Projet de recherche M1

Théorème de Phragmén-Lindelöf et applications

Soutenu le 2 *juin* 2023 *devant :*
Yulia KUZNETSOVA - Laboratoire de Mathématiques de Besançon
Cécile ARMANA - Laboratoire de Mathématiques de Besançon
Alexandre NOU - Laboratoire de Mathématiques de Besançon

Auteurs :
Léo Brendlé
Jules Gagnaire

Directrice de recherche :
Yulia Kuznetsova

Remerciements

Nos premiers remerciements vont tout naturellement à notre directrice de recherche, madame Yulia KUZNETSOVA. Nous la remercions de nous avoir proposé ce sujet. Celui-ci nous a permis de continuer à étudier un domaine des mathématiques que nous affectionnons particulièrement : l'analyse complexe. Il nous a permis de faire le lien entre différentes branches de l'analyses que sont l'analyse complexe, la théorie des opérateurs et l'analyse de Fourier. Nous la remercions également pour le temps qu'elle nous a accordé notamment pour nous aider à "déchiffrer" les démonstrations de Levin B. Ya. *Lectures on entire functions (Translations of Mathematical Monographs)* qui n'étaient pas forcément très très détaillées... Nous la remercions également pour la relecture régulière de notre papier ce qui nous a permis de corriger les erreurs et les coquilles au fur et à mesure. Enfin, nous la remercions d'avoir répondu à nos diverses questions (parfois redondantes...) et de nous avoir accompagnés tout du long de ce projet.

Nous remercions également Alexis ADAK qui nous a fait remarquer certains problèmes sur l'organisation du plan et a ainsi contribué à le rendre plus clair.

Enfin nous remercions madame Cécile ARMANA et monsieur Alexandre NOU qui ont accepté d'être jury de notre mémoire.

Résumé

Le principe du maximum est un théorème classique d'analyse complexe qui stipule qu'une fonction holomorphe à l'intérieur d'un ouvert borné est limitée par son module sur la frontière de la région. Le premier objectif de ce mémoire est de généraliser ce résultat sur des ouverts non bornées (bande, secteur angulaire, demi plan) en utilisant le principe de Phragmèn-Lindelöf. Cette généralisation n'est pas gratuite, en effet nous devons contrôler la croissance des fonctions pour obtenir des résultats.

Une fois ces résultats établis nous avons étudié différentes applications. Sous certaines conditions de croissance nous pouvons montrer qu'une fonction est identiquement nulle. Ensuite nous établissons le théorème de Boas-Bernstein qui permet d'avoir la valeur d'une fonction holomorphe sur tout le plan complexe en connaissant simplement les valeurs de cette fonction sur les entiers relatifs. Un cas particulier d'un des principes de Phragmèn-Lindelöf permet d'établir le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin. Ce théorème permet d'obtenir certains résultats en analyse de Fourier comme l'inégalité de Hausdorff-Young et l'inégalité de Young. Ensuite, nous abordons l'équation de la chaleur. Nous avons montré qu'il existe une unique solution à ce problème et que cette solution peut être écrite comme le produit de convolution d'une fonction et d'un certain noyau. Ce noyau est appelé *noyau de la chaleur.*A l'aide du théorème d'interpolation de Riesz-Thorin, nous avons pu donner certaines estimations sur les normes d'opérateur de ce noyau.

Table des matières

1 Principe de Phragmén-Lindelöf

1.1 Motivation et aperçu de la technique

Le principe de Phragmén-Lindelöf est une technique qui utilise une fonction auxiliaire paramétrée pour prouver qu'une fonction holomorphe sur un ouvert non borné est bornée lorsqu'une contrainte est donnée sur la croissance de son module.

Le principe de Phragmén–Lindelöf est établi par Lars Edvard Phragmén (1863–1937) et Ernst Leonard Lindelöf (1870–1946) en 1908.

C'est une généralisation du principe du maximum. Le principe du maximum stipule qu'une fonction holomorphe à l'intérieur d'un ouvert borné est limitée par son module sur la frontière de la région. Pour un domaine non borné, ce n'est plus vrai comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1.
Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(z) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\}$, f la fonction définie sur $\bar{\Omega}$ par

$$f(z) = e^{e^z}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x \pm i\frac{\pi}{2}) = e^{e^{x \pm i\frac{\pi}{2}}} = e^{e^x e^{\pm i\frac{\pi}{2}}} = e^{\pm ie^x}$$

donc

$$\forall z \in \partial\Omega,\ |f(z)| = 1.$$

Pourtant, f n'est pas bornée sur Ω car $f(x) = e^{e^x} \xrightarrow[x \to +\infty,\, x \in \mathbb{R}]{} +\infty$.

1.2 Principe de Phragmén-Lindelöf sur une bande

Commençons par appliquer la méthode lorsque la fonction f est définie sur une bande verticale de $\mathbb{C}$.

Les théorèmes qui suivent sont tirés de [1].

Théorème 1.1.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Considérons $\Omega = \{x + iy \mid a < x < b,\ y \in \mathbb{R}\}$.
Supposons :

- f continue sur $\bar{\Omega}$;
- f holomorphe sur Ω ;
- $\exists B \in \mathbb{R}$ tel que $\forall z \in \Omega,\ |f(z)| < B$.

En posant pour $x \in [a, b]$, $M(x) = \sup\limits_{y \in \mathbb{R}}\{|f(x + iy)|\}$, on a alors :

$$M(x)^{b-a} \leq M(a)^{b-x} M(b)^{x-a}.$$

Remarque.
Pour $z = x+iy$ avec $a < x < b$, le théorème 1.1 permet de dire que $|f(z)| \leq \max(M(a), M(b))$. En effet, supposons $M(a) \geq M(b)$. D'après le théorème 1.1 on a

$$M(x)^{b-a} \leq M(a)^{b-x} M(a)^{x-a} = M(a)^{b-a}.$$

Or $f(z) \leq M(x)$, car $M(x) = \sup\limits_{y \in \mathbb{R}}\{|f(x + iy)|\}$ donc $|f(z)|^{b-a} \leq M(a)^{b-a}$ et ainsi $|f(z)| \leq M(a)$ (car $a < b$).
Finalement on a bien que $|f(z)| \leq \max(M(a), M(b))$.

Démonstration.

Commençons par considérer le cas $M(a) = M(b) = 1$.
Puisque $M(a) = M(b)$ on doit montrer

$$\forall x \in]a, b[,\ M(x)^{b-a} \leq M(a)^{b-a}$$

i.e.

$$\forall x \in]a, b[,\ M(x) \leq M(a) = 1$$

Ainsi, il suffit de montrer que $\forall z \in \Omega,\ |f(z)| \leq 1$.

Pour $\varepsilon > 0$ et $z \in \bar{\Omega}$, posons

$$h_\varepsilon(z) = \frac{1}{1 + \varepsilon(z-a)}.$$

Prenons $z = x + iy$ dans $\bar{\Omega}$. On a

$$\mathrm{Re}(1 + \varepsilon(z-a)) = 1 + \varepsilon(x-a) \geq 1$$

car $\varepsilon > 0$ et $x \in [a, b]$ donc $x \geq a$. De plus, $\forall t \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(t) \leq |t|$.
Il s'ensuit

$$1 \leq \mathrm{Re}(1 + \varepsilon(z-a)) \leq |1 + \varepsilon(z-a)|.$$

Ainsi,

$$1 \geq \frac{1}{|1 + \varepsilon(z-a)|} = |h_\varepsilon(z)|.$$

Puisque $M(a) = M(b) = 1$, on a que $\forall z \in \partial\Omega,\ |f(z)| \leq 1$, donc

$$\forall z \in \partial\Omega,\ |f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1 \tag{1}$$

D'autre part

$$\mathrm{Im}(1 + \varepsilon(z-a)) = \varepsilon y$$

et $\forall t \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(t) \leq |t|$, d'où

$$|1 + \varepsilon(z-a)| \geq \varepsilon|y|.$$

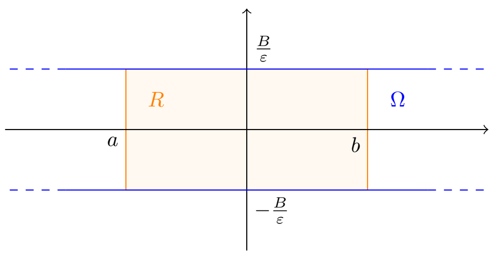
Ainsi

$$|h_\varepsilon(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon|y|}.$$

Mais $\forall \in \Omega$, on a $|f(z)| \leq B$, donc

$$\forall z \in \Omega,\ |f(z)h_\varepsilon(z)| \leq \frac{B}{\varepsilon|y|}. \tag{2}$$

Soit R le rectangle suivant :



.

$R = \left\{ z = x + iy \in \Omega \mid |y| < \frac{B}{\varepsilon} \right\}$.

(1) et (2) donnent

$$\forall z \in \delta R,\ |f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1.$$

Puisque f est continue sur $\bar{\Omega}$ et holomorphe sur Ω, à fortiori f est continue sur $\bar{R}$ et holomorphe sur R. R est un ouvert non vide connexe et bornée. D'après le théorème du maximum, $\forall z \in$

R, $|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1$.
Or $\forall z = x+iy \in \Omega \backslash R$, $\frac{B}{\varepsilon|y|} \leq 1$ (car dans $\Omega\backslash R$, $|\operatorname{Im} z| \leq \frac{B}{\varepsilon}$) donc

$$\forall z \in \Omega\backslash R,\ |f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1.$$

On en déduit

$$\forall z \in \Omega,\ |f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1.$$

Fixons à présent z. On a $h_\varepsilon(z) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc $f(z)h_\varepsilon(z) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} f(z)$. Puisque $|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \Omega$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on a finalement que $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \Omega$.

Passons maintenant à un cas plus général. Prenons une fonction f qui vérifie les hypothèses du théorème telle que $M(a)$ et $M(b)$ sont des réels strictement positifs et posons, pour $z \in \Omega$

$$g(z) = M(a)^{\frac{b-z}{b-a}} M(b)^{\frac{z-a}{b-a}}.$$

$$g(z) = e^{\frac{b-z}{b-a}\ln(M(a))} e^{\frac{z-a}{b-a}\ln(M(b))}.$$

g est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et n'a pas de zéros.
Pour $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
|g(a+iy)| &= \left|e^{\frac{b-a-iy}{b-a}\ln(M(a))}\right| \underbrace{\left|e^{\frac{iy}{b-a}\ln(M(b))}\right|}_{=1} \\
&= \left|e^{\ln(M(a)) + \frac{-iy}{b-a}\ln(M(a))}\right| \\
&= \left|e^{\ln(M(a))}\right| \underbrace{\left|e^{\frac{-iy}{b-a}\ln(M(a))}\right|}_{=1} \\
&= M(a).
\end{aligned}$$

De même, on a

$$|g(b+iy)| = M(b).$$

En considérant la fonction $\frac{f}{g}$, on a alors

$$M_{\frac{f}{g}}(a) = \sup_{y\in\mathbb{R}} \left\{ \left| \frac{f}{g}(a+iy) \right| \right\} = \frac{\sup_{y\in\mathbb{R}} \{|f(a+iy)|\}}{M(a)} = 1$$

et de même

$$M_{\frac{f}{g}}(b) = 1.$$

On sait que f est bornée sur Ω, pour $z = x+iy$ dans Ω, on a que

$$|g(z)| = \left| e^{\frac{b-x}{b-a}\ln(M(a))} e^{\frac{x-xa}{b-a}\ln(M(b))} \right|$$

Donc g est bornée puisque $x \in]a,b[$. Ainsi on en déduit que $\frac{f}{g}$ est bornée. De plus $\frac{f}{g}$ est holomorphe sur Ω puisque f est holomorphe sur Ω et que g est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et n'a pas de zéros. On a également que $\frac{f}{g}$ est continue sur $\bar{\Omega}$ puisque f est continue sur $\bar{\Omega}$, et que g est holomorphe sur $\mathbb{C}$, donc elle est continue sur $\mathbb{C}$ et g n'a pas de zéros.

Finalement on a une fonction vérifiant toutes les hypothèses de la proposition et qui vérifie $M_{\frac{f}{g}}(a) = M_{\frac{f}{g}}(b) = 1$. On peut donc appliquer ce qui précède et on obtient

$$\forall z \in \Omega,\ \left|\frac{f}{g}(z)\right| \leq 1.$$

De cette manière, $\forall z = x+iy \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\leq \left| e^{\frac{b-z}{b-a}\ln(M(a))} e^{\frac{z-a}{b-a}\ln(M(b))} \right| \\
&= \left| e^{\frac{b-x-iy}{b-a}\ln(M(a))} e^{\frac{x+iy-a}{b-a}\ln(M(b))} \right| \\
&= e^{\frac{b-x}{b-a}\ln(M(a))} e^{\frac{x-a}{b-a}\ln(M(b))} \\
&= M(a)^{\frac{b-x}{b-a}} M(b)^{\frac{x-a}{b-a}}.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$|f(z)|^{b-a} \leq M(a)^{b-x} M(b)^{x-a},$$

cela pour tout $z \in \Omega$ d'où le résultat. Pour achever la preuve, considérons une fonction f vérifiant les hypothèses telle que $M(a) = 0$.
Soit $\delta > 0$. Considérons $g = f + \delta$.
On a

$$M_g(a) = \delta > 0$$

et

$$M_g(b) = M_f(b) + \delta > 0.$$

Comme g est une fonction définie et continue sur $\bar{\Omega}$ et holomorphe sur Ω, on peut lui appliquer ce qui précède :

$$M_g(x)^{b-a} \leq M_g(a)^{b-x} M_g(b)^{x-a}$$

soit

$$(M_f(x) + \delta)^{b-a} \leq \delta^{b-x} \left(M_f(b) + \delta\right)^{x-a}.$$

En prenant $\delta \to 0$, on obtient

$$M_f(x)^{b-a} \leq 0 \times M_f(b)^{x-a} \leq M_f(a)^{b-x} M_f(b)^{x-a}.$$

□

En imposant une condition de croissance sur la fonction f, on peut arriver aux mêmes conclusions que le principe du maximum lorsque le domaine de définition est une bande horizontale.

Théorème 1.2.
Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, |\operatorname{Im}(z)| < \frac{\pi}{2}\}$. Soit f holomorphe sur Ω et continue sur $\bar{\Omega}$.
Supposons qu'il existe des constantes $\alpha < 1$, $A \in \mathbb{R}$ telles que

$$\forall z \in \Omega,\ |f(z)| < \exp\left[A \exp(\alpha |\operatorname{Re}(z)|)\right]$$

et supposons aussi que

$$\forall z \in \partial\Omega,\ |f(z)| \leq 1.$$

Alors

$$\forall z \in \Omega,\ |f(z)| \leq 1.$$

Démonstration.
Soit β tel que $\alpha < \beta < 1$. Soit $\varepsilon > 0$.
Pour $z \in \bar{\Omega}$, définissons h_ε par

$$h_\varepsilon(z) = \exp\left(-\varepsilon\left(e^{\beta z} + e^{-\beta z}\right)\right).$$

Soit $z = x + iy \in \bar{\Omega}$.

$$\begin{aligned}
|h_\varepsilon(z)| &= |\exp\left\{-\varepsilon\left(e^{\beta z} + e^{-\beta z}\right)\right\}| \\
&= \exp\left\{\operatorname{Re}\left(-\varepsilon\left(e^{\beta z} + e^{-\beta z}\right)\right)\right\} \\
&= \exp\left\{-\varepsilon\left(\operatorname{Re}\left(e^{\beta x} e^{\beta i y}\right) + \operatorname{Re}\left(e^{-\beta x} e^{-\beta i y}\right)\right)\right\} \\
&= \exp\left\{-\varepsilon\left(e^{\beta x} + e^{-\beta x}\right)\cos(\beta y)\right\}.
\end{aligned}$$

Or $|\beta| < 1$ et $|y| \leq \frac{\pi}{2}$ donc $|\beta y| \leq \beta\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$.
De plus, cos décroît sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $\cos(\beta y) = \cos(|\beta y|)$ car cos est paire, d'où $0 < \cos(\beta\frac{\pi}{2}) \leq \cos(\beta y)$.
Posons $\delta = \cos(\beta\frac{\pi}{2})$. Comme $-\varepsilon(e^{\beta x} + e^{-\beta x}) < 0$, il vient

$$|h_\varepsilon(z)| \leq \exp(-\varepsilon(e^{\beta x} + e^{-\beta x})\delta)) < 1.$$

De plus, par hypothèse, $|f| \leq 1$ sur $\partial\Omega$. Il en résulte que $|fh_\varepsilon| \leq 1$ sur $\partial\Omega$.
Par ailleurs, en combinant les estimations de croissance de h_ε et f, on obtient

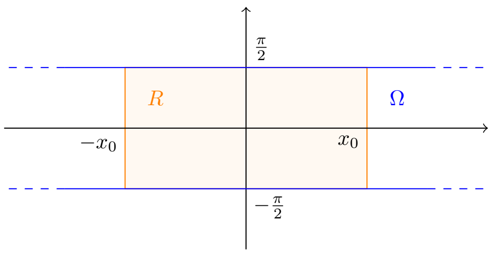
$$\forall z = x + iy \in \bar{\Omega},\ |f(z)h_\varepsilon(z)| \leq \exp(Ae^{\alpha|x|} - \varepsilon\delta(e^{\beta x} + e^{-\beta x})). \qquad (*)$$

Comme $\varepsilon\delta > 0$ et $\beta > \alpha$, l'argument de l'exponentielle dans $(*)$ tend vers $-\infty$ par croissances comparées donc le terme de droite tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.
Ainsi, il existe x_0 tel que le membre de droite dans $(*)$ soit plus petit que 1 pour tout $x \geq x_0$.

Par conséquent, sur la frontière du rectangle ouvert R de sommets $\pm x_0 \pm i\frac{\pi}{2}$,

$$|fh_\varepsilon| \leq 1$$

car c'est le cas lorsque $x = x_0$ et sur $\partial\Omega$ par le point précédent.
f est holomorphe sur R car $R \subset \Omega$, continue sur $\bar{R}$ car $\bar{R} \subset \bar{\Omega}$ et R est borné donc par le principe du maximum, $|fh_\varepsilon| \leq 1$ sur R.
Soit $z \in \Omega$. Si $z \in R$, on vient de montrer $|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1$. Sinon, $\mathrm{Re}(z) \geq x_0$ et dans ce cas $|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1$ par définition de x_0.



Ainsi, on a montré

$$|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1.$$

Or

$$h_\varepsilon(z) = \exp(-\varepsilon(e^{\beta z} + e^{-\beta z})) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 1,$$

d'où

$$|f(z)| \leq 1.$$

□

1.3 Principe de Phragmén-Lindelöf pour un secteur angulaire

Dans cette partie, on applique la méthode de Phragmén-Lindelöf dans le cas particulier où le domaine de définition de la fonction est une ouverture angulaire. Les théorèmes et exemples de cette partie sont tirés de [2].

Pour cela, nous avons besoin d'étendre le principe du maximum au cas où la fonction n'est pas définie sur la frontière.
Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$, f une fonction holomorphe sur D. Soit $\zeta \in \partial D = \bar{D}\backslash\mathring{D}$. Pour $\delta > 0$, notons $\mathring{B}(\zeta, \delta)$ la boule ouverte de centre ζ de rayon δ et posons

$$\limsup_{z\to\zeta} |f(z)| = \lim_{\delta\to 0} \sup_{z\in\mathring{B}(\zeta,\delta)\cap D} |f(z)|.$$

On note alors $|f(z)| \leq M$ sur ∂D lorsque pour tout $\zeta \in \partial D$, $\limsup\limits_{z\to\zeta} |f(z)| \leq M$.

En utilisant cette notation, on retrouve alors le principe du maximum dans sa formulation classique.

Lemme 1.3. Principe du maximum

Soit f une fonction holomorphe sur D un domaine ouvert borné. S'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(z)| \leq M$ sur ∂D, alors $|f(z)| \leq M$ sur D.

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$ et $\zeta \in \partial D$. Par hypothèse, il existe $\delta_\zeta > 0$ tel que

$$\left| f_{|_{\mathring{B}(\zeta,\delta_\zeta)\cap D}} \right| \leq M + \varepsilon.$$

Posons $B = \cup_{\zeta\in\partial D}\mathring{B}(\zeta, \delta_\zeta)$. On a donc

$$|f|_{B\cap D}| \leq M + \varepsilon.$$

Soit $\Omega = \bar{D}\backslash B$. Ω est compact car fermé dans $\bar{D}$ et borné car $\partial D \subset \cup_{\zeta\in\partial D}\mathring{B}(\zeta, \delta_\zeta)$ donc $\Omega \subset D$ or D est un domaine borné.

Pour tout $x \in \Omega$, $\operatorname{dist}(x, \partial D) > 0$ car ∂D est compact. Comme Ω est compact, $\delta_0 = \min\limits_{x\in\Omega} \operatorname{dist}(x, \partial D)$ existe et est strictement positif.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\delta_0 > \frac{1}{n}$.

$$\Omega \subset \Omega_n = \{x \in D, \operatorname{dist}(x, \partial D) > \frac{1}{n}\}.$$

En effet, si $y \in \Omega$, $\operatorname{dist}(y, \partial D) > \min\limits_{x\in\Omega} \operatorname{dist}(x, \partial D) = \delta_0 > \frac{1}{n}$.

On va appliquer le principe du maximum dans sa formulation classique à Ω_n.

Si $x \in \bar{\Omega}_n$, $\operatorname{dist}(x, \partial D) \geq \frac{1}{n}$ donc $x \notin \partial D$ et $x \in D$. Ainsi, $\bar{\Omega}_n \subset D$ donc f est continue sur $\bar{\Omega}_n$ et holomorphe sur Ω_n.

De plus, $\Omega \subset \Omega_n$ par ce qui précède donc $\partial\Omega_n \cap \Omega = \emptyset$ donc $\partial\Omega_n \subset$ et $\partial\Omega_n \subset D\backslash\Omega = B$. Or f est bornée par $M + \varepsilon$ sur B donc aussi sur $\partial\Omega_n$. Le principe du maximum indique que

$$|f|_{\Omega_n}| \leq M + \varepsilon.$$

De plus, $D\backslash\Omega_n \subset D\backslash\Omega = B$ donc

$$\left|f|_{D\backslash\Omega_n}\right| \leq M + \varepsilon.$$

Ainsi, $|f|_D| \leq M + \varepsilon$. En prenant la limite pour $\varepsilon \to 0$, on obtient le résultat

$$|f|_D| \leq M.$$

□

Définition 1.4.

Pour f une fonction holomorphe sur $D = \{z \in \mathbb{C}, \alpha < \arg z < \beta\}$ (où α, $\beta \in \bar{\mathbb{R}}$), on note $M_f : r \longmapsto \sup\limits_{\theta\in]\alpha,\beta[} |f(re^{i\theta})|$.

Théorème 1.5.

Soient α, $\beta \in \mathbb{R}$, tel que $\alpha < \beta$, $D = \{z \in \mathbb{C}, \alpha < \arg z < \beta\}$ et $\lambda = \frac{\pi}{\beta-\alpha}$.
Soit f une fonction holomorphe sur D telle qu'il existe $r_0 \geq 0$ et $\rho < \lambda$ tel que

$$\forall r \geq r_0,\ \log M_f(r) < r^\rho.$$

Alors si f est bornée sur ∂D, elle l'est aussi sur D par la même constante.

Démonstration.

Supposons sans perte de généralité que $\beta + \alpha = 0$. Si ce n'est pas le cas, on peut appliquer la démonstration qui suit à $z \longmapsto f(ze^{i(\frac{\beta+\alpha}{2})})$ qui est définie pour $\alpha < \arg z + \frac{\beta+\alpha}{2} < \beta$, i.e. $-\frac{\beta-\alpha}{2} < \arg z < \frac{\beta-\alpha}{2}$, ce qui conduit au résultat pour f sur D. De la sorte, $D = \{re^{i\theta},\ r \geq 0, |\theta| < \gamma = \frac{\pi}{2\lambda}\}$

Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(z)| \leq M$ sur ∂D.
Soit ρ_1 tel que $\rho < \rho_1 < \lambda$. Soit $\delta > 0$. On définit pour $z \in D$

$$\varphi_\delta(z) = f(z)e^{-\delta z^{\rho_1}}.$$

Soit $z = re^{i\theta} \in D$ tel que $|z| \geq r_0$. Alors

$$z^{\rho_1} = |z|^{\rho_1} e^{i\theta\rho_1}$$

donc

$$\mathrm{Re}(z^{\rho_1}) = |z|^{\rho_1}\cos(\theta\rho_1) \geq |z|^{\rho_1}\cos(\gamma\rho_1) \quad \text{car } 0 < |\theta\rho_1| < \gamma\rho_1 < \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
|\varphi_\delta(z)| &= |f(z)|e^{-\delta\,\mathrm{Re}(z^{\rho_1})} \\
&\leq |f(z)|e^{-\delta|z|^{\rho_1}\cos(\gamma\rho_1)} \quad \text{par ce qui précède} \\
&\leq e^{|z|^\rho - \delta|z|^{\rho_1}\cos(\gamma\rho_1)} \quad \text{par l'hypothèse.}
\end{aligned}$$

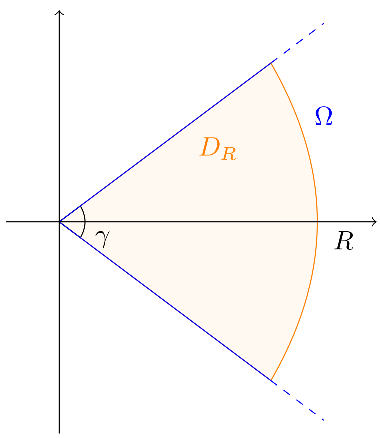
Comme $\rho < \rho_1$ et $\cos(\rho_1\gamma)) > 0$,

$$|\varphi_\delta(z)| \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} 0$$

donc il existe R tel que

$$\forall z \in D,\ |z| \geq R,\ |\varphi_\delta(z)| \leq M.$$

Soit $D_R = \{re^{i\theta} \in D,\ r < R,\ |\theta| < \gamma\}$.



φ_δ est holomorphe sur D_R car f l'est et D_R est un ouvert borné. φ_δ est bornée par M sur la frontière car si $z = re^{i\theta}$ et que $r = R$, on a l'inégalité qui précède et si $\theta \in \{\pm\gamma\}$, $|\varphi_\delta| \leq |f|$ car $|\varphi_\delta(z)| = |f(z)|e^{-\delta|z|^{\rho_1}\cos(\gamma\rho_1)} \leq |f(z)|$ et $|f| \leq M$ sur ∂D_R. Ainsi, par le lemme précédent,

$$\forall z \in D_R,\ |\varphi_\delta(z)| \leq M.$$

De plus, si $z \in D \backslash D_R$, $|z| \geq R$ donc $|\varphi_\delta(z)| \leq M$ par définition de R.
Ainsi, $\forall z \in D$, $|\varphi_\delta(z)| \leq M$, i.e.

$$|f(z)| \leq Me^{\delta|z|^{\rho_1}}.$$

En prenant la limite pour $\delta \to 0$, on obtient

$$\forall z \in D,\ |f(z)| \leq M.$$

$\square$

Théorème 1.6.
Soit $\rho > 0$, $D = \{z \in \mathbb{C}, |\arg z| < \frac{\pi}{2\rho}\}$. Soit $\sigma > 0$.
Soit f une fonction holomorphe sur D telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r_0 \geq 0$ tel que

$$\forall r \geq r_0 \ \log M_f(r) < (\sigma + \varepsilon) r^\rho.$$

On suppose de plus f bornée par M sur ∂D.
Alors

$$\forall re^{i\theta} \in D, \, |f(re^{i\theta})| \leq M e^{\sigma r^\rho \cos(\rho\theta)}.$$

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\varphi_\varepsilon : z \longmapsto f(z) e^{-(\sigma+\varepsilon) z^\rho}$ définie sur D.
φ_ε est bornée sur $\mathbb{R}^+$. En effet, comme

$$|f(r)| \underset{as}{<} e^{(\sigma+\varepsilon) r^\rho},$$

il existe r_0 tel que

$$r \geq r_0 \implies |f(r)| \leq e^{\sigma+\varepsilon) r^\rho}.$$

$[0, r_0]$ est compact et φ_ε y est holomorphe (car f l'est) donc bornée.
D'autre part, si $r > r_0$,

$$\begin{aligned} |\varphi_\varepsilon(r)| &= |f(r)| e^{-(\sigma+\varepsilon) r^\rho} \\ &\leq e^{(\sigma+\varepsilon) r^\rho - (\sigma+\varepsilon) r^\rho} \\ &= 1. \end{aligned}$$

De plus, si $z = re^{i\theta}$ avec $\theta = \frac{\pi}{2\rho}$,

$$|\varphi_\varepsilon(z)| = |f(z)| e^{-(\sigma+\varepsilon) r^\rho \cos(\rho\theta)} = |f(z)| \leq M.$$

Ainsi, φ_ε est bornée sur la frontière de $D_+ = \{z \in \mathbb{C}, 0 < \arg z < \frac{\pi}{2\rho}\}$.
Puis si $z = re^{i\varphi}$,

$$\begin{aligned} |\varphi_\varepsilon(z)| &= |f(z)| e^{-(\sigma+\varepsilon) r^\rho \cos(\rho\varphi)} \\ &\leq e^{(\sigma+\varepsilon) r^\rho - (\sigma+\varepsilon) r^\rho \cos(\rho\varphi)} \\ &= e^{(\sigma+\varepsilon) r^\rho (1+\cos(\rho\varphi))} \\ &\leq e^{(\sigma+\varepsilon) r^\rho} \text{car } \ \rho\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ &\underset{as}{<} e^{r^{\frac{3}{2}\rho}}, \end{aligned}$$

et $0 < \frac{3}{2}\rho < \frac{\pi}{\frac{\pi}{2\rho}} = 2\rho$ donc par 1.5, φ_ε est bornée sur D.
De ce fait, il découle que

$$\log M_{\varphi_\varepsilon} \leq r^\gamma$$

avec $0 < \gamma < 1$.
Comme φ_ε est bornée par M sur la frontière de D, en appliquant à nouveau 1.5, on obtient $|\varphi_\varepsilon| \leq M$ sur D, i.e.

$$\forall re^{i\theta} \in D, \, |f(rei\theta)| \leq M e^{-(\sigma+\varepsilon) r^\rho \cos(\rho\theta)},$$

d'où le résultat en prenant $\varepsilon \to 0$. □

1.4 Principe de Phragmén-Lindelöf sur un demi plan

Dans cette partie on appliquera les résultats de la section précédente pour obtenir des estimations sur un demi plan.

1.4.1 Demi plan droit

On peut déjà énoncer un premier résultat facile provenant du théorème 1.6 :

Théorème 1.7.
Soit $D = \{z \in \mathbb{C}, |\arg z| < \frac{\pi}{2}\}$. Soit $\sigma > 0$.
Soit f une fonction holomorphe sur D telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r_0 \geq 0$ tel que

$$\forall r \geq r_0 \ \log M_f(r) < (\sigma + \varepsilon) r.$$

On suppose de plus f bornée par M sur ∂D.
Alors

$$\forall z = x + iy \in D, \ |f(x+iy)| \leq M e^{\sigma x}.$$

Démonstration.
Il suffit de prendre $\rho = 1$ dans le théorème 1.6. □

1.4.2 Demi plan haut et bas

Théorème 1.8.
Soit f une fonction holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}(z) > 0\}$.
Supposons

- $\forall \varepsilon > 0$, on a $M_f(r) \overset{as}{<} e^{(\sigma+\varepsilon)r}$ avec $z = re^{i\theta} \in \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}(z) > 0\}$;
- f bornée sur l'axe réel par M.

Alors $\forall z = x + iy \in \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}(z) > 0\}$ on a

$$|f(x+iy)| \leq M e^{\sigma y}. \tag{$\triangle$}$$

Démonstration.
Posons $D = \{z \in \mathbb{C} | \ |\arg(z)| < \frac{\pi}{2}\}$.
Nous allons chercher à utiliser le théorème 1.6 avec $\rho = 1$ pour la fonction suivante :

$$\begin{array}{cccc} g & : & D & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & f(iz) \end{array}.$$

Cette fonction est bien définie. En effet, si $z = re^{i\theta}$ avec $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ alors

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(iz) &= \operatorname{Im}\left(r(i\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right) \\ &= r\cos(\theta) > 0. \end{aligned}$$

Donc g est holomorphe sur D par composition.
De plus

$$\begin{aligned} \log\left(M_g(r)\right) &= \log\left(\sup_{|\theta|<\frac{\pi}{2}} |g(re^{i\theta})|\right) \\ &= \log\left(\sup_{|\theta|<\frac{\pi}{2}} |f(re^{i\theta+\frac{\pi}{2}})|\right) \\ &= \log\left(\sup_{\theta\in]0,\pi[} |f(re^{i\theta})|\right) \\ &= \log\left(M_f(r)\right) \\ &\overset{as}{<} (\sigma+\varepsilon), \ \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Enfin pour $r > 0$

$$\begin{cases} g(re^{i\frac{\pi}{2}}) = g(ri) = f(-r) \leq M \\ g(re^{-i\frac{\pi}{2}}) = g(-ri) = f(+r) \leq M \end{cases} \quad \text{car } f \text{ bornée sur l'axe réel par } M.$$

Donc g est bornée sur la frontière de D.

Finalement toutes les hypothèses du théorème 1.6 sont vérifiées. On a alors que

$$\forall r \geq 0,\ |\theta| < \frac{\pi}{2},\ |g(re^{i\theta}| \leq Me^{\sigma r\cos(\theta)}$$

donc

$$\forall r \geq 0,\ |\theta| < \frac{\pi}{2},\ |f(re^{i\theta+\frac{\pi}{2}}| \leq Me^{\sigma r\cos(\theta)}$$

d'où

$$\forall r \geq 0,\ \theta \in]0,\pi[,\ |f(re^{i\theta}| \leq Me^{\sigma r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)} = Me^{\sigma r\sin(\theta)}$$

et finalement

$$\forall z = x+iy \in \{z \in \mathbb{C} |\operatorname{Im}(z) > 0\},\ |f(x+iy)| \leq Me^{\sigma y}.$$

□

Remarque.
En appliquant la démonstration qui précède avec

$$\begin{array}{cccc} g & : & D & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & f(-iz) \end{array}$$

on peut obtenir la même estimation mais sur le demi plan inférieur, d'où le résultat suivant :

Soit f une fonction holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C}| \operatorname{Im}(z) < 0\}$.
Supposons
- $\forall \varepsilon > 0$, on a $M_f(r) \overset{as}{<} e^{(\sigma+\varepsilon)r}$ avec $z = re^{i\theta} \in \{z \in \mathbb{C}| \operatorname{Im}(z) < 0\}$.
- f bornée sur l'axe réel par M.

Alors $\forall z = x+iy \in \{z \in \mathbb{C}| \operatorname{Im}(z) < 0\}$ on a

$$|f(x+iy)| \leq Me^{\sigma y}.$$

On peut approfondir le théorème 1.8 avec les résultats suivants :

Définition 1.9.
Si une inégalité $h(r) < \phi(r)$ est vérifiée pour des valeurs suffisamment grandes de r, c'est à dire $\exists \eta \in \mathbb{R}$, $\forall r > \eta$ tel que $h(r) < \phi(r)$, alors nous appellerons cette assertion *inégalité asymptotique* et noterons $h(r) \overset{as}{<} \phi(r)$.

Définition 1.10.
- On dit qu'une fonction f est *exponentielle de type* $\sigma > 0$ si pour z dans le domaine de définition de f,
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A_\varepsilon \in \mathbb{R},\ |f(z)| \leq A_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)|z|}.$$
- On dit que f est de *type minimale* si $\sigma = 0$.
- On dit que f est une *fonction d'ordre fini* si pour $k > 0$
$$M_f(r) \overset{as}{<} e^{r^k}.$$
On appelle *ordre de* f le plus petit k vérifiant l'inégalité asymptotique.

Proposition 1.11.

Si f est une fonction entière exponentielle de type σ telle que $|f(x)| \leq M$ pour tout x réel. Alors

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leq Me^{\sigma|y|}$$

Démonstration.

D'une part d'après le théorème 1.8 on a le résultat sur $\{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$. D'autre part en utilisant la remarque qui précède on a le résultat sur $\{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Im}(z) < 0\}$.

□

Proposition 1.12.

1. L'estimation ($\triangle$) obtenue dans le théorème 1.8 est atteinte pour des fonctions de la forme $f(z) = M\gamma e^{-i\sigma z},\ |\gamma| = 1,\ z \in \{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$.
2. De plus si une fonction f vérifie le cas d'égalité dans ($\triangle$) en au moins un point alors $f(z) = M\gamma e^{-i\sigma z},\ |\gamma| = 1,\ z \in \{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Démonstration.

1. Vérifions qu'une fonction de la forme $f(z) = M\gamma e^{-i\sigma z},\ |\gamma| = 1,\ z \in \{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ vérifie les hypothèses du théorème 1.4.2.
   - f est bien holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$.
   - Pour $\varepsilon > 0$ et $\sigma \geq 0$

   $$\begin{aligned}\sup_{\theta\in]0,\pi[} \frac{|f(re^{i\theta}|}{e^{(\sigma+\varepsilon)r}} &= \sup_{\theta\in]0,\pi[} M \left| e^{-i\sigma r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))} \right| e^{-(\sigma+\varepsilon)r} \\ &= \sup_{\theta\in]0,\pi[} Me^{-\sigma r\sin(\theta)-(\sigma+\varepsilon)r} \\ &= \sup_{\theta\in]0,\pi[} Me^{-\sigma r(\sin(\theta)-1)-\varepsilon r} \\ &= Me^{-\varepsilon r}.\end{aligned}$$

   Donc

   $$\sup_{\theta\in]0,\pi[} |f(re^{i\theta}| = Me^{-(\sigma+2\varepsilon)r}$$

   ainsi

   $$M_f(r) \overset{as}{<} e^{(\sigma+\varepsilon)}r.$$

   - Il est clair que f est bornée par M sur l'axe réel.

   Les hypothèses du théorème 1.4.2 sont vérifiées, on a donc l'estimation ($\triangle$). Vérifions que f satisfait le cas d'égalité :

   $$\begin{aligned}|f(x+iy)| &= |M| \underbrace{|\gamma|}_{=1} \left| e^{-i\sigma(x+iy)} \right| \\ &= Me^{\sigma y}\end{aligned}$$

2. Supposons maintenant que f vérifie le cas d'égalité dans ($\triangle$) en $z_0 = x_0 + iy_0$ tel que $\mathrm{Im}(z_0) > 0$. Posons

   $$\begin{array}{cccc} g & : & \{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Im}(z) > 0\} & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & f(z)e^{i\sigma z} \end{array}$$

D'après les hypothèses $|f(z_0)| = Me^{i\sigma y_0}$

$$\begin{aligned}
|g(z_0)| &= Me^{i\sigma y_0}\left|e^{iz_0}\right| \\
&= Me^{\sigma y_0}\left|e^{i(x_0+iy_0)}\right| \\
&= Me^{\sigma y_0}\left|e^{ix_0-y_0}\right| \\
&= Me^{\sigma y_0}e^{-\sigma y_0}\underbrace{\left|e^{ix_0}\right|}_{=1} \\
&= M
\end{aligned}$$

donc $|g|$ admet un maximum local en z_0, d'après le principe du maximum on en déduit que g est constante égale à M sur $\{z \in \mathbb{C} |\operatorname{Im}(z) > 0\}$. On a pour tout $z \in \{z \in \mathbb{C} |\operatorname{Im}(z) > 0\}$

$$M = |f(z)e^{i\sigma z}|.$$

Finalement $f(z) = M\gamma e^{-i\sigma z}$ avec $|\gamma| = 1$ et cela pour tout $z \in \{z \in \mathbb{C} |\operatorname{Im}(z) > 0\}$.

□

Proposition 1.13.
Soit f une fonction entière tel que f est une fonction exponentielle de type minimal, et si f est bornée par $M \in \mathbb{R}$ sur l'axe réel. Alors f est constante sur tout le plan.

Démonstration.
Puisque f est de type minimal on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A_\varepsilon \in \mathbb{R},\ |f(z)| \leq A_\varepsilon e^{\varepsilon|z|}.$$

On peut appliquer la proposition 1.11 car f est entière, exponentielle de type ε et bornée sur l'axe réel. On a alors

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leq Me^{\varepsilon|y|}.$$

En faisant tendre ε vers 0. On a

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leq M.$$

Or d'après le théorème de Liouville si une fonction est bornée sur tout le plan complexe alors celle-ci est constante.

□

2 Application des théorèmes de Phragmén-Lindelöf

2.1 Estimation de croissance

Lemme 2.1.
Soit une f fonction bornée et holomorphe sur le demi plan droit tel que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log|f(x)|}{x} = -\infty,$$

alors f est identiquement nulle.

Démonstration.
Soit $D = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$. Par hypothèse, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall z \in D$, $|f(z)| \leq M$. Soit $d > 0$. Soit $g : z \longmapsto f(z)e^{dz}$ définie sur D.

g est bornée sur $i\mathbb{R}$. En effet, si $z \in i\mathbb{R}$, $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$ et

$$|g(iy)| = |f(iy)||e^{idy}| = |f(iy)| \leq M.$$

De plus, g est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

$$|g(x)| = |f(x)|e^{dx}.$$

Comme

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log |f(x)|}{x} = -\infty,$$

il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que si $x \geq x_0$,

$$\frac{\log |f(x)|}{x} \leq -d$$

i.e.

$$|f(x)| \leq e^{-dx}.$$

De plus, si $x \leq x_0$, $e^{dx} \leq e^{dx_0}$.

Finalement,

$$|g(x)| \leq \max(1, Me^{dx_0}).$$

Posons $M_d = \max(1, Me^{dx_0}, M)$ de sorte que g est bornée par M_d sur $\mathbb{R}^+ \cup i\mathbb{R}$. Appliquons le théorème de Phragmèn-Lindelöf à g sur les plans supérieurs et inférieurs.

g est holomorphe sur $D_+ = \{z \in D, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et bornée sur la frontière $i\mathbb{R} \cup \mathbb{R}^+$ par M_d. De plus, si $z = re^{i\theta} \in D$,

$$\begin{aligned} \log M_g(f) &= \log M_f(r) + d \operatorname{Re} z \\ &\leq \log M + dr \\ &< r^\rho \end{aligned}$$

pour r assez grand et $1 < \rho < 2 = \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}$.

Par 1.5, $|g|_{D_+}| \leq M_d$. De la même manière, on obtient $|g|_{D_-}| \leq M_d$ avec $D_- = \{z \in D, \mathrm{Im}(z) < 0\}$ et ainsi

$$\forall z \in D, \ |g(z)| \leq M_d.$$

On en déduit que

$$\log M_g(r) \leq \log M_d \overset{as}{<} r^\rho$$

avec $0 < \rho < \frac{\pi}{\pi} = 1$. Par 1.5 à nouveau, on en déduit que $|g| \leq M$ sur D, ce qui signifie que

$$\forall z \in D, \ |f(z)| \leq Me^{-d \operatorname{Re} z}.$$

En prenant $d \to +\infty$, on obtient alors $f = 0$. □

Théorème 2.2.

Soit f une fonction holomorphe sur le demi plan droit. S'il existe $M > 0$ et $c > 0$ tel que

$$\forall z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geq 0\}, \ |f(z)| \leq Me^{-c|Z|},$$

alors f est identiquement nulle.

Démonstration.

Nous allons appliquer le lemme 2.1 à la fonction suivante :

$$F(z) = f(z)e^{-\varepsilon z \log(z)}, \text{ pour } \mathrm{Re}(z) > 0 \text{ et } \varepsilon > 0.$$

Pour cela il faut vérifier que F est bornée sur le demi plan droit. Soit $z = x + iy \in \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geq 0\}$ on a :

$$\begin{aligned} |F(z)| &= |f(z)||e^{-\varepsilon z \log(z)}| \\ &\leq Me^{-c|z|} \left| e^{-\varepsilon(x+iy)(\ln|z| + i\arg(z))} \right| \\ &= Me^{-c|z|} \left| e^{-\varepsilon x \ln|z| + \varepsilon y \arg(z)} \right| \left| e^{i(-\varepsilon x \arg(z) + \varepsilon y \ln|z|)} \right| \\ &= Me^{-c|z| - \varepsilon x \ln|z| + \varepsilon y \arg(z)} \end{aligned}$$

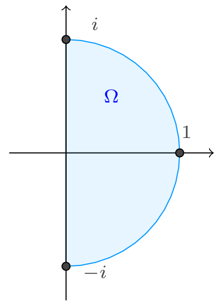
Si $|z| \geq 1$:

$$\begin{aligned} |F(z)| &\leq Me^{-c|z|+\varepsilon|z|\frac{\pi}{2}} \\ &= Me^{|z|\left(\varepsilon\frac{\pi}{2}-c\right)} \end{aligned}$$

En choisissant ε tel que $\varepsilon\frac{\pi}{2} - c < 0$ c'est à dire $0 < \varepsilon < \frac{2c}{\pi}$, on a que

$$|F(z)| \leq M$$

Si $|z| < 1$, on est alors sur cet espace :

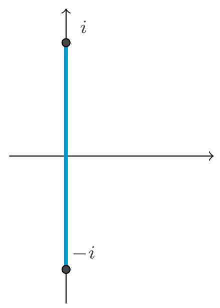


On étudie F sur $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0,\ |z| < 1\}$ qui est ouvert. Or F est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 0\}$ donc :

- F continue sur $\bar{\Omega}$
- F holomorphe sur Ω

Ainsi d'après le principe du maximum F est bornée sur Ω.

On a que F est bornée sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0,\ |z| < 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geq 0,\ |z| \geq 1\}$. Ainsi il reste à regarder sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = 0,\ |z| < 1\}$, c'est à dire sur :



Dans ce cas là pour $z = x + iy \in \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = 0,\ |z| < 1\}$

$$\begin{aligned} |F(z)| &\leq Me^{-c|z|}\left|e^{-\varepsilon z \log|z|}\right| \\ &= Me^{-c|z|}\left|e^{-\varepsilon(x+iy)(\ln|z|+i\arg(z))}\right| \\ &= Me^{-c|z|}\left|e^{-i\varepsilon y(\ln|z|+i\arg(z))}\right| \\ &= Me^{-c|z|}\underbrace{\left|e^{-i\varepsilon y\ln|z|}\right|}_{=1}e^{\varepsilon y\arg(z)} \\ &= Me^{-c|z|}e^{\varepsilon y\frac{\pi}{2}} \\ &\leq Me^{\varepsilon\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Finalement F est bornée sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geq 0\}$.

Vérifions la dernière hypothèse du lemme 2.1. Prenons $x \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}
\frac{\ln|F(x)|}{x} &= \frac{\ln\left(|f(x)|e^{-\varepsilon x \ln(x)}\right)}{x} \\
&\leq \frac{\ln\left(Me^{-c|x|}e^{-\varepsilon x \ln(x)}\right)}{x} \\
&= \frac{\ln(M)}{x} - \frac{cx + \varepsilon x \ln(x)}{x} \\
&= \frac{\ln(M)}{x} - c - \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty
\end{aligned}$$

Ainsi d'après le lemme 2.1 $\forall z \in \mathbb{C},\ F(z) = f(z)e^{-\varepsilon z \log(z)} = 0$ donc f est identiquement nulle. □

2.2 Boas-Bernstein Theorem

Definition.

Let f be a holomorphic function on a domain $D = \{re^{i\theta},\ \alpha < \theta < \beta\}$ such that f is of order ρ. There exist $A \in \mathbb{R}$ and $\rho > 0$ such that $M_f(r) \overset{as}{<} e^{Ar^\rho}$, where we recall that $M_f(r) = \sup\limits_{\alpha<\theta<\beta} |f(re^{i\theta})|$.

The function

$$h_f : \theta \mapsto \limsup_{r\to\infty} \frac{\log|f(re^{i\theta})|}{r^\rho}$$

is called the indicator function of f with respect to the order ρ.

We assume that h_f is continuous on $[\alpha, \beta]$.

Definition.

A function f is said to be an EFET (Entire Function of Exponential Type) when f is entire (i.e., holomorphic on the entire complex plane) and of exponential type, i.e.,

$$\exists\, M, \tau, r_0,\ \forall\, r > r_0, |f(re^{i\theta})| \leq Me^{\tau r}.$$

Theorem 2.3. Boas-Bernstein Theorem

For any holomorphic function f defined on $\mathbb{C}$ of exponential type, satisfying

$$d = h_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = h_f\left(-\frac{\pi}{2}\right) < \pi,$$

and for which there exists $M \in \mathbb{R}$ such that

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ |f(k)| \leq M$$

it admits the representation

$$f(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi\omega} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \frac{f(k)\sin(\omega(z-k))}{(z-k)^2}$$

for all $\omega \in]0, \pi - d[$.

Proof.

Let $\omega \in]0, \pi - d[$, $z \in \mathbb{C}$, and

$$\varphi_z : \zeta \mapsto f(\zeta)\frac{\sin(\omega(z-k))}{\omega(\zeta - z)} - \frac{\sin(\pi\zeta)}{\pi\omega} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k f(k)\sin(\omega(z-k))}{(\zeta-k)(z-k)}.$$

Let's show that φ_z is well-defined.

Firstly, we have

$$\frac{\sin(\omega(\zeta - z))}{\omega(\zeta - z)} \underset{\zeta \to z}{\sim} 1,$$

which means that we can extend the function $\zeta \mapsto \frac{\sin(\omega(\zeta-z))}{\omega(\zeta-z)}$ to the entire complex plane $\mathbb{C}$ by continuity.

Similarly, if $k \in \mathbb{Z}$, we have

$$\frac{\sin(\omega(z-k))}{z-k} \underset{z \to k}{\sim} \omega,$$

which means that the general term of the series on the right-hand side is well-defined on $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Let's show that the series converges uniformly on $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Note that if $k \in \mathbb{Z}$,

$$|\sin(\omega(z-k))| = |\sin(\omega z)\cos(\omega k) - \cos(\omega z)\sin(\omega k)| \leq |\sin(\omega z)| + |\cos(\omega z)| := M_z.$$

Let $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

$$\left| \frac{(-1)^k f(k) \sin(\omega(z-k))}{(\zeta - k)(z-k)} \right| \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{|f(k)||\sin(\omega(z-k))|}{k^2} \leq \frac{M_z M}{k^2}.$$

This upper bound is a quantity independent of ζ, and it represents the general term of a convergent series. Therefore, the series converges uniformly on $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Thus, φ_z is well-defined on $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Furthermore, φ_z is well-defined and vanishes on $\mathbb{Z}$.

Indeed,

$$\sin(\pi\zeta) = \sin(\pi(\zeta - k) + k\pi) = (-1)^k \sin(\pi(\zeta - k))$$

so if $\zeta = j \in \mathbb{Z}$,

$$\sin(\pi j) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k f(k) \sin(\omega(z-k))}{(j-k)(z-k)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{f(k)\sin(\omega(z-k))}{(z-k)} \frac{\sin(\pi(j-k))}{(j-k)}.$$

Similarly to the previous case, the general term of this series is well-defined because if $k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{\sin(\pi(j-k))}{j-k} \underset{j \to k}{\sim} \pi$$

and if $j \neq k$, $\frac{\sin(\pi(j-k))}{j-k} = \frac{0}{j-k} = 0$.

We can directly deduce that the series converges and equals the term for $k = j (= \zeta)$, i.e.,

$$f(\zeta)\pi \frac{\sin(\omega(z-\zeta))}{z-\zeta}.$$

Thus, φ_z is well-defined on $\mathbb{Z}$, and for every $\zeta \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi_z(\zeta) = f(\zeta)\frac{\sin(\omega(\zeta - z))}{\omega(\zeta - z)} - \frac{1}{\pi\omega}\pi f(\zeta)\frac{\sin(\omega(z-\zeta))}{z-\zeta} = 0.$$

In conclusion, φ_z is well-defined on $\mathbb{C}$.

Furthermore, φ_z is holomorphic on $\mathbb{C}$. Indeed, we can verify that φ_z is continuous at all integers. Since it is holomorphic on $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ due to the properties of f and sin, and since the series converges uniformly on $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, φ_z is holomorphic on $\mathbb{C}$.

Next, $\zeta \mapsto f(\zeta)\frac{\sin(\omega(\zeta-z))}{\omega(\zeta-z)}$ is of exponential type since f is of exponential type and $\zeta \mapsto \frac{\sin\zeta}{\zeta}$ is also of exponential type. Indeed, if $\zeta = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\sin(\zeta)}{\zeta}\right| = \left|\frac{e^{i\zeta} - e^{-i\zeta}}{2i\zeta}\right| &\leq \frac{|e^{i\zeta}| + |e^{-i\zeta}|}{2|r|} \\
&= \frac{1}{2|r|}\left[\left|e^{ir(\cos\theta + i\sin\theta)}\right| + \left|e^{-ir(\cos\theta + i\sin\theta)}\right|\right] \\
&= \frac{1}{2|r|}\left[e^{-r\sin\theta} + e^{r\sin\theta}\right] \\
&\leq e^r.
\end{aligned}$$

For the right-hand term, the series converges normally on $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, and if $\theta\in]-\pi,\pi]\backslash\{0,\pi\}$ and $k\in\mathbb{Z}$, we have

$$\frac{(-1)^k f(k)\sin(\omega(z-k))}{(re^{i\theta}-k)(z-k)}\underset{r\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Therefore,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^k f(k)\sin(\omega(z-k))}{(re^{i\theta}-k)(z-k)}\underset{r\to+\infty}{\longrightarrow}0,$$

and thus,

$$\zeta\longmapsto\frac{\sin(\pi\zeta)}{\pi\omega}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^k f(k)\sin(\omega(z-k))}{(re^{i\theta}-k)(z-k)}$$

is of exponential type. Finally, by the triangle inequality, φ_z is of exponential type.
From the above, we deduce that $\psi_z:\zeta\longmapsto\frac{\varphi_z}{\sin(\pi\zeta)}$ is holomorphic on $\mathbb{C}$ and of exponential type, since $\zeta\longmapsto\sin(\pi\zeta)$ has zeros at integers with multiplicities 1, not greater than the ones in the numerator.

$$\psi_z:\zeta\longmapsto f(\zeta)\frac{\sin(\omega(z-k))}{\omega(\zeta-z)\sin(\pi\zeta)}-\frac{1}{\pi\omega}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^k f(k)\sin(\omega(z-k))}{(\zeta-k)(z-k)}.$$

Let's calculate the indicator of the first term (which is a function defined on $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$) at the points $\pm\frac{\pi}{2}$.
Let's define

$$g_z:\zeta\longmapsto f(\zeta)\frac{\sin(\omega(z-k))}{\omega(\zeta-z)\sin(\pi\zeta)}.$$

We have

$$|\sin(\omega ir)|=\left|\frac{e^{i\omega ir}-e^{-i\omega ir}}{2i}\right|=\frac{e^{\omega r}-e^{-\omega r}}{2}\underset{r\to+\infty}{\sim}\frac{e^{\omega r}}{2},$$

so

$$\frac{\log|\sin(\omega ir)|}{r}\underset{r\to+\infty}{\sim}\frac{\log(e^{\omega r})-\log 2}{r}\underset{r\to+\infty}{\longrightarrow}\omega.$$

Therefore, we have

$$h_{g_z}\left(\frac{\pi}{2}\right)=h_f\left(\frac{\pi}{2}\right)+\omega-\pi-h_{\zeta\to\frac{1}{\zeta}}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

by the properties of logarithm. Since $\frac{\log(r)}{r}\underset{r\to+\infty}{\longrightarrow}0$, we have $h_{\zeta\to\frac{1}{\zeta}}(\frac{\pi}{2})=0$, so

$$h_{g_z}\left(\frac{\pi}{2}\right)=d+\omega-\pi<0.$$

By repeating the same reasoning, but replacing i with $-i$, we obtain similarly

$$h_{g_z}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=d+\omega-\pi<0.$$

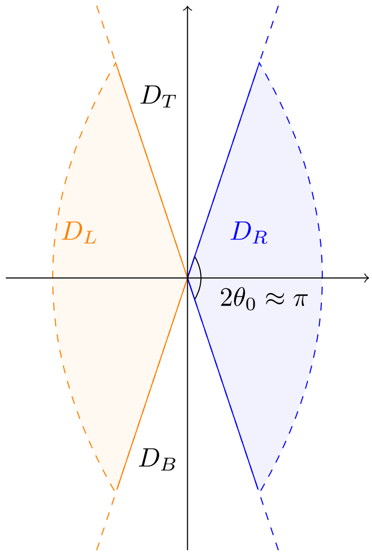
Since we have previously shown that the second summand on the right-hand side in the definition of ψ_z vanishes as $\zeta\to\infty$ along any ray $\{\zeta,\arg\zeta=\theta\}$ for $\theta\notin\{0,\pi\}$, we deduce that

$$h_{\psi_z}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=d+\omega-\pi<0.$$

By continuity of h_{ψ_z}, there exists $\theta_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ such that for all $\theta\in(-\pi,\pi]$, if $\left|\theta-\frac{\pi}{2}\right|\leq\frac{\pi}{2}-\theta_0$ or $\left|\theta+\frac{\pi}{2}\right|\leq\frac{\pi}{2}-\theta_0$, then

$$h_{\psi_z}(\theta)<2h_{\psi_z}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right):=-\delta<0.$$

Let $D_R=\{z\in\mathbb{C},\arg z\in(-\theta_0,\theta_0)\}$.



Let $\theta \in \left[\theta_0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{2}, -\theta_0\right]$.

$$h_{\psi_z}(\theta) < -\delta \text{ hence } \lim_{r \to +\infty} \log \frac{\left|\psi_z(re^{i\theta})\right|}{r} < -\delta$$

so there exists $r_0 > r$ such that for all $r \geq r_0$,

$$\log \left|\psi_z(re^{i\theta})\right| < -r\delta \quad \text{ i.e.,} \quad \left|\psi_z(re^{i\theta})\right| < e^{-r\delta}.$$

Let $r \geq r_0$.

$$\left|\psi_z\left(re^{\pm i\theta_0}\right)\right| < e^{-r\delta} \underset{r \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

thus ψ_z is bounded on the boundary of D_R.

Let's apply the Phragmén-Lindelöf theorem with an angular opening. We have shown that ψ_z is holomorphic on D_R based on the previous reasoning. For any $\zeta = re^{i\theta} \in D_R$, we have $\log|\psi_z(\zeta)| \overset{as}{<} r^1$ because ψ_z is an EFET.

The angular opening is given by $\lambda = \frac{\pi}{2\theta_0} > \frac{\pi}{2\frac{\pi}{2}} = 1$. Therefore, according to 1.5, ψ_z is bounded on the entire D_R.

We can repeat the same argument on $D_T = \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}, \theta \in (\theta_0, \pi - \theta_0)\}$ as ψ_z is bounded on the boundary and of exponential type. Similarly, ψ_z is bounded on D_L and $D_B = \{re^{i\theta}, \theta \in (-\theta_0, -(\pi - \theta_0))\}$ so ψ_z is bounded on the entire complex plane.

By the Liouville's theorem, we conclude that there exists $k \in \mathbb{C}$ such that $\forall \zeta \in \mathbb{C}$, $\psi_z(\zeta) = k$. However, if $r \geq r_0$, we have

$$|k| = \left|\psi\left(re^{\pm i\frac{\pi}{2}}\right)\right| < e^{-r\delta}$$

and taking the limit as r tends to infinity, we obtain $k = 0$.

Finally, we have

$$\forall \zeta \in \mathbb{C},\ \psi_z(\zeta) = 0,$$

and in particular, taking $\zeta = z$, we obtain $\varphi_z(z) = 0$. In other words, we have

$$0 = f(z) \times 1 - \frac{\sin(\pi z)}{\pi\omega} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \frac{f(k)\sin(\omega(z-k))}{(z-k)^2}$$

which proves the result.

$\square$

2.3 Riesz–Thorin interpolation theorem

By studying a particular case of the Phragmèn-Lindelöf method, we can establish an interpolation result that has applications in Fourier analysis.

Lemma 2.4. Special case of a Phragmén-Lindelöf
Let F be

- holomorphic on $S = \{z \in \mathbb{C}\ 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$;
- continuous on $\bar{S}$;
- bounded on $\bar{S}$;
- such that $|F(z)| \leq B_0$ when $\mathrm{Re}(z) = 0$ and $|F(z)| \leq B_1$ when $\mathrm{Re}(z) = 1$, with $B_0,\ B_1 \in \mathbb{R}_+^*$.

Then

$$\forall z \in S, \text{ such that } \mathrm{Re}(z) = \theta,\ |F(z)| \leq B_o^{1-\theta} B_1^{\theta}.$$

Proof.
This is a simple consequence of the theorem 1.1. Indeed, if we take $\Omega = S$ with $a = 0$ and $b = 1$ we get the result. □

The proof of the following theorem is inspired by [3].

Theorem 2.5. Riesz-Thorin
Let (X, μ) and (Y, ν) be two measure spaces. Let T be a linear operator defined on the set of all simple functions on X and taking values in the set of measurable functions on Y.
Assume that, for $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ and every simple function f on X, we have

$$||T(f)||_{L^{q_0}} \leq M_0\, ||f||_{L^{p_0}}$$

and

$$||T(f)||_{L^{q_1}} \leq M_1\, ||f||_{L^{p_1}}\ .$$

Then for all $\theta \in]0, 1[$ we have

$$||T(f)||_{L^q} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}\, ||f||_{L^p}$$

where p and q verify

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \text{ and } \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Remark.
By density, T has a unique extension as a bounded operator from $L^p(X, \mu)$ to $L^q(Y, \nu)$ for all p and q defined as before.

Proof.
Let f be a simple function on X decomposed as

$$f = \sum_{k=1}^{m} a_k e^{i\alpha_k} \mathbb{1}_{A_k}$$

where $\forall k \in \{1, ..., m\},\ a_k > 0,\ \alpha_k \in \mathbb{R}$ and $A_k \subset X$ are of finite measure and pairwise disjoint.
We need to control

$$||T(f)||_{L^q(Y,\nu)} = \sup_{g \in \mathcal{E},\ ||g||_{L^{q'}} \leq 1} \left| \int_Y T(f)(x) g(x) d\nu(x) \right|$$

where $\mathcal{E}$ is the set of simple functions on Y, and q' is the conjugate exposant of q, i.e. $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.
Let

$$g = \sum_{j=1}^{n} b_j e^{i\beta_j} \mathbb{1}_{B_j}$$

be a simple function on Y, where $\forall j \in \{1, ..., n\}$, $b_j > 0$, $\beta_j \in \mathbb{R}$ and $B_j \subset Y$ with finite measure and are pairwise disjoint.

For $z \in \bar{S} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1\}$, set

$$P(z) = \frac{p}{p_0}(1-z) + \frac{p}{p_1}z,\ Q(z) = \frac{q}{q_0}(1-z) + \frac{q}{q_1}z.$$

Let us also define

$$f_z = \sum_{k=1}^{m} a_k^{P(z)} e^{i\alpha_k} \mathbb{1}_{A_k},\ g_z = \sum_{j=1}^{n} b_j^{Q(z)} e^{i\beta_j} \mathbb{1}_{B_j},$$

and finally

$$F(z) = \int_Y T(f_z)(x) g_z(x) d\nu(x).$$

By linearity,

$$F(z) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_k^{P(z)} b_j^{Q(z)} e^{i\alpha_k} e^{i\beta_j} \int_Y T(\mathbb{1}_{A_k})(x) \mathbb{1}_{B_j}(x) d\nu(x).$$

One deduces that F is holomorphic on $\bar{S}$, as a_k and b_j are positive (strictly).

Since A_k are pairwise disjoint, we have $||f_z||_{L^{p_0}}^{p_0} = ||f||_{L^p}^p$ if $\mathrm{Re}\, z = 0$. Indeed,

$$\begin{aligned}
||f_z||_{L^{p_0}}^{p_0} &= \int_X \left| \sum_{k=1}^{m} a_k^{P(z)} e^{i\alpha_k} \mathbb{1}_{A_k}(x) \right|^{p_0} d\mu(x) \\
&= \int_{\bigsqcup_{j=1}^{m} A_j} \left| \sum_{k=1}^{m} a_k^{P(z)} e^{i\alpha_k} \mathbb{1}_{A_k}(x) \right|^{p_0} d\mu(x) + \underbrace{\int_{X \setminus \bigsqcup_{j=1}^{m} A_j} \left| \sum_{k=1}^{m} a_k^{P(z)} e^{i\alpha_k} \mathbb{1}_{A_k}(x) \right|^{p_0} d\mu(x)}_{=0} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \int_{A_j} \underbrace{\left| \sum_{k=1}^{m} a_k^{P(z)} e^{i\alpha_k} \mathbb{1}_{A_k}(x) \right|}_{=0,\ \text{if } j \neq k}^{p_0} d\mu(x) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \int_{A_j} \left| a_j^{P(z)} \right|^{p_0} \underbrace{\left| e^{i\alpha_j} \right|^{p_0}}_{=1} d\mu(x) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \int_{A_j} a_j^{\mathrm{Re}(P(z))p_0} \underbrace{\left| a_j^{i\,\mathrm{Im}(P(z))} \right|^{p_0}}_{=1} d\mu(x) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \int_{A_j} a_j^{\frac{p}{p_0}p_0} d\mu(x) \ \text{ because } P(z) = \frac{p}{p_0}(1-z) + \frac{p}{p_1}z \text{ and } Re(z) = 0 \\
&= \int_X \sum_{j=1}^{m} a_j^p \mathbb{1}_{Aj} d\mu(x) \\
&= \int_X \sum_{j=1}^{m} \left| a_j^p e^{i\alpha_j} \mathbb{1}_{Aj} \right|^p d\mu(x) \\
&= ||f||_{L^p}^p .
\end{aligned}$$

Likewise, we deduce that $||g_z||_{L^{q_0'}}^{q_0'} = ||g||_{L^{q'}}^{q'}$.

Hölder's inequality and the hypothesis give

$$|F(z)| \leq ||T(f_z)||_{L^{q_0}} ||g_z||_{L^{q_0'}} \leq M_0 ||f_z||_{L^{p_0}} ||g_z||_{L^{q_0'}} .$$

According to what precedes,

$$|F(z)| \leq M_0 ||f||_{L^p}^{\frac{p}{p_0}} ||g||_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q_0'}} . \tag{0}$$

With similar reasoning, when $\mathrm{Re}(z) = 1$, we have,

$$||f_z||_{L^{p_1}}^{p_1} = ||f||_{L^p}^p, \quad \text{and} \quad ||g_z||_{L^{q_1'}}^{q_1'} = ||g||_{L^{q'}}^{q'}.$$

Hence

$$|F(z)| \leq M_1 \, ||f||_{L^p}^{\frac{p}{p_1}} \, ||g||_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q_1'}}. \tag{1}$$

We observe that F is holomorphic on S, F is continuous and bounded on the close strip (by a some constant that depends on f and g) on $\bar{S}$. Moreover, we have (0) and (1). According to the Lemma 2.4, we have for $z \in S$ such that $\mathrm{Re}(z) = \theta$,

$$\begin{aligned}|F(z)| &\leq \left(M_0 \, ||f||_{L^p}^{\frac{p}{p_0}} \, ||g||_{L_{q'}}^{\frac{q'}{q_0'}} \right)^{1-\theta} \left(M_1 \, ||f||_{L^p}^{\frac{p}{p_1}} \, ||g||_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q_1'}} \right)^{\theta} \\ &= M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \, ||f||_{L^p} \, ||g||_{L^{q'}} \quad \text{because } \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \text{ and } \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.\end{aligned}$$

We observe that $P(\theta) = Q(\theta) = 1$ and hence

$$F(\theta) = \int_Y T(f) g d\nu.$$

Finally when taking the supremum for $g \in \mathcal{E}$ with $||g||_{L^{q'}} \leq 1$, we have,

$$||T(f)||_{L^q(Y,\nu)} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \, ||f||_{L^p}.$$

□

2.4 Two applications of the Riez-Thorin Theorem

2.4.1 Fourier transform : Hausdorff-Young Inequality

For $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, we consider the linear operator $\mathcal{F}$ of the Fourier transform defined as follows :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \ \mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2i\pi\langle x, \xi \rangle} dx.$$

For $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, we construct the Fourier transform in $L^2(\mathbb{R}^d)$ as follows :
-We take an approximation $f_n \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ that converges to $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, i.e., $||f_n - f||_{L^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (which is possible due to the density of $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ in $L^2(\mathbb{R}^d)$).

- We observe that $(\mathcal{F}f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a Cauchy sequence in $L^2(\mathbb{R}^d)$.

- We define $\mathcal{F}f = \lim_{n \to +\infty} \mathcal{F}f_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$ using the completeness of $L^2(\mathbb{R}^d)$.

This construction is independent of the choice of approximations $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ and leads to $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ being an isometric isomorphism.

Theorem 2.6. Hausdorff-Young Inequality
For every function $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ we have the estimate

$$||\mathcal{F}f||_{L^q} \leq ||f||_{L^p}, \text{ whenever } 1 \leq p \leq 2, \text{ and } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Remark.
The obtained estimate implies that we can define the Fourier transform for $f \in L^p$ with $1 \leq p \leq 2$.

Proof.
For $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, we have :
For all $\xi \in \mathbb{R}^d$, $|\mathcal{F}f(\xi)| = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|dx$. Thus,

$$||\mathcal{F}f||_{L^\infty} \leq ||f||_{L^1} . \tag{1}$$

Furthermore, $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ is an isometric isomorphism. Therefore, for $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, we have :

$$||\mathcal{F}f||_{L^2} \leq ||f||_{L^2} . \tag{2}$$

Using (1) and (2), we can apply the Riesz-Thorin Theorem (Theorem 2.5) to get :

$$||\mathcal{F}f||_{L^q} \leq ||f||_{L^p}$$

where $\forall \theta \in]0, 1[$

$$\begin{cases} \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2} = 1\frac{\theta}{2} \\ \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad \text{thus } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ et } \frac{1}{2} \leq \frac{1}{p} \leq 1 \text{ which implies } 1 \leq p \leq 2. \quad \square$$

2.4.2 Convolution operator : Young Inequality

Theorem 2.7. Young Inequality
For $1 \leq \alpha < \infty$ and $1 \leq \beta \leq \infty$ Let $f \in L^\alpha(\mathbb{R}^d)$ and $g \in L^\beta(\mathbb{R}^d)$ we have :

$$||f * g||_{L^\gamma} \leq ||f||_{L^\alpha} \, ||g||_{L^\beta} , \text{ whenever } \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - 1.$$

Proof.
Let $f \in L^\alpha(\mathbb{R}^d)$ and let T be the convolution operator defined by $Tg = f * g$.

- Let $g \in L^{\alpha'}(\mathbb{R}^d)$ (where α' is the conjugate exponent of α). Using the Hölder inequality, we have :

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \, |g(y)| dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|^{\alpha'} \right)^{\frac{1}{\alpha'}} \end{aligned}$$

  Hence

$$||Tg||_{L^\infty} = ||f * g||_{L^\infty} \leq ||f||_{L^\alpha} \, ||f * g||_{L^{\alpha'}} \tag{1}$$

  For $\alpha = 1$ and $\alpha' = \infty$ we have the same result, indeed :

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \, |g(y)| dy \\ &\leq ||f||_{L^1} \, ||g||_{L^\infty} \end{aligned}$$

- Let $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Since $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$ and by Hölder's inequality,

$$\begin{aligned} (f * g)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \, |g(y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \, |g(y)|^{\frac{1}{\alpha}} \, |g(y)|^{\frac{1}{\alpha'}} dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^\alpha \, |g(y)| dy \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| dy \right)^{\frac{1}{\alpha'}} \end{aligned}$$

According to Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|\,|g(y)|dy\right)^{\alpha}dx &\leq \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|^{\alpha}\,|g(y)|dy\left(\int_{\mathbb{R}^d}|g(y)|dy\right)^{\frac{\alpha}{\alpha'}}dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|dx\int_{\mathbb{R}^d}|g(y)|dy\left(\int_{\mathbb{R}^d}|g(y)|dy\right)^{\frac{\alpha}{\alpha'}}\end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|\,|g(y)|dy\right)^{\alpha}dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^{\alpha}dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|g(y)|dy\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|g(y)|dy\right)^{\frac{1}{\alpha'}}\\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^{\alpha}dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}\int_{\mathbb{R}^d}|g(y)|dy\end{aligned}$$

Thus

$$||Tg||_{L^{\alpha}} = ||f*g||_{L^{\alpha}} \leq ||f||_{L^{\alpha}}\,||f*g||_{L^1} \tag{2}$$

Finally, using (1) and (2), we can apply the Riesz-Thorin Theorem (Theorem 2.5) and obtain for $\theta\in]0,1[$,

$$\begin{aligned}||f*g||_{L^{\gamma}} &\leq ||f||_{L^{\alpha}}^{1-\theta}\,||f||_{L^{\alpha}}^{\theta}\,||g||_{L^{\beta}}\\ &= ||f||_{L^{\alpha}}\,||g||_{L^{\beta}}\end{aligned}$$

where

$$\begin{cases}\frac{1}{\beta}=\frac{1-\theta}{\alpha'}+\frac{\theta}{1}=1-\theta-\frac{1-\theta}{\alpha}+\theta=1-\frac{1}{\alpha}+\frac{\theta}{\alpha}\\ \frac{1}{\gamma}=\frac{1\theta}{\infty}+\frac{\theta}{\alpha}=\frac{\theta}{\alpha}\end{cases}$$

Hence $\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-1$. □

2.5 Équation de la chaleur

2.5.1 Résolution de l'équation de la chaleur à l'aide des séries de Fourier

Les résultats et démonstrations de cette partie sont issues de [4]

J. Fourier hait le froid. Dans ces conditions, il s'est intéressé au problème de l'équation de la chaleur. Pour résoudre ce problème, il doit introduire les séries de Fourier.

Le problème est le suivant. On considère une barre métallique. En connaissant la température en tout point de la barre à l'instant initiale, et sachant la température aux extrémités de la barre à tout instant, peut-on connaître la température de la barre en tout point à tout temps ?

On suppose que la barre est le segment $[0,L]$ avec $L>0$. Posons $Q=]0,L[\times]0,+\infty[$ et $\bar{Q}=[0,L]\times[0,+\infty[$.

Le problème de l'équation de la chaleur est le suivant, le but est de trouver une fonction u telle que

$$(P)=\begin{cases}u\in C^0(\bar{Q}),\ u\in C^2(Q)\\ \frac{\partial}{\partial t}u(t,x)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x),\ \ \forall(x,t)\in Q\\ u(0,t)=u(L,t)=0,\ \ \forall t\in[0,+\infty[\\ u(x,0)=h(x),\ \ \forall x\in Q\end{cases}$$

où h est C^1 sur $[0,L]$ (on a évidement $h(0)=h(L)=0$).

Théorème 2.8.

(P) admet une unique solution $u\in C^0(\bar{Q})\cap C^{\infty}(Q)$.

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin\{\frac{n\pi}{L}x\}e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t},\ \forall(x,t)\in Q.$$

Pour démontrer ce théorème nous allons d'abord montrer l'existence de cette solution, puis nous établirons un lemme pour démontrer l'unicité.

Existence.

Cherchons une solution de (P) de la forme $u(x,t) = f(x)g(t)$ (séparation des variables). Puisque

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x),$$

on a

$$f(x)g'(t) = f''(x)g(t).$$

Cherchons une solution tel que $f(x) \neq 0,\ \forall x \in]0,L[$ et $g(t) \neq 0, \forall t \in]0,+\infty[$ alors

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{g(t)},\ \forall (x,t) \in Q$$

cette égalité ne peut être satisfaite que si les deux membres sont constants c'est à dire s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{g(t)} = \lambda,\ \forall (x,t) \in Q.$$

On a donc

$$\begin{cases} f''(x) = \lambda f(x),\ x \in]0,L[\\ g'(t) = \lambda g(t),\ t \in]0,+\infty[. \end{cases}$$

L'expression de g est alors $g(t) = Ce^{\lambda t}$ avec $C \in R^*$ ($C \neq 0$ car on a supposé g non nulle).

Cherchons l'expression de f. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle vérifiée par f est $r^2 - \lambda = 0$. Le discriminant associé est 4λ. La forme de f va donc dépendre des différentes valeurs de λ. Étudions les différents cas.

<u>Si $\lambda > 0$:</u>

Alors il existe $A, B \in \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x},\ \forall x \in]0,L[.$$

Or

$$0 = u(0,t) = f(0)g(t),\ \forall t \in]0,+\infty[$$

puisque $\forall t \in]0,+\infty[,\ g(t) \neq 0$ on a que $f(0) = 0$, d'où

$$A + B = 0.$$

De plus

$$0 = u(L,t) = f(L)g(t),\ \forall t \in]0,+\infty[$$

puisque $\forall t \in]0,+\infty[,\ g(t) \neq 0$ on a que $f(L) = 0$, d'où

$$Ae^{\sqrt{\lambda}x} - Ae^{-}\sqrt{\lambda}x = 0$$

donc

$$Ae^{\sqrt{\lambda}x} = Ae^{-}\sqrt{\lambda}x$$

or $\lambda > 0$ donc $e^{\sqrt{\lambda}x} \neq e^{-}\sqrt{\lambda}x$ ainsi

$$A = 0.$$

Finalement $f(x) = 0$ pour tout $x \in]0,L[$ ce qui est impossible car on a supposé f non nulle.

<u>Si $\lambda = 0$:</u>

Alors il existe $A, B \in \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) = Ax + B, \forall x \in]0,L[.$$

Or
$$0 = u(0,t) = f(0)g(t)$$
puisque $\forall t \in]0,+\infty[,\ g(t) \neq 0$ on a que $f(0) = 0$, d'où
$$B = 0.$$

De plus
$$0 = u(L,t) = f(L)g(t),\ \forall t \in]0,+\infty[$$
puisque $\forall t \in]0,+\infty[,\ g(t) \neq 0$ on a que $f(L) = 0$, d'où
$$AL = 0$$
or $L \neq 0$ donc $A = 0$. Finalement $f(x) = 0$ pour tout $x \in]0,L[$ ce qui est impossible car on a supposé f non nulle.

Si $\lambda < 0$ (c'est le cas intéressant) :

Posons $\lambda := -\xi^2$ avec $\xi > 0$. $\pm i\xi$ est solution de l'équation caractéristique donc ils existent $A, B \in \mathbb{R}$ telles que
$$f(x) = A\cos(\xi x) + B\sin(\xi x).$$
Or
$$0 = u(0,t) = f(0)g(t),\ \forall t \in]0,+\infty[$$
puisque $\forall t \in]0,+\infty[,\ g(t) \neq 0$ on a que $f(0) = 0$, d'où
$$A = 0.$$

De plus
$$0 = u(L,t) = f(L)g(t),\ \forall t \in]0,+\infty[$$
puisque $\forall t \in]0,+\infty[,\ g(t) \neq 0$ on a que $f(L) = 0$, d'où
$$B\sin(\xi L) = 0$$
donc $\xi = \frac{n\pi}{L}$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Finalement on a trouvé une famille de solution
$$u_n(x,t) = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$$
où b_n est une constante provenant de B, C et qui dépendent de n.

Cependant il n'y a aucune raison que ces solutions vérifient le dernier point de (P), en effet les solutions obtenues dépendent de x et de n, or on veut que la solution dépende uniquement de x. Pour remédier à ce problème, nous allons utiliser le fait que $\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u$ est linéaire, donc une somme de telles u_n est encore solution. Ainsi posons
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}.$$

Il est clair que $u(0,t) = u(L,t) = 0,\ \ \forall t \in [0,+\infty[$. On a que
$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)$$
et avec cette égalité on en déduit que les b_n sont des coefficients de Fourier d'une fonction impaire $\tilde{h}$ qui est égale à h sur $[0,L]$. Définissons
$$h_1 = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in [0,L] \\ -h(-x) & \text{si } x \in [-L,0] \end{cases}$$

Puisque h est C^1 et que $h(0) = 0$ on a que h_1 est C^1 sur $[-L, L]$. On définit alors $\tilde{h}$ la fonction $2L$ périodique sur $\mathbb{R}$ et qui vaut h_1 sur $[-L, L]$. Puisque $h(L) = 0$ on a que $\tilde{h}$ est continue et C^1 par morceaux. Donc $\tilde{h}$ converge absolument vers sa série de Fourier.

Rappelons que pour f une fonction impaire on a $\begin{cases} c_n(f) = \frac{-i}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt \\ S_N(f)(t) = 2i \sum\limits_{n=1}^{N} c_n(f) \sin(nt) \end{cases}$.

On a alors

$$\tilde{h}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < +\infty$$

avec

$$b_n = \frac{2}{L} \int\limits_0^L h(t) \sin(n\frac{\pi}{L}t)\, dt.$$

Ainsi la fonction u telle que $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$ est définie continue sur $\bar{Q}$ car cette série converge normalement et chaque u_n est continue.

Montrons que u est C^∞ sur Q. On va alors chercher à dériver sous le signe somme, pour cela il suffit de montrer que les séries des dérivées converge uniformément sur tout compact de Q. Soient $\varepsilon > 0$ et $M \in \mathbb{R}$ avec $M > \varepsilon$, K un compact de $]0, L[$, pour $t \in [\varepsilon, M]$ et $x \in K$ on a pour tout $n \leq 1$:

$$|u_n(x,t)| \leq C_k |b_n| n^{2k} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\varepsilon}$$

où C_k est un majorant indépendant de x de $\left(\left|sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right|\right)^{(k)}$ où $x \in K$ qui est bien définie en tant que majorant d'une fonction continue sur un compact.

De plus $C_k |b_n| n^{2k} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\varepsilon}$ est le terme général d'une série convergente. On a donc la convergence normale de $\sum\limits_{n\leq 1} u_n^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ sur tout compact ce qui donne finalement que u est C^∞ sur Q. On a donc l'existence d'une solution u satisfaisant (P).

□

Pour établir l'unicité énonçons d'abord un lemme et démontrons le.

Lemme 2.9. Principe du maximum pour l'équation de la chaleur

Soit $u \in C^0(\bar{Q}) \cap C^2(Q)$, telle que $Pu(x,t) \leq 0$ sur Q, où $P = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}$.

Soit $T > 0$ et $K := [0, L] \times [0, T]$, alors

$$\sup_K u = \sup_{K \cap \partial Q} u.$$

C'est à dire que u atteint son maximum pour $t = 0$ ou pour $x = 0$ ou L et $t \in [0, T]$.

Démonstration. (Lemme)

Soient $\varepsilon > 0$ et $u_\varepsilon : (x,t) \mapsto u(x,t) + \varepsilon x^2$, on a sur Q

$$Pu_\varepsilon = Pu + 2\varepsilon \geq 2\varepsilon > 0. \tag{*}$$

Soit $m_\varepsilon = (x_\varepsilon, t_\varepsilon) \in K$ où u_ε atteint son maximum. Raisonnons par l'absurde et supposons que $m_\varepsilon \notin K \cap \partial Q$. Alors

$$0 < x < L, \quad \text{donc } \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(m_\varepsilon) = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(m_\varepsilon) \leq 0$$

et puisque m_ε est un point où u_ε atteint son maximum sur le domaine K, nous avons $u_\varepsilon(m_\varepsilon) \leq u_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon - h)$ pour tout $h > 0$ on a donc

$$0 < t_\varepsilon \leq T,\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(m_\varepsilon) = \lim_{h \to 0^+} \frac{u_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon - h) - u_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon)}{-h} \geq 0.$$

Mais alors

$$Pu_\varepsilon(m_\varepsilon) = \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(m_\varepsilon) - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(m_\varepsilon) \leq 0$$

ce qui contredit $(*)$, donc $m_\varepsilon \in K \cap \partial Q$ et

$$\sup_K u \leq \sup_K u_\varepsilon = \sup_{K \cap \partial Q} u_\varepsilon \leq \sup_{K \cap \partial Q} u + \varepsilon L^2.$$

En faisant tendre ε vers 0 on obtient

$$\sup_K u = \sup_{K \cap \partial Q} u.$$

□

Reprenons la démonstration du théorème 2.8. Il reste l'unicité à montrer.

Unicité.
Soient u, v deux solutions à (P). Posons $w = u - v$, il est clair que w vérifie les deux premiers point de (P) (hypothèses de continuité et de dérivées partielles) et

$$w(x,t) = 0,\ \forall (x,t) \in \partial Q.$$

Fixons $T > 0$. Puisque $Pw = 0$ sur Q, d'après le lemme on a

$$\sup_K w = \sup_{K \cap \partial Q} w = 0$$

donc

$$w(x,T) \leq 0,\ \forall x \in]0, L[.$$

De même puisque, $Pw = 0$ sur Q on a

$$-w(x,T) \leq 0,\ \forall x \in]0, L[.$$

Donc $w(x,T) = 0$ et puisque T est quelconque on a donc $w \equiv 0$ sur Q, donc $v = w$ sur Q d'où l'unicité.

□

2.5.2 Noyau de la chaleur et dissipation

Le problème de la chaleur évoqué précédemment est le problème "original" où l'on considère une barre de longueur finie et des conditions initiales définies à l'aide d'une fonction C^1, où l'on a résolu ce problème avec la méthode de séparation des variables. Dans ce paragraphe on se donne des hypothèse plus "faible". On considère une barre de longueur infinie et les conditions initiales sont dans L^p. Le contexte est le suivant :

Soit $p > 1$. On se donne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in L^p$ et on cherche $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},\ \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) \\ u(t,\cdot) \xrightarrow[t \to 0^+]{L^p} f. \end{cases}$$

La méthode de résolution de ce problème reposera sur la convolution.

Définition 2.10. On appelle *noyau de la chaleur* :

$$q_t : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

Théorème 2.11.
La fonction u définie pour $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ par

$$u(t,x) = (f * q_t)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(u) q_t(x-u) du$$

est solution de l'équation de la chaleur.

Démonstration.
D'abord,

$$u(t,\cdot) = f * q_t \xrightarrow[t \to 0^+]{L^p} f$$

car q_t est une approximation de l'unité. En effet, si l'on considère le noyau

$$q(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}},$$

q est mesurable, vérifie $\int_R q d\lambda = 1$ (intégrale de Gauss) et $q_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2t}} q(\frac{x}{\sqrt{2t}})$. Par un théorème du cours, q_t est une approximation de l'unité.
$q : (t,x) \mapsto q_t(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à x et à t. Soit $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.
D'une part,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) &= f * \frac{\partial}{\partial t} q_t(x) \\
&= f * \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \left(-\frac{\frac{1}{2}}{t^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2}{4t^2} \times \frac{1}{\sqrt{t}} \right) \right] \\
&= f * \left[-\frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \frac{\frac{1}{2}}{t^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \frac{x^2}{2t} \right) \right].
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) &= f * \frac{\partial^2}{\partial x^2} q_t(x) \\
&= f * \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{2x}{4t} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right) \right] \\
&= f * \left[-\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2t\sqrt{4\pi t}} \left(1 - \frac{x^2}{2t} \right) \right].
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u.$$

□

A l'aide du théorème d'interpolation de Riesz-Thorin (théorème 2.5), on peut donner des estimations sur la norme de l'opérateur solution de l'équation de la chaleur.

Proposition 2.12.
Soit $t \in \mathbb{R}^+$ et $S_t : f \mapsto q_t * f$ avec q_t définie sur $\mathbb{R}$ par $q_t : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$. On a les estimations suivantes :

1. $||S_t||_{L^1 \to L^1} = 1$;

2. $||S_t||_{L^1\to L^\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}$;
3. $||S_t||_{L^1\to L^q} \leq \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2q}}$ pour tout q $\in]1,+\infty[$;
4. $||S_t||_{L^2\to L^2} = 1$;
5. $||S_t||_{L^p\to L^q} \leq \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$ si $1 < p < 2$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$.

Remarque.
Ces estimations permettent de montrer que l'équation de la chaleur est dissipative, c'est-à-dire que la température décroît à mesure que l'on s'éloigne de la source.

Démonstration.

1. $q_t \in L^1$ et $||q_t||_{L^1} = 1$ car $(q_t)_t$ est une approximation de l'unité.
   Soit $f \in L^1$.
   $$||q_t * f||_{L^1} \leq ||q_t||_{L^1}||f||_{L^1}$$
   donc S_t est continu de L^1 dans L^1 et $||S_t||_{L^1\to L^1} \leq ||q_t||_{L^1}$.
   De plus, si $(\rho_n)_n$ est une approximation de l'unité, $\rho_n * q_t \in L^1$ et $\rho_n * q_t \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} q_t$ donc $||S_t||_{L^1\to L^1} = ||q_t||_{L^1} = 1$.
2. Soit $f \in L^1, x \in \mathbb{R}$.
   Remarquons que q_t est bornée sur $\mathbb{R}$ et vérifie $||q_t||_\infty = q_t(0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}$.
   Alors
   $$\begin{aligned}|S_t(f)(x)| &= |(q_t * f)(x)| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}} q_t(u)f(x-u)du\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |q_t(u)||f(x-u)|du \\ &\leq ||q_t||_\infty \int_{\mathbb{R}} |f(x-u)|du \\ &= ||q_t||_\infty \int_{\mathbb{R}} |f(u)|du \\ &= ||q_t||_\infty ||f||_{L^1}\end{aligned}$$
   d'où en prenant le sup,
   $$||S_t(f)||_\infty \leq ||q_t||_\infty ||f||_{L^1}$$
   ce qui montre que S_t est continu de L^1 dans L^∞ et que
   $$||S_t||_{L^1\to L^\infty} \leq ||q_t||_\infty = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}.$$
   Soit $q \in]1,+\infty[$. Appliquons le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin. En respectant les notations de 2.5, on pose $p_0 = p_1 = 1$, $q_0 = 1$ et $q_1 = \infty$.
   On a donc par 1.
   $$||S_t||_{L^{p_0}\to L^{q_0}} \leq M_0 = 1$$
   et
   $$||S_t||_{L^{p_1}\to L^{q_1}} \leq M_1 = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}$$
   par ce qui précède.
   Ainsi, en posant $p = 1$, $\theta = 1 - \frac{1}{p} \in]0,1[$, on a
   $$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \text{ et } \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$
   Par 2.5,
   $$||S_t||_{L^1\to L^q} = ||S_t||_{L^p\to L^q} \leq M_0^{1-\theta}M_1^\theta = \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2q}}.$$

3. Soit $f \in L^2$.

$$\begin{aligned}||q_t * ||_{L^2}^2 &= ||\widehat{q_t * f}||_{L^2}^2 \text{ car la transformée de Fourier est une isométrie dans } L^2\\ &= ||\hat{q}_t \cdot \hat{f}||_{L^2}^2\\ &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{q}_t(x)\hat{f}(x)|^2 dx.\end{aligned}$$

Or

$$q_t : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

avec $\sigma = \sqrt{2t}$ donc

$$\hat{q}_t : x \mapsto e^{-2\pi^2\sigma^2 x^2} = e^{-4\pi^2 t x^2}.$$

On observe que $\hat{q}_t$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et que $||\hat{q}_t||_\infty = \hat{q}_t(0) = 1$. En reprenant l'expression précédente,

$$||q_t * ||_{L^2}^2 \leq ||\hat{q}_t||_\infty^2 ||\hat{f}||_{L^2}^2 = 1 \times ||\hat{f}||_{L^2}^2.$$

Finalement, $||S_t||_{L^2 \to L^2} \leq 1$ et on obtient l'égalité en considérant une approximation de l'unité, c'est le même raisonnement qu'en 1.

4. En reprenant les notations du théorème d'interpolation, avec $p_0 = q_0 = 2$ et $p_1 = 1, q_1 = \infty$, on a montré

$$||S_t||_{L^{p_0} \to L^{q_0}} \leq 1 \text{ en 4. et}$$

$$||S_t||_{L^{p_1} \to L^{q_1}} \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \text{ en 2.}$$

Soit $p \in]1, 2[$. On choisit θ de sorte que

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{1}$$

i.e.

$$\theta = 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) \in]0, 1[.$$

Soit q tel que

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} = \frac{1-\theta}{2}.$$

Alors

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{2} = \frac{1 - 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)}{2} = 1 - \frac{1}{p}$$

et par 2.5,

$$||S_t||_{L^p \to L^q} \leq 1^\theta \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\right)^\theta = \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}.$$

□

Références

[1] Rudin W. (1998) *Analyse réelle et complexe : cours et exercices*

[2] Levin B. Ya. (1996) *Lectures on entire functions (Translations of Mathematical Monographs)*

[3] Grafakos L. (2014) *Classical Fourier Analysis*

[4] Queffelec H. et Zuily C. (2020) *Analyse pour l'agrégation*