a et de rayon R.
- $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ est l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$.
- $\widehat{f}(n)$ est le n-ième coefficient de Fourier de f définie par

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(e^{it}\right) e^{-int} dt.$$

- $S_m(f)\left(e^{it}\right) = \sum_{|n| \leq m} \widehat{f}(n) e^{int}$ est a somme partielle de la série de Fourier de f.
- $\mathrm{Fr}(K)$ désigne la frontière de K.
- $\mathcal{C}(X)$ est l'ensemble des fonctions continues sur X et à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{C}^*(X)$ le dual topologique de $\mathcal{C}(X)$.
- $\mathcal{C}_+^*(X) := \{\Lambda \in \mathcal{C}^* \mid \Lambda(f) \geq 0,\ f \in \mathcal{C}(X),\ f \geq 0\}$.
- m est la mesure de Lebesgue.
- $\mathcal{M}(X)$ l'ensemble des mesures complexes sur un espace mesurable.
- $\mathcal{M}^+(X)$ l'ensemble des mesures positives finies sur un espace mesurable.
- $\mathcal{C}_0(X)$ est l'ensemble des fonctions continues sur X et qui tendent vers 0 à l'infini.
- $H^\infty(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes bornées sur U pour la norme infini.
- $\mathcal{L}(X)$ est l'ensemble des applications linéaires continue sur X un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
- $\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda Id)$ non inversible $\}$ est le spectre de T pour $T \in \mathcal{L}(X)$.
- $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda Id)$ non injective $\}$ est le spectre ponctuel de T pour $T \in \mathcal{L}(X)$.
- $\mathrm{Lat}(T)$ est l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels fermés $\mathcal{M}$ invariants par $T \in \mathcal{L}(X)$, c'est-à-dire tels que $T\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$.
- $\ell^2 := \left\{(a_n)_{n\geq 0} : a_n \in \mathbb{C}, \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 < \infty\right\}$.

1 Introduction

Ce mémoire est consacré à l'étude de l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$, ainsi qu'à deux opérateurs qui y jouent un rôle central : l'opérateur de décalage (ou *shift*) et l'opérateur de composition.

Nous commençons par une présentation des fonctions harmoniques dans le disque unité. Nous étudions le problème de Dirichlet et donnons une représentation explicite des fonctions harmoniques à l'aide du noyau de Poisson. Cela nous permet de comprendre la convergence des intégrales de Poisson, notamment à travers la représentation de Herglotz-Riesz.

Nous introduisons ensuite la classe de Nevanlinna, une extension naturelle des espaces de Hardy. On y étudie en particulier les fonctions sans zéros, la formule de Jensen, ainsi que les produits de Blaschke, qui permettent de décrire la structure des zéros des fonctions holomorphes bornées. Nous présentons également le théorème de factorisation.

Nous considérons ensuite les espaces de Hardy. Nous introduisons les notions de fonctions intérieures et extérieures, puis nous établissons le théorème de factorisation, outil fondamental dans la démonstration du théorème de Beurling, qui donne une caractérisation complète des sous-espaces invariants pour l'opérateur de décalage.

Une application est donnée par le théorème de Müntz-Szász, qui caractérise la densité des familles $\{t^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ dans l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$. Nous introduisons également la notion de mesure de Carleson et en donnons une caractérisation précise.

Enfin, nous nous intéressons à l'opérateur de composition, pour lequel nous étudions la question de la compacité. Celle-ci est caractérisée à l'aide de la fonction de comptage de Nevanlinna, en lien avec les propriétés analytiques du symbole de composition.

2 Fonctions harmoniques

2.1 Noyau de Poisson

Rappelons quelques notations :

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\quad \text{et}\quad \Delta=4\frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar{z}}$$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit f une fonction $f:\Omega\to\mathbb{C}$. Nous disons que f est *harmonique* sur Ω si f est de classe C^2 sur Ω et si $\Delta f\equiv 0$ sur Ω. La representation des fonctions harmoniques sur le disque unité $\mathbb{D}$ est basée sur le noyau de Poisson.

Définition 2.1. Le noyau de Poisson est donné par : $P_r(t):=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}e^{int}$, $r\in[0,1[$ et $t\in\mathbb{R}$.

Pour $z=re^{i\theta}\in\mathbb{D}$ et $t\in\mathbb{R}$ nous avons

$$P\left(z,e^{it}\right):=P_r(\theta-t)=\mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)=\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}.$$

Proposition 2.2. Le noyau de Poisson est une fonction uniformément continue sur $[0,2\pi]$, 2π-périodique, positive et paire et vérifie :

1. $P_r(\theta-t)>0$
2. $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(\theta-t)dt=1$
3. Soit $t_0\in\mathbb{R}$ et $\delta>0$, nous avons $\sup\limits_{\{t\ |\ |e^{it}-e^{it_0}|\geq\delta\}} P(z,e^{it}) \underset{z\to e^{it_0}}{\longrightarrow} 0$

Démonstration.

1. Ce point est direct en utilisant la troisième écriture du noyau de Poisson.
2. Ce point est direct par interversion série intégrale.
3. Si $|z-e^{it_0}|<\delta$ alors

$$\sup_{\{t\ |\ |e^{it}-e^{it_0}|\geq\delta\}} P(z,e^{it})=\frac{1-z^2}{|e^{it}-e^{it_0}+e^{it_0}-z|^2}\leq\frac{1-z^2}{\left(|e^{it}-e^{it_0}|-|e^{it_0}-z|\right)^2}\leq\frac{1-z^2}{\left(\delta-|e^{it_0}-z|\right)^2}$$

en faisant tendre z vers e^{it_0} nous avons le résultat.

□

Proposition 2.3. Soit μ une mesure complexe finie sur $[-\pi,\pi]$. Posons

$$P(\mu)(z):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)d\mu(t),\qquad z=re^{i\theta}\in\mathbb{D},$$

alors $P(\mu)$ est une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$.

Démonstration. Écrivons μ sous la forme $\mu=\mu_1+i\mu_2$ avec μ_1 et μ_2 mesures réelles définies par $\mu_1(A)=\mathrm{Re}(\mu(A))$ et $\mu_2(A)=\mathrm{Im}(\mu(A))$ pour tout borélien A de $[-\pi,\pi]$. Ainsi $P(\mu)(z)=P(\mu_1)(z)+iP(\mu_2)(z)$. Maintenant, si ν est une mesure réelle sur $\mathbb{T}$ alors

$$P(\nu)(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)d\nu(t)=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu\left(e^{it}\right)\right),\qquad z\in\mathbb{D}.$$

Donc $P(\nu)$ est harmonique sur $\mathbb{D}$ en tant que partie réelle d'une fonction holomorphe, ce qui permet de conclure. □

2.2 Le problème de Dirichlet

Étant donnée une fonction f continue sur $\mathbb{T}$, peut-on trouver une fonction g continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, harmonique dans $\mathbb{D}$ et telle que $g_{|\mathbb{T}} = f$? Ce problème est appelé *problème de Dirichlet*. Nous avons le Théorème suivant :

Théorème 2.4. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{T}$. Alors il existe une unique fonction g continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, harmonique dans $\mathbb{D}$ et vérifiant $g_{|\mathbb{T}} = f$. De plus, pour $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, nous avons $g(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f\left(e^{it}\right) dt$. Nous noterons $P(f)(z) = g(z)$ pour $z \in \mathbb{D}$.

En particulier, si f est harmonique $\mathbb{D}$ continue sur $\bar{\mathbb{D}}$ nous avons pour $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f\left(e^{it}\right) dt.$$

Démonstration. L'unicité découle du principe du maximum en considérant la fonction $g_1 - g_2$ où g_1 et g_2 sont deux solutions du problème de Dirichlet.

Pour **l'existence**. D'après la proposition 2.3, $P(f)$ est harmonique sur $\mathbb{D}$. Posons

$$\tilde{P}(f)(z) = \begin{cases} P(f)(z) & \text{si } |z| < 1 \\ f(z) & \text{si } |z| = 1 \end{cases}$$

Montrons la continuité de $\tilde{P}(f)$ sur $\overline{\mathbb{D}}$. Pour cela nous allons montrer que $\tilde{P}(f)$ est la limite uniforme de fonctions continues sur $\overline{\mathbb{D}}$. Pour toute fonction continue f sur $\mathbb{T}$ nous avons :

$$|\tilde{P}(f)(z)| \leq \|f\|_\infty, \qquad |z| \leq 1. \tag{*}$$

Pour $p \in \mathbb{Z}$, considérons la fonction continue e_p de $\mathbb{T}$ donnée par $e_p\left(e^{it}\right) = e^{ipt}$. Soit la fonction $g(z) = z^p$ sur $\overline{\mathbb{D}}$ si $p \geq 0$ et $g(z) = \bar{z}^{-p}$ si $p < 0$. Pour $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, on a

$$\tilde{P}\left(e_p\right)(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in(\theta - t)}\right) e^{ipt} dt = r^{|p|} e^{ip\theta} = g(z)$$

Ainsi $\tilde{P}\left(e_p\right)$ est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

Soit $p_k = \sum_{|n|\leq k} c_n e_n$ un polynôme trigonométrique. Nous avons : $\tilde{P}(p_k) = \sum_{|n|\leq k} c_n \tilde{P}\left(e_n\right)$ et donc $\tilde{P}(p_k)$ est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$. D'après le Théorème de Fejér, il existe une suite de polynômes trigonométriques $(p_m)_{m\geq 1}$ telle que $\lim\limits_{m\to\infty} \|f - p_m\|_\infty = 0$. Notons que

$$|\tilde{P}(f)(z) - \tilde{P}\left(p_m\right)(z)| = |\tilde{P}\left(f - p_m\right)(z)| \leq \|f - p_m\|_\infty \to 0,$$

Donc $\tilde{P}(f)$ est limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur $\mathbb{T}$ et donc continue □

Nous pouvons également résoudre le problème de Dirichlet sur un disque quelconque de $\mathbb{C}$, nous noterons par $D(a, R)$ le disque de centre a et de rayon $R > 0$ et par $\Gamma(a, R) = \partial D(a, R)$ le cercle centre a et de rayon R.

Corollaire 2.5. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $R > 0$. Pour toute fonction f continue sur $\partial D(a, R)$, il existe une unique fonction g continue sur le disque fermé $\overline{D(a, R)}$, harmonique sur $D(a, R)$ et telle que $g_{|\partial D(a,R)} = f$. De plus, nous avons :

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{r/R}(\theta - t) f\left(a + Re^{it}\right) dt, \qquad z = a + re^{i\theta} \in D(a, R)$$

Remarque. Soit f une fonction continue sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Nous disons que f vérifie la *propriété de la moyenne faible* si pour tout $a \in \Omega$, il existe une suite $(r_n)_{n\geq 1}$ de réels positifs tels que $\overline{D\,(a, r_n)} \subset \Omega$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ et

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a + r_n e^{it}\right) dt, \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Le corollaire 2.5 permet de montrer que "f vérifie la propriété de la moyenne faible" implique que "f est harmonique", ainsi nous en déduisons que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. La fonction f est harmonique sur Ω.
2. La fonction f vérifie la propriété de la moyenne faible sur Ω.
3. La fonction f vérifie la propriété de la moyenne sur Ω.

2.3 Bijection entre les mesures complexes sur $\mathbb{T}$ et fonctions harmoniques

Soit $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ l'ensemble de mesure complexe finie sur $\mathbb{T}$ et soit $\mathcal{M}^+(\mathbb{T})$ l'ensemble des mesures positive finie sur $\mathbb{T}$. Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$, nous noterons par $|\mu|$ la variation totale de μ et $\|\mu\| = \mu(\mathbb{T})$. Soit $\mathcal{H}^1$, l'espace de Hardy de fonction harmonique, l'ensemble des fonctions harmoniques f sur $\mathbb{D}$ telles que

$$\rho(f) := \sup_{0\leq s<1} \int_0^{2\pi} \left|f\left(se^{i\theta}\right)\right| d\theta < \infty.$$

Théorème 2.6. L' application $T : \mathcal{M}(\mathbb{T}) \to \mathcal{H}^1$, donnée par $T(\mu) = P(\mu)$ est une bijection. De plus,

$$\rho(P(\mu)) = \|\mu\| \quad \text{pour} \quad \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}) \tag{1}$$

$$\int_{\mathbb{T}} g d\mu = \lim_{s\to 1^-} \int_0^{2\pi} P(\mu)\left(se^{it}\right) g\left(e^{it}\right) dt, \qquad g \in \mathcal{C}(\mathbb{T}). \tag{2}$$

Démonstration. Montrons d'abord (2). Soit $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. D'après le théorème 2.4, il existe une unique fonction G continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, harmonique dans $\mathbb{D}$ telle que $G_{|\mathbb{T}} = g$. Soit $G_s\left(e^{i\theta}\right) := G\left(se^{i\theta}\right)$, $s < 1$. Puisque G est continue sur le compact $\overline{\mathbb{D}}$, G est uniformément continue sur $\overline{\mathbb{D}}$. Donc pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout z_1, z_2 dans $\overline{\mathbb{D}}$ vérifiant $|z_1 - z_2| < \eta$ nous ayons $|G(z_1) - G(z_2)| < \varepsilon$. En particulier, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour $1 > s > 1 - \eta$,

$$\left|G_s\left(e^{i\theta}\right) - g\left(e^{i\theta}\right)\right| = \mid G\left(se^{i\theta}\right) - G\left(e^{i\theta}\right) \mid < \varepsilon,$$

et donc $\lim_{s\to 1^-} \|G_s - g\|_\infty = 0$. Puisque

$$G\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) g\left(e^{it}\right) dt,$$

par Fubini, nous obtenons

$$\int_0^{2\pi} g\left(e^{i\theta}\right) d\mu(\theta) = \lim_{s\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\left(e^{it}\right)\left(\int_0^{2\pi} P_s(\theta - t) d\mu(t)\right) dt = \lim_{s\to 1^-}\int_0^{2\pi} g\left(e^{it}\right) P(\mu)\left(se^{it}\right) dt$$

Ce qui termine la preuve de (2).

Montrons (1) Puisque μ est une mesure complexe sur $\mathbb{T}$, la proposition 2.3 implique que $P(\mu)$ est une fonction harmonique dans $\mathbb{D}$. D'après la décomposition polaire (théorème 9.15), il existe

h mesurable telle que $d\mu(t) = h(t)d|\mu|(t)$ avec $|h(t)| = 1$, $t \in \mathbb{T}$. Nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \left|P(\mu)\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)d\mu(t)\right| d\theta \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)d|\mu|(t)\right)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)d\theta\right)d|\mu|(t) = |\mu|(\mathbb{T}) = \|\mu\|.\end{aligned}$$

Donc

$$\rho(P(\mu)) \le \mu(\mathbb{T}) = \|\mu\| < \infty$$

et ainsi $P(\mu) \in \mathcal{H}^\infty$. Le théorème de représentation de Riesz pour les mesures (théorème 9.23) nous donne que $\|\mu\| = \|L_c(\mu)\|$ où $L_c(\mu)(f) = \int_{\mathbb{T}} f d\mu$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Ainsi

$$\|\mu\| = \sup\left\{\left|\int_0^{2\pi} g\left(e^{i\theta}\right)d\mu(\theta)\right| : g \in \mathcal{C}(\mathbb{T}), \|g\|_\infty \le 1\right\}.$$

D'après (2)

$$\|\mu\| \le \limsup_{s\to 1^-}\int_0^{2\pi}\left|P(\mu)\left(se^{it}\right)\right| dt \le \rho(P(\mu)).$$

Finalement, en utilisant la première inégalité nous concluons que $\rho(P(\mu)) = \|\mu\|$ et (1) est démontrée.

Montrons maintenant que T est une bijection. Par définition, l'application T est linéaire. D'autre part l'égalité $\rho(P(\mu)) = \|\mu\|$ nous garantit l'injectivité de T. Il nous reste donc à vérifier que toute fonction $f \in \mathcal{H}^1$ est de la forme $f = P(\mu)$ pour une certaine mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$.

Fixons $f \in \mathcal{H}^1$ non identiquement nulle. Pour $0 \le s < 1$, soit la forme linéaire

$$\begin{array}{rcl} L_s : \mathcal{C}(\mathbb{T}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ g & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{2\pi} g\left(e^{it}\right) f\left(se^{it}\right) dt \end{array}.$$

La fonction $u \longmapsto f(su)$ est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, harmonique dans $\mathbb{D}$, d'après le théorème 2.4 nous avons

$$\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t) f\left(se^{it}\right) dt = 2\pi f\left(sre^{i\theta}\right) = L_s\left(\varphi_{r,\theta}\right), \quad \text{où} \quad \varphi_{r,\theta}\left(e^{it}\right) := P_r(\theta - t).$$

Par continuité de f sur $\overline{D(0,r)}$ nous obtenons $\lim\limits_{s\to 1^-} L_s\left(\varphi_{r,\theta}\right) = 2\pi f\left(re^{i\theta}\right)$.

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ engendré par $\{\varphi_{r,\theta} : 0 \le r < 1, \theta \in \mathbb{R}\}$. Alors E est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. En effet, soit $\ell \in E^\perp$, d'après le théorème de représentation de Riesz pour les mesures ℓ est définie par une mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$. Nous avons

$$0 = \int_0^{2\pi} \varphi_{r,\theta}\left(e^{it}\right) d\mu(t) = \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t) = P(\mu)(re^{i\theta})$$

Donc $P(\mu) = 0$, et d'après (1) $\rho(\mu) = \|\mu\| = 0$. Donc $\ell = 0$ et donc E est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, d'après le théorème de Hahn Banach (théorème 9.3).

Pour tout $g \in E$, $\lim_{s\to 1^-} L_s(g)$ existe. Nous allons ensuite montrer que $\lim_{s\to 1^-} L_s(h)$ existe pour toute fonction $h \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Nous avons

$$\|L_s\| = \sup\left\{\left|\int_0^{2\pi} f\left(se^{it}\right) g\left(e^{it}\right) dt\right| : \|g\|_\infty \le 1\right\} \le \int_0^{2\pi}\left|f\left(se^{it}\right)\right| dt \le \rho(f) < \infty \qquad (*)$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $h \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Puisque E est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, il existe $g \in E$ telle que $\|g-h\|_\infty \leq \varepsilon/2\rho(f)$. De plus, puisque $L(g) := \lim_{s\to 1^-} L_s(g)$ existe. Il est facile de voir alors que la suite $(L_s)_{0\leq s<1}$ est une suite de Cauchy. Puisque l'ensemble des applications linéaires de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ dans $\mathbb{C}$ est complet, $(L_s)_{0\leq s<1}$ est convergente. Notons L sa limite qui, d'après $(*)$, nous avons $\|L\| \leq \rho(f)$ et d'après le théorème de représentation de Riesz théorème 9.23, il existe alors une mesure complexe $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ telle que :

$$L(h) = L_c(\mu)(h) = \int_0^{2\pi} h\left(e^{it}\right) d\mu(t), \qquad h \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$$

Nous avons

$$P(\mu)\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)d\mu(t) = \frac{1}{2\pi}L\left(\varphi_{r,\theta}\right) = \frac{1}{2\pi}\lim_{s\to 1^-} L_s\left(\varphi_{r,\theta}\right) = f\left(re^{i\theta}\right)$$

Ainsi $P(\mu) = f$ ce qui conclut la démonstration. □

Corollaire 2.7. L'application $\mu \longmapsto P(\mu)$ est une isométrie bijective de $\mathcal{M}^+(\mathbb{T})$ dans l'ensemble des fonctions harmoniques positives sur $\mathbb{D}$.

Démonstration. Soit f soit une fonction harmonique positive sur $\mathbb{D}$, d'après la propriété de la moyenne

$$\rho(f) := \sup_{0\leq s<1}\int_0^{2\pi}\left|f\left(se^{i\theta}\right)\right| d\theta = 2\pi f(0) < \infty,$$

ce qui montre que $f \in \mathcal{H}^1$. D'après le théorème précédent, il existe $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ telle que $f = P(\mu)$ et pour toute fonction h continue sur $\mathbb{T}$ nous avons

$$\int_0^{2\pi} h\left(e^{it}\right) d\mu(t) = \lim_{s\to 1^-}\int_0^{2\pi} h\left(e^{it}\right) f\left(se^{it}\right) dt.$$

Donc, si h est une fonction continue positive sur $\mathbb{T}$, $\int_0^{2\pi} h\left(e^{it}\right) d\mu(t) \geq 0$. Ceci montre également que l'application linéaire

$$\begin{array}{rcc} \ell : \mathcal{C}_+(\mathbb{T}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ h & \longmapsto & \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h\left(e^{it}\right) d\mu(t) \end{array}$$

est continue, $\|\ell\| = f(0)$ et positive. D'après le théorème 9.23 de représentation de Riesz pour les mesures, μ est une mesure positive finie. □

2.4 Théorème de représentation de Herglotz-Riesz

Théorème 2.8. (Représentation de Herglotz-Riesz) Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ telle que $\mathrm{Re}(f) \geq 0$, alors il existe $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{T})$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $z \in \mathbb{D}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t) + ic.$$

Démonstration. Soit f holomorphe sur $\mathbb{D}$ telle que $\mathrm{Re}(f) \geq 0$ alors $\mathrm{Re}(f)$ est harmonique. Posons $h := \mathrm{Re}(f)$, d'après le corollaire 2.7, il existe une mesure μ dans $\mathcal{M}^+(\mathbb{T})$ telle que

$$h(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)d\mu(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)d\mu(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t).$$

les fonctions f et h ont la même partie réelle, d'après les équations de Cauchy-Riemann, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t) + ic.$$

□

2.5 Limite de l'intégrale de Poisson

2.5.1 Limite radiale

Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$, la dérivée supérieure et inférieure de μ sont données par

$$\bar{D}(\mu)(\theta) := \limsup_{s\to 0} \frac{\mu(]\theta - s, \theta + s[)}{2s},$$

$$\underline{D}(\mu)(\theta) := \liminf_{s\to 0} \frac{\mu(]\theta - s, \theta + s[)}{2s}.$$

Proposition 2.9. Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ à valeurs réelles. Pour $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$ nous avons :

$$\limsup_{r\to 1^-} P(\mu)\left(re^{i\theta}\right) \leq \bar{D}(\mu)(\theta).$$

Démonstration. Soit $\delta \in]0, \pi[$.

$$P(\mu)\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi\geq|\theta-t|\geq\delta} P_r(\theta - t)d\mu(t) + \frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-t|<\delta} P_r(\theta - t)d\mu(t).$$

Si $\pi \geq |\theta - t| \geq \delta$

$$P_r(\theta - t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} \leq \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\delta + r^2} = P_r(\delta).$$

Donc

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\pi\geq|\theta-t|\geq\delta} P_r(\theta - t)d\mu(t)\right| \leq \frac{P_r(\delta)}{2\pi}\int_{\pi\geq|\theta-t|\geq\delta} d|\mu|(t) \leq \frac{P_r(\delta)}{2\pi}\|\mu\|.$$

Puisque $\delta \in]0, \pi[$, nous avons

$$\lim_{r\to 1^-} P_r(\delta) = \lim_{r\to 1^-} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\delta + r^2} = 0.$$

Si $|\theta - t| < \delta$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-t|<\delta} P_r(\theta - t)d\mu(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta+\delta}^{\theta-\delta} P_r(\theta - t)d\mu(t).$$

Considérons le domaine Δ de $\mathbb{C}$ défini par $\Delta = \left\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta - s < t < \theta + s,\ 0 < s < \delta\right\}$.

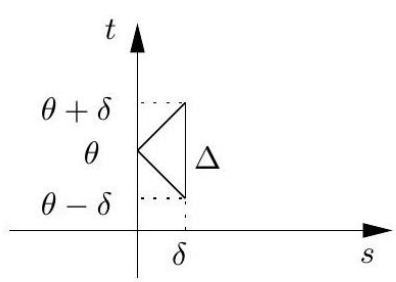

FIGURE 1 – Domaine d'intégration

Soit

$$I = \iint_\Delta P_r'(s)dsd\mu(t).$$

Puisque la fonction P_r' est continue par le théorème de Fubini nous avons

$$I = \int_0^\delta \left(\int_{\theta-s}^{\theta+s} d\mu(t) \right) P_r'(s)ds = \int_0^\delta \mu(]\theta-s,\theta+s[)P_r'(s)ds.$$

D'autre part :

$$I = \int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} \left(\int_{|\theta-t|}^{\delta} P_r'(s)ds \right) d\mu(t) = \int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} \left(P_r(\delta) - P_r(\theta-t)\right) d\mu(t).$$

D'où

$$\int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} \left(P_r(\delta) - P_r(\theta-t)\right) d\mu(t) = \int_0^\delta \mu(]\theta-s,\theta+s[)P_r'(s)ds,$$

ainsi

$$\begin{aligned}\int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} P_r(\theta-t)d\mu(t) &= \int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} P_r(\delta)d\mu(t) + \int_0^\delta \mu(]\theta-s,\theta+s[)\left(-P_r'(s)\right)ds \\ &= P_r(\delta)\mu(]\theta-\delta,\theta+\delta[) + \int_0^\delta \mu(]\theta-s,\theta+s[)\left(-P_r'(s)\right)ds.\end{aligned}$$

Remarquons que $-P_r'(s) \geq 0$ pour $s \in [0,\delta]$ puisque P_r est décroissante sur $[0,\delta]$ (car $\delta \in]0,\pi[$). Soit $A > \bar{D}(\mu)(\theta)$. Si δ est assez petit, nous avons pour tout $s \in]0,\delta]$, $\mu(]\theta-s,\theta+s[) < 2sA$. Ce qui donne

$$\int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} P_r(\theta-t)d\mu(t) \leq 2A\delta P_r(\delta) + \int_0^\delta 2As\left(-P_r'(s)\right)ds = 2A\left(\delta P_r(\delta) + \int_0^\delta -sP_r'(s)ds\right).$$

Par intégration par partie nous avons

$$\delta P_r(\delta) + \int_0^\delta -sP_r'(s)ds = \delta P_r(\delta) + [-sP_r(s)]_0^\delta + \int_0^\delta P_r(s)ds = \int_0^\delta P_r(s)ds \leq \int_0^\pi P_r(s)ds = \pi$$

Ainsi, pour δ assez petit et puisque $\int_{|\theta-t|<\delta} P_r(\theta-t)d\mu(t) \leq 2\pi A$, nous avons pour tout $A > \bar{D}(\mu)(\theta)$, $P(\mu)\left(re^{i\theta}\right) \leq A + P_r(\delta)\|\mu\|/2\pi$. Puisque $\lim_{r\to1^-} P_r(\delta) = 0$,

$$\limsup_{r\to1^-} P(\mu)\left(re^{i\theta}\right) \leq \bar{D}(\mu).$$

□

Rappelons que d'après la décomposition de Lebesgue, si $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$, alors $d\mu = d\nu + \varphi\left(e^{it}\right)dt$ où ν est une mesure singulière par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$ (noté $\nu \perp m$ où m est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$) et $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$. La fonction φ est appelée la dérivée de Radon-Nikodym de μ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Nous sommes en mesure d'énoncer le théorème sur la limite radiale de l'intégrale de Poisson

Théorème 2.10. Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$. Alors, la limite radiale du noyau de Poisson $P(\mu)$

$$\varphi\left(e^{it}\right) := \lim_{r\to1^-} P(\mu)(re^{it})$$

existe presque partout. De plus $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$ et φ est la dérivée de Radon-Nikodym de μ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Démonstration. Si μ est à valeurs réelles. Puisque $P(-\mu) = -P(\mu)$,

$$\limsup_{r\to 1^-} -P(\mu)\left(re^{it}\right) = -\liminf_{r\to 1^-} P(\mu)\left(re^{it}\right)$$

et $\bar{D}(-\mu) = -\underline{D}(\mu)$ d'après la proposition 2.9 appliqué à $-\mu$, nous avons

$$\underline{D}(\mu)(\theta) \leq \liminf_{r\to 1^-} P(\mu)\left(re^{it}\right) \leq \limsup_{r\to 1^-} P(\mu)\left(re^{it}\right) \leq \bar{D}(\mu)(\theta).$$

D'après le théorème 9.29, $\underline{D}(\mu)(\theta) = \bar{D}(\mu)(\theta) = D(\mu)(\theta)$ presque partout sur $\mathbb{T}$ et $D(\mu)$ coïncide avec la dérivée de Radon-Nikodym de μ par rapport à la mesure de Lebesgue. Ainsi nous déduisons le théorème lorsque μ est réélle.

Lorsque μ est une mesure complexe, il suffit d'écrire $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ avec μ_1 et μ_2 mesures à valeurs réelles. □

2.5.2 Application à la description de certaines fonctions harmoniques

En combinant le corollaire 2.7, le théorème 2.6 et le théorème 2.10 nous pouvons obtenir une description de fonctions harmoniques de $\mathcal{H}^1$.

Corollaire 2.11. Soit F une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$ telle que $F \in \mathcal{H}^1$, Alors la limite radiale de F

$$F^*\left(e^{it}\right) := \lim_{r\to 1^-} F\left(re^{it}\right)$$

existe presque partout sur $\mathbb{T}$ et $F^* \in L^1(\mathbb{T})$. De plus il existe une mesure finie ν singulière sur $\mathbb{T}$ telle que

$$F = P\left(F^*\right) + P(\nu)$$

avec $\lim_{r\to 1^-} P(\nu)\left(re^{it}\right) = 0$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$.

2.5.3 Limite non tangentielle

Nous allons désormais nous intéresser à la limite non tangentielle de l'intégrale de Poisson. Soit $c > 1$ et soit S_c le secteur dans $\mathbb{D}$ de sommet $e^{i\tau}$, (voir figure ci-dessous)

$$S_c = \{z \in \mathbb{D} : |z - e^{i\tau}| < c(1 - |z|)\}$$

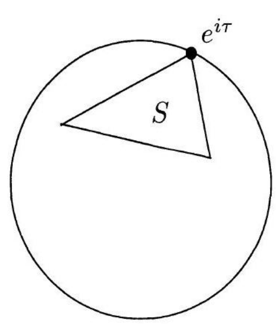

FIGURE 2 – Exemple d'un secteur triangulaire

Définition 2.12. Soit $h(z)$ une fonction à valeurs complexes définie sur $\mathbb{D}$, et soit $e^{i\tau} \in \mathbb{T}$. La *limite non tangentielle* de h en e^{it} est donnée par $\lim_{S_c \ni z \to e^{i\tau}} h(z)$.

Nous disons que $\lim_{z\to e^{it}} h(z) = f\left(e^{it}\right)$ *non tangentiellement p.p.* s'il existe un borélien $E \subseteq \mathbb{T}$ de mesure de Lebesgue nul tel que $\lim_{z\to e^{it}} h(z) = f\left(e^{it}\right)$ non tangentiellement pour tout $e^{it} \in \mathbb{T}\backslash E$.

Théorème 2.13. (Fatou) Soit $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{T})$, notons $d\mu = fdm + d\mu_s$ la décomposition de Lebesgue de μ par rapport à m la mesure de Lebesgue. Soit

$$h(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} P(z, e^{it})d\mu(e^{it}) \quad z \in \mathbb{T},$$

nous avons $\lim_{z\to e^{it}} h(z) = f(e^{it})$ non tangentiellement p.s.

Démonstration. Soit $\alpha(t) := \mu\left(\left\{e^{i\theta} \mid \theta \in [0,t[\right\}\right)$ la fonction de répartition de μ, nous avons d'après la proposition 9.28

$$\alpha'(t) = \lim_{s\to 0}\frac{\alpha(t+s)-\alpha(s)}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{\mu\left(\left\{e^{i\theta} \mid \theta \in [s,t+s[\right\}\right)}{s} = f\left(e^{it}\right) \text{ pour presque tout } t.$$

Ainsi pour prouver le résultat, il suffit de montrer que $\lim_{z\to 1} h(z) = \alpha'(t)$ non tangentiellement p.s.

Sans perte de généralité, supposons que $t = 0$ et $\alpha(0) = 0$. Par définition nous avons

$$\alpha'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{\alpha(t)}{t}$$

et nous devons montrer que $h(z) \to \alpha'(0)$ de non tangentielle lorsque $z \to 1$.

Fixons un secteur dans le disque unité avec sommet en 1 :

$$S := \{z := x + iy \mid |y| < K(1-x), c < x < 1\}$$

où $0 < K < 1$ et $0 < c < 1$ assez proche de 1 que nous préciserons plus tard.

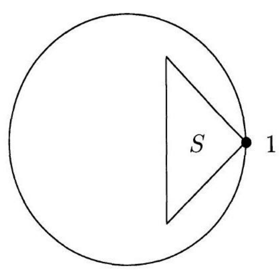

FIGURE 3 – Ensemble S

Soit $\varepsilon > 0$. Nous allons montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour $z \in S$ et $|z-1| < \delta$

$$|h(z) - \alpha'(0)| < \varepsilon.$$

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, nous avons $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} fd\mu = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})d\alpha(t)$, donc

$$\begin{aligned}2\pi h(z) - 2\pi\alpha'(0) &= \int_{-\pi}^{\pi} P\left(z, e^{it}\right) d\left(\alpha(t) - \alpha'(0)t\right)\\ &= \left[P\left(z, e^{it}\right)\left(\alpha(t) - \alpha'(0)t\right)\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\left(\alpha(t) - \alpha'(0)t\right)\frac{\partial}{\partial t}P\left(z, e^{it}\right)dt\\ &= \frac{1-|z|^2}{|1+z|^2}\left(\alpha(\pi) - \alpha(-\pi) - 2\pi\alpha'(0)\right) - \int_{-\pi}^{\pi}\left(\alpha(t) - \alpha'(0)t\right)\frac{\partial}{\partial t}P\left(z, e^{it}\right)dt.\end{aligned}$$

Prenons un $\eta \in]0,\pi[$ tel que $\left|\frac{\alpha(t)}{t} - \alpha'(0)\right| < \varepsilon/M$, où $M := 3(2\pi + 16K)$. On écrit

$$\begin{aligned}2\pi h(z) - 2\pi\alpha'(0) =& \frac{1-|z|^2}{|1+z|^2}\left(\alpha(\pi) - \alpha(-\pi) - 2\pi\alpha'(0)\right) - \int_{|t|\le\eta} \left(\alpha(t) - \alpha'(0)t\right)\frac{\partial}{\partial t}P\left(z, e^{it}\right)dt\\ &- \int_{\eta<|t|\le\pi}\left(\alpha(t) - \alpha'(0)t\right)\frac{\partial}{\partial t}P\left(z, e^{it}\right)dt\\ :=& I_1(z) + I_2(z) + I_3(z).\end{aligned}$$

Il est clair que $I_1(z)$ tend vers 0 lorsque $z \to 1$. Aussi $I_3(z)$ tend vers 0 lorsque $z \to 1$. En effet

$$\lim_{z\to1}\frac{\partial}{\partial t}P\left(z, e^{it}\right) = \lim_{z\to1}\mathrm{Re}\,\frac{-2ize^{it}}{\left(e^{it}-z\right)^2} = \lim_{z\to1}\mathrm{Re}\,\frac{-2ize^{-it} - 2ize^{it}\bar{z}^2 + 4i|z|}{\left|e^{it}-z\right|^4} = 0$$

Montrons maintenant que $I_2(z)$ tend vers 0 non tangentiellement. Soit $z = re^{i\theta} \in S$, on a

$$|I_2(z)| = \left|\int_{-\eta}^{\eta}\left[\frac{\alpha(t)}{t} - \alpha'(0)\right]t\frac{\partial}{\partial t}P\left(z, e^{it}\right)dt\right| \le \frac{\varepsilon}{M}\int_{-\eta}^{\eta}\left|t\frac{\partial}{\partial t}P\left(z, e^{it}\right)\right|dt.$$

Nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t}P\left(z, e^{it}\right) = \frac{-\left(1-r^2\right)2r\sin(t-\theta)}{\left(1-2r\cos(\theta-t)+r^2\right)^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned}|I_2(z)| &\le \frac{\varepsilon}{M}\int_{-\eta}^{\eta}\left|\frac{t\left(1-r^2\right)2r\sin(t-\theta)}{\left(1-2r\cos(\theta-t)+r^2\right)^2}\right|dt\\ &= \frac{\varepsilon}{M}\int_{-(\eta+\theta)}^{\eta+\theta}\left|(u+\theta)\frac{\left(1-r^2\right)2r\sin(u)}{\left(1-2r\cos(u)+r^2\right)^2}\right|du.\end{aligned}$$

Pour c proche de 1, θ peut être prise assez petit de sorte à ce que $[-(\eta+\theta), \eta+\theta] \subset [-\pi,\pi]$. Donc

$$\begin{aligned}|I_2(z)| &\le \frac{\varepsilon}{M}\int_{-\pi}^{\pi}\left|(t+\theta)\frac{\left(1-r^2\right)2r\sin(t)}{\left(1-2r\cos(t)+r^2\right)^2}\right|dt\\ &\le \frac{\varepsilon}{M}\int_{-\pi}^{\pi}\left|t\frac{\partial}{\partial t}P\left(r, e^{it}\right)\right|dt + \frac{\varepsilon}{M}|\theta|\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\partial}{\partial t}P\left(r, e^{it}\right)\right|dt.\end{aligned}$$

D'une part, puisque $t \mapsto -t\sin(t)$ est négatif sur $[-\pi,\pi]$ nous avons

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|t\frac{\partial}{\partial t}P\left(r, e^{it}\right)\right|dt = \int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{-t\left(1-r^2\right)2r\sin(t)}{\left(1-2r\cos(t)+r^2\right)^2}\right|dt = -\int_{-\pi}^{\pi}t\frac{\partial}{\partial t}P\left(r, e^{it}\right)dt = -2\pi\frac{1-r}{1+r} + 2\pi < 2\pi.$$

D'autre part, par parité de $t \mapsto \left|\frac{\partial}{\partial t}P\left(r, e^{it}\right)\right|$ et positivité de sinus sur $[0,\pi]$ nous avons

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\partial}{\partial t}P\left(r, e^{it}\right)\right|dt = -2\int_{0}^{\pi}\frac{\partial}{\partial t}P\left(r, e^{it}\right)dt = \frac{8r}{1-r^2}.$$

Donc

$$|I_2(z)| \le \frac{\varepsilon}{M}\left(2\pi + \frac{8r|\theta|}{1-r^2}\right).$$

Pour $z = re^{i\theta} \in S$, nous avons $K(1 - r\cos\theta) > |r\sin\theta|$ donc

$$K(1-r) > r|\sin\theta| - Kr(1-\cos\theta) = r|\theta|\left(\frac{\sin\theta}{\theta} - K\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}|\theta|\right).$$

Les fonctions $\theta \mapsto \dfrac{\sin\theta}{\theta}$ et $\theta \mapsto K\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}|\theta|$ sont continues en 0. Pour $z \in S$ proche de 1

$$\frac{\sin\theta}{\theta} - K\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}|\theta| - 1 < \frac{1}{2}, \quad \text{donc} \quad \frac{\sin\theta}{\theta} - K\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}|\theta| > \frac{1}{2}.$$

Et donc

$$K(1-r) > \frac{r|\theta|}{2} \quad \text{d'où} \quad 16K > \frac{8r|\theta|}{1-r}.$$

Finalement nous obtenons

$$|I_2(z)| < \frac{\varepsilon}{M}(2\pi + 16K) = \frac{\varepsilon}{3}$$

Donc $|I_2(z)|$ tend vers 0 non tangentiellement, ce qui conclut la démonstration. $\square$

3 La classe de Nevanlinna

Soit $\log^+(s) := \sup(\log s, 0)$ et $\log^-(s) := \sup(-\log s, 0)$. Nous avons $\log(s) = \log^+(s) - \log^-(s)$ et $|\log(s)| = \log^+(s) + \log^-(s)$.

3.1 Définition de la classe de Nevanlinna et description des fonctions sans zéros

L'ensemble des fonctions holomorphes bornées sur le disque est noté par $H^\infty(\mathbb{D})$, c'est une espace de Banach muni de la norme uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|.$$

Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$. Nous noterons par f^* la limite radiale de f, i.e.

$$f^*(\zeta) := \lim_{r\to 1^-} f(r\zeta), \qquad \zeta \in \mathbb{T}.$$

Définition 3.1. La *classe de Nevanlinna* $\mathcal{N}$ est définie par :

$$\mathcal{N} := \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) \mid \sup_{0\le r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left| f\left(re^{it}\right)\right| dt < \infty \right\}.$$

Théorème 3.2. Soit $f \in \mathcal{N}$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{D}$. Alors ils existent une mesure réelle μ sur $\mathbb{T}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$f(z) = e^{i\lambda} \exp \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\mu(t), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Démonstration. Puisque $\mathbb{D}$ est simplement connexe et que f ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$ il existe $g \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ vérifiant $f = e^g$ et ainsi $\log|f| = \mathrm{Re}(g)$. Donc $\log|f|$ est harmonique . D'après la formule de la moyenne, pour $0 \le r < 1$, nous avons

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log\left| f\left(re^{it}\right)\right| dt = 2\pi \log|f(0)|.$$

Par définition de $\mathcal{N}$ nous avons

$$\sup_{0\le r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left| f\left(re^{it}\right)\right| dt < \infty \quad \text{et} \quad \sup_{0\le r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^- \left| f\left(re^{it}\right)\right| dt < \infty.$$

De plus $|\log(s)| = \log^+(s) + \log^-(s)$, donc

$$\sup_{0\le r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |\log|f\left(re^{it}\right)||dt < \infty.$$

D'après le théorème 2.6, il existe une mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ telle que $\log|f| = P(\mu)$ sur $\mathbb{D}$. Puisque $\log|f|$ est réelle, nous en déduisons que μ est réelle. Donc pour $z \in \mathbb{D}$

$$\operatorname{Re}(g(z)) = P(\mu)(z) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t)\right)$$

Par les équations de Cauchy-Riemann il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t) + i\lambda,$$

ce qui permet de conclure. □

Corollaire 3.3. Soit $f \in \mathcal{N}$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{D}$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et une mesure (finie) réelle μ sur $\mathbb{T}$ dont les variations positives et négatives μ^+ et μ^- vérifient :

$$f(z) = e^{i\lambda}\exp\left(\frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu^-(t)\right)\exp\left(\frac{+1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu^+(t)\right).$$

En particulier f est le quotient de deux fonctions holomorphes bornées sur $\mathbb{D}$.

Démonstration. D'après le théorème précédent (théorème 3.2) nous avons

$$f(z) = e^{i\lambda}\exp\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t),$$

d'après la décomposition de Jordan (théorème 9.10) et d'après la décomposition de Hahn (théorème 9.17), $\mu = \mu^+ - \mu^-$ avec μ^+ et μ^- mesures positives telles que $\mu^+ \perp \mu^-$, ce qui permet d'obtenir l'écriture de f. Remarquons que si ν est une mesure positive, nous avons :

$$\left|\exp\frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)\right| = \exp\operatorname{Re}\left(\frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)\right) = e^{-P(\nu)(z)} \leq 1,$$

car si $\nu \geq 0, -P(\nu)(z) \leq 0$. La fonction $f \in \mathcal{N}$, donc est bien le quotient de deux fonctions holomorphes bornées sur $\mathbb{D}$. □

Lemme 3.4. Soit $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ alors sa limite radiale f^* existe p.p sur $\mathbb{T}$ et $f^* \in L^\infty(\mathbb{T})$.

Démonstration. Soit $f \in H^\infty(\mathbb{D})$. Nous avons

$$\sup_{0\leq r<1}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(re^{it}\right)\right|dt \leq 2\pi\|f\|_\infty.$$

De plus f est harmonique sur $\mathbb{D}$. D'après le corollaire 2.11, f^* existe p.p sur $\mathbb{T}$ et $f^* \in L^1(\mathbb{T})$. De plus $\left|f^*\left(e^{it}\right)\right| \leq \|f\|_\infty$ p.p. et donc $f^* \in L^\infty(\mathbb{T})$. □

Théorème 3.5. Soit $f \in \mathcal{N}$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{D}$. Alors, f^* existe p.p sur $\mathbb{T}$ et $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$. De plus il existe une mesure réelle singulière μ et $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$f(z) = e^{i\lambda}\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\left|f^*\left(e^{it}\right)\right|dt\right)\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t)\right).$$

Démonstration. D'après le corollaire 3.3, il existe $g, h \in H^\infty(\mathbb{D})$ avec $g(z) \neq 0$ et $h(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, $\|g\|_\infty \leq 1, \|h\|_\infty \leq 1$ et $f = g/h$. Ainsi

$$\sup_{0\leq r<1}\int_{-\pi}^{\pi}\left|g\left(re^{it}\right)\right|dt \leq 2\pi \quad \text{et} \quad \sup_{0\leq r<1}\int_{-\pi}^{\pi}\left|h\left(re^{it}\right)\right|dt \leq 2\pi.$$

D'après le lemme 3.4, g^* et h^* existent p.p. Puisque $\mathbb{D}$ est simplement connexe et h ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$ il existe une fonction $\ell \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ telle que $h = e^{\ell}$. Puisque $\|h\|_\infty \leq 1$, la fonction $\mathrm{Re}(\ell) = \log|h|$ est une fonction harmonique négative sur $\mathbb{D}$. En considérant la fonction $-\log|h|$, nous avons d'après le corollaire 2.11 que $\varphi\left(e^{it}\right) := \lim\limits_{r\to 1^-} \log\left|h\left(re^{it}\right)\right|$ existe pour presque tout $t \in [0, 2\pi]$. Il existe donc un borélien A de $[0, 2\pi]$ de mesure de Lebesgue nulle tel que pour tout $t \in [0, 2\pi]\backslash A$, nous ayons simultanément :

$$\lim_{r\to 1^-} \log\left|h\left(re^{it}\right)\right| = \varphi\left(e^{it}\right) \text{ existe et que } \lim_{r\to 1^-} h\left(re^{it}\right) = h^*\left(e^{it}\right) \text{ existe.}$$

Par conséquent, pour $t \in [0, 2\pi]\backslash A$, nous avons $\left|h^*\left(e^{it}\right)\right| \neq 0$. Si B est un borélien de mesure de Lebesgue nulle telle que $g^*\left(e^{it}\right) = \lim_{r\to 1^-} g\left(re^{it}\right)$ existe pour tout $t \in [0, 2\pi]\backslash B$, alors $f^*\left(e^{it}\right) := \lim_{r\to 1^-} f\left(re^{it}\right)$ existe pour tout $t \in [0, 2\pi]\backslash(A \cup B)$ et $f^*\left(e^{it}\right) = g^*\left(e^{it}\right)/h^*\left(e^{it}\right)$. D'après le théorème 3.2 f est de la forme $f(z) = e^{i\lambda} \exp \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\mu(t)$ avec μ mesure réelle de $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ telle que $\log|f| = P(\mu)$ sur $\mathbb{D}$. D'après le théorème 2.10, $d\mu(t) = \varphi\left(e^{it}\right) dt + d\nu(t)$ avec $\nu \perp m$ et $\varphi\left(e^{it}\right) = \lim_{r\to 1^-} \log\left|f\left(re^{it}\right)\right|$ pour presque tout t (par rapport à la mesure de Lebesgue) avec $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$. Or nous venons de voir que, pour presque tout t, $\varphi\left(e^{it}\right) = \log\left|f^*\left(e^{it}\right)\right|$. Nous obtenons donc $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$ et

$$f(z) = e^{i\lambda} \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log\left|f^*\left(e^{it}\right)\right| dt\right) \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\nu(t)\right)$$

avec ν mesure réelle et ν singulière.

$\square$

3.2 La formule de Jensen et les produits de Blaschke

Le but de cette section est d'introduire des outils qui nous serviront à étudier les fonctions de la classe de Nevanlinna qui s'annulent. Pour cela nous allons avoir besoin de la formule de Jensen. Ce résultat provient du lemme suivant :

Lemme 3.6. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$, alors

$$I_\alpha(R) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|Re^{i\theta} - \alpha\right| d\theta = \begin{cases} \log|\alpha| \text{ si } R \in]0, |\alpha|] \\ \log R \text{ si } R > |\alpha| \end{cases}.$$

Démonstration. Dans un premier temps remarquons que nous pouvons supposer que $\alpha > 0$, en effet si $\alpha = |\alpha|e^{it} \in \mathbb{C}^*$ nous avons

$$\int_0^{2\pi} \log\left|Re^{i\theta} - \alpha\right| d\theta = \int_0^{2\pi} \log\left|Re^{i\theta - t} - |\alpha|\right| d\theta.$$

Maintenant distinguons plusieurs cas : Si $\alpha = R$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|Re^{i\theta} - \alpha\right| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|e^{i\theta} - 1\right| d\theta + \log(R) = \log(R)$$

ce qui termine ce cas.

Si $\alpha > R$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|Re^{i\theta} - \alpha\right| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|\frac{R}{\alpha}e^{i\theta} - 1\right| d\theta + \log(\alpha)$$

et si $\alpha < R$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|Re^{i\theta} - \alpha\right| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|1 - \frac{\alpha}{R}e^{-i\theta}\right| d\theta + \log(R).$$

Ainsi pour avoir le résultat il suffit de montrer que pour $0 < r < 1$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \log\left|1 - re^{i\theta}\right| d\theta = 0$, ce qui équivaut à montrer que

$$\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{\left|1 - re^{i\theta}\right|^2} d\theta = 0.$$

Or pour $\theta \in [0, 2\pi[$ nous avons $\log \dfrac{1}{|1 - re^{i\theta}|^2} = \log \dfrac{1}{1 - re^{i\theta}} + \log \dfrac{1}{1 - re^{-i\theta}}$, puisque $\displaystyle\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{1 - re^{i\theta}} d\theta = \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{1 - re^{-i\theta}} d\theta$, il suffit de montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{1 - re^{i\theta}} d\theta = 0$, or $z \mapsto \log \frac{1}{1-z}$ est holomorphe sur $\mathbb{D}$ et $\log \frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ pour $z \in \mathbb{D}$. Puisque cette série converge uniformément sur $\mathbb{D}$ nous avons

$$\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{1 - re^{i\theta}} d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta = 0$$

ce qui conclut la preuve. $\square$

Théorème 3.7. (Formule de Jensen) Soit f une fonction holomorphe au voisinage du disque fermé $\bar{D}(a, R)$. Notons $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ ses zéros dans ce disque et supposons que $f(a) \neq 0$. Alors,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log\left(\left|f\left(a + Re^{i\theta}\right)\right|\right) d\theta = \log(|f(a)|) + \sum_{j=1}^{p} \log\left(\frac{R}{|\alpha_j - a|}\right).$$

Démonstration. Nous pouvons supposer que $a = 0$. Posons $r_j = |\alpha_j|$. Puisque $R \geq |\alpha_j|$ (car les α_j sont les racines de f dans $\bar{D}(a, R)$) et que 0 n'est pas racine de f d'après le lemme 3.6 nous avons

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left|Re^{i\theta} - \alpha_j\right| d\theta = \log R. \tag{*}$$

La fonction $f/\prod_{1\leq j\leq p}(z - \alpha_j)$ étant holomorphe et sans zéros au voisinage de $\bar{D}(0, R)$, nous pouvons donc l'écrire $f = e^g$ avec g holomorphe au voisinage de $\bar{D}(0, R)$. En particulier

$$\log|f(z)| = \sum_{j=1}^{p} \log|z - \alpha_j| + \operatorname{Re} g(z), \quad \log|f(0)| = \sum_{j=1}^{p} \log r_j + \operatorname{Re} g(0) \tag{**}$$

de plus par $(*)$ nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log\left(\left|f\left(a + Re^{i\theta}\right)\right|\right) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} g\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right) d\theta + \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left|Re^{i\theta} - \alpha_j\right| d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} g\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right) d\theta + p \log R.
\end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{Re}(g)$ est harmonique par la propriété de la moyenne nous avons

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} g\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right) d\theta = \mathrm{Re}(g(0))$$

D'où

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log\left(\left|f\left(a + Re^{i\theta}\right)\right|\right) d\theta = \mathrm{Re}(g(0)) + p \log R$$

Finalement en utilisant $(**)$ nous obtenons

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log\left(\left|f\left(a + Re^{i\theta}\right)\right|\right) d\theta = \log|f(0)| + \sum_{j=1}^{p} \log \frac{R}{r_j}.$$

$\square$

Corollaire 3.8. Si f est une fonction holomorphe sur le disque ouvert $D(0,R)$ avec $f(0) \neq 0$ alors $r \longmapsto \int_{-\pi}^{\pi} \log\left|f\left(re^{it}\right)\right| dt$ est fonction croissante de r avec $0 \leq r < R$. En particulier $\log|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{it}\right)\right| dt$ pour $0 \leq r < R$.

Démonstration. D'après la formule de Jensen (théorème 3.7,) pour $0 \leq r < R$ nous avons :

$$\log|f(0)| + \sum_{n=1}^{N} \log\frac{r}{|\alpha_n|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta$$

avec $\log\frac{r}{|\alpha_n|} \geq 0$. Lorsque r augmente, $\sum_{n=1}^{N} \log\frac{r}{|\alpha_n|}$ augmente aussi. □

Corollaire 3.9. Si $f \in \mathcal{N}$, non identiquement nulle, a une suite infinie de zéros $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ répétés selon leur multiplicité, alors les zéros de f vérifie la condition de Blaschke

$$\sum_{n\geq 1} 1 - |\alpha_n| < \infty.$$

Démonstration. En remplaçant f par $g : z \longmapsto f(z)/z^k$ si 0 est un zéro de f de multiplicité k, nous pouvons supposer que $f(0) \neq 0$ (ce qui permettra d'utiliser la formule de Jensen (théorème 3.7)). Pour cela il faut vérifier que $g \in \mathcal{N}$.

Par construction, nous avons $g \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$. Il reste à vérifier que

$$J := \sup_{0\leq r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+\left|g\left(re^{it}\right)\right| dt = \sup_{0\leq r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+\left|\frac{f\left(re^{it}\right)}{r^k e^{ikt}}\right| dt < \infty.$$

Pour $0 < \varepsilon < 1$

$$J = \max\left(\sup_{0\leq r\leq\varepsilon} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+\left|\frac{f\left(re^{it}\right)}{r^k e^{ikt}}\right| dt,\ \sup_{\varepsilon\leq r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+\left|\frac{f\left(re^{it}\right)}{r^k e^{ikt}}\right| dt\right).$$

Puisque $\log^+(ab) \leq \log^+ a + \log^+ b$ et comme $\frac{1}{r^k} \leq \frac{1}{\varepsilon^k}$ pour $r \geq \varepsilon$, nous obtenons

$$\sup_{\varepsilon\leq r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+\left|\frac{f\left(re^{it}\right)}{r^k e^{ikt}}\right| dt \leq \sup_{\varepsilon\leq r<1}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \log\frac{1}{\varepsilon^k} dt + \int_{-\pi}^{\pi} \log^+\left|f\left(re^{it}\right)\right| dt\right) < \infty,$$

car $f \in \mathcal{N}$. La fonction $z \longmapsto f(z)/z^k$ continue sur le compact $\overline{D(0,\varepsilon)}$ est uniformément majorée par une constante M et de ce fait $\sup_{0\leq r\leq\varepsilon} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+\left|\frac{f\left(re^{it}\right)}{r^k e^{ikt}}\right| dt < \infty$. Nous avons ainsi vérifié que $g \in \mathcal{N}$ et nous pouvons donc supposer que $f(0) \neq 0$.

Soit $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ la suite des zéros de f répétés selon leur multiplicité. Fixons $p \in \mathbb{N}^*$ et considérons $r \in]0,1[$ tel que $r \geq \max_{n\leq p} |\alpha_n|$. D'après la formule de Jensen (théorème 3.7), nous avons :

$$\log|f(0)| + \sum_{n=1}^{p} \log\frac{r}{|\alpha_n|} \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{it}\right)\right| dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f\left(re^{it}\right)\right| dt < M_0 < \infty$$

car $f \in \mathcal{N}$. L'entier p étant fixé, nous pouvons faire tendre r vers 1^- et nous avons :

$$\log|f(0)| + \sum_{n=1}^{p} \log\frac{1}{|\alpha_n|} \leq M_0$$

donc $\sum_{n=1}^{p} \log 1/|\alpha_n| \leq M_0 - \log|f(0)|$ pour tout entier $p \geq 1$. La série $\sum_{n\geq 1} \log 1/|\alpha_n|$ étant à termes positifs, elle est donc convergente, donc $\log 1/|\alpha_n| \to 0$ ainsi $|\alpha_n| \to 1$, nous avons aussi $1/|\alpha_n| \to 1$ et donc $\log 1/|\alpha_n| \sim 1 - |\alpha_n|$ lorsque $n \to \infty$. Ainsi nous en déduisons que $\sum_{n\geq 1} 1 - |\alpha_n| < \infty$. □

Nous avons ainsi la caractérisation de l'ensemble des zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna.

Théorème 3.10. Soit $(\alpha_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$, telles que

$$\sum_{n\geq 1} 1 - |\alpha_n| < \infty.$$

Alors

$$B : z \in \mathbb{D} \mapsto \prod_{n\geq 1} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n} z} \in H^\infty(\mathbb{D})$$

de plus $|B^*| = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$ et

$$\lim_{r\to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} \log\left|B\left(re^{it}\right)\right| dt = 0 \tag{3}$$

Démonstration. Posons $f_n(z) := \dfrac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \dfrac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n} z}$,

$$1 - f_n(z) = \frac{(1 - |\alpha_n|)\left(1 + \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} z\right)}{(1 - \overline{\alpha_n} z)}.$$

Pour $|z| \leq r < 1$

$$|1 - f_n(z)| \leq \frac{2(1 - |\alpha_n|)}{|1 - \overline{\alpha_n} z|} \leq \frac{2(1 - |\alpha_n|)}{1 - |z|}.$$

Donc $\sum_{n\geq 1} |1 - f_n(z)|$ converge uniformément sur $\overline{D(0, r)}$ pour $r < 1$, donc $B(z) = \prod_{n\geq 1} f_n(z)$ définit bien une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ dont la suite des zéros est la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$.

De plus, pour $|z| = 1$, nous avons

$$|f_n(z)| = \left|\frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n} z}\right| = \frac{|\alpha_n - z|}{|\bar{z} - \overline{\alpha_n}|} = 1.$$

D'après le principe du maximum appliqué à la fonction $z \longmapsto f_n(z)$ holomorphe sur $\mathbb{D}$ et continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, nous avons $|f_n(z)| < 1$ pour $z \in \mathbb{D}$. Ainsi $|B(z)| < 1$ pour $z \in \mathbb{D}$ et donc $B \in H^\infty(\mathbb{D})$. D'après le lemme 3.4, B^* existe p.p. sur $\mathbb{T}$.

Montrons à présent (3). D'après le corollaire 3.8 la fonction $r \mapsto \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|B\left(re^{it}\right)\right| dt$ est croissante en r avec $0 \leq r < 1$ et majorée par 0, notons $\ell \leq 0$ sa limite lorsque $r \to 1^-$. Posons

$$R_p(z) = \prod_{n=p+1}^{\infty} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \frac{z - \alpha_n}{1 - \overline{\alpha_n} z} \quad \text{et} \quad B_p(z) := \frac{B(z)}{R_p(z)} = \prod_{n=1}^{p} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \frac{z - \alpha_n}{1 - \overline{\alpha_n} z}.$$

La fonction B_p est holomorphe sur $D(0, 1/r_p)$ avec $r_p = \max\limits_{n\leq p} |\alpha_n|$. Remarquons que $|B_p(z)| = 1$ si $|z| = 1$. Nous en déduisons que $\lim_{r\to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} \log\left|B_p\left(re^{it}\right)\right| dt = 0$ car la fonction $z \longmapsto \log|B_p(z)|$ est continue pour $r_p < |z| < \frac{1}{r_p}$ et nulle sur $\mathbb{T}$. Ainsi nous obtenons :

$$\lim_{r\to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} \log\left|B\left(re^{it}\right)\right| dt = \lim_{r\to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} \log\left|R_p\left(re^{it}\right)\right| dt$$

pour tout $p \geq 1$. D'après le Corollaire 3.8,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|R_p\left(re^{it}\right)\right| dt \geq 2\pi \log|R_p(0)|.$$

Ainsi pour $p \geq 1,\ \ell$ vérifie

$$\ell \geq 2\pi \log |R_p(0)| = 2\pi \log \left(\prod_{n \geq p+1} |\alpha_n| \right) \to 0, \qquad p \to \infty.$$

Il reste à vérifier que $\left|B^*\left(e^{it}\right)\right| = 1$ presque partout. D'après le lemme de Fatou, si $r_n \to 1^-$, nous avons :

$$\limsup_{n \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left|B\left(r_n e^{it}\right)\right| dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} \limsup_{n \to +\infty} \log \left|B\left(r_n e^{it}\right)\right| dt$$

et donc $0 = \ell \leq \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \log \left|B^*\left(e^{it}\right)\right| dt$. D'autre part, puisque $\left|B^*\left(e^{it}\right)\right| \leq 1$ presque partout, nous avons $\log \left|B^*\left(e^{it}\right)\right| \leq 0$ presque partout. Finalement nous en déduisons que $\log \left|B^*\left(e^{it}\right)\right| = 0$ presque partout et donc $\left|B^*\left(e^{it}\right)\right| = 1$ presque partout. □

Définition 3.11. Le *produit de Blaschke* associé à la suite $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ est donné par

$$B(z) = e^{i\lambda} z^k \prod_{n \geq 0} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n} z},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$, k entier naturel et $(\alpha_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{D} \backslash \{0\}$ vérifiant la *condition de Blaschke*

$$\sum_{n \geq 0} 1 - |\alpha_n| < \infty.$$

3.3 Description complète des fonctions de $\mathcal{N}$

Nous avons le théorème de factorisation des fonctions de la classe Nevanlinna.

Théorème 3.12. Soit $f \in \mathcal{N}$ non identiquement nulle. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$f = e^{i\lambda} B O_f I_{\nu_f},$$

- B le produit de Blaschke associé à la suite des zéros $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ de f donnée par

$$B(z) = e^{i\lambda} z^k \prod_{n \geq 0} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n} z}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

- O_f est la *fonction extérieure* associé à f donnée par

$$O_f(z) := \exp\Big(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log \left|f^*\left(e^{it}\right)\right| dt \Big), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

- I_{ν_f} est la *fonction intérieur* associé à une mesure réelle singulière ν_f donnée par

$$I_{\nu_f}(z) := \exp\Big(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\nu_f(t) \Big), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Démonstration. Vérifions que $g := f/B \in \mathcal{N}$. Par construction, g est une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$ (qui ne s'annule pas). Il reste à montrer que $\displaystyle\sup_{0 \leq r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left| \frac{f\left(re^{it}\right)}{B\left(re^{it}\right)} \right| dt < \infty$. Puisque $\log^+(ab) \leq \log^+(a) + \log^+(b)$ et $\left|B\left(re^{it}\right)\right| < 1$ si $r < 1$ nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left| \frac{f\left(re^{it}\right)}{B\left(re^{it}\right)} \right| dt &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left|f\left(re^{it}\right)\right| dt + \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left| \frac{1}{B\left(re^{it}\right)} \right| dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left|f\left(re^{it}\right)\right| dt - \int_{-\pi}^{\pi} \log \left|B\left(re^{it}\right)\right| dt. \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{r\to 1^-}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|B\left(re^{it}\right)\right|dt=0$, $\sup_{0\le r<1}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+\left|f\left(re^{it}\right)\right|dt<\infty$ et $f\in\mathcal{N}$, nous en déduisons que $\sup_{0\le r<1}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+\left|\frac{f\left(re^{it}\right)}{B\left(re^{it}\right)}\right|dt<\infty$, ce qui prouve que $f/B\in\mathcal{N}$. g est une fonction de $\mathcal{N}$ qui ne s'annule pas, d'après le théorème 3.10, $g^*\left(e^{it}\right):=\lim_{r\to 1^-}g\left(re^{it}\right)$ existe presque partout avec $\log|g^*|\in L^1(\mathbb{T})$. D'autre part $B^*\left(e^{it}\right):=\lim_{r\to 1^-}B\left(re^{it}\right)$ existe presque partout et est de module 1. Puisque $f=Bg$, nous obtenons $f^*\left(e^{it}\right):=\lim_{r\to 1^-}f\left(re^{it}\right)=B^*\left(e^{it}\right)g^*\left(e^{it}\right)$ définie presque partout avec $|f^*|=|g^*|\in L^1(\mathbb{T})$. Nous concluons la preuve avec le théorème 3.5. □

Remarque. La fonction $f/B\in\mathcal{N}$. La mesure $\nu_f\in M(\mathbb{T})$ est une mesure réelle, on écrit $\nu_f=\nu^+-\nu^-$ où $\nu^+,\ \nu^-\in M(\mathbb{T})$ des mesures positives singulières. La fonction $f\in\mathcal{N}$ s'écrit alors

$$f=e^{i\lambda}BO_f\frac{I_{\nu^+}}{I_{\nu^-}},$$

où

$$I_\nu^+(z):=\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu^+(t)\right),\qquad z\in\mathbb{D},$$

est dite la *fonction intérieure singulière* associée à la mesure ν^+. De même pour l'expression de I_{ν^-}.

4 Les espaces de Hardy

4.1 Rappels sur les fonctions sous harmoniques

Définition 4.1. Une fonction $f:\mathbb{D}\to\mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{D}$ est dite *sous-harmonique* si pour tout domaine (ouvert connexe) Ω de $\mathbb{D}$ dont la fermeture $\bar\Omega$ est inclus dans $\mathbb{D}$ et pour toute fonction U harmonique dans Ω et continue dans $\bar\Omega$ vérifiant $f(z)\le U(z)$ sur la frontière Ω, nous avons $f(z)\le U(z)$ pour tout $z\in\Omega$.

Nous avons la Caractérisation des fonctions sous harmoniques à valeurs réelle.

Théorème 4.2. Soit $f:\mathbb{D}\to\mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{D}$. f est sous-harmonique si et seulement si pour tout $z_0\in\mathbb{D}$ il existe $\rho_0>0$ tel que $D\left(z_0,\rho_0\right)\subset\mathbb{D}$ avec

$$f\left(z_0\right)\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(z_0+\rho e^{it}\right)dt \tag{4}$$

pour tout $\rho<\rho_0$.

Nous avons ainsi les propriétés suivantes

1. Si f est une fonction continue à valeurs réelles sous-harmonique sur $\mathbb{D}$, alors

   $$m(r):=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(re^{it}\right)dt \text{ pour } 0\le r<1,$$

   est une fonction croissante sur $[0,1[$.
2. Soit f holomorphe dans $\mathbb{D}$ et soit $p>0$. Alors la fonction g définie par $g(z)=|f(z)|^p$ est sous-harmonique.
3. Soit u une fonction harmonique dans $\mathbb{D}$ et soit $p\ge 1$. Alors $g(z)=|u(z)|^p$ est sous-harmonique.
4. Soit f holomorphe dans $\mathbb{D}$ alors $\log^+|f|$ est sous-harmonique .

4.2 Définition et premières propriétés des espaces de Hardy

Pour $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ soit $0 < p < \infty$ nous définissons les quantités suivantes :

- $M_0(f,r) := \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \log^+ \left|f\left(re^{it}\right)\right| dt,$
- $M_p(f,r) := \left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\right|^p dt\right)^{1/p},$
- $M_\infty(f,r) := \sup\limits_{t\in[0,2\pi[} \left|f\left(re^{it}\right)\right|.$

Définition 4.3. Les *espaces de Hardy* $H^p(\mathbb{D}), 0 < p \leq \infty$, sont définis par

$$H^p(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) \mid \sup_{0\leq r<1} M_p(f,r) < \infty \right\}.$$

Proposition 4.4. Soit $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$. Les fonctions $r \longmapsto M_p(f,r)$ (pour $0 \leq p \leq \infty$) sont des fonctions croissantes sur $[0,1[$

Démonstration. Si $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ alors $|f|^p$ et $\log^+|f|$ sont des fonctions sous-harmoniques sur $\mathbb{D}$ pour $0 < p < \infty$ d'après les propriétés 2 et 4. D'après la propriété 1, $r \longmapsto M_p(f,r)$ (pour $0 \leq p < \infty$) est une fonction croissante sur $[0,1[$. Le fait que $r \longmapsto M_\infty(f,r)$ soit croissante sur $[0,1[$ est une conséquence du principe du maximum pour les fonctions holomorphes. $\square$

Nous pouvons alors redéfinir les espaces de Hardy ainsi que la classe de Nevanlinna de la manière suivante :

Corollaire 4.5. Pour $0 < p \leq \infty$ nous avons :

$$H^p(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) \mid \lim_{r\to 1^-} M_p(f,r) < \infty \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{N} = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) \mid \lim_{r\to 1^-} M_0(f,r) < \infty \right\}.$$

Si $f \in H^p(\mathbb{D})$ pour $0 < p \leq \infty$ nous noterons par $\|f\|_p$ la limite $\lim\limits_{r\to 1^-} M_p(f,r)$.

Théorème 4.6. Nous avons pour $0 < s < p < \infty$: $H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D}) \subset H^s(\mathbb{D}) \subset \mathcal{N}$.

Démonstration. Si $f \in H^\infty(\mathbb{D})$, pour tout $p \in]0,\infty[$ on a $\left|f\left(re^{it}\right)\right|^p \leq \|f\|_\infty^p$ pour $r \in [0,1[$ et $t \in [0,2\pi[$. Nous en déduisons que $M_p(f,r) \leq \|f\|_\infty$ pour $r \in [0,1[$, ce qui implique $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty$ et donc $H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D})$ pour tout $p > 0$.

Pour $p > s > 0$, l'inégalité de Hölder donne pour f mesurable que $M_s(f,r) \leq M_p(f,r)$ et donc $H^p(\mathbb{D}) \subset H^s(\mathbb{D})$.

Enfin, pour tout $s > 0$, puisque $\lim_{x\to\infty} \log x/x^s = 0$, il existe $A > 0$ tel que $\log x/x^s \leq A$ pour tout $x \geq 1$. Si f mesurable sur le cercle centré en 0 de rayon $r \in]0,1[$, nous avons

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left|f\left(re^{it}\right)\right| dt = \int_{\{t\in[-\pi,\pi]:|f(re^{it})|\geq 1\}} \log\left|f\left(re^{it}\right)\right| dt \leq A \int_{\{t\in[-\pi,\pi]:|f(re^{it})|\geq 1\}} \left|f\left(re^{it}\right)\right|^s dt.$$

Donc $AM_s(f,r)^s \geq M_0(f,r)$, ce qui prouve que $H^s(\mathbb{D}) \subset \mathcal{N}$ pour $s > 0$. $\square$

L'inégalité de Minkowski et la formule de Cauchy nous donne :

Théorème 4.7. Si $1 \leq p \leq \infty$, l'espace de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$ est un espace de Banach.

Théorème 4.8. Soit $p \in]0,\infty]$ et soit f une fonction de $H^p(\mathbb{D})$ non identiquement nulle. Si B est le produit de Blaschke associé à $f (\in \mathcal{N})$ alors $f/B \in H^p(\mathbb{D})$ avec $\|f/B\|_p = \|f\|_p$.

Démonstration. Soit $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ la suite des zéros de f comptés avec multiplicité et soit B_n le produit de Blaschke fini associé aux n premiers zéros de f. Nous avons $B_n \in H^\infty(\mathbb{D})$ et $\left|B_n\left(e^{it}\right)\right| = 1$. Comme B_n est continue sur le compact $\overline{\mathbb{D}}$, B_n est uniformément continue sur $\overline{\mathbb{D}}$. Nous avons alors

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\left|f\left(re^{it}\right)\right| < \left|\frac{f\left(re^{it}\right)}{B_n\left(re^{it}\right)}\right| < \frac{1}{1-\varepsilon}\left|f\left(re^{it}\right)\right|.$$

Donc, si $p \in]0,\infty]$ et $f \in H^p(\mathbb{D})$ nous avons ainsi

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\|f\|_p < \left\|\frac{f}{B_n}\right\|_p < \frac{1}{1-\varepsilon}\|f\|_p$$

pour tout $\varepsilon \in]0,1[$. Si $g_n := f/B_n$, $\|g_n\|_p = \|f\|_p$ avec $p \in]0,\infty[$.

Posons $g = f/B$. Par construction $g \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$. De plus, pour $z \in \mathbb{D}$, $\lim_{n\to\infty} g_n(z) = g(z)$ et $(|g_n(z)|)_{n\geq 1}$ est une suite croissante (par décroissance de $(|B_n|)_{n\geq 1}$). Ainsi d'après le théorème de convergence monotone, pour $p \in]0,\infty[$ et pour $r \in [0,1[$ fixé, nous avons :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|g_n\left(re^{it}\right)\right|^p dt = \int_{-\pi}^{\pi}\lim_{n\to\infty}\left|g_n\left(re^{it}\right)\right|^p dt = \int_{-\pi}^{\pi}\left|g\left(re^{it}\right)\right|^p dt$$

ce qui implique $M_p(g,r) = \lim_{n\to\infty} M_p(g_n,r)$. $r \longmapsto M_p(g_n,r)$ est une fonction croissante (proposition 4.4) et $\lim_{r\to 1^-} M_p(g_n,r) = \|f\|_p$ (car $\left|B_n\left(e^{it}\right)\right| = 1$), ainsi $\lim_{n\to\infty} M_p(g_n,r) \leq \|f\|_p$ pour tout $r \in [0,1[$ et donc

$$\|g\|_p = \lim_{r\to 1^-} M_p(g,r) \leq \|f\|_p.$$

Par conséquent $g \in H^p(\mathbb{D})$ avec $\|g\|_p \leq \|f\|_p$.

D'autre part, puisque $|B(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, nous en déduisons que $|g(z)| > |f(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Ainsi nous avons $\|g\|_p \geq \|f\|_p$. Finalement, pour $p \in]\,0,\infty\,[$, nous avons $\|g\|_p = \|f\|_p$.

Enfin si $f \in H^\infty(\mathbb{D})$, puisque $\sup_{z\in\mathbb{D}}|g_n(z)| = \|g_n\|_\infty = \|f\|_\infty$, nous avons $|g_n(z)| \leq \|f\|_\infty$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et pour tout entier $n \geq 1$. Pour $z \in \mathbb{D}$ nous avons $g(z) = \lim_{n\to\infty} g_n(z)$, nous avons $\|g\|_\infty := \sup_{z\in\mathbb{D}}|g(z)| \leq \|f\|_\infty$. De plus, $|g(z)| > |f(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, nous obtenons $\|g\|_\infty \geq \|f\|_\infty$, et donc $\|g\|_\infty = \|f\|_\infty$. □

Théorème 4.9. Soient $0 < p < \infty$, $f \in H^P(\mathbb{D})$, $f \neq 0$, et B le produit de Blaschke de f. Il existe une fonction sans zéros $h \in H^2(\mathbb{D})$ telle que $f = Bh^{2/p}$. En particulier, toute $f \in H^1$ est un produit $f = gh$ où les deux facteurs appartiennent à $H^2(\mathbb{D})$.

Démonstration. D'après le théorème 4.8 la fonction $f/B \in H^p$, et $\|f/B\|_p = \|f\|_p$. Puisque f/B ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$, et puisque $\mathbb{D}$ est simplement connexe, il existe donc $\phi \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ telle que $e^\phi = f/B$. Posons $h := \exp(p\phi/2)$, ainsi $h \in Hol(\mathbb{D})$ et $|h|^2 = |f/B|^p$ de sorte à ce que $h \in H^2(\mathbb{D})$, et $f = Bh^{2/p}$. Ainsi $\|h\|_2^2 = \|f\|_p^p$.

Pour obtenir la seconde égalité nous écrivons $f = Bh^{2/p}$, $(p = 1)$ sous la forme $f = Bhh$, où $g := Bh$. □

4.3 Fonctions intérieurs et extérieurs

4.3.1 Fonctions intérieurs

Définition 4.10. Une *fonction intérieure* est une fonction $U \in H^\infty(\mathbb{D})$ telle que $\left|U^*\left(e^{it}\right)\right| = 1$ presque partout.

Théorème 4.11. Soit $c \in \mathbb{C}$ tel que $|c| = 1$, soient B un produit de Blaschke, ν une mesure de Borel positive finie sur $\mathbb{T}$ telle que $\nu \perp m$. Pour $z \in \mathbb{D}$ nous posons

$$U(z) := cB(z)I_\nu(z) \tag{5}$$

où

$$I_\nu(z) := \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)\right).$$

La fonction U est une fonction intérieure et toute fonction intérieure peut s'obtenir de cette façon. La fonction I_ν est dite la *fonction intérieure singulière* associée à la mesure ν.

Démonstration. Soit $g = U/B$, $\log|g|$ est l'intégrale de Poisson pour la mesure finie négative $-\nu$, donc $\log|g|$ est une fonction harmonique négative sur $\mathbb{D}$, et pour $z \in \mathbb{D}$, $|g(z)| \leq 1$. Donc $g, U \in H^\infty(\mathbb{D})$. De plus, $\nu \perp m$ et $\log|g| = -P(\nu)$, d'après le corollaire 2.11, $\lim_{r\to1^-}\log\left|g\left(re^{it}\right)\right| = \log\left|g^*\left(e^{it}\right)\right| = 0$ p.p, et $\left|g^*\left(e^{it}\right)\right| = 1$ $p.p$ et $\left|B^*\left(e^{it}\right)\right| = 1$ p.p. Nous avons donc $\left|U^*\left(e^{it}\right)\right| = 1$ p.p. et U est bien une fonction intérieure.

Réciproquement, soit U une fonction intérieure et soit B le produit de Blaschke associé à la suite de ses zéros comptés avec multiplicité. D'après le théorème 4.8, $g := U/B \in H^\infty(\mathbb{D})$, $\|g\|_\infty = \|U\|_\infty = 1$ et g ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$. Il existe $\ell \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ tel que $\log|g| = Re(\ell)$, et donc $\log|g|$ est une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$. D'autre part $\log|g|$ est négative puisque $\|g\|_\infty = 1$. D'après le théorème 3.10 nous avons $\left|B^*\left(e^{it}\right)\right| = 1$ presque partout de plus $|U^*| = 1$ presque partout ainsi $|g^*| = 1$ presque partout et donc $\log\left|g^*\left(e^{it}\right)\right| = 0$ presque partout donc d'après le corollaire 2.11 il existe $\nu \geq 0, \nu$ finie sur $\mathbb{T}$ et $\nu \perp m$ telle que $-P(\nu) = \log|g|$. Donc $\log|g|$ est la partie réelle de la fonction holomorphe

$$h(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)$$

car

$$-P(\nu)(re^{i\theta}) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)d\nu(t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)d\nu(t).$$

Nous avons $g = e^\ell$ avec $\mathrm{Re}(\ell) = \mathrm{Re}\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)\right)$, donc

$$g(z) = c\exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)\right)$$

avec $|c| = 1$ puisque $-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t) - \ell \in i\mathbb{R}$, ce qui conclut la démonstration. □

4.3.2 Fonctions extérieurs

Définition 4.12. Une *fonction extérieure* est une fonction $Q \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ de la forme

$$Q(z) = c\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\varphi\left(e^{it}\right)dt\right)$$

où $|c| = 1$ et où φ est une fonction positive mesurable telle que $\log\varphi \in L^1(\mathbb{T})$.

Proposition 4.13. Soit Q une fonction extérieure reliée à φ. Alors

1. $\log|Q|$ est l'intégrale de Poisson de la mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dont la dérivée de Radon-Nikodym est $\log\varphi$.
2. $\lim\limits_{r\to1^-}\left|Q\left(re^{it}\right)\right| = \varphi\left(e^{it}\right)$presque partout.
3. Pour $p \in]0,\infty], Q \in H^p(\mathbb{D})$ si et seulement si $\varphi \in L^p(\mathbb{T})$. Dans ce cas $\|Q\|_p = \|\varphi\|_p$.

Démonstration.

1. Nous avons

$$\log|Q(z)| = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\varphi\left(e^{it}\right)dt\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)\log\varphi\left(e^{it}\right)dt.$$

2. D'après 1 et le théorème 2.10, $\lim_{r\to 1^-} \log \left|Q\left(re^{it}\right)\right| = \log \varphi\left(e^{it}\right)$presque partout ce qui donne 2.
3. Si $p=\infty$, d'après 2. l'assertion 3. est clair.
   Supposons $p \in]0,\infty[$ et $Q \in H^p(\mathbb{D})$. Soit $(r_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de réels de $]0,1[$ tendant vers 1 . D'après le lemme de Fatou appliqué à la suite de fonctions mesurables positives (sur $\mathbb{T}$) $(Q_n)_{n\geq 1}$ définie par $Q_n\left(e^{it}\right) := \left|Q\left(r_n e^{it}\right)\right|^p$, nous avons

$$\int_{-\pi}^{\pi} \liminf_{n\to\infty} Q_n\left(e^{it}\right) dt \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} Q_n\left(e^{it}\right) dt$$

   ce qui implique (d'après la proposition 4.4) $\|Q^*\|_p \leq \|Q\|_p$. D'après 2. nous avons

$$\|\varphi\|_p \leq \|Q\|_p. \tag{*}$$

   Par conséquent, si $Q \in H^p(\mathbb{D})$ alors $\varphi \in L^p(\mathbb{T})$.
   Réciproquement, supposons que $\varphi \in L^p(\mathbb{T})$. Nous avons

$$\left|Q\left(re^{i\theta}\right)\right|^p = e^{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) \log \varphi^p\left(e^{it}\right) dt$$

   D'après l'inégalité de Jensen, appliqué à la fonction convexe $x \longmapsto e^x$ et à la mesure positive μ définie par $d\mu(t) = \frac{1}{2\pi} P_r(\theta-t)dt$, nous obtenons

$$\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) \log \varphi^p\left(e^{it}\right) dt\right) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\varphi^p\left(e^{it}\right) dt.$$

   Donc

$$\left|Q\left(re^{i\theta}\right)\right|^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\varphi^p\left(e^{it}\right) dt$$

   En intégrant cette inégalité par rapport à la variable θ, sachant que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)d\theta = 1$, nous obtenons $M_p(Q,r) \leq \|\varphi\|_p$, et donc

$$\lim_{r\to 1^-} M_p(Q,r) = \|Q\|_p \leq \|\varphi\|_p \tag{**}$$

   Il vient de (*) et (**) que si $Q \in H^p(\mathbb{D})$ alors $\|Q\|_p = \|\varphi\|_p$.

□

4.4 Facteurs extérieures des fonctions de $H^p(\mathbb{D})$

Proposition 4.14. Soit $p \in]0,\infty]$. Supposons que $f \in H^p(\mathbb{D})$ non identiquement nulle. Alors la limite radiale de f, notée f^*, est telle que $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$ et $f^* \in L^p(\mathbb{T})$.

Démonstration. Si $f \in H^p(\mathbb{D})$ alors $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$. En effet, d'après le théorème 4.6, $H^p(\mathbb{D}) \subset \mathcal{N}$ et d'après le théorème 3.12, si $f \in \mathcal{N}$ alors $f^*\left(e^{it}\right)$ est définie presque partout avec $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$.

De plus, pour $p \in]\,0,\infty[$, d'après le lemme de Fatou,

$$\int_0^{2\pi} \liminf_{r\to 1^-} \left|f\left(re^{it}\right)\right|^p dt \leq \liminf_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\right|^p dt$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f^*\left(e^{it}\right)\right|^p dt \leq \lim_{r\to 1^-} M_p(f,r)^p = \|f\|_p^p$$

ainsi $f^* \in L^p(\mathbb{T})$ pour $p \in]0,\infty[$.

Pour $p=\infty$, puisque $|f(z)| \leq \|f\|_\infty$ pour $z \in \mathbb{D}$, donc $\left|f^*\left(e^{it}\right)\right| \leq \|f\|_\infty$ presque partout. Ainsi, si $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ on a donc $f^* \in L^\infty(\mathbb{T})$. □

Corollaire 4.15. Soit $p \in]0,\infty]$. Supposons que $f \in H^p(\mathbb{D})$, f non identiquement nulle. Dans ce cas, la fonction extérieure Q_f définie par

$$Q_f(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\left|f^*\left(e^{it}\right)\right|dt\right)$$

appartient à $H^p(\mathbb{D})$. Q_f est appelé *facteur extérieur* de f.

Démonstration. Soit $p \in]0,\infty]$. Supposons que $f \in H^p(\mathbb{D})$, f non identiquement nulle. D'après la proposition 4.14, $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$. Ainsi Q_f est bien définie comme une fonction extérieure. De plus, toujours d'après la proposition 4.14 , $f \in H^p(\mathbb{D})$ implique $f^* \in L^p(\mathbb{T})$, et le troisième point de la proposition 4.13 permet de conclure que $Q_f \in H^p(\mathbb{D})$. □

Remarque. Q_f ne dépend que de f^*, c'est à dire des limites radiales de f sur $\mathbb{T}$.

4.5 L'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$

Nous allons résumé en un théorème les résultats fondamentaux de l'espace $H^2(\mathbb{D})$.

Théorème 4.16.

1. Une fonction $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ de la forme $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ appartient à $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si $\sum_{n\geq 0}|a_n|^2 < \infty$. Dans ce cas $\|f\|_2 = \left(\sum_{n\geq 0}|a_n|^2\right)^{1/2}$.
2. Si $f \in H^2(\mathbb{D})$, $f^* \in L^2(\mathbb{T})$ et le n-ème coefficient de Fourier de f^* est a_n si $n \geq 0$ et 0 si $n < 0$. De plus
$$\lim_{s\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f^*\left(e^{it}\right) - f\left(se^{it}\right)\right|^2 dt = 0$$
et f est l'intégrale de Poisson ainsi que l'intégrale de Cauchy de f^* :
$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(\theta - t)f^*\left(e^{it}\right)dt = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{f^*(\xi)}{\xi - z}d\xi, \qquad z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$$
3. L'espace $H^2(\mathbb{D})$ s'identifie à $H^2(\mathbb{T}) := \left\{g \in L^2(\mathbb{T}) \mid \widehat{g}(n) = 0, n < 0\right\}$, grâce l'application suivante qui est un isomorphisme isométrique.
$$\begin{array}{ccc} H^2(\mathbb{D}) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{T}) \\ f & \longmapsto & f^* \end{array}.$$
4. L'espace $H^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire suivant :
$$\langle f, g\rangle_{H^2(\mathbb{D})} = \langle f^*, g^*\rangle_{L^2(\mathbb{T})} := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*\left(e^{it}\right)\overline{g^*\left(e^{it}\right)}dt.$$

Démonstration.

1. Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ pour $z \in \mathbb{D}$ donc pour $r \in [0,1[$ et $t \in \mathbb{R}$, $f\left(re^{it}\right) = \sum_{n\geq 0} a_n r^n e^{int}$. Ainsi d'après le théorème de Parseval, nous avons
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{it}\right)\right|^2 dt = \sum_{n\geq 0}|a_n|^2 r^{2n}.$$
Par convergence monotone, nous avons :
$$\|f\|_2^2 = \lim_{r\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{it}\right)\right|^2 dt = \lim_{r\to 1^-}\sum_{n\geq 0}|a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n\geq 0}|a_n|^2.$$
ainsi f appartient à $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si $\sum_{n\geq 0}|a_n|^2 < \infty$ et $\|f\|_2 = \left(\sum_{n\geq 0}|a_n|^2\right)^{1/2}$.

2. Soit $f \in H^2(\mathbb{D})$ d'après la proposition 4.14, $f^* \in L^2(\mathbb{T})$. Soit $0 < s < 1$ et soit $f_s(e^{it}) = f\left(se^{it}\right)$. Puisque $(a_n) \in \ell^2$, soit $g \in L^2(\mathbb{T})$ telle que $\widehat{g}(n) = a_n$ si $n \geq 0$ et 0 si $n < 0$. Les coefficients de Fourier de $g - f_s$ valent $(1 - s^n)\, a_n$ si $n \geq 0$ et 0 si $n < 0$. L'égalité de Parseval et le théorème de convergence monotone nous donnent

$$\lim_{s \to 1^-} \|g - f_s\|_2 = \lim_{s \to 1^-} \sum_{n \geq 0} (1 - s^n)^2 |a_n|^2 = 0.$$

Pour $0 < s < 1$, la fonction f_s définie par $f_s(z) = f(sz)$ est holomorphe dans $D\,(0, 1/s) \subset \mathbb{D}$. Donc, pour $z \in \mathbb{D}$,

$$f_s(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{f_s(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

La fonction f_s est harmonique sur $D\,(0, 1/s)$, d'après le théorème 2.4, nous avons pour $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$,

$$f_s(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f_s\left(e^{it}\right) dt.$$

Par Cauchy-Schwarz et le fait que $P_r(\theta - t) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) \leq \left|\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right| \leq \frac{1+r}{1-r}$ nous avons

$$\begin{aligned} \left| f_s\left(re^{i\theta}\right) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) g\left(e^{it}\right) dt \right| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) \left(f_s\left(e^{it}\right) - g\left(e^{it}\right)\right) dt \right| \\ &\leq \frac{1+r}{1-r} \|f_s - g\|_2 , \end{aligned}$$

et

$$\left| f_s\left(re^{i\theta}\right) - \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{g(\xi)}{\xi - re^{i\theta}} d\xi \right| = \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{f_s(\xi) - g(\xi)}{\xi - re^{i\theta}} d\xi \right| \leq \frac{1}{1-r} \|f_s - g\|_2$$

Puisque $\lim_{s \to 1^-} \|g - f_s\|_2 = 0$, nous avons d'une part

$$f\left(re^{i\theta}\right) = \lim_{s \to 1^-} f_s\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) g\left(e^{it}\right) dt.$$

D'autre part

$$f\left(re^{i\theta}\right) = \lim_{s \to 1^-} f_s\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{g(\xi)}{\xi - re^{i\theta}} d\xi.$$

En particulier, f est la fonction harmonique définie comme l'intégrale de Poisson de la mesure $\mu \ll m$ (m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$) définie par $d\mu(t) = g\left(e^{it}\right) dt$ avec $g \in L^1(\mathbb{T})$ puisque $g \in L^2(\mathbb{T})$. Nous avons

$$f^*\left(e^{it}\right) = \lim_{r \to 1^-} f\left(re^{i\theta}\right) = \lim_{r \to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) g\left(e^{it}\right) dt$$

donc d'après le théorème 2.10 nous avons que $f^*\left(e^{it}\right) = g\left(e^{it}\right)$ m-presque partout. Nous en déduisons que $f^* \in L^2(\mathbb{T})$ et que $\widehat{f^*}(n) = a_n$ si $n \geq 0$ et que $\widehat{f^*}(n) = 0$ si $n < 0$. Enfin nous avons :

$$f\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f^*\left(e^{it}\right) dt = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{f^*(\xi)}{\xi - re^{i\theta}} d\xi$$

3. Puisque $\lim_{s \to 1^-} \|f^* - f_s\|_2 = 0$, nous avons $\|f\|_2 := \lim_{s \to 1^-} \|f_s\|_2 = \|f^*\|_2$. Nous avons $\widehat{f}(n) = 0$ pour tout $n < 0$, donc l'application $\Phi : H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{T})$, $\Phi(f) = f^*$ est bien définie, est linéaire et est une isométrie. Étant isométrique, elle est automatiquement injective. Enfin pour la surjectivité, si $g \in H^2(\mathbb{T})$, $g\left(e^{it}\right) = \sum_{n \geq 0} \widehat{g}(n) e^{int}$ avec $\|g\|_2^2 = \sum_{n \geq 0} |\widehat{g}(n)|^2 < \infty$. Alors la fonction f définie sur $\mathbb{D}$ par $f(z) = \sum_{n \geq 0} \widehat{f^*}(n) z^n$ appartient à $H^2(\mathbb{D})$ d'après 1. l'application Φ est donc surjective.

4. Par définition, $\langle f, f\rangle_{H^2(\mathbb{D})} = \|f^*\|_2^2 = \|f\|_2$, la norme sur $H^2(\mathbb{D})$ s'obtient du produit scalaire que nous avons défini. De plus $H^2(\mathbb{D})$ est complet d'après le théorème 4.7, ainsi $H^2(\mathbb{D})$ est bien un espace de Hilbert.

$\square$

Corollaire 4.17. Si $f \in H^1(\mathbb{D})$ alors

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f^*\left(e^{it}\right) - f\left(re^{it}\right)\right| dt = 0.$$

Démonstration. Soit B le produit de Blaschke associé à la suite des zéros de f dans $\mathbb{D}$. D'après le théorème 4.8,

$$g := f/B \in H^1(\mathbb{D}) \text{ avec } \|g\|_1 = \|f\|_1.$$

Par construction g ne s'annule par sur $\mathbb{D}$, donc il existe une détermination holomorphe du logarithme de g. Nous pouvons ainsi définir la fonction holomorphe $h = g^{1/2}$ sur $\mathbb{D}$. Nous avons $h^2 = g$ et donc

$$f = Bg = (Bh)h, \qquad \|h\|_2^2 = \|g\|_1 = \|f\|_1.$$

Par conséquent nous avons réussi à écrire f comme le produit de deux fonctions de $H^2(\mathbb{D})$, h et $\ell := Bh$:

$$f = \ell h$$

nous allons ainsi pouvoir appliquer ce que nous avons établi dans le théorème précédent. Pour $r \in]\,0, 1\,[$, nous définissons les fonctions sur $\mathbb{T}$

$$f_r\left(e^{it}\right) := f\left(re^{it}\right), \quad \ell_r\left(e^{it}\right) := \ell\left(re^{it}\right) \quad \text{et} \quad h_r\left(e^{it}\right) := h\left(re^{it}\right).$$

De sorte à ce que $f_r = \ell_r h_r$. Puisque $f^* = \ell^* h^*$, nous avons :

$$f^* - f_r = \ell^*\left(h^* - h_r\right) + h_r\left(\ell^* - \ell_r\right). \tag{*}$$

$\ell, h \in H^2(\mathbb{D})$ d'après le théorème 4.16, nous avons

$$\lim_{r\to 1^-} \|h^* - h_r\|_2 = 0, \ \lim_{r\to 1^-} \|\ell^* - \ell_r\|_2 = 0 \quad \text{et} \quad \|\ell^*\|_2^2 = \|\ell\|_2^2 = \|f\|_1, \ \|h_r\|_2^2 \leq \|h\|_2^2 = \|f\|_1.$$

L'inégalité de Schwarz appliquée aux deux produit du membre de droite de $(*)$ nous donne :

$$\|f^* - f_r\|_1 \leq \|f\|_1^{1/2}\left(\|h^* - h_r\|_2 + \|\ell^* - \ell_r\|_2\right).$$

D'où $\lim_{r\to 1^-} \|f^* - f_r\|_1 = 0$. $\square$

Définition 4.18. Pour tout point w appartenant à $\mathbb{D}$, on définit le *noyau reproduisant* en w par :

$$K_w(z) := \frac{1}{1 - \bar{w}z} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{w}^n z^n, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Clairement $K_z \in H^2(\mathbb{D})$ et si $f \in H^2(\mathbb{D})$, alors

$$\langle f, K_z\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f^*(e^{it})}{1 - ze^{-it}} dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f^*(e^{it})}{e^{it} - z} e^{it} dt = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{f^*(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z).$$

Notons que

$$K_z(z) = \langle K_z, K_z\rangle = \|K_z\|_2^2 = \frac{1}{1 - |z|^2}$$

Donc

$$|f(z)| = |\langle f, K_z\rangle| \leq \|f(z)\|_2 \|K_z\|_2 \leq |f(z)| \leq \frac{\|f\|_2}{\sqrt{1 - |z|^2}}, \tag{6}$$

Nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 4.19. La convergence en norme sur $H^2(\mathbb{D})$ implique la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{D}$.

Démonstration. Soit (f_n) une suite d'éléments de $H^2(\mathbb{D})$ convergeant en norme vers une $f \in H^2(\mathbb{D})$. Pour $0 < R < 1$, l'équation (6) donne pour $n \in \mathbb{N}$ fixé

$$\sup_{|z|<R} |f_n(z) - f(z)| \leq \frac{\|f_n - f\|_2}{\sqrt{1-R^2}},$$

et donc (f_n) converge vers f uniformément sur le disque fermé $\bar{D}(0, R)$. Puisque R est arbitraire (f_n) converge uniformément f sur tout compact de $\mathbb{D}$. □

Nous disposons d'une autre expression de la norme dans H^2, connue sous le nom d'*identité de Littlewood-Paley*, qui s'avère importante dans l'étude de l'opérateur de composition. Pour $z = x + iy = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, nous désignons par

$$dA(z) = \frac{1}{\pi}\, dx\, dy = \frac{1}{\pi}\, r\, dr\, d\theta$$

la mesure de Lebesgue normalisée sur le disque unité $\mathbb{D}$.

Proposition 4.20. Soit $f \in H^2(\mathbb{D})$, alors

$$\|f\|_2^2 = |f(0)|^2 + 2\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \log \frac{1}{|z|} dA(z),$$

Démonstration. Soit $f \in H^2(\mathbb{D})$ d'après le théorème 4.16, nous pouvons écrire pour $z \in \mathbb{D}$, $f(z) = \sum_{n\geq 0} \widehat{f^*}(n) r^n e^{in\theta}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
2\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \log \frac{1}{|z|} dA(z) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left| \sum_{n\geq 1} n \widehat{f}(n) r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} \right|^2 \log\left(\frac{1}{r}\right) r dr d\theta. \\
&= \frac{2}{\pi}\, 2\pi \int_0^1 \sum_{n\geq 1} n^2 |\widehat{f}(n)|^2 r^{2(n-1)} \log\left(\frac{1}{r}\right) r dr \\
&= 4 \sum_{n\geq 1} n^2 |\widehat{f}(n)|^2 \int_0^1 r^{2n-1} \log \frac{1}{r} dr = \sum_{n\geq 1} |\widehat{f}(n)|^2.
\end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure. □

4.6 Théorème de factorisation des fonctions de $H^p(\mathbb{D})$

Nous avons également le théorème de factorisation des fonctions de $H^p(\mathbb{D})$:

Théorème 4.21. Soit $p \in]0, \infty]$ et soit $f \in H^p(\mathbb{D})$. Nous avons

$$f = U_f Q_f,$$

- $U_f \in H^\infty(\mathbb{D})$ une fonction intérieur dont l'expression est donnée par (5).
- $Q_f \in H^p(\mathbb{D})$ le facteur extérieur de f : $Q_f(z) := \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log\left|f^*\left(e^{it}\right)\right| dt\right),\ z \in \mathbb{D}$.

De plus

$$\log|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f^*\left(e^{it}\right)\right| dt \tag{7}$$

avec égalité dans (7) si et seulement si U_f est constante, autrement dit, si et seulement si f est extérieure.

Démonstration. Si $p = 1$, soit $f \in H^1(\mathbb{D})$ et soit B est le produit de Blaschke associé aux zéros de f. D'après le théorème 4.8, $g := f/B \in H^1(\mathbb{D})$ avec $\|g\|_1 = \|f\|_1$ et $|f^*| = |g^*|$. Quitte à remplacer g par f, nous pouvons supposer dans la suite que f ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$. Nous avons vu dans le corollaire 4.15 que $Q_f \in H^1(\mathbb{D})$. La seconde assertion de la proposition 4.13 donne $\left|Q_f^*\left(e^{it}\right)\right| = \left|f^*\left(e^{it}\right)\right| \neq 0$ m-presque partout, donc $\left|f^*/Q_f^*\right| = 1$ m-presque partout. Et si nous montrons que $|f(z)| \leq |Q_f(z)|$ pour $z \in \mathbb{D}$ nous aurons $|f/Q_f| \leq 1$ ainsi f/Q_f sera une fonction intérieure, ce qui prouvera qu'il existe une fonction intérieure telle que $f = U_f Q_f$.

Montrons que $|f(z)| \leq |Q_f(z)|$ pour $z \in \mathbb{D}$. Dans un premier temps remarquons que $|Q_f|$ est égal à $e^{P(\log|f^*|)}$ où $P(\log|f^*|)$ est l'intégrale de Poisson de $\log|f^*|$ définie par

$$P\left(\log|f^*|\right)\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\log\left|f^*\left(e^{it}\right)\right| dt.$$

Pour $r \in [0,1[$, $\theta \in \mathbb{R})$ et $z \in \mathbb{D}$, nous avons

$$|f(z)| \leq |Q_f(z)| \text{ si et seulement si } \log|f(z)| \leq P\left(\log|f^*|\right)(z),$$

ainsi montrons que $\log|f(z)| \leq P(\log|f^*|)(z)$ pour $z \in \mathbb{D}$. Pour $|z| \leq 1$ et $0 < R < 1$ nous définissons la fonction f_R par $f_R(z) := f(Rz)$. f_R est holomorphe dans $D\left(0, \frac{1}{R}\right)$ et f_R ne s'annule pas. Notons que $\log|f_R|$ est harmonique dans $D\left(0, \frac{1}{R}\right)$. D'après le théorème 2.4, pour $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, nous avons

$$\begin{aligned}\log|f_R(z)| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f_R\left(e^{it}\right)\right| P_r(\theta - t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f_R\left(e^{it}\right)\right| P_r(\theta - t)dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^-\left|f_R\left(e^{it}\right)\right| P_r(\theta - t)dt.\end{aligned}$$

D'une part, notons que pour $u, v > 0$, on a $\left|\log^+ u - \log^+ v\right| \leq |u - v|$. Ainsi

$$\begin{aligned}\left|P\left(\log^+|f_R|\right)\left(re^{i\theta}\right) - P\left(\log^+|f^*|\right)\left(re^{i\theta}\right)\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\left|\left|f_R\left(e^{it}\right)\right| - \left|f^*\left(e^{it}\right)\right|\right| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\left|f_R\left(e^{it}\right) - f^*\left(e^{it}\right)\right| dt \\ &\leq \frac{1 + r}{1 - r}\left\|f_R - f^*\right\|_1.\end{aligned}$$

D'après le corollaire 4.17, $\lim\limits_{R \to 1^-}\left\|f_R - f^*\right\|_1 = 0$. Ainsi,

$$\lim_{R \to 1^-} P\left(\log^+|f_R|\right)\left(re^{i\theta}\right) = P\left(\log^+|f^*|\right)\left(re^{i\theta}\right). \tag{*}$$

D'autre part nous avons

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\log^-\left|f^*\left(e^{it}\right)\right| dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \liminf_{R \to 1^-}\log^-\left|f_R\left(e^{it}\right)\right| dt$$

ainsi d'après le lemme de Fatou

$$P\left(\log^-|f^*|\right)\left(re^{i\theta}\right) \leq \liminf_{R \to 1^-} P\left(\log^-|f_R|\right)\left(re^{i\theta}\right). \tag{**}$$

De plus

$$\lim_{R \to 1^-} P\left(\log|f_R|\right)\left(re^{i\theta}\right) = \lim_{R \to 1^-}\log\left|f_R\left(re^{i\theta}\right)\right| = \log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|. \tag{***}$$

Or

$$\liminf_{R \to 1^-} P\left(\log|f_R|\right)\left(re^{i\theta}\right) = \liminf_{R \to 1^-} P\left(\log^+|f_R|\right)\left(re^{i\theta}\right) - \liminf_{R \to 1^-} P\left(\log^-|f_R|\right)\left(re^{i\theta}\right)$$

Enfin en utilisant $(*)$, $(**)$, $(***)$ nous obtenons :

$$\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq P\left(\log^+|f^*|\right)\left(re^{i\theta}\right) - P\left(\log^-|f^*|\right)\left(re^{i\theta}\right) = P\left(\log|f^*|\right)\left(re^{i\theta}\right),$$

qui est l'inégalité voulu, ce qui permet de conclure que $U_f := f/Q_f$ est bien une fonction intérieure si $f \in H^1(\mathbb{D})$.

Puisque $|f(z)| \leq |Q_f(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, en particulier, pour $z = 0$, nous obtenons l'inégalité (7). Remarquons que si $f(0) = 0$, (7) est clairement vérifiée.

Supposons qu'on a l'égalité dans (7) alors $|f(0)| = |Q_f(0)|$, or $f(0) = U_f(0)Q_f(0)$, on a donc $U_f(0) = 1$ avec $\|U_f\|_\infty = 1$. D'après le principe du maximum, nous avons nécessairement $U_f = c$ avec $|c| = 1$, donc f est extérieur. La réciproque est immédiate. Ceci termine la démonstration dans le cas où $p = 1$.

Si $p \in]1, \infty]$ il n'y a rien à faire puisque $H^p(\mathbb{D}) \subset H^1(\mathbb{D})$ d'après le théorème 4.6.

Il reste à traiter le cas où $p \in]0, 1[$. Prenons $f \in H^p(\mathbb{D})$, soit B le produit de Blaschke associé aux zéros de f. D'après le théorème 4.9, il existe $h \in H^2(\mathbb{D})$ telle que $f = Bh^{2/p}$. D'après ce qui précède, nous pouvons écrire $h = U_h Q_h$ avec U_h fonction intérieure sans zéro dans $\mathbb{D}$ et Q_h extérieure. Or

$$Q_h^{2/p}(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\frac{2}{p}\log\left|h^*\left(e^{it}\right)\right|dt\right) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\left|h^*\left(e^{it}\right)^{2/p}\right|dt\right)$$

avec $\left|h^*\left(e^{it}\right)^{2/p}\right| = \left|f^*\left(e^{it}\right)\right|$ presque partout, $Q_h^{2/p}$ est le facteur extérieur de f. De plus il est clair que $U_f^{2/p}$ est bien une fonction intérieure (singulière). Ainsi, si $f \in H^p(\mathbb{D})$ f se décompose comme le produit d'une fonction intérieure et d'une fonction extérieure.

L'inégalité (7) est conséquence de la factorisation que nous venons d'établir. Le cas d'égalité s'obtient de manière analogue à ce qu'il précède. □

Définition 4.22. Les fonctions Q_f et U_f sont respectivement appelées *facteur extérieure* et *facteur intérieure* de f.

Remarque. Le facteur U_f tient compte des zéros de f dans $\mathbb{D}$ et du comportement de f^* sur $\mathbb{T}$ tandis que le facteur Q_f ne dépend que des valeurs de $|f^*|$ sur $\mathbb{T}$.

5 Le théorème de Müntz-Szasz

Dans toutes cette partie $I = [0, 1]$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ nous noterons t^λ l'application $t \in I \mapsto t^\lambda$.

D'après le théorème de Weierstrass $\mathrm{vect}\left\{1, t, t^2, t^3, \ldots\right\}$ est dense dans $C(I)$. Cela emmène à se poser la question, pour quels $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$ réels, l'ensemble $\mathrm{vect}\left\{1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, t^{\lambda_3}, \ldots\right\}$ est dense dans $C(I)$? Le théorème suivant apporte une réponse à cette question.

Théorème 5.1. (Müntz-Szasz) Soient $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ et posons $X := \overline{\mathrm{vect}_{C(I)}}\left\{1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, t^{\lambda_3}, \ldots\right\}$.

1. Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n} = \infty$, on a $X = C(I)$.
2. Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n} < \infty$, alors $X \neq C(I)$ (X ne contient pas la fonction t^λ où $\lambda \neq \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$).

Avant de voir la preuve de ce théorème, énonçons un lemme.

Lemme 5.2. Soient $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \cdots$ des réels. Si $\sum_{n\geq 1} 1/\lambda_n = \infty$ et si μ est une mesure de Borel complexe sur I telle que

$$\int_I t^{\lambda_n}d\mu(t) = 0,\ n \in \mathbb{N}^*$$

alors

$$\int_I t^k d\mu(t) = 0,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Démonstration. Par hypothèse remarquons que la nullité en 0 des fonctions à intégrer dans nos deux intégrales nous permet de supposer que μ est portée par $]0,1]$.

Commençons par poser pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} z \geq 0$

$$f(z) = \int_I t^z d\mu(t).$$

Par définition de f et par hypothèse on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$f(\lambda_n) = 0.$$

De plus, f est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 0\}$, en effet :

- Pour tout $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 0\}$, $t \mapsto t^z$ est mesurable.
- Pour tout $t \in]0,1]$ (car μ porté par $]0,1]$) on a pour tout $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 0\}$, $|t^z| \leq 1$.

Donc f est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 0\}$.

Posons

$$g(z) := f\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

La fonction $g \in H^\infty(\mathbb{D})$ et $g(\alpha_n) = 0$, où $\alpha_n = \frac{\lambda_n - 1}{\lambda_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour montrer le résultat il suffit de montrer que $g = 0$. Distinguons deux cas :

- Supposons qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $\lambda_n \geq 1$, nous avons

$$1 - |\alpha_n| = \frac{\lambda_n + 1 - \lambda_n - 1}{\lambda_n + 1} = \frac{2}{\lambda_n + 1}.$$

  Donc $\frac{2}{\lambda_n+1} \geq \frac{1}{\lambda_n}$ et puisque $\sum_{n \geq N} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$ nous avons $\sum_{n\geq 1} 1 - |\alpha_n| = \infty$.
- Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous ayons $\lambda_n < 1$. Nous avons

$$1 - |\alpha_n| = \frac{\lambda_n + 1 - 1 + \lambda_n}{\lambda_n + 1} = \frac{2\lambda_n}{\lambda_n + 1} > \lambda_n$$

  $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est croissante majorée et strictement positive, donc converge vers une limite non nulle, donc $\sum_{n\geq 1} \lambda_n = \infty$ ainsi $\sum_{n \geq 1} 1 - |\alpha_n| = \infty$.

Finalement la contraposé du corollaire 3.9 et la théorème 4.6 donnent que $g = 0$, donc $f = 0$ et ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f(k) = 0$ ce qui conclut la preuve de ce lemme. □

Démonstration. D'après le théorème 9.2 de l'annexe, une fonction $\varphi \in C(I) \backslash X$ si et seulement s'il existe une forme linéaire continue sur $C(I)$, ne s'annulant pas en φ, mais nulle sur tout X.

D'après le théorème de représentation de Riesz (théorème 9.23), toute forme linéaire continue sur $C(I)$ s'obtient par intégration par rapport à une mesure de Borel complexe sur I. Ainsi le lemme et la première remarque 5.2 établissent que pour tout $k \geq 1$, t^k appartient à X et donc, puisque $1 \in X$ tous les polynômes appartiennent à X. Le théorème de Weierstrass permet alors de conclure $X = C(I)$. Ce qui démontre 1.

Pour montrer 2. il suffit de construire une mesure de Borel complexe μ telle que pour $z \in \mathbb{C}$ $f(z) = \displaystyle\int_I t^z d\mu(t)$ soit une fonction holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > -1\}$ et telle que $f(\lambda_k) = 0$ pour tout k et $f(0) = 0$. Soit

$$f(z) := \frac{z}{(2+z)^3} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - z}{2 + \lambda_n + z}, \qquad \operatorname{Re} z > -1.$$

Ce produit converge, en effet, soit K un compact ne contenant aucun des points $-\lambda_n - 2$,

$$\left|1 - \frac{\lambda_n - z}{2 + \lambda_n + z}\right| = \left|\frac{2z+2}{2+\lambda_n+z}\right| \leq \left|\frac{2\sup_K(z) + 2}{2 + \lambda_n + \operatorname{Re} z}\right| \leq \left|\frac{2\sup_K(z)+2}{1+\lambda_n}\right| \leq \left|\frac{2\sup_K(z)+2}{\lambda_n}\right|,$$

$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\lambda_n}$ converge donc $\sum_{n\geq 1} 1-\frac{\lambda_n - z}{2+\lambda_n+z}$ converge uniformément sur K, donc $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n-z}{2+\lambda_n+z}$ converge uniformément sur tout compact K. La fonction f est donc méromorphe sur le plan complexe, ayant ses pôles en -2 et $-\lambda_n - 2$ et ses zéros en $0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ De plus, nous pouvons vérifier que

$$\frac{|\lambda_n - z|}{|2+\lambda_n+z|} < 1.$$

Donc $|f(z)| \leq 1$ pour $\operatorname{Re} z \geq -1$. La restriction de f à la droite $\operatorname{Re} z = -1$ appartient à L^1. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} z > -1$, soit γ le chemin suivant :

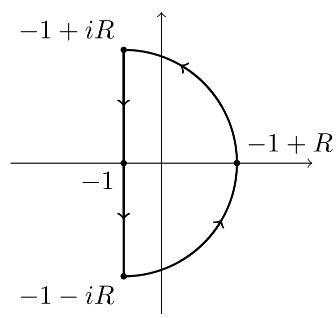

FIGURE 4 – Demi-cercle de centre -1 et de rayon R

Où $R > 1+|z|$. D'après la formule de Cauchy nous avons

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)}{z-\xi}d\xi = \frac{-1}{2\pi}\int_{-1+iR}^{-1+iR}\frac{f(-1+is)}{-1+is-z}ds - \frac{1}{2\pi}\int_{-1+iR}^{-1+iR}\frac{f(e^{is})}{e^{is}-z}se^{is}ds$$

le second terme tend vers 0 lorsque R tend vers l'infini. En remarquant que $\frac{1}{1+z-is} = \int_0^1 t^{z-is}dt$ nous avons

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(-1+is)}{-1+is-z}ds - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(-1+is)\int_0^1 t^{z-is}dtds.$$

Par Fubini pour les fonctions mesurables positives nous avons

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(-1+is)|\int_0^1\left|t^{z-is}\right|dtds = \int_{-\infty}^{\infty}|f(-1+is)|ds\int_0^1\left|t^{\operatorname{Re}(z)}\right|dt < \infty$$

donc

$$f(z) = \int_0^1 t^z\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(-1+is)e^{-is\log t}dsdt = \int_0^1 t^z\widehat{g}(\log t)dt,$$

où $g(s) := f(-1+is)$ et $d\mu(t) := \widehat{g}(\log t)dt$, ce qui termine 2.

$\square$

6 Mesure de Carleson

6.1 Définition et premières propriétés

Définition 6.1. Une mesure de Borel positive ν sur $\mathbb{D}$ est dite une *mesure de Carleson* sur $H^2(\mathbb{D})$, s'il existe une constante C telle que pour tout $f \in H^2(\mathbb{D})$ nous avons

$$\int_{\mathbb{D}}|f|^2 d\nu \leq C\|f\|_2^2$$

Ainsi, dire que ν est une mesure de Carleson revient à dire que $H^2(\mathbb{D})$ s'injecte continûment dans $L^2(\mathbb{D},\nu)$. Rappelons que nous désignons par $K_w(z) = K(z,w) = 1/(1-\bar{w}z)$ le noyau reproduisant en w (voir définition 4.18).

6.2 Le théorème de Carleson

Soit $I \subset \mathbb{T}$, il existe $\theta_0, h \in]0,\pi[$ tels que $I := \left\{e^{i\theta} \mid \theta \in [\theta_0, \theta_0+h]\right\}$. Nous définissons la *boite de Carleson* en I par :

$$S(I) := \left\{re^{i\theta} \mid 1-h \leq r < 1,\ \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0+h\right\} = \left\{re^{i\theta} \mid e^{i\theta} \in I,\ 1-|I| \leq r < 1\right\}$$

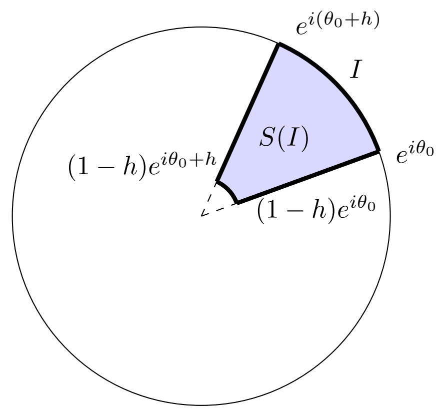

FIGURE 5 – Boite de Carleson

Théorème 6.2. (Carleson) Soit ν une mesure de Borel positive finie sur $\mathbb{D}$. μ est une mesure de Carleson sur $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si il existe A une constante telle que pour tout $I \subset \mathbb{T}$

$$\nu(S(I)) \leq A|I|.$$

6.2.1 Démonstration du sens direct

Démonstration. (sens direct du théorème 6.2). Supposons que ν soit une mesure de Carleson. Prenons $z_0 = \rho e^{i\alpha} \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ et considérons la fonction de $H^2(\mathbb{D})$

$$g(z) = (1-\overline{z_0}z)^{-1}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Nous avons $\|g\|_2 = \left(1-\rho^2\right)^{-1/2}$. et puisque ν est une mesure de Carleson, il existe une constante C telle que

$$\int_{\mathbb{D}} |g(z)|^2 d\mu(z) \leq C\frac{1}{1-\rho^2} \leq C\frac{1}{h}, \tag{*}$$

où $h := 1-\rho$. Pour $z \in S(h) := \left\{re^{i\theta} \in \mathbb{D} \mid \rho \leq r < 1 \text{ et } \alpha - h/2 \leq \theta \leq \alpha + h/2\right\}$

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\rho}e^{i\alpha} - z\right| \leq \left|\frac{1}{\rho}e^{i\alpha} - \rho e^{i(\alpha+h/2)}\right| = \left|\frac{1}{\rho} - \rho e^{ih/2}\right| &= \frac{1}{\rho}\left(1-2\rho^2\cos(h/2)+\rho^4\right)^{1/2} \\ &\leq 1-2\rho^2\left(1-h^2/4\right)+\rho^4 = \frac{11}{2}h^2 - 5h^3 + \frac{3}{2}h^4 \leq 14h^2.\end{aligned}$$

Puisque $|g(z)| = \frac{1}{\rho\left|\frac{1}{\rho}e^{i\alpha}-z\right|}$, nous avons

$$|g(z)|^2 \geq 1/14h^2.$$

En reprenant l'inégalité (*) nous obtenons que $\mu(S) \leq 14Ch$ ce qui termine le sens direct. □

6.2.2 Démonstration du sens réciproque

La démonstration du sens réciproque est plus difficile, nous allons devoir établir plusieurs résultat pour achever la preuve du théorème de Carleson.

Dans un premier temps notre but sera d'établir une caractérisation des mesures de Carleson.

Lemme 6.3. (Test de Vinogradov-Seničkin) Soient Z un espace mesurable, μ une mesure positive sur Z et k une fonction mesurable positive sur $Z \times Z$. Supposons qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\int_Z k(s,t)k(s,x)d\mu(s) \leq c(k(t,x) + k(x,t)) \quad \mu - p.p.(t,x) \in Z \times Z$$

Alors si $g : Z \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, positive telle que

$$Q_g := \iint_{Z\times Z} k(s,t)g(s)g(t)d\mu(s)d\mu(t) < +\infty$$

nous avons $Q_g \leq 2c\|g\|^2_{L^2(\mu)}$.

Démonstration. Soit $g : Z \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive telle que $Q_g < \infty$. En utilisant le théorème de Fubini à plusieurs reprises nous avons

$$\begin{aligned}
Q_g^2 &= \left(\int_Z g(s)\left(\int_Z k(s,t)g(t)d\mu(t)\right)d\mu(s)\right)^2 \\
&\leq \|g\|^2_{L^2(\mu)} \left\|\int_Z k(s,t)g(t)d\mu(t)\right\|^2_{L^2(\mu)} \\
&= \|g\|^2_{L^2(\mu)} \int_Z \left|\int_Z k(s,t)g(t)d\mu(t)\right|^2 d\mu(s) \\
&= \|g\|^2_{L^2(\mu)} \int_Z \left(\iint_{Z\times Z} k(s,t)k(s,x)g(t)g(x)d\mu(t)d\mu(x)\right) d\mu(s) \\
&= \|g\|^2_{L^2(\mu)} \iint_{Z\times Z} g(t)g(x)\left(\int_Z k(s,t)k(s,x)d\mu(s)\right) d\mu(t)d\mu(x) \\
&\leq c\|g\|^2_{L^2(\mu)} \iint_{Z\times Z} (k(t,x)+k(x,t))g(t)g(x)d\mu(t)d\mu(x) \\
&= 2c\|g\|^2_{L^2(\mu)} \iint_{Z\times Z} k(t,x)g(t)g(x)d\mu(t)d\mu(x) = 2c\|g\|^2_{L^2(\mu)} Q_g.
\end{aligned}$$

□

Nous avons le théorème suivant :

Théorème 6.4. Soit ν une mesure borélienne, positive et finie sur $\mathbb{D}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. ν est une mesure de Carleson.
2. $a := \sup\limits_{\zeta\in\mathbb{D}} \left(1-|\zeta|^2\right)^{1/2} \|K_\zeta\|_{L^2(\nu)} < \infty$.
3. $C := \sup\limits_{\zeta\in \mathrm{supp}(\nu)} \left(1-|\zeta|^2\right)^{1/2} \|K_\zeta\|_{L^2(\nu)} < \infty$

De plus, $C \leq a \leq \|P\| \leq 4\sqrt{2}C$.

Démonstration. 1. $\Longrightarrow$ 2. : Il existe une constante $k > 0$ telle que, pour toute fonction $f \in H^2$, nous ayons $\|f\|_{L^2(\nu)} \leq k\|f\|_{H^2}$. En particulier, pour $f = \left(1-|\zeta|^2\right)^{1/2} K_\zeta, (\zeta \in \mathbb{D})$ nous obtenons

$\left(1-|\zeta|^2\right)^{1/2}\|K_\zeta\|_{L^2(\nu)}\leq k$, car $\|K_\zeta\|_2=\left(1-|\zeta|^2\right)^{-1/2}$, ce qui donne 2.

2. $\Longrightarrow$ 3. : est direct.

3. $\Longrightarrow$ 1. : Posons pour toute fonction $g\in L^2(\nu)$,

$$L(g)\left(e^{it}\right):=\int_{\mathbb{D}} g(z)P\left(ze^{-it}\right)d\nu(z),\quad e^{it}\in\mathbb{T}$$

où $P\left(re^{i\theta}\right):=P_r(\theta)$ pour $re^{i\theta}\in\mathbb{D}$. Montrons que L est un opérateur continu de $L^2(\nu)$ dans $L^2(\mathbb{T})$ et que son adjoint est P. En remplaçant $L(g)$ par son expression et en utilisant Fubini nous avons

$$\|L(g)\|^2_{L^2(\mathbb{T})}=\iint_{\mathbb{D}\times\mathbb{D}} g(z)\overline{g(\omega)}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P\left(ze^{-it}\right)P\left(\omega e^{-it}\right)dt\right)d\nu(z)d\nu(\omega)$$

Or, les noyaux de Poisson sont des fonctions harmoniques donc

$$P(z\overline{\omega})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P\left(ze^{-it}\right)P\left(\overline{\omega}e^{it}\right)dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P\left(ze^{-it}\right)P\left(\omega e^{-it}\right)dt,$$

ainsi

$$\begin{aligned}\|L(g)\|^2_{L^2(\mathbb{T})}&=\iint_{\mathbb{D}\times\mathbb{D}} g(z)\overline{g(\omega)}P(\omega\bar{z})d\nu(z)d\nu(\omega)\\&\leq\iint_{\mathbb{D}\times\mathbb{D}}|g(z)||g(\omega)|P(\omega\bar{z})d\nu(z)d\nu(\omega)\\&=\int_{\mathbb{D}}|g(z)|\left(\int_{|\omega|\leq|z|}|g(\omega)|P(\omega\bar{z})d\nu(\omega)\right)d\nu(z)+\\&\quad\int_{\mathbb{D}}|g(z)|\left(\int_{|\omega|>|z|}|g(\omega)|P(\omega\bar{z})d\nu(\omega)\right)d\nu(z).\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Fubini dans la seconde intégrale, nous obtenons

$$\begin{aligned}\|L(g)\|^2_{L^2(\mathbb{T})}\leq&\int_{\mathbb{D}}|g(z)|\left(\int_{|\omega|\leq|z|}|g(\omega)|P(\omega\bar{z})d\nu(\omega)\right)d\nu(z)+\\&\int_{\mathbb{D}}|g(\omega)|\left(\int_{|z|\leq|\omega|}|g(z)|P(z\bar{\omega})d\nu(z)\right)d\nu(\omega)\\=&2\int_{\mathbb{D}}|g(z)|\left(\int_{|\omega|\leq|z|}|g(\omega)|P(\omega\bar{z})d\nu(\omega)\right)d\nu(z).\end{aligned}$$

En posant

$$k(z,\omega):=\begin{cases}\dfrac{P(\omega\bar{z})}{1+|\omega z|}=\frac{1-|z\omega|}{|1-\bar{z}\omega|^2} & \text{si } |z|\geq|\omega|\\[2ex] 0 & \text{si } |z|<|\omega|,\end{cases}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}\|L(g)\|^2_{L^2(\mathbb{T})}&\leq 2\int_{\mathbb{D}}\int_{|\omega|\leq|z|}|g(z)||g(\omega)|(1+|\omega z|)k(z,\omega)d\nu(\omega)d\nu(z)\\&\leq 4\iint_{\mathbb{D}\times\mathbb{D}}|g(z)||g(\omega)|k(z,\omega)d\nu(\omega)d\nu(z).\end{aligned}\tag{*}$$

Nous allons appliquer le lemme de Vinogradov-Seničkin (6.3) à l'espace $(\mathbb{D},\nu)$ et au noyau k. D'abord, remarquons que pour $s,t,x\in\mathbb{D}$, nous avons

$$|1-x\bar{t}| = |1-s\bar{t}+s\bar{t}-x\bar{t}| \leq |1-s\bar{t}|+|\bar{t}||s-x| \leq |1-s\bar{t}|+|s-x| \leq |1-s\bar{t}|+|1-s\bar{x}|,$$

d'où

$$\frac{|1-x\bar{t}|}{|1-x\bar{t}|}\frac{1}{|1-s\bar{t}||1-s\bar{x}|} \leq \frac{1}{|1-x\bar{t}|}\frac{|1-s\bar{x}|+|1-s\bar{t}|}{|1-s\bar{t}||1-s\bar{x}|} = \frac{1}{|1-x\bar{t}|}\left(\frac{1}{|1-s\bar{t}|}+\frac{1}{|1-s\bar{x}|}\right)$$

ce qui donne finalement

$$\begin{aligned}\frac{1}{|1-s\bar{t}|^2|1-s\bar{x}|^2} &\leq \frac{1}{|1-x\bar{t}|^2}\left(\frac{1}{|1-s\bar{t}|}+\frac{1}{|1-s\bar{x}|}\right)^2\\ &= \frac{1}{|1-x\bar{t}|^2}\left(\frac{1}{|1-s\bar{t}|^2}+\frac{2}{|1-s\bar{t}||1-s\bar{x}|}+\frac{1}{|1-s\bar{x}|^2}\right)\\ &\leq \frac{1}{|1-x\bar{t}|^2}\left(\frac{2}{|1-s\bar{t}|^2}+\frac{2}{|1-s\bar{x}|^2}\right)\\ &= \frac{2}{|1-x\bar{t}|^2}\left(\frac{1}{|1-s\bar{t}|^2}+\frac{1}{|1-s\bar{x}|^2}\right).\end{aligned}$$

Nous allons maintenant vérifier les hypothèses du lemme de Vinogradov-Seničkin. Nous avons pour $|t|\geq|x|$ tels que $t,x\in\operatorname{supp}(\nu)$:

$$\int_{\mathbb{D}} k(s,t)k(s,x)d\nu(s) = \int_{|s|\geq|t|}\frac{1-|st|}{|1-s\bar{t}|^2}\frac{1-|sx|}{|1-s\bar{x}|^2}d\nu(s)$$

$$\leq \frac{2}{|1-x\bar{t}|^2}\left(\int_{|s|\geq|t|}\frac{(1-|st|)(1-|sx|)}{|1-s\bar{t}|^2}d\nu(s)+\int_{|s|\geq|t|}\frac{(1-|st|)(1-|sx|)}{|1-s\bar{x}|^2}d\nu(s)\right).$$

En utilisant les estimations suivantes $1-|st|\leq 1-|t|^2\leq 1-|x|^2$ et $1-|sx|\leq 1-|tx|$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} k(s,t)k(s,x)d\nu(s) &\leq \frac{2(1-|xt|)}{|1-x\bar{t}|^2}\left(\int_{|s|\geq|t|}\frac{1-|t|^2}{|1-s\bar{t}|^2}d\nu(s)+\int_{|s|\geq|x|}\frac{1-|x|^2}{|1-s\bar{x}|^2}d\nu(s)\right)\\ &\leq 2k(t,x)\left(\left(1-|t|^2\right)\|K_t\|^2_{L^2(\nu)}+\left(1-|x|^2\right)\|K_x\|^2_{L^2(\nu)}\right)\\ &\leq 4C^2k(t,x).\end{aligned}$$

Si $|t|\leq|x|, t,x\in\operatorname{supp}(\nu)$, nous obtenons de manière symétrique

$$\int_{\mathbb{D}} k(s,t)k(s,x)d\nu(s)\leq 4C^2k(x,t)$$

d'où si $t,x\in\operatorname{supp}(\nu)$, nous avons

$$\int_{\mathbb{D}} k(s,t)k(s,x)d\nu(s)\leq 4C^2(k(t,x)+k(x,t)).$$

Pour appliquer le lemme de Vinogradov-Seničkin, il reste à vérifier que pour toute fonction $g\in L^2(\nu)$ nous avons

$$Q_g := \iint_{\mathbb{D}\times\mathbb{D}}|g(s)||g(t)|k(s,t)d\nu(t)d\nu(s)<\infty$$

Pour cela, écrivons (en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz)

$$\begin{aligned}
Q_g &= \int_{\mathbb{D}} |g(s)| \left(\int_{\mathbb{D}} |g(t)| k(s,t) d\nu(t) \right) d\nu(s) \\
&\leq \int_{\mathbb{D}} |g(s)| \left\{ \left(\int_{\mathbb{D}} |g(t)|^2 d\nu(t) \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{D}} k(s,t)^2 d\nu(t) \right)^{1/2} \right\} d\nu(s) \\
&= \|g\|_{L^2(\nu)} \int_{\mathbb{D}} |g(s)| \left(\int_{\mathbb{D}} k(s,t)^2 d\nu(t) \right)^{1/2} d\nu(s) \\
&\leq \|g\|^2_{L^2(\nu)} \left(\iint_{\mathbb{D}\times\mathbb{D}} k(s,t)^2 d\nu(t) d\nu(s) \right)^{1/2} \\
&= \|g\|^2_{L^2(\nu)} \left\{ \int_{\mathbb{D}} \left(\int_{|s|\geq|t|} \frac{1-|st|}{|1-\bar{s}t|^2} d\nu(t) \right) d\nu(s) \right\}^{1/2} \\
&\leq \|g\|^2_{L^2(\nu)} \left\{ \int_{\mathbb{D}} \left(\int_{|s|\geq|t|} \frac{1-|t|^2}{|1-\bar{s}t|^2} d\nu(t) \right) d\nu(s) \right\}^{1/2} \\
&\leq \|g\|^2_{L^2(\nu)} \left\{ \int_{\mathbb{D}} \left(\left(1-|t|^2\right) \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-\bar{s}t|^2} d\nu(s) \right) d\nu(t) \right\}^{1/2} \\
&\leq \|g\|^2_{L^2(\nu)} C\sqrt{\nu(\mathbb{D})} < \infty.
\end{aligned}$$

Donc d'après lemme de Vinogradov-Seničkin , si $g \in L^2(\nu)$, $Q_g \leq 8C^2\|g\|^2_{L^2(\nu)}$. Ainsi avec l'inégalité (*) nous avons $\|L(g)\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \leq 4Q_g \leq 32C^2\|g\|^2_{L^2(\nu)}$, ceci montre que l'opérateur L est un opérateur continu de $L^2(\nu)$ dans $L^2(\mathbb{T})$, de norme $\|L\| \leq 4\sqrt{2}C$. Vérifions maintenant que $L^* = P$. Pour $f \in L^2(\mathbb{T})$ et $g \in L^2(\nu)$, nous avons

$$\begin{aligned}
\langle f, L(g)\rangle_{L^2(\mathbb{T})} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(e^{it}\right) \overline{\int_{\mathbb{D}} g(z) P\left(ze^{-it}\right) d\nu(z)} dt \\
&= \int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(e^{it}\right) P\left(ze^{-it}\right) dt \right) \overline{g(z)} d\nu(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} P(f)(z)\overline{g(z)} d\nu(z) = \langle P(f), g\rangle_{L^2(\nu)}.
\end{aligned}$$

Ceci montre donc que $L^* = P$. Par conséquent, P est un opérateur continu de $L^2(\mathbb{T})$ dans $L^2(\nu)$ on a $\|P\| = \|L^*\| = \|L\| \leq 4\sqrt{2}C$ et $PL^2(\mathbb{T}) \subset L^2(\nu)$. D'après le théorème 4.16 nous avons $H^2(\mathbb{D}) = PH^2(\mathbb{T}) \subset PL^2(\mathbb{T}) \subset L^2(\nu)$, donc ν est une mesure de Carleson.

Pour terminer la preuve, il reste à démontrer l'inégalité $a \leq \|P\|$. Pour cela, il suffit de remarquer que $P\left(K_\zeta\right) = K_\zeta,\ \zeta \in \mathbb{D}$. □

Lemme 6.5. Soit ν une mesure de Borel sur $\mathbb{D}$, posons $B := \sup\left\{l^{-1}\nu(\mathbb{D}\cap D(\zeta,l)) : l > 0, \zeta \in \mathbb{T}\right\}$, alors $C^2 \leq B$, où $C = \sup\limits_{\zeta\in\operatorname{supp}(\nu)} \left(1-|\zeta|^2\right)^{1/2} \|K_\zeta\|_{L^2(\nu)}$.

Démonstration. Soit $\zeta \in \mathbb{T}, 0 \leq r \leq 1$ et $\lambda = r\zeta,\ \lambda \in \operatorname{supp}\nu$. Posons

$$e_\lambda^x := \left\{ z \in \mathbb{D}\ :\ \frac{1-|\lambda|^2}{|1-\bar{\lambda}z|^2} > x \right\} = \left\{ z \in \mathbb{D} : |1-\bar{\lambda}z| < \sqrt{\frac{1-r^2}{x}} \right\},$$

puisque $|1-\bar{\lambda}z| = |\zeta - rz|$, $e_\lambda^x = \left\{ z \in \mathbb{D} : |(\zeta - z) + z(1-r)| < \sqrt{\dfrac{1-r^2}{x}} \right\}$ et

$$\mathbb{D}\cap D\left(\zeta, \sqrt{\frac{1-r^2}{x}} - (1-r)\right) \subset e_x^\lambda \subset \mathbb{D}\cap D\left(\zeta, \sqrt{\frac{1-r^2}{x}} + (1-r)\right). \qquad (*)$$

Soit m_λ la fonction de répartition :

$$m_\lambda(x) = \nu\left(\left\{z \in \mathbb{D} : \frac{1-|\lambda|^2}{|1-\bar{\lambda}z|^2} > x\right\}\right) = \nu\left(e_\lambda^x\right), \qquad x \geq 0.$$

Nous avons

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{1-|\lambda|^2}{|1-\bar{\lambda}z|^2} d\nu(z) = \int_0^\infty m_\lambda(x)dx = \int_0^\infty \nu\left(e_x^\lambda\right) dx.$$

Remarquons que si $x \geq \frac{1+r}{1-r}$ alors $e_\lambda^x = \emptyset$, en effet

$$x < \frac{1-|\lambda|^2}{|1-\bar{\lambda}z|^2} = \frac{1-r^2}{|1-r\bar{\zeta}z|^2} \leq \frac{1-r^2}{(1-r)^2} = \frac{1+r}{1-r}.$$

Donc

$$\int_0^\infty \nu\left(e_x^\lambda\right) dx = \int_0^{\frac{1+r}{1-r}} \nu\left(e_x^\lambda\right) dx.$$

D'après (*) nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} \frac{1-|\lambda|^2}{|1-\bar{\lambda}z|^2} d\nu(z) = \int_0^{\frac{1+r}{1-r}} \nu\left(e_x^\lambda\right) dx &\leq \int_0^{\frac{1+r}{1-r}} \nu\left(\mathbb{D} \cap D\left(\zeta, \sqrt{\frac{1-r^2}{x}} + (1-r)\right)\right) dx \\ &\leq B \int_0^{\frac{1+r}{1-r}} \sqrt{\frac{1-r^2}{x}} + (1-r)dx \leq 6Bx\end{aligned}$$

Nous concluons en prenant le $\sup$ pour $\lambda \in \operatorname{supp}(\nu)$. $\square$

Désormais nous avons tous les outils pour terminer la démonstration du théorème de Carleson (théorème 6.2) :

Démonstration. (sens réciproque du théorème 6.2) Soit ν une mesure de Borel positive finie sur $\mathbb{D}$ telle que $\nu(S(I)) \leq A|I|$. Soit ζ le milieu de I nous avons $\mathbb{D} \cap D(\zeta, |I|) \subset S(I)$, donc $\nu(\mathbb{D} \cap D(\zeta, |I|)) \leq \nu(S(|I|) \leq A|I|$ et donc $\sup\left\{l^{-1}\nu(\mathbb{D} \cap D(\zeta, l)) : l > 0, \zeta \in \mathbb{T}\right\} < \infty$. D'après le lemme 6.5 nous avons $C < \infty$, d'après le théorème 6.4 nous avons que ν est une mesure de Carleson. $\square$

7 Sous espace invariant du shift

7.1 Introduction et définitions

Soit T un opérateur sur X un espace de Banach, nous disons qu'un sous espace fermé E de X est *invariant* par T (ou T-*invariant*) lorsque $T(E) \subset E$. Il est dit *non trivial* si $E \neq \{0\}$ et si $E \neq X$. Nous notons $\mathrm{Lat(T)}$ l'ensemble des sous espaces invariants de T.

Le but de cette section est de décrire les sous espaces invariants fermés non triviaux pour l'opérateur S, le *shift* sur l'espace de Hardy par la multiplication par z. Plus précisément,

$$Sf(z) = zf(z), \qquad f \in H^2(\mathbb{D}).$$

Notons que

$$Sf(z) = zf(z) = \sum_{n\geq 1} \widehat{f}(n-1)z^n, \qquad f \in H^2(\mathbb{D}).$$

Nous pouvons identifier Sf à la suite $\left(\widehat{f}(n-1)\right)_{n\geq 1}$. Plus précisément, soient

$$T: \begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{N}) \\ (a_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & (a_{n-1})_{n\geq 0} \end{array} \quad \text{et} \quad \varphi: \begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{D}) \\ (a_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & f = \sum_{n\geq 0} a_n z^n. \end{array}$$

L'opérateur T est le *shift* sur $\ell^2(\mathbb{N})$, c'est une isométrie, et si nous désignons le *spectre ponctuelle* de T par $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (T - \lambda Id) \text{ non injective }\}$ et le *spectre* de T par $\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda Id) \text{ non inversible }\}$, nous avons $\sigma_p(T) = \emptyset$ et $\sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}$. De plus, l'opérateur φ est un isomorphisme isométrique d'après le théorème 4.16. Nous avons le lemme suivant :

Lemme 7.1. Nous avons $S = \varphi \circ T \circ \varphi^{-1}$. De plus $\sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}$ et $\sigma_p(S) = \emptyset$.

Démonstration. Soit $f \in H^2(\mathbb{D})$ définie par $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ avec $a = (a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$. Donc $\varphi^{-1}(f) = a$ et $T \circ \varphi^{-1}(f) = (a_{n-1})_{n\geq 0}$ avec $a_{-1} = 0$. Finalement $S(f) = g$ avec

$$g(z) := \sum_{n\geq 0} a_{n-1} z^n = z f(z).$$

Nous avons $S - \lambda Id = \varphi \circ (T - \lambda Id) \circ \varphi^{-1}$ avec φ et φ^{-1} inversibles, il est clair que $T - \lambda Id$ est inversible si et seulement si $S - \lambda Id$ est inversible. Ainsi $\sigma(S) = \sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}$.

D'autre part, nous avons

$$(S - \lambda Id) f = 0 \Leftrightarrow \varphi \circ (T - \lambda Id) \circ \varphi^{-1} f = 0 \Leftrightarrow (T - \lambda Id) \circ \varphi^{-1} f = 0,$$

l'injectivité de $T - \lambda Id$ et le fait que φ^{-1} soit injective, nous garantit que $S - \lambda Id$ est injective et donc $\sigma_p(T) = \emptyset$. $\square$

Enfin le lemme suivant nous donne le lien entre le shift sur $\ell^2(\mathbb{N})$ et $H^2(\mathbb{D})$

Lemme 7.2. $\mathrm{Lat}(T) = \left\{\varphi^{-1}(\mathcal{M}) \mid \mathcal{M} \in \mathrm{Lat}(S)\right\}$.

Démonstration. φ^{-1} est une application linéaire isométrique, si $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel fermé, il en est de même pour $\varphi^{-1}(\mathcal{M})$. De plus, si $\mathcal{M} \in \mathrm{Lat}(S)$, on a $\left(\varphi \circ T \circ \varphi^{-1}\right)(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$ et donc $T\left(\varphi^{-1}(\mathcal{M})\right) \subset \varphi^{-1}(\mathcal{M})$. Par conséquent nous avons $\left\{\varphi^{-1}(\mathcal{M}) : \mathcal{M} \in \mathrm{Lat}(S)\right\} \subset \mathrm{Lat}(T)$.

D'autre part, si $\mathcal{N} \in \mathrm{Lat}(T)$, posons $\mathcal{M} = \varphi(\mathcal{N})$. Remarquons que $S(\mathcal{M}) = \left(\varphi \circ T \circ \varphi^{-1}\right)(\mathcal{M}) = (\varphi \circ T)(\mathcal{N}) \subset \varphi(\mathcal{N}) = \mathcal{M}$. Par conséquent tout élément $\mathcal{N} \in \mathrm{Lat}(T)$ est de la forme $\varphi^{-1}(\mathcal{M})$ où $\mathcal{M} \in \mathrm{Lat}(S)$. Ainsi nous avons $\mathrm{Lat}(T) = \left\{\varphi^{-1}(\mathcal{M}) \mid \mathcal{M} \in \mathrm{Lat}(S)\right\}$. $\square$

7.2 Description des sous espaces invariants du shift sur $H^2(\mathbb{D})$

D'après le lemme 7.2, si nous connaissons $\mathrm{Lat}(S)$ alors nous connaîtrons $\mathrm{Lat}(T)$. Le but de cette partie est alors de décrire $\mathrm{Lat}(S)$.

Lemme 7.3. Soit Φ une fonction intérieure. Alors $\Phi H^2(\mathbb{D}) := \left\{\Phi f \mid f \in H^2(\mathbb{D})\right\} \in \mathrm{Lat}(S)$.

Démonstration. $\Phi H^2(\mathbb{D})$ est un sous-espace vectoriel de $H^2(\mathbb{D})$. Montrons que $\Phi H^2(\mathbb{D})$ est fermé dans $H^2(\mathbb{D})$. Remarquons que $\Phi H^2(\mathbb{D})$ est l'image de $H^2(\mathbb{D})$ par l'opérateur M_Φ défini par $M_\Phi(f) = \phi f$ pour $f \in H^2(\mathbb{D})$. Puisque

$$\|\Phi f\|_{H^2(\mathbb{D})} = \|\Phi^* f^*\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|f^*\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|f\|_{H^2(\mathbb{D})}$$

donc M_Φ est une isométrie et donc son image est fermée dans $H^2(\mathbb{D})$ (car $H^2(\mathbb{D})$ est complet et M_ϕ est une isométrie donc $M_\phi\left(H^2(\mathbb{D})\right)$ est complet donc fermé). Ainsi $\Phi H^2(\mathbb{D})$ est bien un sous espace vectoriel fermé dans $H^2(\mathbb{D})$. Remarquons qu'avec le lemme 7.1 nous avons

$$S\left(\Phi H^2(\mathbb{D})\right) = \left\{\alpha \Phi f \mid f \in H^2(\mathbb{D})\right\} \subset \left\{\Phi g \mid f \in H^2(\mathbb{D})\right\} = \Phi H^2(\mathbb{D})$$

car si $f \in H^2(\mathbb{D})$ alors $\alpha f \in H^2(\mathbb{D})$, en effet $\|\alpha f\|_{H^2(\mathbb{D})} = \|\alpha^* f^*\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|f^*\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|f\|_{H^2(\mathbb{D})}$. Finalement $\Phi H^2(\mathbb{D}) := \left\{\Phi f \mid f \in H^2(\mathbb{D})\right\} \in \mathrm{Lat}(S)$ lorsque Φ est une fonction intérieure. $\square$

Le prochain lemme énonce qu'il y a unicité (à constante multiplicative près de module 1) de la "représentation" de tout élément de $\mathrm{Lat}(S)$ de la forme $\Phi H^2(\mathbb{D})$ où Φ est une fonction intérieure.

Lemme 7.4. Soient Φ_1 et Φ_2 deux fonctions intérieures telles que $\Phi_1 H^2(\mathbb{D}) = \Phi_2 H^2(\mathbb{D})$. Alors il existe $c \in \mathbb{T}$ tel que $\Phi_1 = c\Phi_2$.

Démonstration. D'après le théorème 4.11, il existe $c_1, c_2 \in \mathbb{T}$, B_1 et B_2 deux produits de Blaschke associés à deux suites $\left(\alpha_n^1\right)_{n\geq 0}$ et $\left(\alpha_n^2\right)_{n\geq 0}$ de $\mathbb{D}$ (vérifiant $\sum_{n\geq 0} 1 - \left|\alpha_n^i\right| < \infty$ pour $i \in \{1,2\}$) et deux mesures μ_1, μ_2 positives et singulières par rapport à la mesure de Lebesgue tels que

$$\Phi_i(z) = c_i B_i(z) S_{\mu_i}(z)$$

Les fonctions intérieures singulières S_{μ_i} , $i = 1, 2$, sont associées au mesure singulières μ_i, $i = 1, 2$, elles ne s'annulent pas sur $\mathbb{D}$. Puisque $\Phi_1 H^2(\mathbb{D}) = \Phi_2 H^2(\mathbb{D})$, il existe $f_1, f_2 \in H^2(\mathbb{D})$ telles que

$$c_1 B_1 S_{\mu_1} f_1 = c_2 B_2 S_{\mu_2} \text{ et } c_1 B_1 S_{\mu_1} = c_2 B_2 S_{\mu_2} f_2$$

En particulier $B_1(z) = 0$ implique $B_2(z) = 0$ et réciproquement. De ce fait B_1 et B_2 ont la même suite de zéros avec même multiplicité ainsi $B_1 = B_2$, donc

$$c_1 S_{\mu_1} f_1 = c_2 S_{\mu_2} \text{ et } c_1 S_{\mu_1} = c_2 S_{\mu_2} f_2 \tag{*}$$

Puisque S_{μ_1} et S_{μ_2} sont des fonctions intérieures, $|f_i^*| = 1$ presque partout pour $i \in \{1,2\}$. Or $f_i \in H^2(\mathbb{D})$ pour $i \in \{1,2\}$, d'après le théorème 4.16, pour $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, nous avons :

$$f_i\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f_i^*\left(e^{it}\right) dt.$$

Par conséquent $|f_i(z)| \leq 1$ pour $z \in \mathbb{D}$ et $i \in \{1,2\}$. Nous déduisons de $(*)$ que

$$|S_{\mu_1}(z)| \leq |S_{\mu_2}(z)| \text{ et } |S_{\mu_2}(z)| \leq |S_{\mu_1}(z)|$$

pour $z \in \mathbb{D}$. Ainsi $|S_{\mu_1}(z)| = |S_{\mu_2}(z)|$ pour $z \in \mathbb{D}$. La fonction S_{μ_1}/S_{μ_2} étant holomorphe sur l'ouvert simplement connexe $\mathbb{D}$ et ne s'annulant pas il existe donc $\ell \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ tel que $S_{\mu_1}/S_{\mu_2} = e^{\ell}$ sur $\mathbb{D}$. De plus S_{μ_1} et S_{μ_2} sont des fonctions intérieurs donc de module 1 donc nous obtenons

$$\mathrm{Re}(l(z)) = \log\left|\frac{S_{\mu_1}(z)}{S_{\mu_2}(z)}\right| = 0$$

pour tout $z \in \mathbb{D}$. Par les équations de Cauchy-Riemann il existe λ tel que

$$\mathrm{Im}\left(\ell\left(z\right)\right) = i\lambda.$$

Ainsi en séparant la partie réelle et imaginaire de ℓ nous obtenons que $S_{\mu_1} = e^{i\lambda} S_{\mu_2}$ et donc il existe $c \in \mathbb{T}$ tel que $\Phi_1 = c\Phi_2$. □

Théorème 7.5. Soit $p \in]0, \infty]$ et soit $f \in H^p(\mathbb{D})$ non identiquement nulle alors $f^*\left(e^{it}\right) \neq 0$ presque partout. De plus, si $f, g \in H^p(\mathbb{D})$ sont telles que $f^*\left(e^{it}\right) = g^*\left(e^{it}\right)$ sur un sous-ensemble de $\mathbb{T}$ de mesure de Lebesgue strictement positive, nécessairement $f = g$.

Démonstration. Si $f^*\left(e^{it}\right) = 0$ sur un ensemble de mesure positive, alors $\log\left|f^*\left(e^{it}\right)\right| = -\infty$ ce qui contredit le fait que $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$. □

Nous somme en mesure d'énoncer le théorème de Beurling sur la description des sous espaces invariants du shift.

Théorème 7.6. (Beurling [5]) Soit $\mathcal{M} \neq \{0\}$ un élément de Lat (S). Alors il existe une fonction intérieure Φ (unique à une constante de module 1 près) tel que $\mathcal{M} = \Phi H^2(\mathbb{D})$.

Démonstration. L'unicité à une constante de module 1 près résulte du lemme 7.4. Soit $\mathcal{M} \neq \{0\}$ un élément de $\mathrm{Lat}(S)$ et posons

$$p := \inf\{k \geq 0 \mid \exists f \in \mathcal{M} \text{ avec } 0 \text{ qui est zéro d'ordre } k \text{ de } f\}$$

Soit $f \in \mathcal{M}$ de la forme $f(z) = \sum_{n \geq p} c_n z^n$ avec $c_p \neq 0$. Alors $f \notin S(\mathcal{M})$ en effet, par définition de p nous avons

$$S(\mathcal{M}) \subset \left\{g \in H^2(\mathbb{D}) \mid 0 \text{ zéro d'ordre au moins } p+1 \text{ de } g\right\},$$

et $f \notin \left\{g \in H^2(\mathbb{D}) \mid 0 \text{ zéro d'ordre au moins } p+1 \text{ de } g\right\}$. D'après le lemme 7.1, S est une isométrie (donc bijective sur son image) de plus $\mathcal{M}$ un sous-espace vectoriel fermé de $H^2(\mathbb{D})$ ainsi $S(\mathcal{M})$ est un sous-espace vectoriel fermé de $H^2(\mathbb{D})$, donc $\mathcal{M} = S(\mathcal{M}) \oplus \left(S(\mathcal{M})^\perp \cap \mathcal{M}\right)$. Nous savons que $S(\mathcal{M})^\perp \cap \mathcal{M} \neq \{0\}$ en effet, d'après ce qu'il précède il existe $f \in \mathcal{M} \backslash S(\mathcal{M})$ donc $\mathcal{M} \neq S(\mathcal{M})$ et donc $S(\mathcal{M})^\perp \cap \mathcal{M} \neq \{0\}$. De ce fait prenons $g \in \mathcal{M} \cap S(\mathcal{M})^\perp$, g non identiquement nulle, et posons $\Phi := g/\|g\|_2$. Montrons que Φ est une fonction intérieur. Puisque $\mathcal{M} \in \mathrm{Lat}(S)$ et $\Phi \in \mathcal{M}$, nous avons $S(\Phi) \in S(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$ et donc de proche en proche $S^n(\Phi) \in S(\mathcal{M})$ pour $n \geq 1$. Ainsi $\langle \Phi, S^n(\Phi) \rangle = 0$ pour tout $n \geq 1$ puisque par construction $\Phi \in S(\mathcal{M})^\perp$. Ainsi nous avons :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi^*\left(e^{it}\right) \overline{e^{int} \Phi^*\left(e^{it}\right)} dt = 0, \; n \geq 1.$$

En passant au conjugué dans l'expression précédente nous en déduisons que

$$\int_0^{2\pi} \left|\Phi^*\left(e^{it}\right)\right|^2 e^{int} dt = 0, n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}.$$

Posons $u\left(e^{it}\right) := \left|\Phi^*\left(e^{it}\right)\right|^2$. Puisque $\Phi \in H^2(\mathbb{D}), \Phi^* \in L^2(\mathbb{T})$ et donc $u \in L^1(\mathbb{T})$ et $\widehat{u}(n) = 0$ pour $n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ d'après ce qu'il précède. De plus

$$\widehat{u}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|\varphi^*\left(e^{it}\right)\right|^2 dt = \|\Phi\|_2^2 = 1$$

Remarquons que tous les coefficients de Fourier de f coïncident avec ceux de la fonction constante égale à 1, de plus la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ sur $L^1(\mathbb{T})$ est injective et $u\left(e^{it}\right) = 1$ presque partout, donc $\left|\Phi^*\left(e^{it}\right)\right| = 1$ presque partout. Puisque $\Phi \in H^2(\mathbb{D})$, d'après l'assertion 2. du théorème 4.16, pour $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, nous avons :

$$\Phi\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) \Phi^*\left(e^{it}\right) dt$$

En utilisant la proposition 2.2, nous avons $|\Phi(z)| \leq 1$ pour $z \in \mathbb{D}$ et donc $\Phi \in H^\infty(\mathbb{D})$. Finalement Φ est une fonction intérieure.

Désormais, montrons que $\mathcal{M} = \Phi H^2(\mathbb{D})$. Commençons par montrer que $\Phi H^2(\mathbb{D}) \subset \mathcal{M}$. Puisque $\Phi \in \mathcal{M}$ et $\mathcal{M} \in \mathrm{Lat}(S)$, d'après le lemme 7.1 $S^n(\Phi) = \alpha^n \Phi \in \mathcal{M}$ où $\alpha : z \mapsto z$ pour $z \in \mathbb{D}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous savons que $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel de $H^2(\mathbb{D})$, donc $P(\alpha)\Phi \in \mathcal{M}$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$. Soit $f \in H^2(\mathbb{D})$ d'après le théorème 4.16, il existe une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ de $\mathbb{C}$ telle que

$$\sum_{n \geq 0} |a_n|^2 < \infty \text{ et } f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \text{ si } z \in \mathbb{D}.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $P_k(z) := \sum_{n=0}^k a_n z^n$. Nous avons $\|f - P_k(\alpha)\|_2^2 = \sum_{n \geq k+1} |a_n|^2$, ce qui implique $\lim_{k \to \infty} \|f - P_k(\alpha)\|_2 = 0$ puisque $\sum_{n \geq 0} |a_n|^2 < \infty$. Or Φ est intérieure donc

$$\|\Phi f - \Phi P_k(\alpha)\|_{H^2(\mathbb{D})} = \|\Phi^*\left(f^* - P_k(\alpha)^*\right)\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|f^* - P_k(\alpha)^*\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|f - P_k(\alpha)\|_{H^2(\mathbb{D})}.$$

Par conséquent $\lim_{k\to\infty} \|\Phi f - \Phi P_k(\alpha)\|_2 = 0$ avec $\Phi P_k(\alpha) \in \mathcal{M}$ pour tout entier k. Puisque $\mathcal{M}$ est fermé dans $H^2(\mathbb{D})$, $\Phi f \in \mathcal{M}$ pour tout $f \in H^2(\mathbb{D})$. Nous avons donc que $\Phi H^2(\mathbb{D}) \subset \mathcal{M}$.

Montrons que $\mathcal{M} \subset \Phi H^2(\mathbb{D})$, pour cela montrons que $\mathcal{M} \cap H^2(\mathbb{D}) = \{0\}$. Soit $v \in \mathcal{M}$ tel que $v \perp \Phi H^2(\mathbb{D})$. Remarquons que $v \perp \Phi H^2(\mathbb{D})$ implique que $\langle v, \Phi\alpha^n\rangle = 0$ pour tout $n \geq 0$ car toute $f \in H^2(\mathbb{D})$ peut s'écrire pour $z \in \mathbb{D}$, $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ où $\sum_{n\geq 0} |a_n|^2 < \infty$. D'autre part, puisque $\Phi \perp S(\mathcal{M})$, nous avons $\langle \Phi, S^n(v)\rangle = 0$ pour tout $n \geq 1$ d'après ce qu'il précède. Ainsi :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v^*\left(e^{it}\right)\overline{\Phi^*\left(e^{it}\right)}e^{-int}dtn \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v^*\left(e^{it}\right)\overline{\Phi^*\left(e^{it}\right)}e^{int}dtn \geq 1$$

Puisque $v \in H^2(\mathbb{D})$ d'après la proposition 4.16 nous avons que $v^* \in L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$. De plus, Φ est intérieure, donc $\left|v^*\left(e^{it}\right)\overline{\Phi^*\left(e^{it}\right)}\right| = \left|v^*\left(e^{it}\right)\right|$ presque partout. Finalement la fonction $v^*\overline{\Phi^*}$ appartient à $L^1(\mathbb{T})$ et tous ses coefficients de Fourier sont nuls. L'injectivité de la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ donne que $v^*\overline{\Phi^*} = 0$. Puisque $\left|\Phi^*\left(e^{it}\right)\right| = 1$ presque partout, nous avons $v^* = 0$ et par ainsi d'après le théorème 7.5 $v = 0$. □

8 Opérateur de composition

8.1 Théorème de Littlewood

Soient $b \in H^\infty(\mathbb{D})$ et $f \in H^2(\mathbb{D})$, nous définissons *l'opérateur de multiplication* par b, M_b par

$$M_b f = bf.$$

L'opérateur de multiplication M_b vérifie

1. $bf \in H^2(\mathbb{D})$.
2. $\|bf\|_2 \leq \|b\|_\infty \|f\|_2$.
3. $\|M_b\| \leq \|b\|_\infty$.

Définition 8.1. Soit φ une fonction holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ avec $\varphi(0) = 0$. Nous définissons l'opérateur de composition C_φ par sur $H^2(\mathbb{D})$

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi, \qquad f \in H^2(\mathbb{D}).$$

Nous avons le Principe de subordination de Littlewood suivant

Théorème 8.2. Soit φ une application holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$, telle que $\varphi(0) = 0$. Alors pour tout $f \in H^2(\mathbb{D})$, $C_\varphi f \in H^2(\mathbb{D})$ et

$$\|C_\varphi f\|_2 \leq \|f\|_2, \qquad f \in H^2(\mathbb{D}).$$

Démonstration. Soit $f \in H^2(\mathbb{D})$, d'après le théorème 4.16 on peut écrire f de la manière suivante

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f^*}(n) z^n, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Considérons le shift inverse (backward shift) B, défini sur $H^2(\mathbb{D})$ par

$$Bf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f^*}(n+1) z^n.$$

Remarquons que pour toute f holomorphe sur $\mathbb{D}$ nous avons :

$$f(z) = \widehat{f^*}(0) + zBf(z) \quad (z \in \mathbb{D}), \tag{*}$$

$$\widehat{B^n f}(0) = \widehat{f^*}(n) \;\text{ pour }\; n \in \mathbb{N}. \tag{**}$$

Supposons d'abord que f est un polynôme. $f \circ \varphi$ est borné sur $\mathbb{D}$ donc $f \circ \varphi \in H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^2$. Pour l'estimation de la norme de $f \circ \varphi$, utilisons (*), pour $z \in \mathbb{D}$ nous avons

$$f(\varphi(z)) = f(0) + \varphi(z)(Bf)(\varphi(z)) \quad \text{i.e.} \quad C_\varphi f = \widehat{f}(0) + M_\varphi C_\varphi Bf.$$

Puisque $\varphi(0) = 0$, tous les termes de la série entière de φ ont en facteur commun z, et donc qu'il en est de même pour le second terme de l'égalité précédente, le rendant ainsi orthogonal dans $H^2(\mathbb{D})$ à la fonction constante $f(0)$. Donc

$$\|C_\varphi f\|_2^2 = |\widehat{f^*}(0)|^2 + \|M_\varphi C_\varphi Bf\|_2^2 \leq |\widehat{f^*}(0)|^2 + \|C_\varphi Bf\|_2^2,$$

Nous substituons ensuite successivement $Bf, B^2f, \cdots$ à f dans l'égalité précédente, ce qui donne en utilisant (**) :

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi Bf\|_2^2 &\leq |\widehat{f^*}(0)|^2 + \left\|C_\varphi B^2 f\right\|_2^2, \\
\left\|C_\varphi B^2 f\right\|_2^2 &\leq \left|\widehat{f^*}(1)\right|^2 + \left\|C_\varphi B^3 f\right\|_2^2, \\
&\vdots \\
\|C_\varphi B^n f\|_2^2 &\leq \left|\widehat{f^*}(n)\right|^2 + \left\|C_\varphi B^{n+1} f\right\|_2^2.
\end{aligned}$$

En regroupant toutes ces inégalités, nous obtenons

$$\|C_\varphi f\|^2 \leq \sum_{k=0}^{n} \left|\widehat{f^*}(k)\right|^2 + \left\|C_\varphi B^{n+1} f\right\|^2$$

pour tout entier $n \geq 0$. Rappelons nous que f est un polynôme. Si nous choisissons n comme étant le degré de f, alors $B^{n+1}f = 0$, ce qui réduit la dernière inégalité à

$$\|C_\varphi f\|^2 \leq \sum_{k=0}^{n} |\widehat{f^*}(k)|^2 = \|f\|_2^2,$$

Cela montre que C_φ est une contraction pour la norme $H^2(\mathbb{D})$ sur l'espace vectoriel des polynômes.

Supposons maintenant que $f \in H^2$ n'est pas un polynôme. Soit f_n la somme partielle d'ordre n du développement en série entière de f. Alors $f_n \to f$ en norme H^2, donc d'après le corollaire 4.19, (f_n) converge uniformément sur tout compact vers f, d'où $(f_n \circ \varphi)$ converge uniformément sur tout compact vers $f \circ \varphi$. Nous avons que $\|f_n\|_2 \leq \|f\|_2$, et $\|f_n \circ \varphi\| \leq \|f_n\|$. Pour tout $0 < r < 1$ fixé, et selon la proposition 4.4

$$M_2(f \circ \varphi, r) = \lim_{n\to\infty} M_2\left(f_n \circ \varphi, r\right) \leq \limsup_{n\to\infty} \|f_n \circ \varphi\|_2 \leq \limsup_{n\to\infty} \|f_n\|_2 \leq \|f\|_2.$$

Pour conclure la démonstration, nous faisons tendre r vers 1. $\square$

Pour montrer que C_φ est borné même lorsque φ ne fixe pas l'origine, il suffit de considérer une transformation de Möbius. Pour tout point $p \in \mathbb{D}$, soit

$$\alpha_p(z) = \frac{p - z}{1 - \bar{p}z},$$

Cette application envoie $\mathbb{D}$ sur lui-même, $\alpha_p(p) = 0$ et $\alpha_p^{-1} = \alpha_p$.

Posons $p := \varphi(0)$. Alors la fonction holomorphe $\psi = \alpha_p \circ \varphi$ envoie $\mathbb{D}$ dans lui-même et $\psi(0) = \alpha_{\varphi(0)}\left(\varphi(0)\right) = 0$. Puisque $\alpha_p^{-1} = \alpha_p$, nous avons $\varphi = \alpha_p \circ \psi$, ce qui se traduit par l'équation

$$C_\varphi = C_\psi C_{\alpha_p}.$$

Lemme 8.3. Pour $p \in \mathbb{D}$, l'opérateur C_{α_p} est borné sur $H^2(\mathbb{D})$. De plus,

$$\left\|C_{\alpha_p}\right\|_2 \leq \left(\frac{1 + |p|}{1 - |p|}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. Supposons d'abord que f soit holomorphe sur $D(0,R)$ pour un certain $R>1$. Par un changement de variable, nous avons

$$\|f\circ\alpha_p\|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(e^{it}\right)\right|^2\left|\alpha_p'\left(e^{it}\right)\right|dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(e^{it}\right)\right|^2\frac{1-|p|^2}{\left|1-\bar{p}e^{it}\right|^2}dt\leq\frac{1+|p|}{1-|p|}\|f\|^2.$$

L'inégalité est valable pour toutes les fonctions holomorphes dans $D(0,R)$; en particulier, elle est vraie pour les polynômes, ainsi pour généraliser le résultat sur $H^2(\mathbb{D})$, il suffit de répéter l'argument que nous avons utilisé pour terminer la démonstration du théorème de subordination de Littlewood (théorème 8.2). □

Théorème 8.4. (Littlewood) Supposons que φ soit une application holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$. Alors, l'opérateur de composition C_φ est un opérateur borné sur $H^2(\mathbb{D})$, et

$$\|C_\varphi\|_2\leq\sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}.$$

Démonstration. Nous avons $C_\varphi=C_\psi C_{\alpha_p}$, où $p=\varphi(0)$ et ψ fixe l'origine. Le lemme 8.3 et le principe de subordination de Littlewood (théorème 8.2) impliquent C_ψ et C_{α_p} sont bornés sur $H^2(\mathbb{D})$, donc C_φ est le produit d'opérateurs bornés sur $H^2(\mathbb{D})$, est borné. De plus,

$$\|C_\varphi\|_2\leq\|C_\psi\|_2\left\|C_{\alpha_p}\right\|_2\leq\sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}$$

où la dernière inégalité découle du lemme 8.3 et du fait que C_ψ est une contraction (théorème 8.2).

□

8.2 Compacité de l'opérateur de composition

8.2.1 Exemples d'opérateurs de composition compacts

Théorème 8.5. Si $\|\varphi\|_\infty<1$, alors C_φ est un opérateur compact sur $H^2(\mathbb{D})$.

Démonstration. Soit $f\in H^2(\mathbb{D})$ nous avons $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\widehat{f^*}(n)z^n:=\sum_{n=0}^{\infty}\widehat{f}(n)z^n$ pour $z\in\mathbb{D}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, définissons l'opérateur

$$T_nf=\sum_{k=0}^{n}\widehat{f}(k)\varphi^k.$$

Ainsi, T_n envoie $H^2(\mathbb{D})$ sur $\operatorname{vect}\{1,\varphi,\cdots\varphi^n\}$. T_n est un opérateur borné, en effet pour tout $f\in H^2(\mathbb{D})$ nous avons

$$\|T_nf\|_\infty\leq\sum_{k=0}^{n}|\widehat{f}(k)|\|\varphi\|_\infty^k\leq\|f\|_2^2(n+1)\quad\text{ car }\|\varphi\|_\infty<1$$

Et T_n est de rang fini sur $H^2(\mathbb{D})$. Montrons que $\|C_\varphi-T_n\|\to 0$. Puisque $\|\varphi\|_\infty<1$ nous avons

$$\|(C_\varphi-T_n)\,f\|_\infty\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}|\widehat{f}(k)|\|\varphi\|_\infty^k\leq\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|\widehat{f}(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\|\varphi\|_\infty^{2k}\right)^{\frac{1}{2}}\leq\frac{\|\varphi\|_\infty^{n+1}}{\sqrt{1-\|\varphi\|_\infty^2}}\|f\|_2$$

Ainsi $\|C_\varphi-T_n\|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$. La suite d'opérateurs (T_n) est de rang fini qui converge vers C_φ, donc C_φ est compact sur $H^2(\mathbb{D})$. □

Théorème 8.6. Si $\|\varphi\|_\infty < 1$ et si
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1-\left|\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right|^2} < \infty,$$
alors C_φ est opérateur de Hilbert-Schmidt de $H^2(\mathbb{D})$.

Démonstration. Nous avons
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1-\left|\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right|^2} = \sum_{n\geq 0} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi^n\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|C_\varphi(z^n)\|_2^2 < \infty.$$
La famille $(z \mapsto z^n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne dans $H^2(\mathbb{D})$ donc C_φ est un opérateur de Hilbert-Schmidt. □

Théorème 8.7. Soit φ une application holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$. L'opérateur C_φ est compact sur $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si pour toute suite (f_n) bornée dans $H^2(\mathbb{D})$ qui converge uniformément vers zéro sur tout compact de $\mathbb{D}$ on a $\|C_\varphi f_n\|_2 \to 0$.

Démonstration. La convergence dans $H^2(\mathbb{D})$ implique la convergence simple sur $\mathbb{D}$, et que les sous-ensembles bornés de $H^2(\mathbb{D})$ sont, en tant que classes de fonctions, uniformément bornés sur tout compact de $\mathbb{D}$. Notons B la boule unité fermée de $H^2(\mathbb{D})$.

Supposant que C_φ est un opérateur compact. Soit $(f_n) \in B$, qui converge uniformément vers zéro sur tout compacts de $\mathbb{D}$. Montrons que $\|C_\varphi f_n\|_2 \to 0$, et pour cela, il suffit de montrer que la fonction nulle est le seul point d'accumulation de la suite $(C_\varphi f_n)$. Or $(C_\varphi f_n)$ converge uniformément vers zéro sur tout compacts de $\mathbb{D}$, et puisque la convergence dans $H^2(\mathbb{D})$ implique la convergence simple, zéro est le seul point d'accumulation possible. Par compacité de C_φ, l'ensemble $\{C_\varphi f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact, donc il doit admettre un point d'accumulation, qui est donc 0, ainsi $\|C_\varphi f_n\|_2 \to 0$.

Réciproquement, soit (f_n) une suite de fonctions de B. Puisque les fonctions de B sont uniformément bornées sur tout compact de $\mathbb{D}$, le théorème de Montel permet d'extraire une sous-suite (n_k) telle que la suite (g_k) où $g_k := f_{n_k}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$ vers une fonction holomorphe g. Pour tout $0 < r < 1$,
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|g\left(re^{2\theta}\right)\right|^2 d\theta = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|g_k\left(re^{2\theta}\right)\right|^2 d\theta \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \|g_k\|^2 \leq 1.$$
donc $g \in H^2$ et $\|g\|_2 \leq 1$. La suite $(g_k - g)$ est bornée sur $H^2(\mathbb{D})$ et $g_k - g \to 0$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$ donc par hypothèse nous avons que $\|C_\varphi (g_k - g)\| \to 0$ ainsi $(C_\varphi f_n)$ a une sous-suite convergente et donc par caractérisation séquentielle de la compacité $C_\varphi(B)$ est compact, et finalement C_φ est compact. □

Rappelons la définition d'une fonction univalente :

Définition 8.8. Une fonction f est dite *univalente* sur un domaine $D \subset \mathbb{C}$ si f est holomorphe sur D et si f est injective sur D.

Intuitivement, si une application induit un opérateur compact, alors toute application dont les valeurs s'approchent du cercle unité "moins rapidement" devrait également induire un opérateur compact. Le théorème ci-dessous formalise cette idée :

Théorème 8.9. (Principe de comparaison) Supposons que φ et ψ soient deux applications holomorphes de $\mathbb{D}$ dans lui-même, avec φ univalente et $\psi(U) \subset \varphi(U)$. Si C_φ est compact sur $H^2(\mathbb{D})$, alors C_ψ l'est aussi.

Démonstration. Puisque φ est univalente et que son image contient celle de ψ, nous pouvons définir l'application $\chi = \varphi^{-1} \circ \psi$, qui est une application holomorphe de $\mathbb{D}$ dans lui-même. Ainsi, nous avons $\psi = \varphi \circ \chi$, ce qui donne
$$C_\psi = C_\chi C_\varphi,$$
or C_χ est borné d'après le théorème de Littlewood (théorème 8.4) et C_φ est compact donc C_ψ est compact. □

Nous allons à présent énoncer un théorème qui caractérise la compacité de l'opérateur de composition lorsque l'application φ est une fonction univalente. Pour cela nous allons d'abord établir deux lemmes :

Lemme 8.10. Pour $f \in H^2(\mathbb{D})$,

$$\frac{1}{2}\|f - f(0)\|_2^2 \leq \int_U |f'(z)|^2 \left(1 - |z|^2\right) \mathrm{dA}(z) \leq \|f - f(0)\|_2^2$$

Démonstration. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ avec $(a_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \left(1 - |z|^2\right) \mathrm{d}\ \mathrm{A}(z) &= \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \left(1 - |z|^2\right) \mathrm{dA}(z) \\
&= 2\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left|a_n\right|^2 r^{2n-2}\right) \left(1 - r^2\right) r \ \mathrm{d}r \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left|a_n\right|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n\right|^2 = \|f - f(0)\|_2^2
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

Lemme 8.11. Soit C_φ l'opérateur de composition par φ. Alors, pour $p \in \mathbb{D},\ C_\varphi^* K_p = K_{\varphi(p)}$.

Démonstration. Pour $f \in H^2$ nous avons

$$\left\langle f, C_\varphi^* K_p \right\rangle = \left\langle C_\varphi f, K_p \right\rangle = C_\varphi f(p) = f(\varphi(p)) = \left\langle f, K_{\varphi(p)} \right\rangle$$

□

Théorème 8.12. (Théorème de compacité univalent) Soit φ une fonction univalente de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$. Alors C_φ est compact sur H^2 si et seulement si

$$\lim_{|z| \to 1^-} \frac{1 - |\varphi(z)|}{1 - |z|} = \infty$$

Démonstration. Montrons que la condition

$$\lim_{|z| \to 1^-} \frac{1 - |\varphi(z)|}{1 - |z|} = \infty$$

implique que C_φ est compact sur $H^2(\mathbb{D})$. Prenons $(f_n)_n$ une suite bornée sur H^2 qui converge uniformément vers 0 sur tous compacts de $\mathbb{D}$. Nous allons montrer que $\|C_\varphi f_n\|_{H^2} \to 0$, par suite le théorème 8.7 nous permettra de conclure que C_φ est compact sur H^2. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que pour tout $n, \|f_n\|_{H^2} \leq 1$. Soit $\varepsilon > 0$, par hypothèse, il existe un $r \in]0, 1[$ tel que pour $r < |z| < 1$,

$$1 - |z|^2 \leq \varepsilon \left(1 - |\varphi(z)|^2\right) \tag{*}$$

Fixons r, d'après le lemme 8.10, nous avons

$$\frac{1}{2}\left\|C_\varphi f_n - f_n(\varphi(0))\right\|_2^2 \leq \int_{D(0,r)} \left|\left(f_n \circ \varphi\right)'(z)\right|^2 \left(1 - |z|^2\right) dA(z) + \int_{\mathbb{D} \setminus D(0,r)} \left|\left(f_n \circ \varphi\right)'(z)\right|^2 \left(1 - |z|^2\right) dA(z)$$

Et comme $(f_n \circ \varphi)_n$ converge uniformément vers 0 sur tous compacts de $\mathbb{D}$, il en est de même pour $(f_n \circ \varphi)_n'$. Ainsi, $\int_{D(0,R)} \left|\left(f_n \circ \varphi\right)'(z)\right|^2 \left(1 - |z|^2\right) dA(z)$ converge vers 0 et donc pour n assez grand nous avons

$$\int_{D(0,R)} \left|\left(f_n \circ \varphi\right)'(z)\right|^2 \left(1 - |z|^2\right) \mathrm{dA}(z) \leq \varepsilon.$$

Ainsi avec l'inégalité (*) nous avons

$$\begin{aligned}\|C_\varphi f_n - f_n(\varphi(0))\|_2^2 &\leq \varepsilon + \varepsilon \int_{\mathbb{D}\setminus D(0,r)} |f_n'(\varphi(z))\varphi'(z)|^2 \left(1-|\varphi(z)|^2\right) dA(z)\\ &\leq \varepsilon + \varepsilon \int_{\mathbb{D}} |f_n'(\varphi(z))| \left(1-|\varphi(z)|^2\right) |\varphi'(z)|^2\, dA(z)\end{aligned}$$

En effectuant un changement de variable nous avons

$$\|C_\varphi f_n - f_n(\varphi(0))\|_2^2 \leq \varepsilon + \varepsilon \int_{\mathbb{D}} |f_n'(\omega)| \left(1-|\omega|^2\right) dA(\omega)$$

D'après le lemme 8.10

$$\|C_\varphi f_n - f_n(\varphi(0))\|_2^2 \leq \varepsilon + 2\varepsilon \|f_n - f_n(0)\|_2^2$$

De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n - f_n(0)\|_2 \leq \|f_n\|_2 \leq 1$ ainsi $\|C_\varphi f_n - f_n(\varphi(0))\|_2^2 \leq 3\varepsilon$. Or $f_n(\varphi(0)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc pour n assez grand nous avons $|f_n(\varphi(0))| \leq \varepsilon$, ainsi

$$\|C_\varphi f_n\|_2 - |f_n(\varphi(0))| \leq \|C_\varphi f_n - f_n(\varphi(0))\|_2 \leq (3\varepsilon)^{1/2}$$

d'où, $\|C_\varphi f_n\|_2 \leq (3\varepsilon)^{1/2} + \varepsilon$, ce qui montre que $(C_\varphi f_n)$ tend vers 0 pour la norme de $H^2(\mathbb{D})$, et donc l'opérateur C_φ est compact sur $H^2(\mathbb{D})$.

Réciproquement supposons que C_φ est compact. Pour $p \in \mathbb{D}$, définissons

$$f_p(z) := \frac{K_p}{\|K_p\|} = \frac{\sqrt{1-|p|^2}}{1-\bar{p}z}, \quad z \in \mathbb{D},$$

où K_p est le noyau reproduisant en p (voir définition 4.18) f_p est appelé *noyau reproduisant normalisé* en p. Nous allons montrer que $\left\|C_\varphi^* f_p\right\| \to 0$ lorsque $|p| \to 1^-$. Cela achèvera la démonstration, puisque le lemme 8.11 implique

$$\left\|C_\varphi^* f_p\right\|^2 = \left(1-|p|^2\right)\left\|K_{\varphi(p)}\right\|^2 = \frac{1-|p|^2}{1-|\varphi(p)|^2}.$$

Puisque C_φ est compact d'après le théorème de Schauder nous avons que C_φ^* est compact. Ainsi, l'ensemble image des noyaux reproduisants normalisés par C_φ^* est un sous-ensemble relativement compact de $H^2(\mathbb{D})$, donc toute suite de cet ensemble image possède une sous-suite convergente. Ainsi montrons que la fonction nulle est la seule limite possible d'une telle sous-suite. Pour cela prenons $|p_n| \to 1^-$ telle que $C_\varphi^* f_{p_n} \to g$ pour la norme de $H^2(\mathbb{D})$ et montrons que $g = 0$. Soit h un polynôme arbitraire nous avons

$$\langle g, h\rangle = \lim_n \sqrt{1-|p_n|^2}\langle C_\varphi^* K_{p_n}, h\rangle = \lim_n \sqrt{1-|p_n|^2}\langle K_{\varphi(p_n)}, h\rangle = \lim_n \sqrt{1-|p_n|^2}\,\overline{h\left(\varphi\left(p_n\right)\right)} = 0.$$

Ainsi, g est orthogonal à tout polynôme, or les polynômes forment un sous-ensemble dense de $H^2(\mathbb{D})$, il s'ensuit que g est la fonction nulle, ce qui conclut la démonstration. $\square$

8.2.2 Exemples d'opérateurs de composition non compacts

Donnons quelques exemples où l'opérateur de composition n'est pas compact. Nous utiliserons le résultat précédent pour montrer que C_φ peut ne pas être compact si $\varphi\left(e^{i\theta}\right)$ s'approche du bord de $\mathbb{D}$ soit trop rapidement, soit trop fréquemment.

Notre premier exemple montre que C_φ peut ne pas être compact même si $\left|\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right| = 1$ en un seul point $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$.

Proposition 8.13. Pour $0 < \lambda < 1$, pour $z \in \mathbb{D}$ posons $\varphi(z) := \lambda z + (1-\lambda)$. Alors C_φ n'est pas compact sur $H^2(\mathbb{D})$.

Démonstration. Pour $0 < r < 1$ fixé, définissons les fonctions $f_r(z) := \dfrac{\sqrt{1-r^2}}{1-rz}$ pour $z \in \mathbb{D}$. Nous avons $\|f_r\|_2 = 1$. De plus, il est clair que $f_r \underset{r\to 1^-}{\longrightarrow} 0$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$. Pour $z \in \mathbb{D}$

$$f_r(\varphi(z)) = \frac{\sqrt{1-r^2}}{1-r(1-\lambda)-r\lambda z} = \frac{\sqrt{1-r^2}}{1-r(1-\lambda)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r\lambda}{1-r(1-\lambda)}\right)^n z^n.$$

Donc

$$\|C_\varphi f_r\|_2 = \frac{\sqrt{1-r^2}}{1-r(1-\lambda)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{r\lambda}{1-r(1-\lambda)}\right)^2\right)^n\right)^{1/2} = \left(\frac{1+r}{1+r(2\lambda-1)}\right)^{1/2}.$$

Ainsi $\|C_\varphi f_r\|_2 \underset{r\to 1^-}{\longrightarrow} \lambda^{-1/2} \neq 0$. D'après le théorème 8.7 C_φ n'est pas compact. □

Proposition 8.14. Supposons que φ soit une application univalente de $\mathbb{D}$ dans lui-même, et que $\varphi(\mathbb{D})$ contienne un disque dans $\mathbb{D}$ tangent au cercle unité. Alors C_φ n'est pas compact.

Démonstration. Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que le disque (appelons-le Δ) est tangent au cercle unité en 1. Par conséquent, si λ est le rayon de Δ, nous avons $0 < \lambda < 1$ et $\Delta = \lambda\mathbb{D} + (1-\lambda)$. Ainsi, Δ est l'image de $\mathbb{D}$ sous l'application $\psi(z) = \lambda z + (1-\lambda)$, qui, d'après la proposition 8.13, n'est pas compacte. Par le principe de comparaison (proposition 8.9), C_φ n'est pas compact non plus. □

Proposition 8.15. Supposons que φ est une application holomorphe de U dans U telle que l'ensemble niveau

$$E(\varphi) := \left\{\theta \in [-\pi,\pi] : \left|\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right| = 1\right\}$$

ait une mesure de Lebesgue strictement positive. Alors C_φ n'est pas compact.

Démonstration. Notons $E := E(\varphi)$. Les application $z \mapsto z^n$, $n \in \mathbb{N}$ appartient à la boule unité de $H^2(\mathbb{D})$, et la suite $(z^n)_n$ tend uniformément vers 0 sur tous compacts de U. D'autre part, puisque $E \subset [-\pi,\pi]$ nous avons

$$\|C_\varphi(z^n)\|_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right|^{2n} d\theta \geq \frac{1}{2\pi}\int_E \left|\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right|^{2n} d\theta = \frac{1}{2\pi}|E| > 0$$

où $|E|$ désigne la mesure de Lebesgue de E. Ainsi la suite $(C_\varphi(z^n))_n$ ne tend pas vers 0 en norme, donc C_φ n'est pas un opérateur compact d'après le théorème 8.7. □

8.3 Fonction de comptage de Nevanlinna et compacité

8.3.1 La fonction de comptage de Nevanlinna

Définition 8.16. Soit φ une fonction de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$, nous définissons la *fonction de comptage de Nevanlinna* associé à φ par

$$N_\varphi(\omega) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{z\in\varphi^{-1}\{w\}} \log\frac{1}{|z|} & \text{si} \quad \omega \in \varphi(\mathbb{D}) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'ensemble $\varphi^{-1}\{w\}$ désigne l'ensemble des $z \in \mathbb{D}$ tels que $\varphi(z) = w$ compté avec multiplicité.

Nous avons la formule de changement de variable suivante :

Proposition 8.17. Si g est une fonction mesurable positive sur $\mathbb{D}$ et φ une application holomorphe de $\mathbb{D}$ dans lui-même, alors

$$\int_{\mathbb{D}} g(\varphi(z)) \left|\varphi'(z)\right|^2 \log \frac{1}{|z|} dA(z) = \int_{\mathbb{D}} g(z) N_\varphi(z) dA(z).$$

Démonstration. La dérivée φ' s'annule sur un sous-ensemble au plus dénombrable Z de $\mathbb{D}$ car φ est holomorphe. En chaque point de $\mathbb{D}\backslash Z$, par théorème d'inversion locale il existe un ouvert sur lequel φ est un homéomorphisme. Ainsi, $\mathbb{D}\backslash Z$ peut être décomposé en une collection au plus dénombrable et disjointe $\{R_n\}$ de "rectangles polaires" semi-fermés sur chacun desquels φ est univalente. Soit ψ_n l'inverse de la restriction de φ à R_n. Alors, la formule habituelle du changement de variable appliquée à "$z = \psi_n(w)$" donne

$$\int_{R_n} g(\varphi(z)) \left|\varphi'(z)\right|^2 \log \frac{1}{|z|} dA(z) = \int_{\mathbb{D}} g \chi_n \log \frac{1}{|\psi_n|} dA$$

où χ_n est la fonction caractéristique de $\varphi\left(R_n\right)$. En sommant des deux côtés sur n, nous obtenons

$$\int_{\mathbb{D}} g(\varphi(z)) \left|\varphi'(z)\right|^2 \log \frac{1}{|z|} dA(z) = \int_{\mathbb{D}} g \left\{ \sum_n \chi_n \log \frac{1}{|\psi_n|} \right\} dA.$$

Maintenant, pour $w \in \varphi(\mathbb{D})\backslash\varphi(Z)$, les points de l'image réciproque $\varphi^{-1}\{w\}$ ont tous une multiplicité égale à un, donc le terme entre accolades dans la dernière équation coïncide presque partout sur $\varphi(\mathbb{D})$ avec $N_\varphi(w)$. Il en va de même pour $w \notin \varphi(\mathbb{D})$, où dans ce cas à le terme entre accolades et la fonction de comptage prennent la valeur zéro. □

Corollaire 8.18. Soit φ holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$, nous avons

$$\|C_\varphi f\|_2 = |f(\varphi(0))|^2 + 2 \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 N_\varphi(w) dA(w).$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de l'identité de Littlewood-Paley (proposition 4.20) et de la proposition précédente (proposition 8.17). □

Proposition 8.19. (Propriété de la sous moyenne) Soit ψ une fonction holomorphe de $\mathbb{D}$ dans lui même telle que $\psi(0) \neq 0$. Si $0 < R < |\psi(0)|$, alors

$$N_\psi(0) \leq \frac{1}{R^2} \int_{D(0,R)} N_\psi(z) dA(z).$$

Démonstration. Pour f holomorphe sur $\mathbb{D}$ avec $f(0) \neq 0$, nous avons par un corollaire de la formule de Jensen (corollaire 3.8) que

$$\log|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta \quad (0 \leq r < 1)$$

Ainsi, pour $w \in \mathbb{D}$, en prenant $f(z) = z - w$ cette inégalité devient

$$\log|z| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log\left|re^{i\theta} - z\right| d\theta.$$

Intégrons l'expression précédente sur l'intervalle $[0, R]$ par rapport à la mesure $2R^{-2}rdr$:

$$\log|z| \leq \frac{1}{R^2} \int_{D(0,R)} \log|z - w| dA(w). \tag{*}$$

Remarquons que nous avons égalité si $z > R$ car $\log|f|$ est harmonique sur $D(0, R)$ si f ne s'annule pas sur $D(0, R)$.

Pour $w \in \mathbb{D}\backslash\{\psi(0)\}$, $\{z_n(w)\}$ désigne les points de $\psi^{-1}\{w\}$ énumérés par ordre de modules croissants et répétés selon leur multiplicité. Notons $n(r,w)$ le nombre de termes de cette suite dont le module est inférieur ou égal à r. Définissons :

$$N_{\psi,r}(w) := \sum_{n=1}^{n(r,w)} \log \frac{r}{|z_n(w)|}$$

pour $0 \leq r < 1$. La formule de Jensen (théorème 3.7), avec $f = \psi - w$, donne :

$$N_{\psi,r}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left|\psi\left(re^{i\theta}\right) - w\right| d\theta - \log|\psi(0) - w|$$

pour $0 \leq r < 1$. En intégrant par rapport à la mesure $R^{-2}dA(w)$, en utilisant le théorème de Fubini et puisque $\psi(0) > R$ nous avons

$$\frac{1}{R^2}\int_{D(0,R)} N_{\psi,r}(w)dA(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{R^2}\int_{D(0,R)} \log\left|\psi\left(re^{i\theta}\right) - w\right| dA(w)\right) d\theta - \log|\psi(0)|.$$

Avec l'inégalité (*) appliquée à la partie entre parenthèses nous obtenons pour $0 \leq r < 1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{R^2}\int_{D(0,R)} N_{\psi,r}(w)dA(w) &\geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|\psi\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta - \log|\psi(0)| \\ &= N_{\psi,r}(0) \quad \text{(par la formule de Jensen).}\end{aligned}$$

Nous terminons la démonstration en remarquant que pour $w \in \mathbb{D}$, $N_{\psi,r}(w) \nearrow N_\psi(w)$ lorsque $r \nearrow 1$, ainsi l'inégalité souhaitée sur N_ψ provient de l'inégalité sur $N_{\psi,r}$ et du théorème de convergence monotone de Lebesgue. $\square$

8.3.2 L'inégalité de Littlewood

Théorème 8.20. (Inégalité de Littlewood) Si φ est une application holomorphe de $\mathbb{D}$ dans lui-même, alors pour $w \in \mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\}$,

$$N_\varphi(w) \leq \log\left|\frac{1-\bar{w}\varphi(0)}{w-\varphi(0)}\right|.$$

Démonstration. Si $w \notin \varphi(U)$, $N_\varphi(w) = 0$, or

$$-\log|\alpha_w(\varphi(0))| = \log\left|\frac{1-\bar{w}\varphi(0)}{w-\varphi(0)}\right|$$

où pour $z \in \mathbb{D}$, $\alpha_w(z) = \frac{w-z}{1-\bar{w}z} \in \mathbb{D}$ et donc $\log\left|\frac{1-\bar{w}\varphi(0)}{w-\varphi(0)}\right| \geq 0$.

Maintenant si $w \in \varphi(U)$, avec $w \neq \varphi(0)$, notons $n(r,w)$ le nombre de termes de $\varphi^{-1}\{w\} := \{z_n(w)\}$ qui se trouvent dans le disque fermé $D(0,r)$, $(0 \leq r < 1)$ (qui est un ensemble fini ou dénombrable puisque φ est holomorphe). Appliquons la formule de Jensen (théorème 3.7) à la fonction $f := \alpha_w \circ \varphi$ (dont les zéros sont $\varphi^{-1}\{w\}$)

$$\sum_{n=1}^{n(r,w)} \log\frac{r}{|z_n(w)|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|\alpha_w\left(\varphi\left(re^{i\theta}\right)\right)\right| d\theta + \log\frac{1}{|\alpha_w(\varphi(0))|}.$$

Puisque $|\alpha_w \circ \varphi| < 1$ en tout point de $\mathbb{D}$, l'intégrale de droite est négative, d'où

$$\sum_{n=1}^{n(r,w)} \log\frac{r}{|z_n(w)|} < \log\frac{1}{|\alpha_w(\varphi(0))|} \tag{*}$$

Si $\varphi^{-1}\{w\}$ est fini de cardinal N, nous faisons tendre r vers 1 à gauche de cette inégalité pour obtenir

$$N_\varphi(w) = \sum_{n=1}^{N} \log \frac{1}{|z_n(w)|} \leq \log \frac{1}{|\alpha_w(\varphi(0))|}$$

ce qui est l'inégalité voulue. Si $\varphi^{-1}\{w\}$ est infini, alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, nous pouvons choisir un $0 < R < 1$ tel que $n(R, w) \geq N$. Puis pour $R \leq r < 1$, l'inégalité (*) donne

$$\sum_{n=1}^{N} \log \frac{r}{|z_n(w)|} \leq \sum_{n=1}^{n(r,w)} \log \frac{r}{|z_n(w)|} \leq \log \frac{1}{|\alpha_w(\varphi(0))|}$$

Nous faisons d'abord tendre r vers 1, puis tendre N vers ∞ ce qui permet de conclure puisque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{r}{|z_n(w)|} = N_\varphi(w) \text{ et } \log \frac{1}{|\alpha_w(\varphi(0))|} = -\log |\alpha_w(\varphi(0))| = \log \left| \frac{1 - \bar{w}\varphi(0)}{w - \varphi(0)} \right|.$$

□

Corollaire 8.21. Pour toute application holomorphe φ de $\mathbb{D}$, nous avons

1. $N_\varphi(w) = O\left(\log \frac{1}{|w|}\right)$ lorsque $|w| \to 1^-$.
2. Si $\varphi(0) = 0$, alors plus précisément, $N_\varphi(w) \leq \log \frac{1}{|w|}$ pour $w \in \mathbb{D}$.

Démonstration.

1. Nous avons pour $w, p \in \mathbb{D}$

$$1 - \left| \frac{p - w}{1 - \bar{w}p} \right|^2 = \frac{\left(1 - |p|^2\right)\left(1 - |w|^2\right)}{|1 - \bar{w}p|^2} \tag{*}$$

D'après l'inégalité de Littlewood (théorème 8.20), nous avons

$$\frac{N_\varphi(w)}{\log \frac{1}{|w|}} \leq \frac{\log \left| \frac{1 - \bar{w}\varphi(0)}{w - \varphi(0)} \right|}{\log \frac{1}{|w|}} = \frac{\log \left| \frac{1 - \bar{w}\varphi(0)}{w - \varphi(0)} \right|^2}{\log \frac{1}{|w|^2}}.$$

Ainsi

$$\limsup_{|w| \to 1^-} \frac{N_\varphi(w)}{\log \frac{1}{|w|}} \leq \limsup_{|w| \to 1^-} \frac{1 - \left| \frac{w - \varphi(0)}{1 - \bar{w}\varphi(0)} \right|^2}{1 - |w|^2}.$$

Enfin en utilisant (*) nous obtenons que

$$\begin{aligned}
\limsup_{|w| \to 1^-} \frac{N_\varphi(w)}{\log \frac{1}{|w|}} &\leq \limsup_{|w| \to 1^-} \frac{\frac{\left(1 - |\varphi(0)|^2\right)\left(1 - |w|^2\right)}{|1 - \bar{w}\varphi(0)|^2}}{1 - |w|^2} \\
&\leq \limsup_{|w| \to 1^-} \frac{\left(1 - |\varphi(0)|^2\right)}{|1 - \bar{w}\varphi(0)|^2} \\
&\leq \frac{(1 + |\varphi(0)|)(1 - |\varphi(0)|)}{1 - |\varphi(0)|^2} = \frac{1 + |\varphi(0)|}{1 - |\varphi(0)|}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. C'est une conséquence direct de l'inégalité de Littlewood (théorème 8.20).

□

8.3.3 Caractérisation de la compacité de l'opérateur de composition

Afin d'obtenir le théorème final de cette section, nous allons d'abord établir un lemme :

Lemme 8.22. Soit φ une application holomorphe de $\mathbb{D}$ dans lui même. Soit $p \in \mathbb{D}$, notons α_p l'automorphisme définit pour $w \in \mathbb{D}$, par $\alpha_p(w) = \frac{p-w}{1-\bar{p}w}$. Nous avons pour tout $w \in \mathbb{D}$

$$N_\varphi(\alpha_p(w)) = N_{\alpha_p \circ \varphi}(w).$$

Démonstration. Puisque α_p est son propre inverse, nous remarquons que pour tout complexe w, les fonctions $\varphi - \alpha_p(w)$ et $\alpha_p \circ \varphi - w$ ont les mêmes zéros. Ce qui conclut la preuve. □

Théorème 8.23. Soit φ une application holomorphe de $\mathbb{D}$ dans lui même. C_φ est compact sur $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si

$$\lim_{|\omega|\to 1-} \frac{N_\varphi(\omega)}{\log\frac{1}{|\omega|}} = 0.$$

Démonstration. Supposons que

$$\lim_{|\omega|\to 1-} \frac{N_\varphi(\omega)}{\log\frac{1}{|\omega|}} = 0.$$

Soit une suite de fonctions (f_n) dans la boule unité de $H^2(\mathbb{D})$ qui converge uniformément vers zéro sur tous compacts de $\mathbb{D}$. D'après le théorème 8.7, il suffit de montrer que $\|C_\varphi f_n\|_2 \to 0$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé, par hypothèse nous pouvons $0 < r < 1$ tel que

$$N_\varphi(w) < \varepsilon \log\frac{1}{|w|} \quad \text{pour} \quad r \le |w| < 1.$$

Puisque (f_n) converge uniformément vers 0 sur tous compacts de $\mathbb{D}$, nous pouvons choisir n_ε tel que $|f_n| < \sqrt{\varepsilon}$ et $|f_n'| < \sqrt{\varepsilon}$ sur $D(0,r) \cup \{\varphi(0)\}$ pour $n > n_\varepsilon$. Ainsi, pour $n > n_\varepsilon$, par la proposition 8.18 nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi f_n\|^2 &= |f_n(\varphi(0))|^2 + 2\int_{D(0,r)} |f_n'(w)|^2 N_\varphi(w)dA(w) + 2\int_{\mathbb{D}\setminus D(0,r)} |f_n'(w)|^2 N_\varphi(w)dA(w) \\
&< \varepsilon + 2\varepsilon \int_{D(0,r)} N_\varphi(w)dA(w) + 2\varepsilon \int_{\mathbb{D}\setminus D(0,r)} |f_n'(w)|^2 \log\frac{1}{|w|}dA(w) \\
&\le \varepsilon + 2\varepsilon \int_{\mathbb{D}} N_\varphi(w)dA(w) + 2\varepsilon \int_{\mathbb{D}} |f_n'(w)|^2 \log\frac{1}{|w|}dA(w)
\end{aligned}$$

Or, d'après la proposition 8.18 nous avons

$$2\int_{\mathbb{D}} N_\varphi(w)dA(w) = \|z \mapsto z\|_2^2 - |\varphi(0)|^2 = 1 - |\varphi(0)|^2 \le 1.$$

De plus

$$2\int_{\mathbb{D}} |f_n'(w)|^2 \log\frac{1}{|w|}dA(w) = \|f_n\|_2^2 - |f_n(\varphi(0))|^2 \le 1,$$

car $\|f_n\|_2 \le 1$. Finalement nous avons $\|C_\varphi f_n\|_2^2 \le 5\varepsilon$. Ainsi, $\|C_\varphi f_n\|_2 \to 0$, ce qui donne la compacité de C_φ sur $H^2(\mathbb{D})$.

Supposons maintenant que C_φ est compact sur $H^2(\mathbb{D})$ et montrons que $N_\varphi(w) = o(\log(1/|w|))$ lorsque $|w| \to 1-$, ou de manière équivalente montrons que

$$\lim_{|w|\to 1-} \frac{N_\varphi(w)}{1-|w|} = 0.$$

Soit f_p le noyau reproduisant normalisé en p :

$$f_p(z) := \frac{K_p}{\|K_p\|} = \frac{\sqrt{1-|p|^2}}{1-\bar{p}z}, \quad z \in \mathbb{D},$$

où K_p est le noyau reproduisant en p (voir définition 4.18). Nous avons $\|f_p\| = 1$ pour tout $p \in \mathbb{D}$, et $f_p \to 0$ uniformément sur tous compacts de $\mathbb{D}$ lorsque $|p| \to 1-$. Par compacité de C_φ et d'après le théorème 8.7 nous avons $\lim_{|p|\to 1-} \|C_\varphi f_p\|_2 = 0$. D'après la proposition 8.18 nous avons

$$\begin{aligned}\|C_\varphi f_p\|^2 &\geq 2\int_{\mathbb{D}} \left|f_p'(w)\right|^2 N_\varphi(w)dA(w)\\ &= 2\int_{\mathbb{D}} \frac{\left(1-|p|^2\right)|p|^2}{|1-\bar{p}w|^4} N_\varphi(w)dA(w) = \frac{2|p|^2}{1-|p|^2}\int_{\mathbb{D}} \left|\alpha_p'(w)\right|^2 N_\varphi(w)dA(w),\end{aligned}$$

où α_p est l'automorphisme du lemme 8.22. Effectuons maintenant le changement de variable "$u = \alpha_p(w)$" dans la dernière intégrale et utilisons le lemme 8.22

$$\|C_\varphi f_p\|^2 \geq \frac{2|p|^2}{1-|p|^2}\int_{\mathbb{D}} N_\varphi\left(\alpha_p(u)\right)dA(u) \geq \frac{2|p|^2}{1-|p|^2}\int_{D(0,1/2)} N_{\alpha_p\circ\varphi}(u)dA(u).$$

Par la propriété de la sous moyenne (proposition 8.19) et par le lemme 8.22 nous avons

$$\|C_\varphi f_p\|^2 \geq 4\frac{2|p|^2}{1-|p|^2} N_{\alpha_p\circ\varphi}(0) = \frac{8|p|^2}{1+|p|}\frac{N_\varphi(p)}{1-|p|}$$

Notons que l'utilisation de la propriété de la sous moyenne sur le disque $D(0,1/2)$ nécessite que $|\alpha_p(\varphi(0))| > 1/2$, or, $|\alpha_p(\varphi(0))| \to 1$ lorsque $|p| \to 1-$, ainsi $|\alpha_p(\varphi(0))| > 1/2$ pour p suffisamment proche du bord de $\mathbb{D}$. Ainsi, pour un tel p nous avons

$$\|C_\varphi f_p\|_2^2 \geq \text{ const. } \frac{N_\varphi(p)}{1-|p|}$$

La compacité de C_φ implique $\|C_\varphi f_p\|_2$ tend vers zéro lorsque $|p| \to 1-$, ainsi la dernière inégalité entraîne que

$$\lim_{|w|\to 1-} \frac{N_\varphi(w)}{1-|w|} = 0,$$

ce qui permet de terminer la preuve. □

9 Annexe

9.1 Théorème de Hahn-Banach et conséquences

Théorème 9.1. Si M est un sous-espace d'un espace vectoriel normé X et si f est une forme linéaire bornée sur M, alors f peut alors être prolongée en une forme linéaire bornée F sur X, de sorte que $\|F\| = \|f\|$.

Théorème 9.2. Soit M un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé X, et soit $x_0 \in X$. x_0 appartient à la fermeture de M si et seulement s'il n'existe pas de forme linéaire bornée f sur X telle que $f(x) = 0$ pour tout $x \in M$ tandis que $f(x_0) \neq 0$.

Théorème 9.3. Soit X un espace vectoriel normé et soit X^* son dual topologique. Pour $M \subset X$, on pose $M^\perp := \{\ell \in X^* : M \subset \ker \ell\}$. Soit E un sous-espace vectoriel de X. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. E est dense dans X.
2. $E^\perp = \{0\}$.

9.2 Mesure complexe

Pour les démonstrations des différents résultats voir [2]. Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable.

Définition 9.4. Une *mesure complexe* est une application $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ vérifiant : pour tout $E \in \mathcal{M}$ et toute partition dénombrable $(E_i)_{i\geq 1}$ de E, nous avons $\mu(E) = \sum_{i\geq 1} \mu(E_i)$.

Définition 9.5. Soit μ une mesure complexe nous associons sa *variation totale* $|\mu|$ définie pour tout $E \in \mathcal{M}$ par : $|\mu|(E) = \sup\left\{\sum_{i\geq 1} |\mu(E_i)| : (E_i)_{i\geq 1} \text{ partition dénombrable de } E\right\}$

Remarque. Si μ est une mesure positive finie (i.e. $\mu(X) < \infty$) alors $|\mu| = \mu$.

Théorème 9.6. La variation totale d'une mesure complexe $|\mu|$ sur $\mathcal{M}$ est une mesure positive sur $\mathcal{M}$.

Théorème 9.7. Toute mesure complexe sur X vérifie $|\mu|(X) < \infty$.

Théorème 9.8. Soit X un espace topologique séparé localement compact, alors $(\mathcal{M}(X), ||.||)$ où $||\mu|| := |\mu|(X)$ est un espace de Banach.

Définition 9.9. Soit μ une mesure réelle sur $\mathcal{M}$. Nous définissons $|\mu|$ comme ci-dessus, puis nous définissons aussi $\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu), \quad \mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$.

Remarque. μ^+et μ^-sont toutes les deux des mesures positives sur $\mathcal{M}$ et elles sont bornées par le théorème précédent.

Proposition 9.10. (Décomposition de Jordan) Avec les mêmes notations que la définition précédente, nous avons $\mu = \mu^+ - \mu^-, \quad |\mu| = \mu^+ + \mu^-$. Les mesures μ^+et μ^-sont appelées respectivement les *variations positive et négative* de μ. La représentation de μ comme différence de deux mesures positives μ^+ et μ^- s'appelle la *décomposition de Jordan* de μ.

Définition 9.11. Soit μ une mesure positive sur $\mathcal{M}$ et soit λ une mesure arbitraire sur $\mathcal{M}$, λ pouvant être positive ou complexe. Si $\lambda(E) = 0$ pour tout $E \in M$ tel que $\mu(E) = 0$, nous disons que λ est *absolument continue* par rapport à μ, et nous écrivons $\lambda \ll \mu$.

Définition 9.12. S'il existe un ensemble $A \in \mathcal{M}$ tel que $\lambda(E) = \lambda(A \cap E)$ pour tout $E \in \mathcal{M}$, on dit que λ est *portée* par A. Ceci équivaut à l'hypothèse $\lambda(E) = 0$ pour tout E tel que $E \cap A = \emptyset$.

Définition 9.13. Soient λ_1 et λ_2 deux mesures sur $\mathcal{M}$ et supposons qu'il existe deux ensembles disjoints A et B tels que λ_1 soit portée par A et λ_2 soit portée par B. Nous disons que λ_1 et λ_2 sont *mutuellement singulières*, et nous écrivons $\lambda_1 \perp \lambda_2$.

Théorème 9.14. (Decomposition de Lebesgue-Radon-Nikodym) Soit μ une mesure positive σ-finie sur $(\mathcal{M}, X)$, et soit λ une mesure complexe sur $\mathcal{M}$.

1. Il existe un unique couple de mesures complexes λ_a et λ_s sur $\mathcal{M}$ telles que
$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \quad \lambda_a \ll \mu, \quad \lambda_s \perp \mu.$$
Si λ est positive et finie, λ_a et λ_s le sont aussi et $\lambda_a \perp \lambda_s$.
2. Il existe un unique élément $h \in L^1(\mu)$ tel que pour tout $E \in M$ $\lambda_a(E) = \int_E h d\mu$.

Le couple (λ_a, λ_s) est appelé *décomposition de Lebesgue* de λ relative à μ. h est appelé la *dérivée de Radon-Nikodym* de λ_a par rapport à μ.

Théorème 9.15. (Décomposition polaire) Soit μ une mesure complexe sur $\mathcal{M}$. Il existe une fonction mesurable h telle que $|h(x)| = 1$ pour tout $x \in X$ et $d\mu = hd|\mu|$. Cette écriture est appelée *décomposition polaire* de μ.

Théorème 9.16. Soit μ une mesure positive sur m et $g \in L^1(\mu)$. Posons pour $E \in M$ $\lambda(E) = \int_E g d\mu$. Nous avons $|\lambda|(E) = \int_E |g| d\mu$.

Théorème 9.17. (Décomposition de Hahn) Soit μ une mesure réelle sur $(\mathcal{M}, X)$. Il existe deux ensembles A et B de $\mathcal{M}$ tels que $A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset$ et tels que les variations positive et négative μ^+ et μ^-de μ vérifient pour $E \in \mathcal{M}$, $\mu^+(E) = \mu(A \cap E)$, $\mu^-(E) = -\mu(B \cap E)$c ce qui implique que $\mu^+ \perp \mu^-$.

En d'autres termes, X est la réunion de deux sous-ensembles mesurables disjoints qui sont tels que "A porte toute la masse positive de μ " et "B porte toute la masse négative de μ ". Le couple (A, B) est appelé la *décomposition de Hahn* de X induite par μ.

Définition 9.18. Soit μ une mesure positive sur $(\mathcal{M}, X)$ nous disons que :

- μ est *extérieurement régulière* si pour tout $E \in \mathcal{M}$ $\mu(E) = \inf \{\mu(V) \mid E \subset V,\ V \text{ ouvert}\}$.
- μ est *intérieurement régulière* si pour tout $E \in \mathcal{M}$ $\mu(E) = \sup \{\mu(K) \mid K \subset E,\ K \text{ compact}\}$.
- μ est *régulière* si elle est à la fois extérieurement et intérieurement régulière.

Théorème 9.19. (Théorème de représentation de Riesz) Soit X un espace séparé localement compact. Toute forme linéaire bornée Φ sur $C_0(X)$ est représentée par une unique mesure de Borel, complexe et régulière μ, i.e. pour tout $f \in C_0(X)$ nous avons $\Phi(f) = \int_X f d\mu$. De plus, la norme de Φ est la variation totale de μ, $\|\Phi\| = |\mu|(X) = ||\mu||$.

Définition 9.20. Nous disons qu'un sous ensemble E d'un espace topologique est *σ-compact* s'il peut s'écrire comme réunion dénombrable de sous ensemble compact.

Théorème 9.21. Soit X un espace topologique, séparé, localement compact sur lequel tout ouvert est σ-compact. Soit λ une mesure de Borel positive. Si pour tout K compact de X nous avons $\lambda(K) < \infty$ alors λ est régulière.

Corollaire 9.22. Toute mesure de Borel complexe sur un espace topologique, séparé, compact est régulière.

Reformulons le théorème de Riesz dans le cadre qui nous intéresse :

Théorème 9.23. (Théorème de représentation de Riesz) Soit X un espace topologique séparé compact. Alors les applications

$$\begin{array}{rcl} L_c : \mathcal{M}(X) & \longrightarrow & \mathcal{C}^*(X), \\ \mu & \longmapsto & L_c(\mu) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} L_c : \mathcal{M}^+(X) & \longrightarrow & \mathcal{C}_+^*(X) \\ \mu & \longmapsto & L_+(\mu) \end{array},$$

sont des isométries bijectives. Où $L_c(\mu)(f) = \int_X f d\mu, \quad L_+(\mu)(f) = \int_X f d\mu.$

9.3 Dérivées supérieurs et inférieurs d'une mesure à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}$

Pour les démonstrations des différents résultats voir [1]. Notons m la mesure de Lebesgue.

Définition 9.24. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $s > 0$, on pose $I_{x,s} =]x - s, x + s[$. Soit μ une mesure à valeurs réelles et définie sur $\mathbb{R}$. Nous appelons

- *dérivée supérieure* de μ en x la quantité $\bar{D}(\mu)(x) := \limsup\limits_{s \to 0} \dfrac{\mu(I_{x,s})}{2s}$.
- *dérivée inférieure* de μ en x la quantité $\underline{D}(\mu)(x) := \liminf_{s \to 0} \frac{\mu(I_{x,s})}{2s}$.

Proposition 9.25. Si $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ est positive alors $\bar{D}(\mu)$ et $\underline{D}(\mu)$ sont des fonctions boréliennes.

Proposition 9.26. Soit μ une mesure de Borel positive sur $\mathbb{R}$ non nécessairement finie mais telle que $\mu(K) < \infty$ pour tout compact K de $\mathbb{R}$ et soit A un borélien tel que $\mu(A) = 0$. Alors il existe un borélien $B \subset A$ tel que $m(B) = 0$ avec $\bar{D}(\mu)(x) = 0$ pour tout $x \in A \backslash B$.

Proposition 9.27. Si $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ est telle que $\mu \perp m$ alors $D(\mu)(x) := \lim_{s \to 0} \frac{\mu(I_{x,s})}{2s}$ existe et est nul presque partout.

Proposition 9.28. Si $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ est telle que $\mu \ll m$ alors $D(\mu)(x) := \lim_{s \to 0} \frac{\mu(I_{x,s})}{2s}$ existe et coïncide avec $f(x)$ presque partout où f est la fonction de $L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mu(E) = \int_E f(x)dx$ (théorème de Radon-Nikodym) pour tout borélien E de $\mathbb{R}$.

En combinant ces deux propositions avec la décomposition de Lebesgue-Radon-Nikodym (théorème 9.14), nous obtenons :

Théorème 9.29. Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Alors il existe un unique couple de mesures (μ_a, μ_s) avec et $\mu_a \ll m$ et $\mu_s \perp m$ telles que $\mu = \mu_a + \mu_s$ et il existe une unique fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\begin{cases} \mu_s(E) = \int_E f(x)dx \text{ pour tout borélien } E \text{ de } \mathbb{R} \\ D(\mu)(x) := \lim_{s \to 0} \frac{\mu(]x-s,x+s[)}{2s} = f(x) \text{ m-presque partout.} \end{cases}$$

Autrement dit, si $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, alors $D(\mu)(x) \in L^1(\mathbb{R})$ et si on pose $\mu_a(E) := \mu(E) - \int_E D(\mu)(x)dx$ pour tout borélien E de $\mathbb{R}$ alors $\mu_s \perp m$.

Références

[1] I. **Chalendar**, *Analyse fonctionnelle : fonctions harmoniques, classe de Nevanlinna, espaces de Hardy, et une introduction aux opérateurs de Toeplitz et de Hankel.*

[2] W. **Rudin**, *Analyse réelle et complexe, Masson, Paris, 1974.*

[3] M. **Rosenblum**, J. **Rovnyak**, *Topics in Hardy classes and univalent functions, Birkhäuser, 1994.*

[4] T. **Ransford**, *Potential theory in the complex plane, Cambridge University Press, 1995.*

[5] A. **Beurling**, *"On two problems concerning linear transformations in Hilbert space", Acta Mathematica, 81 (1949), 239–255.*

[6] J. H. **Shapiro**, *Composition Operators and Classical Function Theory, Springer-Verlag, 1993..*

[7] O. **El-Fallah**, K. **Kellay**, J. **Mashreghi**, T. **Ransford**, *A Primer on the Dirichlet Space, Cambridge Tracts in Mathematics, Vol. 203, Cambridge University Press, 2014.*

[8] N. K. **Nikolski** - *Treatise on the Shift Operator, Springer-Verlag, 1986.*