Mémoire M2

Les espaces de Hardy et leurs applications

Soutenu le ? devant :

Auteur :
Jules Gagnaire

Directeur de recherche :
Karim Kellay

Résumé

Table des matières

Notations

- $\mathbb{D}$ est le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{T}$ est le cercle unité de $\mathbb{C}$.
- $D(a, R)$ est le disque ouvert de centre a et de rayon R.
- $\Gamma(a, R)$ est le cercle de centre a et de rayon R.
- $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ est l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$.
- $\hat{f}(n)$ est le n-ième coefficient de Fourier de f définie par

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(e^{it}\right) e^{-int} dt.$$

- $S_m(f)\left(e^{it}\right) = \sum_{|n|\leq m} \hat{f}(n)e^{int}$ est a somme partielle de la série de Fourier de f.
- $\mathrm{Fr}(K)$ désigne la frontière de K.
- $\mathcal{C}(X)$ est l'ensemble des fonctions continues sur X et à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{C}^*(X)$ le dual topologique de $\mathcal{C}(X)$.
- $\mathcal{C}_+^*(X) := \{\Lambda \in \mathcal{C}^* \mid \Lambda(f) \geq 0,\ f \in \mathcal{C}(X),\ f \geq 0\}$.
- m est la mesure de Lebesgue.
- $\mathcal{M}(X)$ l'ensemble des mesures complexes sur un espace mesurable.
- $\mathcal{M}^+(X)$ l'ensemble des mesures positives sur un espace mesurable.
- $\mathcal{C}_0(X)$ est l'ensemble des fonctions continues sur X et qui tendent vers 0 à l'infini.
- $H^\infty(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes bornées sur U pour la norme infini.
- $\mathcal{L}(X)$ est l'ensemble des applications linéaires continue sur X un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
- $\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda Id) \text{ non inversible }\}$ est le spectre de T pour $T \in \mathcal{L}(X)$.
- $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda Id) \text{ non injective }\}$ est le spectre ponctuel de T pour $T \in \mathcal{L}(X)$.
- $\mathrm{Lat}(T)$ est l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels fermés $\mathcal{M}$ invariants par $T \in \mathcal{L}(X)$, c'est-à-dire tels que $T\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$.
- $\ell^2 := \left\{(a_n)_{n\geq 0} : a_n \in \mathbb{C}, \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 < \infty\right\}$.

1 Fonctions harmoniques

1.1 Noyau de Poisson

Rappelons la définition d'une fonction harmonique. Pour une fonction f de classe C^2 sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, on a :

$$\Delta f = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 4\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z}$$

avec $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$.

Définition 1.1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit f une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On dit que f est *harmonique* sur Ω si f est de classe C^2 sur Ω et si $\Delta f \equiv 0$ sur Ω.

Définition 1.2. Pour $r \in [0, 1[$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$P_r(t) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{int} = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\right) = \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}.$$

Pour $r \in [0, 1[$ fixé, P_r est appelé un *noyau de Poisson*. Nous pourrons parfois être amener à utiliser la notation suivante :

$$P_r(\theta - t) := P\left(z, e^{it}\right), \text{ où } z = re^{i\theta} \in \mathbb{T}, \text{ et } t \in \mathbb{R}$$

et nous avons pour $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$

$$P_r(\theta - t) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\right) = \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}.$$

Remarque. Un noyau de Poisson est une fonction uniformément continue sur $[0, 2\pi]$, 2π-périodique, positive et paire.

Proposition 1.3. Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ et pour $t \in \mathbb{R}$, le noyau de Poisson P_r vérifie :

1. $P_r(\theta - t) > 0$
2. $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)dt = 1$
3. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$, on a

$$\sup_{\{t \mid |e^{it} - e^{it_0}| \geq \delta\}} P(z, e^{it}) \underset{z \to e^{it_0}}{\longrightarrow} 0$$

Démonstration.

1. Ce point est direct en utilisant la troisième écriture du noyau de Poisson.
2. Ce point est direct par interversion série intégrale.
3. Si $|z - e^{it_0}| < \delta$ alors

$$\begin{aligned}
\sup_{\{t \mid |e^{it} - e^{it_0}| \geq \delta\}} P(z, e^{it}) &= \frac{1 - z^2}{|e^{it} - z|^2} \\
&= \frac{1 - z^2}{|e^{it} - e^{it_0} + e^{it_0} - z|^2} \\
&\leq \frac{1 - z^2}{\left(|e^{it} - e^{it_0}| - |e^{it_0} - z|\right)^2} \\
&\leq \frac{1 - z^2}{\left(\delta - |e^{it_0} - z|\right)^2}
\end{aligned}$$

en faisant tendre z vers e^{it_0} on a le résultat.

□

Proposition 1.4. Soit μ une mesure complexe (finie) sur $[-\pi,\pi]$. Pour $z=re^{i\theta}$ avec $0\leq r<1$ et $\theta\in\mathbb{R}$, on pose :

$$P(\mu)(z):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)d\mu(t)$$

Alors $P(\mu)$ est une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$.

Démonstration. Ecrivons μ sous la forme $\mu=\mu_1+i\mu_2$ avec μ_1 et μ_2 mesures réelles définies par $\mu_1(A)=\mathrm{Re}(\mu(A))$ et $\mu_2(A)=\mathrm{Im}(\mu(A))$ pour tout borélien A de $[-\pi,\pi]$. Ainsi

$$P(\mu)(z)=P\left(\mu_1\right)(z)+iP\left(\mu_2\right)(z).$$

Pour montrer que $P(\mu)$ est une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$ il suffit de montrer que si ν est une mesure réelle sur $\mathbb{T}$ alors $P(\nu)$ est une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$. Pour cela remarquons que :

$$\begin{aligned}P(\nu)(z)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)d\nu(t)\\&=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)\right)\\&=\mathrm{Re}(\varphi(z))\end{aligned}$$

où $\varphi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu\left(e^{it}\right)$. La fonction φ étant holomorphe sur $\mathbb{D}$ (en tant qu'intégrale de la fonction holomorphe $z\longmapsto\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}$ sur $\mathbb{D}$), ainsi $P(\nu)$ est harmonique sur $\mathbb{D}$ en tant que partie réelle d'une fonction holomorphe, ce qui permet de conclure.

□

1.2 Le problème de Dirichlet

Regardons le problème suivant : Etant donnée une fonction f continue sur $\mathbb{T}$, peut-on trouver une fonction g continue sur le disque fermé unité $\overline{\mathbb{D}}$, harmonique dans $\mathbb{D}$ et telle que $g_{|\mathbb{T}}=f$? Ce problème est appelé *problème de Dirichlet*.

Le théorème qui suit va permettre de répondre à ce problème.

Théorème 1.5. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{T}$. Alors il existe une unique fonction g continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, harmonique dans $\mathbb{D}$ et vérifiant $g_{|\mathbb{T}}=f$.

De plus, pour $z=re^{i\theta}\in\mathbb{D}$, on a

$$g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)f\left(e^{it}\right)dt.$$

On notera $P(f)$ la fonction définie par $re^{i\theta}\longmapsto\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)f\left(e^{it}\right)dt$.

Remarque. En particulier, si f est harmonique $\mathbb{D}$ continue sur $\bar{\mathbb{D}}$ on a pour $z=re^{i\theta}\in\mathbb{D}$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)f\left(e^{it}\right)dt.$$

Démonstration. Commençons par **l'unicité** de la solution du problème de Dirichlet. Soient g_1 et g_2 deux solutions du problème de Dirichlet. On a que $g_1 - g_2$ est continue sur le compact $\overline{\mathbb{D}}$ et harmonique sur $\mathbb{D}$ ainsi d'après le principe du maximum on a :

$$\sup_{z\in\overline{\mathbb{D}}} \{|g_1(z) - g_2(z)|\} = \sup_{z\in\mathbb{T}} \{|g_1(z) - g_2(z)|\} = 0$$

puisque $g_1(z) = f(z) = g_2(z)$ sur $\mathbb{T}$. D'où l'unicité.

Pour **l'existence** d'une solution au problème de Dirichlet. On a d'après la proposition 1.4, $P(f)$ est harmonique sur $\mathbb{D}$. Posons

$$\tilde{P}(f)(z) = \begin{cases} P(f)(z) & \text{si } |z| < 1 \\ f(z) & \text{si } |z| = 1 \end{cases}$$

Il reste à démontrer la continuité de $\tilde{P}(f)$ sur $\overline{\mathbb{D}}$. Pour cela nous allons montrer que $\tilde{P}(f)$ est la limite uniforme de fonctions continues sur $\overline{\mathbb{D}}$.

Première étape : Montrons que pour toute fonction f continue sur $\mathbb{T}$ on a :

$$|\tilde{P}(f)(z)| \leq \|f\|_\infty \text{ pour } |z| \leq 1. \tag{*}$$

Pour $z \in \mathbb{D}$, on a :

$$\begin{aligned} |\tilde{P}(f)(z)| &= |P(f)(z)| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f\left(e^{it}\right) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) \left| f\left(e^{it}\right) \right| dt \\ &\leq \|f\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) dt \\ &= \|f\|_\infty \end{aligned}$$

car $s \longmapsto P_r(s)$ est 2π périodique, paire et par le changement de variable $s = t - \theta$, on obtient :

$$\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) dt = \int_0^{2\pi} P_r(s) ds = 2\pi$$

Enfin pour $|z| = 1$, par définition, on a $|\tilde{P}(f)(z)| = |f(z)|$, donc l'inégalité $(*)$ est vérifiée.

Pour $p \in \mathbb{Z}$, on considère la fonction e_p fonction continue de $\mathbb{T}$ dans lui-même définie par $e_p\left(e^{it}\right) = e^{ipt}$. C'est aussi la fonction $z \longmapsto z^p$ si $p \geq 0$ et $z \longmapsto \bar{z}^{-p}$ si $p < 0$. La solution au problème de Dirichlet est directe pour les fonctions e_p : il s'agit de la fonction $g(z) = z^p$ sur $\overline{\mathbb{D}}$ si $p \geq 0$ et $g(z) = \bar{z}^{-p}$ si $p < 0$ (fonctions harmoniques sur $\mathbb{D}$ en tant que fonction holomorphe).

Seconde étape : Montrons que

$$\tilde{P}\left(e_p\right) = \begin{cases} z \longmapsto z^p & \text{si } p \geq 0 \\ z \longmapsto \bar{z}^{-p} & \text{si } p < 0 \end{cases}$$

Ceci montrera que $\tilde{P}\left(e_p\right)$ est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

Pour $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, par définition, nous avons :

$$\begin{aligned} \tilde{P}\left(e_p\right)(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) e^{ipt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in(\theta - t)} \right) e^{ipt} dt \end{aligned}$$

Puisque, pour r fixé, $0 \leq r < 1$, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in(\theta-t)}$ converge normalement (donc uniformément) sur $[0, 2\pi]$, on peut inverser l'intégrale et la série dans l'égalité ci-dessus. Ainsi :

$$\begin{aligned}\tilde{P}(e_p)(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{r^{|n|}e^{in\theta}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(p-n)t}dt \\ &= r^{|p|}e^{ip\theta}.\end{aligned}$$

On obtient ainsi, pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$:

$$\tilde{P}(e_p) = \begin{cases} z \longmapsto z^p & \text{si } p \geq 0 \\ z \longmapsto \bar{z}^{-p} & \text{si } p < 0 \end{cases}$$

Pour conclure la démonstration nous allons utiliser le théorème de Fejér. Soit $p = \sum_{|n|\leq k} c_n e_n$ un polynôme trigonométrique. Par définition, nous avons :

$$\tilde{P}(p) = \sum_{|n|\leq k} c_n \tilde{P}(e_n)$$

Par la deuxième étape, $\tilde{P}(p)$ est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ pour tout polynôme trigonométrique p. D'après le Théorème de Fejér, il existe une suite de polynômes trigonométriques $(p_m)_{m\geq 1}$ telle que

$$\lim_{m\to\infty} \|f - p_m\|_\infty = 0.$$

Il nous reste à vérifier que $\tilde{P}(f)$ est la limite uniforme de $\tilde{P}(p_m)$. Pour cela, remarquons par définition que

$$\tilde{P}(f)(z) - \tilde{P}(p_m)(z) = \tilde{P}(f - p_m)(z).$$

De plus, d'après $(*)$ on a

$$\left|\tilde{P}(f - p_m)(z)\right| \leq \|f - p_m\|_\infty,$$

et donc

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{z\in\overline{\mathbb{D}}} \left|\tilde{P}(f)(z) - \tilde{P}(p_m)(z)\right| \leq \lim_{m\to\infty} \|f - p_m\|_\infty = 0$$

Ainsi $\tilde{P}(f)$ est bien continue sur $\mathbb{T}$ en tant que limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur $\mathbb{T}$.

□

On peut également résoudre le problème de Dirichlet pour un disque quelconque de $\mathbb{C}$:

Corollaire 1.6. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $R > 0$. Pour toute fonction f continue sur $\Gamma(a, R)$ où $\Gamma(a, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = R\}$, il existe une unique fonction g continue sur $\overline{D(a, R)} := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq R\}$, harmonique sur $D(a, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R\}$ et telle que $g_{|\Gamma(a,R)} = f$. De plus, si $z = a + re^{i\theta}$ avec $0 \leq r < R$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a :

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{r/R}(\theta - t) f\left(a + Re^{it}\right) dt$$

Nous allons maintenant donner un théorème qui donne une réciproque partielle de la propriété de la moyenne.

Théorème 1.7. Soit f une fonction continue sur Ω vérifiant la propriété suivante, pour tout $a \in \Omega$, il existe une suite $(r_n)_{n\geq 1}$ de réels positifs tels que $\overline{D(a, r_n)} \subset \Omega, \lim_{n\to\infty} r_n = 0$ et $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(a + r_n e^{it}\right) dt$ pour tout $n \geq 1$ (cette propriété est appelée *propriété de la moyenne faible*) . Alors f est harmonique sur Ω.

Démonstration. En considérant séparément $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ on peut se limiter au cas où f est à valeurs réelles.

Soit $R > 0$ tel que $\overline{D(a,R)} \subset \Omega$. Puisque f est continue sur le cercle $\Gamma(a,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = R\}$, d'après le corollaire 1.6, il existe une fonction g réelle, continue sur $\overline{D(a,R)}$, harmonique sur $D(a,R)$ et telle que g et f soient égales sur $\Gamma(a,R)$. La fonction g, étant harmonique sur $D(a,R)$, elle vérifie la propriété de la moyenne sur $D(a,R)$ et donc vérifie aussi la propriété de la moyenne faible sur $D(a,R)$. Ainsi la fonction $h := g - f$ réelle vérifie la propriété de la moyenne faible sur $D(a,R)$ et est identiquement nulle sur $\Gamma(a,R)$. Le but va être de montrer que h est nulle sur $\overline{D(a,R)}$ pour en déduire que $g = f$, et puisque f est harmonique on aura que g est harmonique sur tout voisinage de Ω ce qui conclura la preuve.

Pour cela posons

$$m := \sup_{z \in \overline{D(a,R)}} h(z)$$

et définissons

$$K := \{\xi \in \overline{D(a,R)} \mid h(\xi) = m\}.$$

Puisque h est continue sur $\overline{D(a,R)}$ (compact), on a que K est un compact non vide de $\overline{D(a,R)}$. **Par l'absurde** supposons que $m > 0$. Alors $K \subset D(a,R)$. Prenons z_0 dans $\mathrm{Fr}(K)$ pour lequel la fonction $z \longmapsto |z-a|$ continue sur le compact K atteint son maximum. Puisque h vérifie la propriété de la moyenne faible sur $D(a,R)$, il existe une suite $(r_n)_{n\geq 0}$ de réels positifs tels que $\lim_{n\to\infty} r_n = 0, \overline{D(z_0, r_n)} \subset D(a,R)$ avec

$$m = h(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h\left(z_0 + r_n e^{it}\right) dt.$$

On a donc :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(h(z_0) - h\left(z_0 + r_n e^{it}\right)\right) dt = 0$$

avec $t \longmapsto h(z_0) - h\left(z_0 + r_n e^{it}\right)$ continue, réelle et positive sur $[0, 2\pi]$. Par conséquent $h(z_0) = h\left(z_0 + r_n e^{it}\right)$ et donc $\Gamma(z_0, r_n) \subset K$, **ce qui est absurde** d'après le choix de z_0. On obtient ainsi $m = 0$ (puisque $h(z) = 0$ pour $z \in \Gamma(a,R)$) et donc $h(z) \leq 0$ pour $z \in \overline{D(a,R)}$.

En appliquant un raisonnement analogue à $-h$ on montre que $h(z) \geq 0$ pour $z \in \overline{D(a,R)}$.

Finalement $h(z) = 0$ pour $z \in \overline{D(a,R)}$. Ce qui conclut la démonstration.

□

Remarque. Soit f une fonction continue sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. La fonction f est harmonique sur Ω.
2. La fonction f vérifie la propriété de la moyenne faible sur Ω.
3. La fonction f vérifie la propriété de la moyenne sur Ω.

1.3 Bijection entre les mesures complexes sur $\mathbb{T}$ et certaines fonctions harmoniques

Lemme 1.8. Pour $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$, posons

$$\varphi_{r,\theta}\left(e^{it}\right) := P_r(\theta - t).$$

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ engendré par $\{\varphi_{r,\theta} : 0 \leq r < 1, \theta \in \mathbb{R}\}$. Alors E est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$.

Démonstration. On a que $\varphi_{r,\theta} \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ pour $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

D'après le théorème 7.3 de l'annexe, il suffit de montrer que si $\ell \in E^{\perp}$ alors $\ell = 0$. D'après le théorème de représentation de Riesz pour les mesures (théorème 7.23 de l'annexe) ℓ est définie par une mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ et $\ell = 0$ si et seulement si $\mu = 0$. Ainsi si on arrive à montrer que $\mu = 0$ on aura bien que $\ell = 0$ et donc E sera dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. On a

$$\int_0^{2\pi} \varphi_{r,\theta}\left(e^{it}\right) d\mu(t) = 0$$

de plus

$$\int_0^{2\pi} \varphi_{r,\theta}\left(e^{it}\right) d\mu(t) = \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t) = P(\mu)\left(re^{i\theta}\right)$$

on a donc $\int_0^{2\pi} \varphi_{r,\theta}\left(e^{it}\right) d\mu(t) = 0$ pour $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$ si et seulement si $P(\mu) = 0$, ce qui implique $0 = \rho(P(\mu)) = \|\mu\|$. Finalement $\ell = 0$ et de ce fait E est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$.

□

Théorème 1.9. Soit S l'ensemble des fonctions harmoniques f sur $\mathbb{D}$ telles que

$$\rho(f) := \sup_{0 \leq s < 1} \int_0^{2\pi} \left|f\left(se^{i\theta}\right)\right| d\theta < \infty.$$

Alors l'application

$$\begin{array}{rcl} T : \mathcal{M}(\mathbb{T}) & \longrightarrow & S \\ \mu & \longmapsto & P(\mu) \end{array}$$

est une bijection.

De plus,

$$\rho(P(\mu)) = |\mu|(\mathbb{T}) = \|\mu\| \text{ et } \int_{\mathbb{T}} g d\mu = \lim_{s \to 1^-} \int_0^{2\pi} P(\mu)\left(se^{it}\right) g\left(e^{it}\right) dt$$

pour toute fonction $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ et toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$.

Démonstration. Première étape : Montrons que $P(\mu) \in S$. Puisque μ est une mesure complexe sur $\mathbb{T}$ d'après la proposition 1.4 $P(\mu)$ est une fonction harmonique dans $\mathbb{D}$. Il reste à vérifier que $\rho(P(\mu)) < \infty$. On a :

$$\int_0^{2\pi} \left|P(\mu)\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t)\right| d\theta$$

D'après la décomposition polaire (théorème 7.15) on a qu'il existe h mesurable telle que $|h(t)| = 1$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$ et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t)\right| d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) h(t) d|\mu|(t)\right| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) d|\mu|(t)\right) d\theta \end{aligned}$$

Le noyau de Poisson P_r est positif, continu par rapport aux variables t et mesurable. D'après le théorème de Fubini, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) d|\mu|(t)\right) d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) d\theta\right) d|\mu|(t) \\ &= \int_0^{2\pi} d|\mu|(t) \\ &= |\mu|(\mathbb{T}) \\ &= \|\mu\| \end{aligned}$$

On a donc

$$\rho(P(\mu) \leq \mu(\mathbb{T}) = \|\mu\| < \infty,$$

et ainsi $P(\mu) \in S$.

Seconde étape : Montrons que $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} g d\mu = \lim_{s\to 1^-} \int_0^{2\pi} P(\mu)\left(se^{it}\right) g\left(e^{it}\right) dt.$

D'après le théorème 1.5, il existe une unique fonction G continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, harmonique dans $\mathbb{D}$ avec $G_{|\mathbb{T}} = g$. Montrons que

$$\lim_{s\to 1^-} \|G_s - g\|_\infty = 0$$

où $G_s\left(e^{i\theta}\right) = G\left(se^{i\theta}\right)$.

On a que G continue sur le compact $\overline{\mathbb{D}}$ donc uniformément continue sur $\overline{\mathbb{D}}$. Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toutz_1, z_2 dans $\overline{\mathbb{D}}$ vérifiant $|z_1 - z_2| < \eta$ on ait $|G(z_1) - G(z_2)| < \varepsilon$. En particulier, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour $1 > s > 1-\eta$ on a $\left|G_s\left(e^{i\theta}\right) - g\left(e^{i\theta}\right)\right| =\mid G\left(se^{i\theta}\right) - G\left(e^{i\theta}\right) \mid< \varepsilon$. Ainsi pour $s > 1-\eta$ on a

$$\|G_s - g\|_\infty < \varepsilon$$

et donc

$$\lim_{s\to 1^-} \|G_s - g\|_\infty = 0.$$

On a que

$$G\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) g\left(e^{it}\right) dt$$

par Fubini, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} g\left(e^{i\theta}\right) d\mu(\theta) &= \lim_{s\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\left(e^{it}\right)\left(\int_0^{2\pi} P_s(\theta - t) d\mu(t)\right) dt \\ &= \lim_{s\to 1^-}\int_0^{2\pi} g\left(e^{it}\right) P_\mu\left(se^{it}\right) dt\end{aligned}$$

Troisième étape : Montrons que $\rho\left(P_\mu\right) = \|\mu\|$.

D'après le théorème de représentation de Riesz pour les mesures (théorème 7.23 de l'annexe) on a, $\|\mu\| = \|L_c(\mu)\|$ avec $L_c(\mu)(f) = \int_{\mathbb{T}} f d\mu$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Ainsi

$$\|\mu\| = \sup\left\{\left|\int_0^{2\pi} g\left(e^{i\theta}\right) d\mu(\theta)\right| : g \in \mathcal{C}(\mathbb{T}), \|g\|_\infty \leq 1\right\}.$$

D'après l'étape précédente, on a

$$\|\mu\| \leq \limsup_{s\to 1^-} \int_0^{2\pi} \left|P(\mu)\left(se^{it}\right)\right| dt \leq \rho(P(\mu)).$$

Finalement, en utilisant la première inégalité on conclu que $\rho(P(\mu)) = \|\mu\|$.

Quatrième étape : Montrons que T est une bijection.

Par définition, l'application T est linéaire. D'autre part l'égalité $\rho(P(\mu)) = \|\mu\|$ nous garantit l'injectivité de T. Il nous reste donc à vérifier que toute fonction $f \in S$ est de la forme $f = P(\mu)$ pour une certaine mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$.

Fixons $f \in S$ non identiquement nulle. Pour $0 \leq s < 1$, on définit l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} L_s : \mathcal{C}(\mathbb{T}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ g & \longmapsto & \int_0^{2\pi} g\left(e^{it}\right) f\left(se^{it}\right) dt \end{array}$$

Remarquons que $L_s\left(\varphi_{r,\theta}\right) = \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f\left(se^{it}\right) dt$, où $\varphi_{r,\theta}\left(e^{it}\right) := P_r(\theta - t)$. Puisque la fonction $u \longmapsto f(su)$ est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, harmonique dans $\mathbb{D}$, d'après le théorème 1.5 on a

$$\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f\left(se^{it}\right) dt = 2\pi f\left(sre^{i\theta}\right).$$

On a donc $L_s(\varphi_{r,\theta}) = 2\pi f\left(sre^{i\theta}\right)$ et par continuité de f sur $\overline{D(0,r)}$ on obtient :

$$\lim_{s\to 1^-} L_s(\varphi_{r,\theta}) = 2\pi f\left(re^{i\theta}\right).$$

La linéarité de L_s nous garantit que pour tout $g \in E, \lim_{s\to 1^-} L_s(g)$ existe. Nous allons ensuite montrer que $\lim_{s\to 1^-} L_s(h)$ existe pour toute fonction $h \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, pour cela nous allons utiliser le résultat de densité démontré précédemment (lemme 1.8). On a

$$\|L_s\| = \sup\left\{\left|\int_0^{2\pi} f\left(se^{it}\right) g\left(e^{it}\right) dt\right| : \|g\|_\infty \le 1\right\} \le \int_0^{2\pi} \left|f\left(se^{it}\right)\right| dt \le \rho(f) < \infty \tag{*}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $h \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Puisque E est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, il existe $g \in E$ telle que

$$\|g-h\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{2\rho(f)}.$$

De plus, puisque $L(g) := \lim\limits_{s\to 1^-} L_s(g)$ existe, il existe $\nu > 0$ tel que pour $1-\nu < s < 1$, on ait $|L_s(g) - L(g)| < \frac{\varepsilon}{4\rho(f)}$. Pour $s, s' \in]1-\nu, 1[$, par $(*)$, on a par un découpage classique :

$$\begin{aligned}
|L_s(h) - L_{s'}(h)| &\le |L_s(h) - L_s(g)| + |L_s(g) - L(g)| + |L(g) - L_{s'}(g)| + |L_{s'}(g) - L_{s'}(h)| \\
&\le \|L_s\|\,\|h-g\|_\infty + \frac{\varepsilon}{4\rho(f)} + \frac{\varepsilon}{4\rho(f)} + \|L_{s'}\|\,\|h-g\|_\infty \\
&\le \rho(f)\frac{\varepsilon}{2\rho(f)} + \frac{\varepsilon}{2\rho(f)} + \rho(f)\frac{\varepsilon}{2\rho(f)} \\
&= \varepsilon\left(1 + \frac{1}{2\rho(f)}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi la suite $(L_s)_{0\le s<1}$ est de Cauchy. Or $\mathbb{C}$ est complet, de cela on en déduit que l'ensemble des applications linéaires de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ dans $\mathbb{C}$ est complet. Ainsi $(L_s)_{0\le s<1}$ est convergente. Notons L sa limite qui, d'après $(*)$, vérifie $\|L\| \le \rho(f)$. Puisque $L \in (\mathcal{C}(\mathbb{T}))^*$, d'après le théorème de représentation de Riesz pour les mesures (théorème 7.23 de l'annexe), il existe une mesure complexe $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ telle que :

$$L(h) = L_c(\mu)(h) = \int_0^{2\pi} h\left(e^{it}\right) d\mu(t), \quad h \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que $P(\mu) = f$. D'après les calculs précédents, nous avons :

$$\begin{aligned}
P(\mu)\left(re^{i\theta}\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t) \\
&= \frac{1}{2\pi} L(\varphi_{r,\theta}) \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{s\to 1^-} L_s(\varphi_{r,\theta}) \\
&= \frac{1}{2\pi} 2\pi f\left(re^{i\theta}\right) \\
&= f\left(re^{i\theta}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi $P(\mu) = f$ ce qui conclut la démonstration.

□

Corollaire 1.10. L'application $\mu \longmapsto P(\mu)$ est une isométrie bijective de $\mathcal{M}^+(\mathbb{T}) :=$ {mesure positive finie sur $\mathbb{T}$} sur l'ensemble des fonctions harmoniques positives sur $\mathbb{D}$.

Démonstration. Soit $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{T})$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ positive on a

$$\int_{\mathbb{T}} f d\mu \geq 0.$$

Puisque $P(\mu)\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t)$ avec $t \longmapsto P_r(\theta - t)$ continue et positive pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a donc $P(\mu)$ fonction harmonique positive sur $\mathbb{D}$.

Réciproquement, si l'on suppose que f est une fonction harmonique positive sur $\mathbb{D}$, d'après la propriété de la moyenne, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \left|f\left(se^{it}\right)\right| dt &= \int_0^{2\pi} f\left(se^{it}\right) dt\\ &= 2\pi f(0)\end{aligned}$$

On a donc $\rho(f) := \sup\limits_{0\leq s<1} \int_0^{2\pi} \left|f\left(se^{i\theta}\right)\right| d\theta = 2\pi f(0) < \infty$, ce qui prouve que $f \in S$. D'après le théorème précédent, il existe $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ telle que $f = P(\mu)$. Dans la preuve du théorème précédent, on a vu que pour toute fonction h continue sur $\mathbb{T}$ on a :

$$\int_0^{2\pi} h\left(e^{it}\right) d\mu(t) = \lim_{s\to 1^-} \int_0^{2\pi} h\left(e^{it}\right) f\left(se^{it}\right) dt.$$

Ainsi, si h est une fonction continue positive sur $\mathbb{T}$ on a $\int_0^{2\pi} h\left(e^{it}\right) d\mu(t) \geq 0$. Ceci montre aussi que l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl}\ell : \mathcal{C}(\mathbb{T}) & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ h & \longmapsto & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h\left(e^{it}\right) d\mu(t)\end{array}$$

est continue avec $\|\ell\| = f(0)$ et positive. Ainsi $\ell \in \mathcal{C}_+^*(\mathbb{T})$. D'après le théorème de représentation de Riesz pour les mesures (théorème 7.23 de l'annexe), μ est une mesure positive finie.

□

1.4 Théorème de Herglotz-Riesz

Théorème 1.11. (Représentation de Herglotz-Riesz) Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ telle que $\mathrm{Re}(f) \geq 0$, alors il existe $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{T})$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $z \in \mathbb{D}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\mu(t) + ic.$$

Démonstration. Soit f holomorphe sur $\mathbb{D}$ telle que $\mathrm{Re}(f) \geq 0$ alors $\mathrm{Re}(f)$ est harmonique. Posons

$$h := \mathrm{Re}(f),$$

d'après le corollaire 1.10, il existe une mesure μ dans $\mathcal{M}^+(\mathbb{T})$ telle que

$$h(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t).$$

Par définition du noyau de Poisson on a :

$$h(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) d\mu(t),$$

or h est une fonction réelle donc

$$h(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\mu(t).$$

Par définition les fonctions f et h ont même partie réelle, donc par les équations de Cauchy-Riemann on a qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t) + ic,$$

ce qui conclut la démonstration.

□

1.5 Limite radiale de l'intégrale de Poisson

Définition 1.12. Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ à valeurs réelles. *L'intégrale de Poisson* par rapport à μ est la fonction harmonique sur $\mathbb{D}$ définie par :

$$P(\mu)\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t),$$

pour $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.13. Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ à valeurs réelles. Pour $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a :

$$\limsup_{r \to 1^-} P(\mu)\left(re^{i\theta}\right) \leq \bar{D}(\mu)(\theta) := \limsup_{s \to 0} \frac{\mu(]\theta - s, \theta + s[)}{2s}.$$

Démonstration. Soit $\delta \in]0, \pi[$. Nous allons découper l'intégrale en deux parties et travailler séparément sur chacune. On a :

$$P(\mu)\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi \geq |\theta - t| \geq \delta} P_r(\theta - t) d\mu(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{|\theta - t| < \delta} P_r(\theta - t) d\mu(t).$$

Pour le premier membre :
D'après la proposition **??**, on a

$$P_r(\theta - t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}.$$

Si $\pi \geq |\theta - t| \geq \delta$ on obtient $P_r(\theta - t) \leq \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\delta + r^2} = P_r(\delta)$ et donc

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\pi \geq |\theta - t| \geq \delta} P_r(\theta - t) d\mu(t) \right| \leq \frac{P_r(\delta)}{2\pi} \int_{\pi \geq |\theta - t| \geq \delta} d|\mu|(t) \leq \frac{P_r(\delta)}{2\pi} \|\mu\|.$$

Puisque $\delta \in]0, \pi[$, on remarque que :

$$\lim_{r \to 1^-} P_r(\delta) = \lim_{r \to 1^-} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\delta + r^2} = 0.$$

Pour le second membre :
Nous allons estimer

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\theta - t| < \delta} P_r(\theta - t) d\mu(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta + \delta}^{\theta - \delta} P_r(\theta - t) d\mu(t).$$

Considérons le domaine Δ de $\mathbb{C}$ défini par $\Delta = \left\{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta - s < t < \theta + s,\ 0 < s < \delta\right\}$.

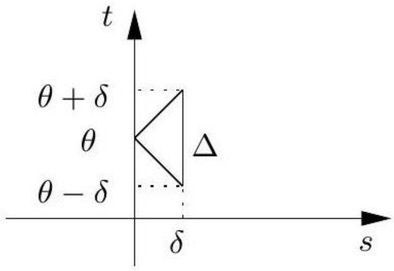

FIGURE 1 – Domaine d'intégration

Calculons $I = \iint_\Delta P_r'(s)dsd\mu(t)$. Puisque la fonction P_r' est continue, bornée et comme on l'intègre sur un intervalle borné, par le théorème de Fubini, on a d'une part :

$$I = \int_0^\delta \left(\int_{\theta-s}^{\theta+s} d\mu(t) \right) P_r'(s)ds = \int_0^\delta \mu(]\theta - s, \theta + s[)P_r'(s)ds.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} \left(\int_{|\theta-t|}^{\delta} P_r'(s)ds \right) d\mu(t) = \int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} \left(P_r(\delta) - P_r(|\theta - t|)\right) d\mu(t) \\ &= \int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} \left(P_r(\delta) - P_r(\theta - t)\right) d\mu(t). \end{aligned}$$

D'où

$$\int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} \left(P_r(\delta) - P_r(\theta - t)\right) d\mu(t) = \int_0^\delta \mu(]\theta - s, \theta + s[)P_r'(s)ds,$$

et puisque P_r est une fonction paire on a

$$\begin{aligned} \int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} P_r(\theta - t)d\mu(t) &= \int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} P_r(\delta)d\mu(t) + \int_0^\delta \mu(]\theta - s, \theta + s[) \left(-P_r'(s)\right) ds \\ &= P_r(\delta)\mu(]\theta - \delta, \theta + \delta[) + \int_0^\delta \mu(]\theta - s, \theta + s[) \left(-P_r'(s)\right) ds. \end{aligned}$$

Remarquons que $-P_r'(s) \geq 0$ pour $s \in [0, \delta]$ puisque P_r est décroissante sur $[0, \delta]$ car $\delta \in]0, \pi[$. Soit $A > \bar{D}(\mu)(\theta)$. Si δ est assez petit, on a :

$$\forall s \in]0, \delta], \ \mu(]\theta - s, \theta + s[) < 2sA.$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} P_r(\theta - t)d\mu(t) &\leq 2A\delta P_r(\delta) + \int_0^\delta 2As \left(-P_r'(s)\right) ds \\ &= 2A \left(\delta P_r(\delta) + \int_0^\delta -sP_r'(s)ds \right). \end{aligned}$$

Par intégration par partie on a

$$\begin{aligned} \delta P_r(\delta) + \int_0^\delta -sP_r'(s)ds &= \delta P_r(\delta) + [-sP_r(s)]_0^\delta + \int_0^\delta P_r(s)ds \\ &= \int_0^\delta P_r(s)ds \\ &\leq \int_0^\pi P_r(s)ds = \pi \end{aligned}$$

D'où, pour δ assez petit, comme $\int_{|\theta-t|<\delta} P_r(\theta-t)d\mu(t) \leq 2\pi A$, on obtient :

$$\forall A > \bar{D}(\mu)(\theta), \quad P(\mu)\left(re^{i\theta}\right) \leq A + P_r(\delta)\frac{\|\mu\|}{2\pi}.$$

Puisque $\lim_{r\to 1^-} P_r(\delta) = 0$,

$$\limsup_{r\to 1^-} P(\mu)\left(re^{i\theta}\right) \leq \bar{D}(\mu).$$

□

Théorème 1.14. (Limite radiale de l'intégrale de Poisson) Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$. Pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ (par rapport à la mesure de Lebesgue) alors

$$\lim_{r\to 1^-} P(\mu)\left(re^{it}\right)$$

existe.

De plus si on pose $\varphi\left(e^{it}\right) := \lim_{r\to 1^-} P(\mu)\left(re^{it}\right)$, alors $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$ et φ est la dérivée de Radon-Nikodym de μ par rapport à la mesure de Lebesgue. Autrement dit, si l'on pose $\nu(E) := \mu(E) - \int_E \varphi\left(e^{it}\right) dt$ pour tout borélien E de $\mathbb{T}$, alors $\nu \perp m$.

Démonstration. Dans un premier temps supposons que μ est à valeurs réelles.

Puisque

— $P(-\mu) = -P(\mu)$

— $\limsup_{r\to 1^-} -P(\mu)\left(re^{it}\right) = -\liminf_{r\to 1^-} P(\mu)\left(re^{it}\right)$

— $\bar{D}(-\mu) = -\underline{D}(\mu)$

par la proposition 1.13 appliqué à $-\mu$, on a :

$$\underline{D}(\mu)(\theta) \leq \liminf_{r\to 1^-} P(\mu)\left(re^{it}\right) \leq \limsup_{r\to 1^-} P(\mu)\left(re^{it}\right) \leq \bar{D}(\mu)(\theta).$$

Or, d'après le théorème 7.29,

$$\underline{D}(\mu)(\theta) = \bar{D}(\mu)(\theta) = D(\mu)(\theta) \quad m\text{-presque partout}$$

et de plus $D(\mu)$ coïncide avec la dérivée de Radon-Nikodym de μ par rapport à la mesure de Lebesgue. On en déduit le théorème dans ce cas particulier.

Maintenant, si μ est une mesure complexe, on écrit $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ avec μ_1 et μ_2 mesures à valeurs réelles. Comme $D(\mu_1)$ et $D(\mu_2)$ existent m-presque partout et puisque $D(\mu) = D(\mu_1) + iD(\mu_2)$, $D(\mu)$ est bien défini m-presque partout. Or $P(\mu) = P(\mu_1) + iP(\mu_2)$, ainsi l'assertion du théorème reste vraie si μ est une mesure complexe.

□

1.6 Description de certaines fonctions harmoniques

En combinant le corollaire 1.10 et le théorème 1.14 on a

Corollaire 1.15. Soit F une fonction harmonique positive sur $\mathbb{D}$. Alors

$$F^*\left(e^{it}\right) := \lim_{r\to 1^-} F\left(re^{it}\right)$$

existe m-presque partout et $F^* \in L^1(\mathbb{T})$.

De plus il existe une mesure positive finie ν sur $\mathbb{T}$ telle que $\nu \perp m$ et $F = P(F^*) + P(\nu)$ avec $\lim_{r\to 1^-} P(\nu)\left(re^{it}\right) = 0$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ (par rapport à la mesure de Lebesgue).

De manière plus générale avec le théorème 1.9 et 1.14 on a :

Corollaire 1.16. Soit F une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$ telle que $\sup_{0\leq s<1} \int_0^{2\pi} \left|f\left(se^{i\theta}\right)\right| d\theta < \infty$. Alors

$$F^*\left(e^{it}\right) := \lim_{r\to 1^-} F\left(re^{it}\right)$$

existe m-presque partout et $F^* \in L^1(\mathbb{T})$.

De plus il existe une mesure finie ν sur $\mathbb{T}$ telle que $\nu \perp m$ et $F = P(F^*) + P(\nu)$ avec $\lim_{r\to 1^-} P(\nu)\left(re^{it}\right) = 0$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ (par rapport à la mesure de Lebesgue).

1.7 Limite non tangentielle de l'intégrale de Poisson

Définition 1.17. Soit $h(z)$ une fonction à valeurs complexes définie sur $\mathbb{D}$, et soit $e^{i\tau}$ un point fixe de $\mathbb{T}$.

On dit que $\lim_{z\to e^{i\tau}} h(z) = A$ *non tangentiellement* si, pour tout secteur triangulaire ouvert S dans D de sommet $e^{i\tau}$, on a $h(z) \to A$ lorsque $z \to e^{i\tau}$ à l'intérieur de S.

On dit que $\lim_{z\to e^{it}} h(z) = f\left(e^{it}\right)$ non tangentiellement p.s. s'il existe un borélien $N \subseteq \mathbb{T}$ de mesure de Lebesgue nul tel que

$$\lim_{z\to e^{it}} h(z) = f\left(e^{it}\right)$$

non tangentiellement pour tout $e^{it} \in \mathbb{T}\backslash N$.

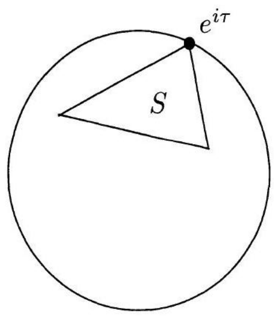

FIGURE 2 – Exemple d'un secteur triangulaire

Théorème 1.18. (Fatou) Soit $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{T})$, notons

$$d\mu = f dm + d\mu_s$$

la décomposition de Lebesgue de μ par rapport à m la mesure de Lebesgue. Notons pour $z \in \mathbb{T}$

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} P(z, e^{it}) d\mu(e^{it}).$$

Alors

$$\lim_{z\to e^{it}} h(z) = f(e^{it}) \text{ non tangentiellement p.s. .}$$

Démonstration. Soit $\alpha(t) := \mu\left(\left\{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, t[\right\}\right)$ la fonction de répartition de μ, on a que

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) &= \lim_{s\to 0} \frac{\alpha(t+s) - \alpha(s)}{s} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{\mu\left(\left\{e^{i\theta} \mid \theta \in [s, t+s[\right\}\right)}{s} \\
&= f\left(e^{it}\right) \text{ pour presque tout } t \text{ d'après la proposition 7.28.}
\end{aligned}$$

Ainsi pour prouver le résultat, il suffit de montrer que

$$\lim_{z\to 1} h(z) = \alpha'(t) \text{ non tangentiellement p.s. .}$$

Sans perte de généralité, supposons que $t = 0$ et $\alpha(0) = 0$. Par définition on a

$$\alpha'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\alpha(t)}{t}$$

et nous devons montrer que

$$h(z) \to \alpha'(0)$$

de manière non tangentielle lorsque $z \to 1$.

Fixons un secteur dans le disque unité avec sommet en 1 :

$$S = \{z := x + iy \mid |y| < K(1-x), c < x < 1\}$$

où $K > 0$ et $0 < c < 1$ mais c doit être assez proche de 1 dans un sens que nous préciserons plus tard.

Soit $\varepsilon > 0$. Nous allons montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que l'inégalité

$$|h(z) - \alpha'(0)| < \varepsilon$$

soit satisfaite pour tout $z \in S$ et $|z-1| < \delta$. Puisque pour toute f continue sur le cercle $\mathbb{T}$ on a

$$\int_{\mathbb{T}} f d\mu = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) d\alpha(t),$$

on a alors

$$\begin{aligned}
2\pi h(z) - 2\pi\alpha'(0) &= \int_{-\pi}^{\pi} P\left(z, e^{it}\right) d\left(\alpha(t) - \alpha'(0)t\right) \\
&= \left[P\left(z, e^{it}\right)\left(\alpha(t) - \alpha'(0)t\right)\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \left(\alpha(t) - \alpha'(0)t\right) \frac{\partial}{\partial t} P\left(z, e^{it}\right) dt \\
&= P(z, -1)\left(\alpha(\pi) - \alpha(-\pi) - 2\pi\alpha'(0)\right) - \int_{-\pi}^{\pi} \left(\alpha(t) - \alpha'(0)t\right) \frac{\partial}{\partial t} P\left(z, e^{it}\right) dt \\
&= \frac{1-|z|^2}{|1+z|^2}\left(\alpha(\pi) - \alpha(-\pi) - 2\pi\alpha'(0)\right) - \int_{-\pi}^{\pi} \left(\alpha(t) - \alpha'(0)t\right) \frac{\partial}{\partial t} P\left(z, e^{it}\right) dt.
\end{aligned}$$

Prenons un $\eta \in]0, \pi[$ tel que $\left|\frac{\alpha(t)}{t} - \alpha'(0)\right| < \varepsilon/M$, où $M := 3(2\pi + 16K)$, on découpe alors l'intégrale de sorte à ce qu'on ait :

$$\begin{aligned}
2\pi h(z) - 2\pi\alpha'(0) &= \frac{1-|z|^2}{|1+z|^2}\left(\alpha(\pi) - \alpha(-\pi) - 2\pi\alpha'(0)\right) - \int_{|t|\le\eta} \left(\alpha(t) - \alpha'(0)t\right) \frac{\partial}{\partial t} P\left(z, e^{it}\right) dt \\
&\quad - \int_{\eta<|t|\le\pi} \left(\alpha(t) - \alpha'(0)t\right) \frac{\partial}{\partial t} P\left(z, e^{it}\right) dt \\
&:= I_1(z) + I_2(z) + I_3(z).
\end{aligned}$$

Il est clair que $I_1(z)$ tend vers 0 lorsque $z \to 1$. Ainsi prenons $\delta_1 > 0$ tel que pour $z \in S$, $|z-1| < \delta_1$:

$$|I_1(z)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour $I_3(z)$ nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t} P\left(z, e^{it}\right) = \operatorname{Re} \frac{-2ize^{it}}{\left(e^{it} - z\right)^2}.$$

Or,

$$\begin{aligned}\frac{-2ize^{it}}{\left(e^{it}-z\right)^2} &= \frac{-2ize^{it}\left(e^{-it}-\bar{z}\right)^2}{\left|e^{it}-z\right|^4}\\ &= \frac{-2ize^{-it}-2ize^{it}\bar{z}^2+4i|z|}{\left|e^{it}-z\right|^4}\end{aligned}$$

Ainsi en faisant $z \to 1$ on a

$$\frac{-2ize^{it}}{\left(e^{it}-z\right)^2} = \frac{-2ie^{-it}-2ie^{it}+4i}{\left|e^{it}-1\right|^4}.$$

La quantité au dénominateur est bien finie puisque $\eta < |t| \leq \pi$. Puis en prenant la partie réelle on a

$$\operatorname{Re}\left(\frac{-2ize^{it}}{\left(e^{it}-z\right)^2}\right) = 0,$$

d'où $\frac{\partial}{\partial t}P\left(z, e^{it}\right)$ tend vers 0 uniformément pour $\eta < |t| \leq \pi$ lorsque $z \to 1$, et donc $I_3(z)$ tend vers 0 lorsque $z \to 1$. Prenons alors $\delta_3 > 0$ tel que pour $z \in S,\ |z-1| < \delta_1$:

$$|I_3(z)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Il reste à estimer $I_2(z)$. Remarquons que précédemment nous avons utiliser des limites "classiques", c'est pour ce terme que nous auront besoin de la limite tangentielle. Soit $z = re^{i\theta} \in S$, on a

$$\begin{aligned}|I_2(z)| &= \left|\int_{-\eta}^{\eta}\left[\frac{\alpha(t)}{t}-\alpha'(0)\right]t\frac{\partial}{\partial t}P\left(z,e^{it}\right)dt\right|\\ &\leq \frac{\varepsilon}{M}\int_{-\eta}^{\eta}\left|t\frac{\partial}{\partial t}P\left(z,e^{it}\right)\right|dt.\end{aligned}$$

On a

$$P(z,e^{it}) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2},$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial t}P\left(z,e^{it}\right) = \frac{\left(1-r^2\right)2r\sin(\theta-t)}{\left(1-2r\cos(\theta-t)+r^2\right)^2} = \frac{-\left(1-r^2\right)2r\sin(t-\theta)}{\left(1-2r\cos(\theta-t)+r^2\right)^2}.$$

Ainsi

$$|I_2(z)| \leq \frac{\varepsilon}{M}\int_{-\eta}^{\eta}\left|\frac{t\left(1-r^2\right)2r\sin(t-\theta)}{\left(1-2r\cos(\theta-t)+r^2\right)^2}\right|dt.$$

Par un changement de variable "$t = u+\theta$" on a

$$|I_2(z)| \leq \frac{\varepsilon}{M}\int_{-(\eta+\theta)}^{\eta+\theta}\left|(u+\theta)\frac{\left(1-r^2\right)2r\sin(u)}{\left(1-2r\cos(u)+r^2\right)^2}\right|du.$$

Pour c assez proche de 1, θ peut être pris assez petit de sorte à ce que $[-(\eta+\theta), \eta+\theta] \subset [-\pi, \pi]$ donc

$$\begin{aligned}|I_2(z)| &\leq \frac{\varepsilon}{M}\int_{-\pi}^{\pi}\left|(t+\theta)\frac{\left(1-r^2\right)2r\sin(t)}{\left(1-2r\cos(t)+r^2\right)^2}\right|dt\\ &\leq \frac{\varepsilon}{M}\int_{-\pi}^{\pi}\left|t\frac{\partial}{\partial t}P\left(r,e^{it}\right)\right|dt + \frac{\varepsilon}{M}|\theta|\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\partial}{\partial t}P\left(r,e^{it}\right)\right|dt\end{aligned}$$

D'une part, puisque $t \mapsto -t\sin(t)$ est négatif sur $[-\pi, \pi]$ on a

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \left| t \frac{\partial}{\partial t} P\left(r, e^{it}\right) \right| dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{-t\left(1-r^2\right) 2r\sin(t)}{\left(1-2r\cos(t)+r^2\right)^2} \right| dt \\
&= -\int_{-\pi}^{\pi} t \frac{\partial}{\partial t} P\left(r, e^{it}\right) dt \\
&= \left[-tP\left(r, e^{it}\right)\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} P\left(r, e^{it}\right) dt \\
&= -2\pi \frac{1-r}{1+r} + 2\pi \\
&< 2\pi
\end{aligned}$$

D'autre part, par parité de $t \mapsto \left|\frac{\partial}{\partial t} P\left(r, e^{it}\right)\right|$ et positivité de sinus sur $[0, \pi]$ on a

$$\begin{aligned}
|\theta| \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\partial}{\partial t} P\left(r, e^{it}\right) \right| dt &= -2|\theta| \int_{0}^{\pi} \frac{\partial}{\partial t} P\left(r, e^{it}\right) dt \\
&= -2|\theta| \left[P\left(r, e^{it}\right)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{8r|\theta|}{1-r^2} \\
&\leq \frac{8r|\theta|}{1-r}.
\end{aligned}$$

Pour $z = re^{i\theta} \in S$, on a $K(1 - r\cos\theta) > |r\sin\theta|$ donc

$$K(1-r) + Kr(1-\cos\theta) > r|\sin\theta|$$

ainsi

$$\begin{aligned}
K(1-r) &> r|\sin\theta| - Kr(1-\cos\theta) \\
&= r|\theta| \left(\frac{\sin\theta}{\theta} - K\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}|\theta| \right).
\end{aligned}$$

Les fonctions $\theta \mapsto \frac{\sin\theta}{\theta}$ et $\theta \mapsto K\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}|\theta|$ peuvent-être prolongé par continuité en 0 respectivement par 1 et 0. Ainsi prenons $\delta_2 > 0$ tel que $z \in S, |z-1| < \delta_2$:

$$\frac{\sin\theta}{\theta} - K\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}|\theta| - 1 < \frac{1}{2},$$

donc

$$\frac{\sin\theta}{\theta} - K\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}|\theta| > \frac{1}{2}.$$

Ainsi pour un tel z on obtient

$$K(1-r) > \frac{r|\theta|}{2}$$

d'où

$$16K > \frac{8r|\theta|}{1-r}.$$

En reprenant nos estimations on obtient :

$$|I_2(z)| < \frac{\varepsilon}{M}(2\pi + 16K) = \frac{\varepsilon}{3}$$

Finalement, en posant $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, on a

$$|2\pi h(z) - 2\pi\alpha'(0)| \leq |I_1(z)| + |I_2(z)| + |I_3(z)| < \varepsilon$$

pour tout $z \in S$ tel que $|z-1| < \delta$, ce qui conclut la démonstration.

□

2 La classe de Nevanlinna

2.1 Les fonctions $\log^+$ et $\log^-$

Définition 2.1. La fonction $\log^+$est la fonction continue définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\log^+(s) = \begin{cases} \log s & \text{si} \quad s \geq 1 \\ 0 & \text{si} \quad 0 < s < 1 \end{cases}$$

Autrement dit, $\log^+(s) = \sup(\log s, 0)$.

La fonction $\log^-$est la fonction continue définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\log^-(s) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad s \geq 1 \\ -\log s & \text{si} \quad 0 < s < 1 \end{cases}$$

Autrement dit, $\log^-(s) = \sup(-\log s, 0)$.

Remarque. On a $\log(s) = \log^+(s) - \log^-(s)$ et $|\log(s)| = \log^+(s) + \log^-(s)$.

2.2 Définition de la classe de Nevanlinna et description des fonctions sans zéros

Définition 2.2. La *classe de Nevanlinna* $\mathcal{N}$ est définie par :

$$\mathcal{N} := \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) \mid \sup_{0 \leq r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left| f\left(re^{it}\right) \right| dt < \infty \right\}.$$

Remarque. Les fonctions de $\mathcal{N}$ étant holomorphes, ce sont des fonctions harmoniques sur $\mathbb{D}$ à valeurs complexes.

Dans un premier temps considérons les fonctions de $\mathcal{N}$ qui ne s'annulent pas sur $\mathbb{D}$. Le but de cette partie va être de caractériser de telles fonctions.

Théorème 2.3. Soit $f \in \mathcal{N}$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{D}$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et une mesure (finie) réelle μ sur $\mathbb{T}$ vérifiant :

$$f(z) = e^{i\lambda} e^{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\mu(t)}$$

et

$$\log|f| = P(\mu) \text{ sur } \mathbb{D}.$$

Démonstration. Puisque $\mathbb{D}$ est simplement connexe et que f ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$ il existe $g \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ vérifiant $f = e^g$ et ainsi $\log|f| = \mathrm{Re}(g)$. Donc $\log|f|$ est harmonique (en tant que partie réelle d'une fonction holomorphe). D'après la formule de la moyenne, pour $0 \leq r < 1$, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log \left| f\left(re^{it}\right) \right| dt = 2\pi \log|f(0)|.$$

Par définition de $\mathcal{N}$, on a

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left| f\left(re^{it}\right) \right| dt < \infty$$

et comme

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log^- \left| f\left(re^{it}\right) \right| dt = \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left| f\left(re^{it}\right) \right| dt - \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| f\left(re^{it}\right) \right| dt$$

on obtient :

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^- \left| f\left(re^{it}\right) \right| dt < \infty.$$

De plus $|\log(s)| = \log^+(s) + \log^-(s)$, on a :

$$\sup_{0\leq r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |\log|f\left(re^{it}\right)||dt < \infty$$

D'après le théorème 1.9, il existe une mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ telle que $\log|f| = P(\mu)$ sur $\mathbb{D}$. Comme $\log|f|$ est réelle, on en déduit que μ est réelle. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(g(z)) &= \log|f(z)| \\
&= P(\mu)(z) \qquad \text{en écrivant } z = re^{i\theta} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t)\right)
\end{aligned}$$

On a donc par les équations de Cauchy-Riemann qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t) + i\lambda,$$

ce qui implique

$$f(z) = e^{i\lambda}e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t)}$$

où μ est une mesure réelle et $\lambda \in \mathbb{R}$.

□

Corollaire 2.4. Soit $f \in \mathcal{N}$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{D}$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et une mesure (finie) réelle μ sur $\mathbb{T}$ dont les variations positives et négatives μ^+ et μ^- vérifient :

$$f(z) = e^{i\lambda}\frac{\exp\left(\frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu^-(t)\right)}{\exp\left(\frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu^+(t)\right)}.$$

En particulier f est le quotient de deux fonctions holomorphes bornées sur $\mathbb{D}$.

Démonstration. D'après le théorème précédent 2.3 on a

$$f(z) = e^{i\lambda}e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t)},$$

d'après la décomposition de Jordan (théorème 7.10 de l'annexe) et d'après la décomposition de Hahn (théorème 7.17 de l'annexe), $\mu = \mu^+ - \mu^-$ avec μ^+ et μ^- mesures positives telles que $\mu^+ \perp \mu^-$. Finalement on obtient :

$$f(z) = e^{i\lambda}\frac{\exp\left(\frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu^-(t)\right)}{\exp\left(\frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu^+(t)\right)}$$

Remarquons que si ν est une mesure positive, on a :

$$\left|e^{\frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{t}t-z}d\nu(t)}\right| = e^{Re\left(\frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)\right)} = e^{-P_\nu(z)} \leq 1,$$

car si $\nu \geq 0, -P_\nu(z) \leq 0$. La fonction $f \in \mathcal{N}$ est donc bien le quotient de deux fonctions holomorphes bornées sur $\mathbb{D}$.

□

Lemme 2.5. Soit $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ alors , $f^*\left(e^{it}\right) := \lim\limits_{r\to 1^-} f\left(re^{it}\right)$ existe pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ (par rapport à la mesure de Lebesgue) et appartient à $L^\infty(\mathbb{T})$.

Démonstration. Soit $f \in H^\infty(\mathbb{D})$. On a

$$\sup_{0\le r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\right| dt \le 2\pi \|f\|_\infty \text{ où } \|f\|_\infty := \sup_{|z|<1} |f(z)|.$$

De plus, puisque f est holomorphe sur $\mathbb{D}$ elle est harmonique sur $\mathbb{D}$. D'après le corollaire 1.16,

$$f^*\left(e^{it}\right) := \lim_{r\to 1^-} f\left(re^{it}\right)$$

existe m-presque partout et $f^* \in L^1(\mathbb{T})$. De plus $\left|f^*\left(e^{it}\right)\right| \le \|f\|_\infty$ m-presque partout. Ainsi on obtient $f^* \in L^\infty(\mathbb{T})$.

□

Théorème 2.6. Soit $f \in \mathcal{N}$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{D}$. Alors, $f^*\left(e^{it}\right) := \lim_{r\to 1^-} f\left(re^{it}\right)$ existe pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ et de plus $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$. De plus il existe une mesure réelle $\mu \perp m$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(z) = e^{i\lambda} e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log\left|f^*\left(e^{it}\right)\right| dt} e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\mu(t)}.$$

Démonstration. D'après le corollaire 2.4, il existe $g, h \in H^\infty(\mathbb{D})$ avec $g(z) \ne 0$ et $h(z) \ne 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, $\|g\|_\infty \le 1$, $\|h\|_\infty \le 1$ et $f = \frac{g}{h}$. Ainsi

$$\sup_{0\le r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \left|g\left(re^{it}\right)\right| dt \le 2\pi \text{ et } \sup_{0\le r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \left|h\left(re^{it}\right)\right| dt \le 2\pi.$$

D'après le lemme 2.5,

$$g^*\left(e^{it}\right) = \lim_{r\to 1^-} g\left(re^{it}\right) \text{ et } h^*\left(e^{it}\right) = \lim_{r\to 1^-} h\left(re^{it}\right)$$

existent pour presque tout $t \in [0, 2\pi]$ (par rapport à la mesure de Lebesgue). Puisque $\mathbb{D}$ est simplement connexe et h ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$ ainsi il existe une fonction $\ell \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ telle que $h = e^\ell$. Puisque $\|h\|_\infty \le 1$, la fonction $\mathrm{Re}(\ell) = \log|h|$ est une fonction harmonique négative sur $\mathbb{D}$. En considérant la fonction $-\log|h|$ (qui est harmonique positive sur $\mathbb{D}$) on a d'après le corollaire 1.15,

$$\varphi\left(e^{it}\right) := \lim_{r\to 1^-} \log\left|h\left(re^{it}\right)\right|$$

existe pour presque tout $t \in [0, 2\pi]$ (par rapport à la mesure de Lebesgue). Il existe donc un borélien A de $[0, 2\pi]$ de mesure de Lebesgue nulle tel que pour tout $t \in [0, 2\pi]\backslash A$, on ait simultanément :

$$\begin{cases} \lim\limits_{r\to 1^-} \log\left|h\left(re^{it}\right)\right| & = \varphi\left(e^{it}\right) \quad \text{existe.} \\ \lim\limits_{r\to 1^-} h\left(re^{it}\right) & = h^*\left(e^{it}\right) \quad \text{existe.} \end{cases}$$

Par conséquent, pour $t \in [0, 2\pi]\backslash A$, on a $\left|h^*\left(e^{it}\right)\right| \ne 0$. Si B est un borélien de mesure de Lebesgue nulle telle que $g^*\left(e^{it}\right) = \lim\limits_{r\to 1^-} g\left(re^{it}\right)$ existe pour tout $t \in [0, 2\pi]\backslash B$, on a donc :

$$f^*\left(e^{it}\right) := \lim_{r\to 1^-} f\left(re^{it}\right) \text{ existe pour tout } t \in [0, 2\pi]\backslash(A \cup B) \text{ et } f^*\left(e^{it}\right) = \frac{g^*\left(e^{it}\right)}{h^*\left(e^{it}\right)}.$$

D'après le théorème 2.3 f est de la forme

$$f(z) = e^{i\lambda} e^{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\mu(t)$$

avec μ mesure réelle de $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ telle que $\log|f| = P(\mu)$ sur $\mathbb{D}$. D'après le théorème 1.14, $d\mu(t) = \varphi\left(e^{it}\right)dt + d\nu(t)$ avec $\nu \perp m$ et $\varphi\left(e^{it}\right) = \lim_{r\to 1^-} \log\left|f\left(re^{it}\right)\right|$ pour presque tout t (par rapport à la mesure de Lebesgue) avec $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$. Or nous venons de voir que, pour presque tout t,

$$\varphi\left(e^{it}\right) = \log\left|f^*\left(e^{it}\right)\right|.$$

On obtient donc $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$ et

$$f(z) = e^{i\lambda} e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\left|f^*\left(e^{it}\right)\right|dt} \times e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)}$$

avec ν mesure réelle, $\nu \perp m$.

□

2.3 La formule de Jensen et les produits de Blaschke

Lemme 2.7.

$$\int_0^\pi \log(\sin u)du = -\pi\log(2)$$

Démonstration. L'intégrale $\int_0^{\pi/2}\log(\sin u)du$ est bien définie puisque $\sqrt{u}\log(\sin u) = \sqrt{u}\log(u) + \sqrt{u}\log\left(\frac{\sin u}{u}\right)$ tend vers 0 lorsque u tend vers 0. En découpant l'intégrale et en effectuant un changement de variable $u = t + \frac{\pi}{2}$ on a

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \log(\sin u)du &= \int_0^{\pi/2}\log(\sin u)du + \int_0^{\pi/2}\log(\cos u)du \\ &:= I + J.\end{aligned}$$

Remarquons qu'avec le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ on a $I = J$ et puisque I est bien définie notre intégrale est bien définie. On a

$$\begin{aligned}I + J &= \int_0^{\pi/2}\log(\sin(u)\cos(u))du \\ &= \int_0^{\pi/2}\log\left(\frac{\sin(2u)}{2}\right)du \\ &= \int_0^{\pi/2}\log\left(\sin(2u)\right)du - \frac{\pi}{2}\log(2) \\ &= \frac{1}{2}(I+J) - \frac{\pi}{2}\log(2).\end{aligned}$$

Puisque $I = J$ on a

$$I = -\frac{\pi}{2}\log(2)$$

et donc

$$\int_0^\pi \log(\sin u)du = I + J = 2I = -\pi\log(2).$$

□

Lemme 2.8. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$, alors

$$I_\alpha(R) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|Re^{i\theta} - \alpha\right|d\theta = \begin{cases}\log|\alpha| \text{ si } R \in]0, |\alpha|] \\ \log R \text{ si } R > |\alpha|\end{cases},$$

Démonstration. Dans un premier temps remarquons qu'on peut supposer que $\alpha > 0$, en effet si $\alpha = |\alpha|e^{it} \in \mathbb{C}^*$ on a

$$\int_0^{2\pi} \log \left|Re^{i\theta} - \alpha\right| d\theta = \int_0^{2\pi} \log \left|Re^{i\theta - t} - |\alpha|\right| d\theta.$$

Maintenant distinguons plusieurs cas : Si $\alpha = R$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \left|Re^{i\theta} - \alpha\right| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \left|e^{i\theta} - 1\right| d\theta + \log(R)$$

Nous devons donc montrer que $\int_0^{2\pi} \log \left|e^{i\theta} - 1\right| d\theta = 0$, or en factorisant par l'angle moitié on a

$$\int_0^{2\pi} \log \left|e^{i\theta} - 1\right| d\theta = \int_0^{2\pi} \log \left|2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| d\theta.$$

On obtient par un changement de variable et par le fait que sinus est positif sur $[0, \pi]$

$$\int_0^{2\pi} \log \left|e^{i\theta} - 1\right| d\theta = 2\int_0^{2\pi} \log\left(2\sin(\theta)\right) d\theta,$$

or en utilisant le lemme 2.7, on a

$$\int_0^{2\pi} \log\left(2\sin(\theta)\right) d\theta = \pi\log(2) + \int_0^{pi} \log\left(\sin(\theta)\right) d\theta = 0,$$

ce qui termine ce cas.

Si $\alpha > R$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \left|Re^{i\theta} - \alpha\right| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \left|\frac{R}{\alpha}e^{i\theta} - 1\right| d\theta + \log(\alpha)$$

et si $\alpha < R$ on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \left|Re^{i\theta} - \alpha\right| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \left|1 - \frac{\alpha}{R}e^{-i\theta}\right| d\theta + \log(R).$$

Ainsi pour avoir le résultat il suffit de montrer que pour $0 < r < 1$

$$\int_0^{2\pi} \log \left|1 - re^{i\theta}\right| d\theta = 0,$$

ce qui équivaut à montrer que

$$\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{|1 - re^{i\theta}|} d\theta = 0$$

i.e.

$$\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{|1 - re^{i\theta}|^2} d\theta = 0.$$

Or pour $\theta \in [0, 2\pi[$ on a $\log \frac{1}{1-re^{i\theta}} = \log \frac{1}{1-re^{i\theta}} + \log \frac{1}{1-re^{-i\theta}}$, puisque

$$\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{1 - re^{i\theta}} d\theta = \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{1 - re^{-i\theta}} d\theta,$$

il suffit de montrer que $\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{1-re^{i\theta}} d\theta = 0$, or $z \mapsto \log \frac{1}{1-z}$ est holomorphe sur $\mathbb{D}$ et $\log \frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ pour $z \in \mathbb{D}$. Puisque cette série converge uniformément sur $\mathbb{D}$ on a

$$\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{1 - re^{i\theta}} d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta = 0$$

ce qui conclut la preuve.

□

Théorème 2.9. (Formule de Jensen) Soit f une fonction holomorphe au voisinage du disque fermé $\bar{D}(a,R)$. Notons $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ ses zéros dans ce disque et supposons que $f(a)\neq 0$. Alors,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left(\left|f\left(a+Re^{i\theta}\right)\right|\right)d\theta=\log(|f(a)|)+\sum_{j=1}^{p}\log\left(\frac{R}{|\alpha_j-a|}\right).$$

Démonstration. On peut supposer $a=0$. Posons $r_j=|\alpha_j|$. Puisque $R\geq|\alpha_j|$ (car les α_j sont les racines de f dans $\bar{D}(a,R)$) et que 0 n'est pas racine de f d'après le lemme 2.8 on a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\log\left|Re^{i\theta}-\alpha_j\right|d\theta=\log R. \tag{*}$$

La fonction $f/\prod_{1\leq j\leq p}(z-\alpha_j)$ étant holomorphe et sans zéros au voisinage de $\bar{D}(0,R)$, on peut donc l'écrire

$$f=e^g$$

avec g holomorphe au voisinage de $\bar{D}(0,R)$. On a en particulier

$$\log|f(z)|=\sum_{j=1}^{p}\log|z-\alpha_j|+\operatorname{Re}g(z),\quad \log|f(0)|=\sum_{j=1}^{p}\log r_j+\operatorname{Re}g(0) \tag{**}$$

de plus par $(*)$ on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left(\left|f\left(a+Re^{i\theta}\right)\right|\right)d\theta&=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\operatorname{Re}g\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)d\theta+\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\log\left|Re^{i\theta}-\alpha_j\right|d\theta.\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\operatorname{Re}g\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)d\theta+p\log R.\end{aligned}$$

Puisque $\operatorname{Re}(g)$ est harmonique (en tant que partie réelle d'une fonction holomorphe), par la propriété de la moyenne on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\operatorname{Re}g\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)d\theta=\operatorname{Re}(g(0))$$

D'où

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left(\left|f\left(a+Re^{i\theta}\right)\right|\right)d\theta=\operatorname{Re}(g(0))+p\log R$$

Finalement en utilisant $(**)$ on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left(\left|f\left(a+Re^{i\theta}\right)\right|\right)d\theta=\log|f(0)|+\sum_{j=1}^{p}\log\frac{R}{r_j}$$

ce qui prouve le résultat.

□

Corollaire 2.10. Si f est une fonction holomorphe sur le disque ouvert $D(0,R)$ avec $f(0)\neq 0$ alors $r\longmapsto\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|f\left(re^{it}\right)\right|dt$ est fonction croissante de r avec $0\leq r<R$.

En particulier $\log|f(0)|\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f\left(re^{it}\right)\right|dt$ pour $0\leq r<R$.

Démonstration. D'après la formule de Jensen (théorème 2.9,) pour $0\leq r<R$ on a :

$$\log|f(0)|+\sum_{n=1}^{N}\log\frac{r}{|\alpha_n|}=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta$$

avec $\log\frac{r}{|\alpha_n|}\geq 0$. Lorsque r augmente, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\log\frac{r}{|\alpha_n|}$ augmente aussi.

□

Corollaire 2.11. Si $f \in \mathcal{N}$, non identiquement nulle, a une suite infinie de zéros $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ répétés selon leur multiplicité, alors $\displaystyle\sum_{n\geq 1} 1 - |\alpha_n| < \infty$.

Démonstration. En remplaçant f par $g : z \longmapsto \frac{f(z)}{z^k}$ si 0 est un zéro de f de multiplicité k, on peut supposer que $f(0) \neq 0$ (ce qui permettra d'utiliser la formule de Jensen (théorème 2.9)). Pour cela il faut vérifier que $g \in \mathcal{N}$.

Par construction, nous avons $g \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$. Il reste à vérifier que

$$J := \sup_{0\leq r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left|g\left(re^{it}\right)\right| dt = \sup_{0\leq r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left|\frac{f\left(re^{it}\right)}{r^k e^{ikt}}\right| dt < \infty.$$

Pour $0 < \varepsilon < 1$ on a :

$$J = \max\left(\sup_{0\leq r\leq \varepsilon} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left|\frac{f\left(re^{it}\right)}{r^k e^{ikt}}\right| dt, \sup_{\varepsilon\leq r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left|\frac{f\left(re^{it}\right)}{r^k e^{ikt}}\right| dt\right).$$

Puisque $\log^+(ab) \leq \log^+ a + \log^+ b$ et comme $\frac{1}{r^k} \leq \frac{1}{\varepsilon^k}$ pour $r \geq \varepsilon$, on obtient :

$$\sup_{\varepsilon\leq r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left|\frac{f\left(re^{it}\right)}{r^k e^{ikt}}\right| dt \leq \sup_{\varepsilon\leq r<1} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \log \frac{1}{\varepsilon^k} dt + \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left|f\left(re^{it}\right)\right| dt\right) < \infty,$$

car $f \in \mathcal{N}$. La fonction $z \longmapsto \frac{f(z)}{z^k}$ continue sur le compact $\overline{D(0,\varepsilon)}$ est uniformément majorée par une constante M et de ce fait $\displaystyle\sup_{0\leq r\leq \varepsilon} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left|\frac{f\left(re^{it}\right)}{r^k e^{ikt}}\right| dt < \infty$. On a ainsi vérifié que $g \in \mathcal{N}$ et l'on peut donc supposer que $f(0) \neq 0$.

Soit $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ la suite (infinie) des zéros de f répétés selon leur multiplicité. Fixons $p \in \mathbb{N}^*$ et considérons $r \in]0,1[$ tel que $r \geq \max_{n\leq p} |\alpha_n|$. D'après la formule de Jensen (théorème 2.9), on a :

$$\begin{aligned}
\log|f(0)| + \sum_{n=1}^{p} \log \frac{r}{|\alpha_n|} &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{it}\right)\right| dt \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+\left|f\left(re^{it}\right)\right| dt \\
&< M_0 < \infty
\end{aligned}$$

car $f \in \mathcal{N}$. L'entier p étant fixé, on peut faire tendre r vers 1^-et on a :

$$\log|f(0)| + \sum_{n=1}^{p} \log \frac{1}{|\alpha_n|} \leq M_0$$

et donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} \log \frac{1}{|\alpha_n|} \leq M_0 - \log|f(0)|$ pour tout entier $p \geq 1$. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \log \frac{1}{|\alpha_n|}$ étant à termes positifs, elle est donc convergente, donc $\log \frac{1}{|\alpha_n|} \to 0$ ainsi $|\alpha_n| \to 1$, on a aussi $\frac{1}{|\alpha_n|} \to 1$ et donc $\log \frac{1}{|\alpha_n|} \sim \frac{1}{|\alpha_n|} - 1 \sim 1 - |\alpha_n|$ quand $n \to \infty$. Ainsi on en déduit que

$$\sum_{n\geq 1} 1 - |\alpha_n| < \infty.$$

□

Théorème 2.12. Soit $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une suite de complexes non nuls tels que $|\alpha_n| < 1, n \geq 1$ et telle que $\sum_{n\geq 1} 1 - |\alpha_n| < \infty$. Alors le produit infini

$$\prod_{n\geq 1} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n} z}$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$ vers une fonction $B \in H^\infty(\mathbb{D})$ dont les zéros sont exactement les nombres α_n répétés selon leur multiplicité.

Enfin $B^*\left(e^{it}\right) := \lim_{r\to 1^-} B\left(re^{it}\right)$ existe m-presque partout et est de module 1 m -presque partout avec

$$\lim_{r\to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} \log\left|B\left(re^{it}\right)\right| dt = 0$$

Démonstration. Posons $f_n(z) := \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha_n}z}$ et remarquons que

$$\begin{aligned} 1 - f_n(z) &= \frac{\alpha_n\left(1-\overline{\alpha_n}z\right)}{\alpha_n\left(1-\overline{\alpha_n}z\right)} - \frac{|\alpha_n|\left(\alpha_n - z\right)}{\alpha_n\left(1-\overline{\alpha_n}z\right)} \\ &= \frac{\alpha_n - |\alpha_n|^2 z - |\alpha_n|\,\alpha_n + |\alpha_n|\, z}{\alpha_n\left(1-\overline{\alpha_n}z\right)} \\ &= \frac{\left(1-|\alpha_n|\right)\left(\alpha_n + |\alpha_n|\, z\right)}{\alpha_n\left(1-\overline{\alpha_n}z\right)} \\ &= \frac{\left(1-|\alpha_n|\right)\left(1 + \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}z\right)}{\left(1-\overline{\alpha_n}z\right)}. \end{aligned}$$

On en déduit que pour $|z| \leq r < 1$

$$\begin{aligned} |1 - f_n(z)| &\leq \frac{2\left(1-|\alpha_n|\right)}{|1-\overline{\alpha_n}z|} \\ &\leq \frac{2\left(1-|\alpha_n|\right)}{1-|z|} \\ &\leq \frac{2\left(1-|\alpha_n|\right)}{1-r}. \end{aligned}$$

Ainsi $\sum_{n\geq 1} |1 - f_n(z)|$ converge uniformément sur $\overline{D(0,r)}$ pour $r < 1$ si $\sum_{n\geq 1} 1 - |\alpha_n| < \infty$ et donc $B(z) = \prod_{n\geq 1} f_n(z)$ définit bien une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ dont la suite des zéros est la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$.

De plus, pour $|z| = 1$, on a

$$|f_n(z)| = \left|\frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha_n}z}\right| = \frac{|\alpha_n - z|}{|\overline{z} - \overline{\alpha_n}|} = 1.$$

D'après le principe du maximum appliqué à la fonction $z \longmapsto f_n(z)$ holomorphe sur $\mathbb{D}$ et continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, on a

$$|f_n(z)| < 1$$

pour $z \in \mathbb{D}$. Ainsi

$$|B(z)| < 1$$

pour $z \in \mathbb{D}$ et donc $B \in H^\infty(\mathbb{D})$. D'après le lemme 2.5,

$$B^*\left(e^{it}\right) := \lim_{r\to 1^-} B\left(re^{it}\right) \text{ existe } m\text{-presque partout.}$$

Montrons à présent que $\lim_{r \to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| B\left(re^{it}\right)\right| dt = 0$. D'après le corollaire 2.10, $r \longmapsto \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| B\left(re^{it}\right)\right| dt$ est une fonction croissante de r avec $0 \leq r < 1$. Puisque

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log \left| B\left(re^{it}\right)\right| dt \leq 0,$$

$\ell := \lim_{r \to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| B\left(re^{it}\right)\right| dt$ existe et $\ell \leq 0$. Posons

$$R_p(z) = \prod_{n=p+1}^{\infty} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \frac{z-\alpha_n}{1-\overline{\alpha_n}z}$$

et

$$B_p(z) := \frac{B(z)}{R_p(z)} = \prod_{n=1}^{p} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \frac{z-\alpha_n}{1-\overline{\alpha_n}z}.$$

La fonction B_p est holomorphe sur $D\left(0, \frac{1}{r_p}\right)$ avec $r_p = \max_{n \leq p} |\alpha_n|$. Remarquons que $|B_p(z)| = 1$ si $|z| = 1$. On en déduit

$$\lim_{r \to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| B_p\left(re^{it}\right)\right| dt = 0$$

car la fonction $z \longmapsto \log |B_p(z)|$ est continue pour $r_p < |z| < \frac{1}{r_p}$ et nulle sur $\mathbb{T}$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}\lim_{r \to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| B\left(re^{it}\right)\right| dt &= \lim_{r \to 1^-} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \log \left| B_p\left(re^{it}\right)\right| dt + \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| R_p\left(re^{it}\right)\right| dt \right) \\ &= \lim_{r \to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| R_p\left(re^{it}\right)\right| dt\end{aligned}$$

pour tout $p \geq 1$. D'après le Corollaire 2.10,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log \left| R_p\left(re^{it}\right)\right| dt \geq 2\pi \log |R_p(0)|.$$

Ainsi pour $p \geq 1$, ℓ vérifie

$$\ell \geq 2\pi \log |R_p(0)| = 2\pi \log \left(\prod_{n \geq p+1} |\alpha_n| \right)$$

Puisque par hypothèse $\sum_{n \geq 1} (1 - |\alpha_n|) < \infty$, le produit infini $\prod_{n \geq 1} |\alpha_n|$ converge et donc on a $\lim_{p \to \infty} \prod_{n \geq p} |\alpha_n| = 1$. Finalement $\ell \geq 0$ et donc $\ell = 0$ car ℓ est négatif.

Il reste à vérifier que $\left| B^*\left(e^{it}\right)\right| = 1$ m-presque partout. D'après le lemme de Fatou, si $r_n \to 1^-$, on a :

$$\limsup_{n \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| B\left(r_n e^{it}\right)\right| dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} \limsup_{n \to +\infty} \log \left| B\left(r_n e^{it}\right)\right| dt$$

et donc

$$0 = \ell \leq \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| B^*\left(e^{it}\right)\right| dt.$$

D'autre part, puisque $\left| B^*\left(e^{it}\right)\right| \leq 1$ m-presque partout, on a $\log \left| B^*\left(e^{it}\right)\right| \leq 0$ m-presque partout. Finalement on en déduit que $\log \left| B^*\left(e^{it}\right)\right| = 0$ m-presque partout et donc $\left| B^*\left(e^{it}\right)\right| = 1$ m-presque partout.

□

Définition 2.13. On appelle *produit de Blaschke* un produit de la forme

$$B(z) = e^{i\lambda} z^k \prod_{n\geq 0} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n} z},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$, k entier naturel et $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ suite vide, finie ou infinie de points de $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ tels que $\sum_{n\geq 0} 1 - |\alpha_n| < \infty$ lorsque $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ est infinie. Par convention $\prod_{n\geq 0} \frac{|\alpha|}{\alpha} \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n} z} = 1$ si $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ est une suite vide. Si $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ est vide ou finie (resp. infinie) on dit que le produit de Blaschke est fini (resp. infini).

Remarque. les produits de Blaschke sont des fonctions de $H^\infty(\mathbb{D})$ tels que $B^*\left(e^{it}\right) := \lim_{r\to\infty} B\left(re^{it}\right)$ existe m-presque partout et est de module 1, d'après le théorème 2.12. De plus on a

$$\lim_{r\to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} \log\left|B\left(re^{it}\right)\right| dt = 0$$

2.4 Description complète des fonctions de $\mathcal{N}$

Théorème 2.14. Soit $f \in \mathcal{N}$ non identiquement nulle. Soit B le produit de Blaschke associé à la suite des zéros de f, i.e.

$$B(z) = z^k \prod_{n\geq 1} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n} z}$$

si 0 est un zéro d'ordre k de f et avec $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ suite des zéros non nuls de f répétés selon leur multiplicité. Alors $\frac{f}{B} \in \mathcal{N}$, $f^*\left(e^{it}\right) := \lim_{r\to 1^-} f\left(re^{it}\right)$ existe m-presque partout et $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$.

Enfin il existe une mesure ν_f réelle (finie) sur $\mathbb{T}$, $\nu_f \perp m$ et un réel λ tels que pour tout $z \in \mathbb{D}$ on ait :

$$f(z) = e^{i\lambda} B(z) e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log\left|f^*\left(e^{it}\right)\right| dt} \times e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\nu_f(t)}$$

Démonstration. Vérifions que $g := \frac{f}{B} \in \mathcal{N}$. Par construction, g est une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$ (qui ne s'annule pas). Il reste à montrer que $\sup_{0\leq r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left|\frac{f(re^{it})}{B(re^{it})}\right| dt < \infty$. Puisque $\log^+(ab) \leq \log^+(a) + \log^+(b)$ et $\left|B\left(re^{it}\right)\right| < 1$ si $r < 1$ on a :

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left|\frac{f\left(re^{it}\right)}{B\left(re^{it}\right)}\right| dt &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \log^+\left|f\left(re^{it}\right)\right| dt + \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left|\frac{1}{B\left(re^{it}\right)}\right| dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \log^+\left|f\left(re^{it}\right)\right| dt + \int_{-\pi}^{\pi} \log \left|\frac{1}{B\left(re^{it}\right)}\right| dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \log^+\left|f\left(re^{it}\right)\right| dt - \int_{-\pi}^{\pi} \log\left|B\left(re^{it}\right)\right| dt.
\end{aligned}$$

Or $\lim_{r\to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} \log\left|B\left(re^{it}\right)\right| dt = 0$ et $\sup_{0\leq r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+\left|f\left(re^{it}\right)\right| dt < \infty$ et $f \in \mathcal{N}$, on a donc $\sup_{0\leq r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left|\frac{f(re^{it})}{B(re^{it})}\right| dt$ ∞, ce qui prouve que $\frac{f}{B} \in \mathcal{N}$.

g est une fonction de $\mathcal{N}$ qui ne s'annule pas, d'après le théorème 2.12,

$$g^*\left(e^{it}\right) := \lim_{r\to 1^-} g\left(re^{it}\right) \text{ existe } m\text{-presque partout}$$

avec $\log|g^*| \in L^1(\mathbb{T})$. D'autre part, d'après la remarque qui suit la définition des produits de Blaschke,

$$B^*\left(e^{it}\right) := \lim_{r\to 1^-} B\left(re^{it}\right) \text{ existe } m\text{-presque partout et est de module1.}$$

Puisque $f = Bg$, on obtient

$$f^*\left(e^{it}\right) := \lim_{r \to 1^-} f\left(re^{it}\right) = B^*\left(e^{it}\right) g^*\left(e^{it}\right)$$

définie m-presque partout avec $|f^*| = |g^*| \in L^1(\mathbb{T})$. On conclut ainsi la preuve avec la fin du théorème 2.6.

□

3 Les espaces de Hardy

3.1 Rappels sur les fonctions sous harmoniques

Définition 3.1. Une fonction $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{D}$ est dite *sous-harmonique* si pour tout domaine (ouvert connexe) Ω de $\mathbb{D}$ dont la fermeture $\bar{\Omega}$ est inclus dans $\mathbb{D}$ et pour toute fonction U harmonique dans Ω et continue dans $\bar{\Omega}$ vérifiant $f(z) \leq U(z)$ sur la frontière Ω, on a $f(z) \leq U(z)$ pour tout $z \in \Omega$.

Théorème 3.2. Caractérisation des fonctions sous harmoniques à valeurs réelle Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{D}$. f est sous-harmonique si et seulement si pour tout $z_0 \in \mathbb{D}$ il existe $\rho_0 > 0$ tel que $D(z_0, \rho_0) \subset \mathbb{D}$ avec de plus

$$f(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + \rho e^{it}\right) dt \tag{3.1}$$

pour tout $\rho < \rho_0$.

Proposition 3.3. Soit f une fonction continue à valeurs réelles sous-harmonique sur $\mathbb{D}$, posons

$$m(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(re^{it}\right) dt \text{ pour } 0 \leq r < 1,$$

alors $r \longmapsto m(r)$ est une fonction croissante sur $[0, 1[$.

Démonstration. Soient $0 \leq r_1 < r_2 < 1$. Comme f continue sur $\mathbb{D}$, d'après le corollaire du théorème 1.5, il existe une unique fonction U harmonique sur $D(0, r_2)$, continue sur $\overline{D(0, r_2)}$ tel que U et f coïncident sur le cercle $\Gamma(0, r_2)$. Puisque f est sous-harmonique, on a $f(z) \leq U(z)$ pour tout $z \in \overline{D(0, r_2)}$. On a donc par la propriété de la moyenne

$$\begin{aligned} m(r_1) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U\left(r_1 e^{it}\right) dt \\ &= U(0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U\left(r_2 e^{it}\right) dt \\ &= m(r_2). \end{aligned}$$

□

Proposition 3.4.

1. Soit f holomorphe dans $\mathbb{D}$ et soit $p > 0$. Alors la fonction g définie par $g(z) = |f(z)|^p$ continue sur $\mathbb{D}$ à valeurs réelles est sous-harmonique.
2. Soit u une fonction harmonique dans $\mathbb{D}$ et soit $p \geq 1$. Alors la fonction g définie par $g(z) = |u(z)|^p$ continue sur $\mathbb{D}$ à valeurs réelles est sous-harmonique.
3. Soit f holomorphe dans $\mathbb{D}$ alors $\log^+ |f|$ est une fonction continue à valeurs réelles sous-harmonique sur $\mathbb{D}$.

3.2 Définition et premières propriétés des espaces de Hardy

Pour $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ on définit les quantités suivantes :

— $M_0(f, r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left|f\left(re^{it}\right)\right| dt$

— $M_p(f, r) := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\right|^p dt\right)^{1/p}$, si $0 < p < \infty$

— $M_\infty(f,r) := \sup\limits_{t\in[0,2\pi[} \left|f\left(re^{it}\right)\right|$.

Définition 3.5. Les *espaces de Hardy* $H^p(\mathbb{D}), 0 < p \leq \infty$, sont définis par

$$H^p(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) \mid \sup_{0\leq r<1} M_p(f,r) < \infty \right\}.$$

Proposition 3.6. Soit $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$. Les fonctions $r \longmapsto M_p(f,r)$ (pour $0 \leq p \leq \infty$) sont des fonctions croissantes sur $[0,1[$

Démonstration. Si $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ alors $|f|^p$ et $\log^+|f|$ sont des fonctions sous-harmoniques sur $\mathbb{D}$ pour $0 < p < \infty$ d'après la proposition 3.4. D'après la proposition 3.3, $r \longmapsto M_p(f,r)$ (pour $0 \leq p < \infty$) est une fonction croissante sur $[0,1[$. Le fait que $r \longmapsto M_\infty(f,r)$ est croissante sur $[0,1[$ est une conséquence du principe du maximum pour les fonctions holomorphes.

□

On peut alors redéfinir les espaces de Hardy ainsi que la classe de Nevanlinna de la manière suivante :

Corollaire 3.7. Pour $0 < p \leq \infty$ nous avons :

$$H^p(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) \mid \lim_{r\to 1^-} M_p(f,r) < \infty \right\}$$

et

$$\mathcal{N} = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) \mid \lim_{r\to 1^-} M_0(f,r) < \infty \right\}.$$

Si $f \in H^p(\mathbb{D})$ pour $0 < p \leq \infty$ nous noterons par $\|f\|_p$ la limite $\lim\limits_{r\to 1^-} M_p(f,r)$.

Théorème 3.8. On a

$$H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D}) \subset H^s(\mathbb{D}) \subset \mathcal{N}$$

pour $0 < s < p < \infty$.

Démonstration. Si $f \in H^\infty(\mathbb{D})$, pour tout $p \in]0,\infty[$ on a $\left|f\left(re^{it}\right)\right|^p \leq \|f\|_\infty^p$ pour $r \in [0,1[$ et $t \in [0,2\pi[$. On en déduit alors $M_p(f,r) \leq \|f\|_\infty$ pour $r \in [0,1[$, ce qui implique $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty$ et donc $H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D})$ pour tout $p > 0$.

Pour $p > s > 0$, d'après l'inégalité de Hölder, pour f mesurable sur le cercle centré en 0 de rayon $r \in]0,1[$, quelconque on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\right|^s dt \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\right|^p dt\right)^{s/p} (2\pi)^{1-s/p}$$

et donc $M_s(f,r) \leq M_p(f,r)$. Ainsi $H^p(\mathbb{D}) \subset H^s(\mathbb{D})$ pour $p > s > 0$.

Enfin, pour tout $s > 0$, puisque $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log x}{x^s} = 0$, il existe $A > 0$ tel que $\frac{\log x}{x^s} \leq A$ pour tout $x \geq 1$. Si f mesurable sur le cercle centré en 0 de rayon $r \in]0,1[$, on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log^+\left|f\left(re^{it}\right)\right| dt = \int_{t\in[-\pi,\pi]:|f(re^{it})|\geq 1} \log\left|f\left(re^{it}\right)\right| dt \leq A \int_{t\in[-\pi,\pi]:|f(re^{it})|\geq 1} \left|f\left(re^{it}\right)\right|^s dt.$$

On a donc $AM_s(f,r)^s \geq M_0(f,r)$, ce qui prouve que $H^s(\mathbb{D}) \subset \mathcal{N}$ pour $s > 0$.

□

Théorème 3.9. Si $1 \leq p \leq \infty$, l'espace de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$ est un espace de Banach.

Démonstration. Le résultat vient de l'innégalité de Minkowski et de la formule de Cauchy (voir [2] pour plus de détails).

□

Théorème 3.10. Soit $p \in]0, \infty]$ et soit f une fonction de $H^p(\mathbb{D})$ non identiquement nulle. Si B est le produit de Blaschke associé à $f (\in \mathcal{N})$ alors $\frac{f}{B} \in H^p(\mathbb{D})$ avec $\left\| \frac{f}{B} \right\|_p = \|f\|_p$.

Démonstration. Soit $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ la suite des zéros de f comptés avec multiplicité et soit B_n le produit de Blaschke fini associé aux n premiers zéros de f.

Nous avons vu que B_n est une fonction de $H^\infty(\mathbb{D})$ continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ avec $\left|B_n\left(e^{it}\right)\right| = 1$ pour $t \in \mathbb{R}$. Comme B_n est continue sur le compact $\overline{\mathbb{D}}$, B_n est uniformément continue sur $\overline{\mathbb{D}}$. Ainsi, si on choisit $\varepsilon \in]0, 1[$, il existe $\nu < 1$ tel que pour tous $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{D}}$ vérifiant $|z_1 - z_2| < \nu$ on ait

$$|B_n(z_1) - B_n(z_2)| < \varepsilon.$$

En particulier, pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $1 - \nu < r < 1$ on a

$$\left|B_n\left(re^{it}\right) - B_n\left(e^{it}\right)\right| < \varepsilon.$$

On a $\left|B_n\left(e^{it}\right)\right| = 1$, on obtient $1 - \varepsilon <\mid B_n\left(re^{it}\right) \mid< 1 + \varepsilon$ pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $1 - \nu < r < 1$. On en déduit :

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\left|f\left(re^{it}\right)\right| < \left|\frac{f\left(re^{it}\right)}{B_n\left(re^{it}\right)}\right| < \frac{1}{1-\varepsilon}\left|f\left(re^{it}\right)\right|$$

pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $1 - \nu < r < 1$. Si $p \in]0, \infty]$ et $f \in H^p(\mathbb{D})$ on a ainsi

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\|f\|_p < \left\|\frac{f}{B_n}\right\|_p < \frac{1}{1-\varepsilon}\|f\|_p$$

pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$. Ainsi en posant $g_n := \frac{f}{B_n}$ on a $\|g_n\|_p = \|f\|_p$ avec $p \in]0, \infty[$.

Posons $g = \frac{f}{B}$. Par construction $g \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$. De plus, pour $z \in \mathbb{D}$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(z) = g(z)$ et $(|g_n(z)|)_{n\geq 1}$ est une suite croissante (par décroissance de $(|B_n|)_{n\geq 1}$). Ainsi d'après le théorème de convergence monotone, pour $p \in]0, \infty[$ et pour $r \in [0, 1[$ fixé, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left|g_n\left(re^{it}\right)\right|^p dt = \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{n\to\infty} \left|g_n\left(re^{it}\right)\right|^p dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left|g\left(re^{it}\right)\right|^p dt$$

ce qui implique $M_p(g, r) = \lim\limits_{n\to\infty} M_p(g_n, r)$. Puisque $r \longmapsto M_p(g_n, r)$ est une fonction croissante (proposition 3.6) et que $\lim\limits_{r\to 1^-} M_p(g_n, r) = \|f\|_p$ (car $\left|B_n\left(e^{it}\right)\right| = 1$), on a

$$\lim_{n\to\infty} M_p(g_n, r) \leq \|f\|_p$$

pour tout $r \in [0, 1[$ et donc

$$\|g\|_p = \lim_{r\to 1^-} M_p(g, r) \leq \|f\|_p.$$

Par conséquent $g \in H^p(\mathbb{D})$ avec $\|g\|_p \leq \|f\|_p$.

D'autre part, puisque $|B(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, on en déduit que $|g(z)| > |f(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Ainsi on a

$$\|g\|_p \geq \|f\|_p.$$

Finalement, pour $p \in]0, \infty[$, nous avons $\|g\|_p = \|f\|_p$.

Enfin si $f \in H^\infty(\mathbb{D})$, puisque $\sup\limits_{z\in\mathbb{D}} |g_n(z)| = \|g_n\|_\infty = \|f\|_\infty$, on a $|g_n(z)| \leq \|f\|_\infty$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et pour tout entier $n \geq 1$. Pour $z \in \mathbb{D}$ nous avons $g(z) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(z)$, on a

$$\|g\|_\infty := \sup_{z\in\mathbb{D}} |g(z)| \leq \|f\|_\infty.$$

De plus, $|g(z)| > |f(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, on obtient

$$\|g\|_\infty \geq \|f\|_\infty,$$

et donc

$$\|g\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

□

Théorème 3.11. Soient $0 < p < \infty$, $f \in H^P(\mathbb{D})$, $f \neq 0$, et B le produit de Blaschke de f. Il existe une fonction sans zéros $h \in H^2(\mathbb{D})$ telle que

$$f = Bh^{\frac{2}{p}}.$$

En particulier, toute $f \in H^1$ est un produit

$$f = gh$$

où les deux facteurs appartiennent à $H^2(\mathbb{D})$.

Démonstration. D'après le théorème 3.10 la fonction $f/B \in H^p$, et $\|f/B\|_p = \|f\|_p$. Puisque f/B ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$, et puisque $\mathbb{D}$ est simplement connexe, il existe donc $\phi \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ telle que

$$e^\phi = f/B.$$

Posons $h := \exp\left(\frac{p\phi}{2}\right)$, ainsi $h \in Hol(\mathbb{D})$ et $|h|^2 = |f/B|^p$ de sorte à ce que $h \in H^2(\mathbb{D})$, et

$$f = B.h^{\frac{2}{p}}.$$

Ainsi $\|h\|_2^2 = \|f\|_p^p$.

Pour obtenir la seconde égalité on écrit $f = Bh^{\frac{2}{p}}$, $(p = 1)$ sous la forme $f = Bh \cdot h$, où $g := Bh$.

□

3.3 Fonctions intérieurs et extérieurs

3.3.1 Fonctions intérieurs

Définition 3.12. Une *fonction intérieure* est une fonction $U \in H^\infty(\mathbb{D})$ telle que $\left|U^*\left(e^{it}\right)\right| = 1$ m-presque partout (avec $U^*\left(e^{it}\right) = \lim\limits_{r \to 1^-} U\left(re^{it}\right)$).

Théorème 3.13. Soit $c \in \mathbb{C}$ tel que $|c| = 1$, soient B un produit de Blaschke, ν une mesure de Borel positive finie sur $\mathbb{T}$ telle que $\nu \perp m$. Pour $z \in \mathbb{D}$ on pose

$$U(z) := cB(z)e^{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)}$$

La fonction U est une fonction intérieure et toute fonction intérieure peut s'obtenir de cette façon.

Démonstration. Supposons que pour $z \in \mathbb{D}$

$$U(z) := cB(z)e^{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)}$$

Par construction $U \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$. Posons $g = \frac{U}{B}$. Remarquons que $\log|g|$ est l'intégrale de Poisson pour la mesure finie négative $-\nu$. Ainsi $\log|g|$ est une fonction harmonique négative sur $\mathbb{D}$, donc pour $z \in \mathbb{D}$

$$|g(z)| \leq 1.$$

Ainsi, g et donc U sont des fonctions de $H^\infty(\mathbb{D})$. De plus, $\nu \perp m$ et $\log|g| = -P(\nu)$, d'après le corollaire 1.15, on a

$$\lim_{r\to 1^-} \log\left|g\left(re^{it}\right)\right| = \log\left|g^*\left(e^{it}\right)\right| = 0 \ m\text{-presque partout.}$$

On a donc $\left|g^*\left(e^{it}\right)\right| = 1$ m-presque partout. D'après la remarque qui suit la définition des produits de Blaschke, $\left|B^*\left(e^{it}\right)\right| = 1$ m-presque partout, on a donc $\left|U^*\left(e^{it}\right)\right| = 1$ m presque partout et ainsi la fonction U est bien une fonction intérieure.

Réciproquement, soit U une fonction intérieure et soit B le produit de Blaschke associé à la suite de ses zéros comptés avec multiplicité. D'après le théorème 3.10 ,

$$g := \frac{U}{B} \in H^\infty(\mathbb{D}),\ \|g\|_\infty = \|U\|_\infty = 1$$

et par construction g ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$. Il existe $\ell \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ vérifiant $\log|g| = Re(\ell)$, ce qui implique que $\log|g|$ est une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$. D'autre part $\log|g|$ est négative puisque $\|g\|_\infty = 1$. On a que $\left|B^*\left(e^{it}\right)\right| = 1$ m-presque partout d'après la remarque qui suit la définition des produits de Blaschke (définition 2.13), on a $\left|U^*\left(e^{it}\right)\right| = 1$ m-presque partout ainsi $\left|g^*\left(e^{it}\right)\right| = 1$ m-presque partout et donc $\log\left|g^*\left(e^{it}\right)\right| = 0$ m-presque partout donc d'après le corollaire 1.15 il existe $\nu \geq 0, \nu$ finie sur $\mathbb{T}$ et $\nu \perp m$ telle que

$$-P(\nu) = \log|g|$$

Donc $\log|g|$ est la partie réelle de la fonction holomorphe

$$h(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)$$

car $-P(\nu)(re^{i\theta}) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d\nu(t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)d\nu(t)$. On a $g = e^\ell$ avec $\mathrm{Re}(\ell) = \mathrm{Re}\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)\right)$, donc

$$g(z) = ce^{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)}$$

avec $|c| = 1$ puisque $-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t) - \ell \in i\mathbb{R}$, ce qui conclut la démonstration.

$\square$

Définition 3.14. Les *fonctions intérieures singulières* sont les fonctions intérieures qui ne s'annulent pas sur $\mathbb{D}$, i.e. les fonctions de la forme

$$S_\nu(z) = ce^{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)}$$

où $|c| = 1$ et où ν est une mesure de Borel positive finie sur $\mathbb{T}$ telle que $\nu \perp m$.

3.3.2 Fonctions extérieurs

Définition 3.15. Une *fonction extérieure* est une fonction $Q \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ de la forme

$$Q(z) = ce^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\varphi\left(e^{it}\right)dt}$$

où $|c| = 1$ et où φ est une fonction positive mesurable telle que $\log\varphi \in L^1(\mathbb{T})$.

Proposition 3.16. Soit Q une fonction extérieure reliée à φ. Alors

1. $\log|Q|$ est l'intégrale de Poisson de la mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dont la dérivée de Radon-Nikodym est $\log\varphi$.
2. $\lim_{r\to 1^-}\left|Q\left(re^{it}\right)\right| = \varphi\left(e^{it}\right)$ m-presque partout.

3. Pour $p \in]0,\infty], Q \in H^p(\mathbb{D})$ si et seulement si $\varphi \in L^p(\mathbb{T})$. Dans ce cas $\|Q\|_p = \|\varphi\|_p$.

Démonstration.

1. Puisque
$$|Q(z)| = e^{\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\varphi\left(e^{it}\right)dt\right)} = e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)\log\varphi\left(e^{it}\right)}$$
avec $Re\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) = P_r(\theta-t)$ pour $z = re^{i\theta}$, on a $\log\left|Q\left(re^{i\theta}\right)\right| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)\log\varphi\left(e^{it}\right)dt$
2. D'après 1. et en appliquant le théorème 1.14, on obtient $\lim_{r\to1^-}\log\left|Q\left(re^{it}\right)\right| = \log\varphi\left(e^{it}\right)$ m-presque partout ce qui donne 2.
3. Si $p=\infty$, d'après 2. l'assertion 3. est clair.

   Supposons $p \in]0,\infty[$ et $Q \in H^p(\mathbb{D})$. Soit $(r_n)_{n\geq1}$ une suite croissante de réels de $]0,1[$ tendant vers 1 . D'après le lemme de Fatou appliqué à la suite de fonctions mesurables positives (sur $\mathbb{T}$) $(Q_n)_{n\geq1}$ définie par $Q_n\left(e^{it}\right) := \left|Q\left(r_ne^{it}\right)\right|^p$, on a :
$$\int_{-\pi}^{\pi}\liminf_{n\to\infty}Q_n\left(e^{it}\right)dt \leq \liminf_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}Q_n\left(e^{it}\right)dt$$
   ce qui implique (d'après la proposition 3.6) $\|Q^*\|_p \leq \|Q\|_p$. D'après 2., on a donc
$$\|\varphi\|_p \leq \|Q\|_p. \tag{*}$$
   Par conséquent, si $Q \in H^p(\mathbb{D})$ alors $\varphi \in L^p(\mathbb{T})$.

   Réciproquement, supposons que $\varphi \in L^p(\mathbb{T})$. On a
$$\left|Q\left(re^{i\theta}\right)\right|^p = e^{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)\log\varphi^p\left(e^{it}\right)dt$$
   D'après l'inégalité de Jensen, appliqué à la fonction convexe $x \longmapsto e^x$ et à la mesure positive μ définie par $d\mu(t) = \frac{1}{2\pi}P_r(\theta-t)dt$, on obtient :
$$e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)\log\varphi^p\left(e^{it}\right)dt} \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)\varphi^p\left(e^{it}\right)dt.$$
   Donc
$$\left|Q\left(re^{i\theta}\right)\right|^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)\varphi^p\left(e^{it}\right)dt$$
   En intégrant cette inégalité par rapport à la variable θ, sachant que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)d\theta = 1$, on obtient $M_p(Q,r) \leq \|\varphi\|_p$, et donc
$$\lim_{r\to1^-}M_p(Q,r) = \|Q\|_p \leq \|\varphi\|_p \tag{**}$$
   Il vient de (*) et (**) que si $Q \in H^p(\mathbb{D})$ alors $\|Q\|_p = \|\varphi\|_p$.

□

3.4 Facteurs extérieures des fonctions de $H^p(\mathbb{D})$

Proposition 3.17. Soit $p \in]0,\infty]$. Supposons que $f \in H^p(\mathbb{D})$ non identiquement nulle. Alors la limite radiale de f, notée f^*, est telle que $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$ et $f^* \in L^p(\mathbb{T})$.

Démonstration. Si $f \in H^p(\mathbb{D})$ alors $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$. En effet, d'après le théorème 3.8, $H^p(\mathbb{D}) \subset \mathcal{N}$ et d'après le théorème 2.14, si $f \in \mathcal{N}$ alors $f^*\left(e^{it}\right)$ est définie m-presque partout avec $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$.

De plus, pour $p \in]0, \infty[$, d'après le lemme de Fatou,

$$\int_0^{2\pi} \liminf_{r\to 1^-} \left|f\left(re^{it}\right)\right|^p dt \leq \liminf_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\right|^p dt$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f^*\left(e^{it}\right)\right|^p dt \leq \lim_{r\to 1^-} M_p(f,r)^p = \|f\|_p^p$$

ainsi $f^* \in L^p(\mathbb{T})$ pour $p \in]0, \infty[$.

Pour $p = \infty$, puisque $|f(z)| \leq \|f\|_\infty$ pour $z \in \mathbb{D}$, donc $\left|f^*\left(e^{it}\right)\right| \leq \|f\|_\infty$ m-presque partout. Ainsi, si $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ on a donc $f^* \in L^\infty(\mathbb{T})$.

□

Corollaire 3.18. Soit $p \in]0, \infty]$. Supposons que $f \in H^p(\mathbb{D})$, f non identiquement nulle. Dans ce cas, la fonction extérieure Q_f définie par

$$Q_f(z) = e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\left|f^*\left(e^{it}\right)\right|dt}$$

appartient à $H^p(\mathbb{D})$. Q_f est appelé *facteur extérieur* de f.

Démonstration. Soit $p \in]0, \infty]$. Supposons que $f \in H^p(\mathbb{D}), f$ non identiquement nulle. D'après la proposition 3.17, $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$. Ainsi Q_f est bien définie comme une fonction extérieure. De plus, toujours d'après la proposition 3.17 , $f \in H^p(\mathbb{D})$ implique $f^* \in L^p(\mathbb{T})$, et le troisième point de la proposition 3.16 permet de conclure que $Q_f \in H^p(\mathbb{D})$.

□

Remarque. Q_f ne dépend que de f^*, c'est à dire des limites radiales de f sur $\mathbb{T}$.

3.5 L'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$

Nous allons résumé en un théorème les résultats fondamentaux de l'espace $H^2(\mathbb{D})$.

Théorème 3.19.

1. Une fonction $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ de la forme $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ appartient à $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si $\sum\limits_{n\geq 0} |a_n|^2 < \infty$. Dans ce cas $\|f\|_2 = \left(\sum\limits_{n\geq 0}|a_n|^2\right)^{1/2}$.
2. Si $f \in H^2(\mathbb{D})$, $f^* \in L^2(\mathbb{T})$ et le n-ème coefficient de Fourier de f^* est a_n si $n \geq 0$ et 0 si $n < 0$. De plus
$$\lim_{s\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f^*\left(e^{it}\right) - f\left(se^{it}\right)\right|^2 dt = 0$$
et f est l'intégrale de Poisson ainsi que l'intégrale de Cauchy de f^*, i.e. pour tout $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, on a :
$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f^*\left(e^{it}\right) dt = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{f^*(\xi)}{\xi - z} d\xi$$
3. L'application
$$\begin{array}{ccc} H^2(\mathbb{D}) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{T}) \\ f & \longmapsto & f^* \end{array}$$
est un isomorphisme isométrique où $H^2(\mathbb{T}) := \left\{g \in L^2(\mathbb{T}) \mid \hat{g}(n) = 0, n < 0\right\}$.

4. $H^2(\mathbb{D})$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle_{H^2(\mathbb{D})} = \langle f^*, g^*\rangle_{L^2(\mathbb{T})} := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*\left(e^{it}\right)\overline{g^*\left(e^{it}\right)}dt$$

est un espace de Hilbert.

Démonstration.

1. Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ pour $z \in \mathbb{D}$ donc pour $r \in [0,1[$ et $t \in \mathbb{R}$, $f\left(re^{it}\right) = \sum_{n\geq 0} a_n r^n e^{int}$. Ainsi d'après le théorème de Parseval, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{it}\right)\right|^2 dt = \sum_{n\geq 0}|a_n|^2 r^{2n}.$$

Par convergence monotone, on a :

$$\lim_{r\to 1^-}\sum_{n\geq 0}|a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n\geq 0}|a_n|^2.$$

Puisque $\|f\|_2^2 = \lim\limits_{r\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{it}\right)\right|^2 dt$, on obtient que f appartient à $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si $\sum_{n\geq 0}|a_n|^2 < \infty$ et $\|f\|_2 = \left(\sum_{n\geq 0}|a_n|^2\right)^{1/2}$.

2. Soit $f \in H^2(\mathbb{D})$ d'après la proposition 3.17, $f^* \in L^2(\mathbb{T})$. Soit $0 < s < 1$ on définit les fonctions

$$\begin{array}{rcl} f_s : \mathbb{T} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ e^{it} & \longmapsto & f\left(se^{it}\right) = \sum_{n\geq 0} a_n s^n e^{int} \end{array}.$$

Puisque $\sum_{n\geq 0}|a_n|^2 < \infty$, il existe une fonction $g \in L^2(\mathbb{T})$ telle que $\hat{g}(n) = a_n$ si $n \geq 0$ et 0 si $n < 0$. Les coefficients de Fourier de $g - f_s$ valent $(1 - s^n)\, a_n$ si $n \geq 0$ et 0 si $n < 0$. L'égalité de Parseval donne alors

$$\|g - f_s\|_2^2 = \sum_{n\geq 0}(1 - s^n)^2|a_n|^2.$$

Par convergence monotone décroissante,

$$\lim_{s\to 1^-}\sum_{n\geq 0}(1 - s^n)^2|a_n|^2 = 0.$$

On a donc $\lim\limits_{s\to 1^-}\|g - f_s\|_2 = 0$. Pour $0 < s < 1$, la fonction f_s définie par $f_s(z) = f(sz)$ est holomorphe dans $D\left(0, \frac{1}{s}\right) \subset \mathbb{D}$. On a donc, pour $z \in \mathbb{D}$,

$$f_s(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{f_s(\xi)}{\xi - z}d\xi.$$

La fonction f_s est harmonique sur $D\left(0, \frac{1}{s}\right)$ (car holomorphe), d'après le théorème 1.5, on a, pour $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$,

$$f_s(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(\theta - t)f_s\left(e^{it}\right)dt.$$

En utilisant l'inégalité de Schwarz et le fait que $P_r(\theta - t) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) \leq \left|\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right| \leq \frac{1+r}{1-r}$, on a

$$\begin{aligned}\left|f_s\left(re^{i\theta}\right) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(\theta - t)g\left(e^{it}\right)dt\right| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(\theta - t)\left(f_s\left(e^{it}\right) - g\left(e^{it}\right)\right)dt\right| \\ &\leq \frac{1+r}{1-r}\|f_s - g\|_2,\end{aligned}$$

et

$$\left| f_s\left(re^{i\theta}\right) - \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{g(\xi)}{\xi - re^{i\theta}} d\xi \right| = \left| \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{f_s(\xi) - g(\xi)}{\xi - re^{i\theta}} d\xi \right| \leq \frac{1}{1-r}\left\|f_s - g\right\|_2$$

Puisque $\lim_{s\to 1^-} \|g - f_s\|_2 = 0$, on a donc d'une part

$$\begin{aligned} f\left(re^{i\theta}\right) &= \lim_{s\to 1^-} f_s\left(re^{i\theta}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) g\left(e^{it}\right) dt. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} f\left(re^{i\theta}\right) &= \lim_{s\to 1^-} f_s\left(re^{i\theta}\right) \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{g(\xi)}{\xi - re^{i\theta}} d\xi. \end{aligned}$$

En particulier, f est la fonction harmonique définie comme l'intégrale de Poisson de la mesure $\mu \ll m$ (m est la mesure de Lebesgue) définie par $d\mu(t) = g\left(e^{it}\right) dt$ avec $g \in L^1(\mathbb{T})$ puisque $g \in L^2(\mathbb{T})$. On a

$$\begin{aligned} f^*\left(e^{it}\right) &= \lim_{r\to 1^-} f\left(re^{i\theta}\right) \\ &= \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) g\left(e^{it}\right) dt \end{aligned}$$

donc d'après le théorème 1.14 on a

$$f^*\left(e^{it}\right) = g\left(e^{it}\right) m\text{-presque partout.}$$

On en déduit que $f^* \in L^2(\mathbb{T})$ et que $\widehat{f^*}(n) = a_n$ si $n \geq 0$ et que $\widehat{f*}(n) = 0$ si $n < 0$. Enfin on a :

$$f\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f^*\left(e^{it}\right) dt = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{f^*(\xi)}{\xi - re^{i\theta}} d\xi$$

3. Puisque $\lim\limits_{s\to 1^-} \|f^* - f_s\|_2 = 0$, on a

$$\|f\|_2 := \lim_{s\to 1^-} \|f_s\|_2 = \|f^*\|_2 .$$

On a $\widehat{f}(n) = 0$ pour tout $n < 0$, donc l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & H^2(\mathbb{D}) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{T}) \\ & f & \longmapsto & f^* \end{array}$$

est bien définie et est une isométrie.

Par définition l'application Φ est linéaire. Etant isométrique, elle est automatiquement injective.

Enfin pour la surjectivité, si $g \in H^2(\mathbb{T})$, g est de la forme $g\left(e^{it}\right) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n e^{int}$ avec $\|g\|_2^2 = \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 < \infty$. Alors la fonction f définie sur $\mathbb{D}$ par $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ appartient à $H^2(\mathbb{D})$ d'après 1. l'application Φ est donc surjective. Ainsi Φ est bien un isomorphisme isométrique.

4. Par définition,

$$\langle f, f\rangle_{H^2(\mathbb{D})} = \|f^*\|_2^2 .$$

Or $\|f^*\|_2 = \|f\|_2$, la norme sur $H^2(\mathbb{D})$ s'obtient du produit scalaire que nous avons défini. De plus $H^2(\mathbb{D})$ est complet d'après le théorème 3.9, ainsi $H^2(\mathbb{D})$ est bien un espace de Hilbert.

□

Corollaire 3.20. Si $f \in H^1(\mathbb{D})$ alors

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f^*\left(e^{it}\right) - f\left(re^{it}\right)\right| dt = 0.$$

Démonstration. Soit B le produit de Blaschke associé à la suite des zéros de f dans $\mathbb{D}$. D'après le théorème 3.10,

$$g := \frac{f}{B} \in H^1(\mathbb{D}) \text{ avec } \|g\|_1 = \|f\|_1.$$

Par construction g ne s'annule par sur $\mathbb{D}$, donc il existe une détermination holomorphe du logarithme de g. On peut ainsi définir la fonction holomorphe $h = g^{1/2}$ sur $\mathbb{D}$. On a $h^2 = g$ et donc

$$f = Bg = (Bh)h \text{ avec } \|h\|_2^2 = \|g\|_1 = \|f\|_1.$$

Par conséquent on a réussi à écrire f comme le produit de deux fonctions de $H^2(\mathbb{D})$, h et $\ell := Bh$:

$$f = \ell h$$

nous allons ainsi pouvoir appliquer ce qu'on établi dans le théorème précédent. Pour $r \in]0, 1[$, on définit les fonctions sur $\mathbb{T}$

$$\begin{cases} f_r\left(e^{it}\right) := f\left(re^{it}\right) \\ \ell_r\left(e^{it}\right) := \ell\left(re^{it}\right) \\ h_r\left(e^{it}\right) := h\left(re^{it}\right). \end{cases}$$

De sorte à ce que $f_r = \ell_r h_r$. Puisque $f^* = \ell^* h^*$, on a :

$$f^* - f_r = \ell^*\left(h^* - h_r\right) + h_r\left(\ell^* - \ell_r\right) \tag{*}$$

$\ell, h \in H^2(\mathbb{D})$ d'après le théorème 3.19, on a

$$\lim_{r\to 1^-} \|h^* - h_r\|_2 = 0, \ \lim_{r\to 1^-} \|\ell^* - \ell_r\|_2 = 0$$

et

$$\|\ell^*\|_2^2 = \|\ell\|_2^2 = \|f\|_1, \ \|h_r\|_2^2 \leq \|h\|_2^2 = \|f\|_1.$$

L'inégalité de Schwarz appliquée aux deux produit du membre de droite de $(*)$ nous donne :

$$\|f^* - f_r\|_1 \leq \|f\|_1^{1/2}\left(\|h^* - h_r\|_2 + \|\ell^* - \ell_r\|_2\right).$$

D'où $\lim_{r\to 1^-} \|f^* - f_r\|_1 = 0$.

□

Lemme 3.21. Pour tout $f \in H^2(\mathbb{D})$, on a

$$|f(z)| \leq \frac{\|f\|_2}{\sqrt{1 - |z|^2}},$$

pour tout $z \in \mathbb{D}$.

Démonstration. Soit $f \in H^2(\mathbb{D})$ d'après le théorème 3.19 on peut écrire

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à cette f nous obtenons pour $z \in U$,

$$|f(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)||z|^n \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |z|^{2n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

en utilisant la définition de la norme dans H^2 et en sommant la série géométrique à droite nous obtenons le résultat.

$\square$

Corollaire 3.22. La convergence en norme sur $H^2(\mathbb{D})$ implique la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{D}$.

Démonstration. Soit (f_n) une suite d'éléments de $H^2(\mathbb{D})$ convergeant en norme vers une $f \in H^2(\mathbb{D})$, i.e.

$$\|f_n - f\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour $0 < R < 1$, le lemme 3.21 donne pour $n \in \mathbb{N}$ fixé

$$\sup_{|z|<R} |f_n(z) - f(z)| \leq \frac{\|f_n - f\|_2}{\sqrt{1-R^2}},$$

et donc (f_n) converge vers f uniformément sur le disque fermé $\bar{D}(0,R)$. Puisque R est arbitraire (f_n) converge uniformément f sur tout compact de $\mathbb{D}$.

$\square$

3.6 Théorème de factorisation des fonctions de $H^p(\mathbb{D})$

Lemme 3.23. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $f \in \mathcal{H}ol(\Omega)$ ne s'annulant pas sur Ω alors $\log|f|$ est harmonique.

Démonstration. Le résultat se démontre en posant $f := u + iv$ et en calculant le laplacien de $\log|f|$.

$\square$

Théorème 3.24. Soit $p \in]0,\infty]$ et soit $f \in H^p(\mathbb{D})$. Alors il existe une fonction intérieure U_f telle que $f = U_f Q_f$ où Q_f est le facteur extérieur de f, i.e. la fonction de $H^p(\mathbb{D})$ définie par :

$$Q_f(z) = e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log\left|f^*\left(e^{it}\right)\right| dt}$$

De plus

$$\log|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f^*\left(e^{it}\right)\right| dt \tag{3.2}$$

avec égalité dans (3.2) si et seulement si U_f est constante, autrement dit, si et seulement si f est extérieure.

Démonstration. Nous allons commencer par traité le cas où p=1. Supposons alors que $f \in H^1(\mathbb{D})$. Soit B est le produit de Blaschke associé aux zéros de f. D'après le théorème 3.10, $g := \frac{f}{B} \in H^1(\mathbb{D})$ avec $\|g\|_1 = \|f\|_1$ et $|f^*| = |g^*|$. Quitte à remplacer g par f, on peut supposer dans la suite que f ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$. Nous avons vu dans le corollaire 3.18 que $Q_f \in H^1(\mathbb{D})$. La seconde assertion de la proposition 3.16 donne

$$\left|Q_f^*\left(e^{it}\right)\right| = \left|f^*\left(e^{it}\right)\right| \neq 0 \ m\text{-presque partout},$$

donc
$$\left|\frac{f^*}{Q_f^*}\right| = 1 \ m\text{-presque partout.}$$
Et si nous montrons que $|f(z)| \leq |Q_f(z)|$ pour $z \in \mathbb{D}$ on aura
$$\left|\frac{f}{Q_f}\right| \leq 1$$
nous aurons alors montré que $\frac{f}{Q_f}$ est une fonction intérieure, ce qui prouvera qu'il existe une fonction intérieure telle que $f = U_f Q_f$.

Montrons que $|f(z)| \leq |Q_f(z)|$ pour $z \in \mathbb{D}$. Dans un premier temps remarquons que $|Q_f|$ est égal à $e^{P(\log|f^*|)}$ où $P(\log|f^*|)$ est l'intégrale de Poisson de $\log|f^*|$ définie par
$$P(\log|f^*|)\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\log\left|f^*\left(e^{it}\right)\right| dt.$$
Pour $r \in [0,1[$, $\theta \in \mathbb{R}$) et $z \in \mathbb{D}$, on a,
$$|f(z)| \leq |Q_f(z)| \ \text{ si et seulement si } \ \log|f(z)| \leq P(\log|f^*|)(z),$$
ainsi montrons que $\log|f(z)| \leq P(\log|f^*|)(z)$ pour $z \in \mathbb{D}$. Pour $|z| \leq 1$ et $0 < R < 1$ on définit la fonction f_R par $f_R(z) := f(Rz)$. f_R est holomorphe dans $D\left(0, \frac{1}{R}\right)$ et f_R ne s'annule pas. D'après le lemme 3.23 $\log|f_R|$ est harmonique dans $D\left(0, \frac{1}{R}\right)$. D'après le théorème 1.5, pour $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, on a
$$\log|f_R(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f_R\left(e^{it}\right)\right| P_r(\theta - t)dt.$$
Puisque $\log = \log^+ - \log^-$, on a donc :
$$\log|f_R(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f_R\left(e^{it}\right)\right| P_r(\theta - t)dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^-\left|f_R\left(e^{it}\right)\right| P_r(\theta - t)dt$$
D'une part, notons que pour $u, v > 0$, on a $\left|\log^+ u - \log^+ v\right| \leq |u - v|$. Par conséquent on obtient :
$$\begin{aligned}\left|P\left(\log^+|f_R|\right)\left(re^{i\theta}\right) - P\left(\log^+|f^*|\right)\left(re^{i\theta}\right)\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\left|\left|f_R\left(e^{it}\right)\right| - \left|f^*\left(e^{it}\right)\right|\right| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\left|f_R\left(e^{it}\right) - f^*\left(e^{it}\right)\right| dt \\ &\leq \frac{1+r}{1-r}\left\|f_R - f^*\right\|_1.\end{aligned}$$
D'après le corollaire 3.20, $\lim\limits_{R\to 1^-} \|f_R - f^*\|_1 = 0$. Ainsi,
$$\lim_{R\to 1^-} P\left(\log^+|f_R|\right)\left(re^{i\theta}\right) = P\left(\log^+|f^*|\right)\left(re^{i\theta}\right). \tag{*}$$
D'autre part on a
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\log^-\left|f^*\left(e^{it}\right)\right| dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \liminf_{R\to 1^-} \log^-\left|f_R\left(e^{it}\right)\right| dt$$
ainsi d'après le lemme de Fatou
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\log^-\left|f^*\left(e^{it}\right)\right| dt \leq \liminf_{R\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\log^-\left|f_R\left(e^{it}\right)\right| dt$$
c'est à dire
$$P\left(\log^-|f^*|\right)\left(re^{i\theta}\right) \leq \liminf_{R\to 1^-} P\left(\log^-|f_R|\right)\left(re^{i\theta}\right). \tag{**}$$

De plus
$$\lim_{R\to 1^-} P\left(\log|f_R|\right)\left(re^{i\theta}\right) = \lim_{R\to 1^-} \log\left|f_R\left(re^{i\theta}\right)\right| = \log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|. \qquad (***)$$
Or
$$\liminf_{R\to 1^-} P\left(\log|f_R|\right)\left(re^{i\theta}\right) = \liminf_{R\to 1^-} P\left(\log^+|f_R|\right)\left(re^{i\theta}\right) - \liminf_{R\to 1^-} P\left(\log^-|f_R|\right)\left(re^{i\theta}\right)$$
Enfin en utilisant $(*)$, $(**)$, $(***)$ on obtient :
$$\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq P\left(\log^+|f^*|\right)\left(re^{i\theta}\right) - P\left(\log^-|f^*|\right)\left(re^{i\theta}\right) = P\left(\log|f^*|\right)\left(re^{i\theta}\right),$$
qui est l'inégalité voulu, ce qui permet de conclure que $U_f := \frac{f}{Q_f}$ est bien une fonction intérieure si $f \in H^1(\mathbb{D})$.

Puisque $|f(z)| \leq |Q_f(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, en particulier, pour $z = 0$, on obtient l'inégalité (3.2). Remarquons que si $f(0) = 0$, (3.2) est clairement vérifiée.

Supposons qu'on a l'égalité dans (3.2) alors $|f(0)| = |Q_f(0)|$, or $f(0) = U_f(0)Q_f(0)$, on a donc $U_f(0) = 1$ avec $\|U_f\|_\infty = 1$. D'après le principe du maximum, on a nécessairement $U_f = c$ avec $|c| = 1$, donc f est extérieur. La réciproque est immédiate. Ceci termine la démonstration dans le cas où $p = 1$.

Si $p \in]1, \infty]$ il n'y a rien à faire puisque $H^p(\mathbb{D}) \subset H^1(\mathbb{D})$ d'après le théorème 3.8.

Il reste à traiter le cas où $p \in]0, 1[$. Prenons $f \in H^p(\mathbb{D})$, soit B le produit de Blaschke associé aux zéros de f. D'après le théorème 3.11 on a qu'il existe $h \in H^2(\mathbb{D})$ telle que
$$f = Bh^{\frac{2}{p}}$$
D'après ce qui précède, on peut écrire $h = U_h Q_h$ avec U_h fonction intérieure sans zéro dans $\mathbb{D}$ et Q_h extérieure. Or
$$Q_h^{2/p}(z) = e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\frac{2}{p}\log\left|h^*\left(e^{it}\right)\right|dt} = e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\left|h^*\left(e^{it}\right)^{2/p}\right|dt}$$
avec $\left|h^*\left(e^{it}\right)^{2/p}\right| = \left|f^*\left(e^{it}\right)\right|$ m-presque partout, $Q_h^{2/p}$ est le facteur extérieur de f. De plus il est clair que $U_f^{2/p}$ est bien une fonction intérieure (singulière). Ainsi, si $f \in H^p(\mathbb{D})$ f se décompose comme le produit d'une fonction intérieure et d'une fonction extérieure.

L'inégalité (3.2) est conséquence de la factorisation que nous venons d'établir. Le cas d'égalité s'obtient de manière analogue à ce qu'il précède.

$\square$

Définition 3.25. Les fonctions Q_f et U_f sont respectivement appelées *facteur extérieure* et *facteur intérieure* de f.

Remarque. Le facteur U_f tient compte des zéros de f dans $\mathbb{D}$ et du comportement de f^* sur $\mathbb{T}$ tandis que le facteur Q_f ne dépend que des valeurs de $|f^*|$ sur $\mathbb{T}$.

4 Le théorème de Müntz-Szasz

Dans toutes cette partie $I = [0,1]$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ nous noterons (grossièrement) t^λ l'application $t \in I \mapsto t^\lambda$.

D'après le théorème de Weierstrass

$$\text{vect}\left\{1, t, t^2, t^3, \dots\right\}$$

est dense dans $C(I)$. Cela emmène à se poser la question, pour quels $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ réels, l'ensemble

$$\text{vect}\left\{1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, t^{\lambda_3}, \dots\right\}$$

est dense dans $C(I)$? Le théorème suivant apporte une réponse à cette question.

Théorème 4.1. (Müntz-Szasz) Soient $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ et posons

$$X := \overline{\text{vect}_{C(I)}}\left\{1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, t^{\lambda_3}, \dots\right\}.$$

1. Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$, on a $X = C(I)$.
2. Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$, alors $X \neq C(I)$ (X ne contient pas la fonction t^λ où $\lambda \neq \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$).

Avant de voir la preuve de ce théorème, énonçons un lemme.

Lemme 4.2. Soient $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \cdots$ des réels. Si $\Sigma \frac{1}{\lambda_n} = \infty$ et si μ est une mesure de Borel complexe sur I telle que

$$\int_I t^{\lambda_n} d\mu(t) = 0, \ n \in \mathbb{N}^*$$

alors

$$\int_I t^k d\mu(t) = 0, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Démonstration. Par hypothèse remarquons que la nullité en 0 des fonctions à intégrer dans nos deux intégrales nous permet de supposer que μ est portée par $]0,1]$.

Commençons par poser pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} z \geq 0$

$$f(z) = \int_I t^z d\mu(t).$$

Par définition de f et par hypothèse on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$f(\lambda_n) = 0.$$

De plus, f est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 0\}$, en effet :

— Pour tout $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 0\}$, $t \mapsto t^z$ est mesurable.

— Pour tout $t \in]0,1]$ (car μ porté par $]0,1]$) on a pour tout $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 0\}$,

$$|t^z| = \left|e^{\operatorname{Re}(z)\log(t)}\right| \leq 1$$

car $\operatorname{Re} z \geq 0$ et $\log t \leq 0$.

Ainsi par théorème d'holomorphie sous le signe intégrale f est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 0\}$.

Définissons pour $z \in \mathbb{D}$

$$g(z) = f\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

La fonction $g \in H^\infty(\mathbb{D})$ et

$$g(\alpha_n) = 0,$$

où $\alpha_n = \frac{\lambda_n - 1}{\lambda_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Nous allons à présent montrer que $g = 0$ ce qui à fortiori montrera que $f = 0$ et ainsi le lemme sera démontré. Pour cela montrons que $\sum_{n\geq 1} 1 - |\alpha_n| = \infty$. Rappelons nous que $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est une suite strictement croissante. Pour montrer ce résultat distinguons deux cas :

— Supposons qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $\lambda_n \geq 1$. A partir de ce rang N on a

$$1 - |\alpha_n| = \frac{\lambda_n + 1 - \lambda_n - 1}{\lambda_n + 1} = \frac{2}{\lambda_n + 1}.$$

Or toujours à partir de ce rang N on a $\lambda_n + 1 \leq 2\lambda_n$, donc $\frac{1}{\lambda_n+1} \geq \frac{1}{2\lambda_n}$, i.e.

$$\frac{2}{\lambda_n + 1} \geq \frac{1}{\lambda_n}.$$

Or $\sum_{n\geq N} \frac{1}{\lambda_n}$ diverge (car $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda_n}$), donc $\sum_{n\geq N} 1 - |\alpha_n|$ diverge ainsi

$$\sum_{n\geq 1} 1 - |\alpha_n| = \infty.$$

— Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $\lambda_n < 1$. On a

$$1 - |\alpha_n| = \frac{\lambda_n + 1 - 1 + \lambda_n}{\lambda_n + 1} = \frac{2\lambda_n}{\lambda_n + 1}.$$

Or $2 > \lambda_n + 1$, donc $\frac{1}{\lambda_n} > \frac{\lambda_n+1}{2\lambda_n}$ et donc

$$\lambda_n < \frac{2\lambda_n}{\lambda_n + 1} = 1 - |\alpha_n|.$$

Or, $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est croissante majorée et strictement positive donc converge vers une limite non nulle, donc $\sum_{n\geq 1} \lambda_n = \infty$ ainsi,

$$\sum_{n\geq 1} 1 - |\alpha_n| = \infty.$$

Finalement la contraposé du corollaire 2.11 et la théorème 3.8 donnent que $g = 0$, donc $f = 0$ et ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$f(k) = 0$$

ce qui conclut la preuve de ce lemme.

$\square$

Démonstration. Remarquons que d'après le théorème 7.2 de l'annexe, une fonction $\varphi \in C(I)$ n'appartient pas à X si et seulement s'il existe une forme linéaire continue sur $C(I)$, ne s'annulant pas en φ, mais nulle sur tout X.

D'après le théorème de représentation de Riesz (théorème 7.23), toute forme linéaire continue sur $C(I)$ s'obtient par intégration par rapport à une mesure de Borel complexe sur I. Ainsi le lemme et la première remarque 4.2 établissent que pour tout $k \geq 1$, t^k appartient à X et donc, puisque $1 \in X$ tous les polynômes appartiennent à X. Le théorème de Weierstrass permet alors de conclure $X = C(I)$. Ce qui démontre 1.

Pour montrer 2. le but va être de construire une mesure de Borel complexe μ telle que pour $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \int_I t^z d\mu(t)$$

est une fonction holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > -1\}$ et telle que f égale à 0 en $0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$. Remarquons qu'ici on prend $\operatorname{Re} z > -1$ mais on aurait pu prendre $\operatorname{Re} z$ strictement supérieur à n'importe quel réel négatif, ce qui aurait changer l'expression de la f que nous allons définir mais pas l'esprit de la preuve. Si on arrive à construire une telle μ alors la première remarque et le théorème de représentation de Riesz (théorème 7.23) donnerons que pour tout $\lambda \neq \lambda_i,\ i \in \mathbb{N}^*,\ t^\lambda \notin X$. Commençons par poser pour $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > -1\}$,

$$f(z) := \frac{z}{(2+z)^3} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - z}{2 + \lambda_n + z}.$$

Ce produit est bien convergent. En effet, on a

$$1 - \frac{\lambda_n - z}{2 + \lambda_n + z} = \frac{2z + 2}{2 + \lambda_n + z}.$$

Soit K un compact ne contenant aucun des points $-\lambda_n - 2$, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{2z+2}{2+\lambda_n+z} \right| &\leq \left| \frac{2\sup_K(z) + 2}{2 + \lambda_n + \operatorname{Re} z} \right| \\ &\leq \left| \frac{2\sup_K(z) + 2}{1 + \lambda_n} \right| \\ &\leq \left| \frac{2\sup_K(z) + 2}{\lambda_n} \right|, \end{aligned}$$

or $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda_n}$ converge donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} 1 - \frac{\lambda_n - z}{2+\lambda_n+z}$ converge uniformément sur tout compact ne contenant aucun des points $-\lambda_n - 2$, donc le produit $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - z}{2+\lambda_n+z}$ converge uniformément sur tout compact ne contenant aucun des points $-\lambda_n - 2$. La fonction f est donc méromorphe sur le plan complexe, ayant ses pôles en -2 et $-\lambda_n - 2$ et ses zéros en $0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ De plus, chaque facteur du produit infini est en module inférieur à 1 pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} z > -1$. En effet :

$$-\operatorname{Re}(z) < 1$$

donc

$$-4\operatorname{Re}(z)(\lambda_n + 1) < \lambda_n + 1,$$

d'où

$$-2\operatorname{Re}(z)\lambda_n < 4 + 4\lambda_n + 4\operatorname{Re}(z) + 2\operatorname{Re}(z)\lambda_n,$$

en ajoutant λ_n^2 et $\operatorname{Re}(z)^2$ de chaque coté de l'inégalité on obtient

$$(\lambda_n - \operatorname{Re}(z))^2 < (2 + \lambda_n + \operatorname{Re}(z))^2,$$

enfin en ajoutant $\operatorname{Im}(z)^2$ de chaque coté on a

$$|\lambda_n - z|^2 < |2 + \lambda_n + z|^2,$$

d'où

$$\frac{|\lambda_n - z|}{|2 + \lambda_n + z|} < 1.$$

Donc $|f(z)| \leq 1$ pour $\operatorname{Re} z \geq -1$. Le facteur $(2+z)^3$ est assurera que la restriction de f à la droite $\operatorname{Re} z = -1$ appartient à L^1. Fixons z tel que $\operatorname{Re} z > -1$, et écrivons la formule de Cauchy relative à $f(z)$ sur le chemin γ suivant :

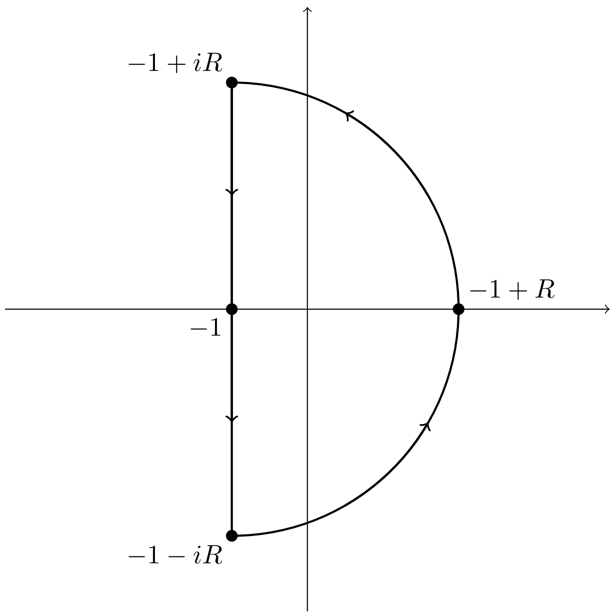

FIGURE 3 – Demi-cercle de centre -1 et de rayon R

Où $R > 1 + |z|$. On a donc

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{z-\xi}d\xi,$$

d'où

$$f(z) = \frac{-1}{2\pi}\int_{-1+iR}^{-1+iR} \frac{f(-1+is)}{-1+is-z}ds - \frac{1}{2\pi}\int_{-1+iR}^{-1+iR} \frac{f(e^{is})}{e^{is}-z}se^{is}ds$$

le second terme tend vers 0 lorsque R tend vers plus l'infini, en effet : **a taper** donc

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(-1+is)}{-1+is-z}ds.$$

Remarquons que $\frac{1}{1+z-is} = \int_0^1 t^{z-is}dt$, donc

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(-1+is)\int_0^1 t^{z-is}dtds.$$

Or par Fubini pour les fonctions mesurables positives on a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |f(-1+is)| \int_0^1 \left|t^{z-is}\right| dtds &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(-1+is)| \int_0^1 \left|t^{\mathrm{Re}(z)}\right| dtds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(-1+is)|ds \int_0^1 \left|t^{\mathrm{Re}(z)}\right| dt \\ &< \infty\end{aligned}$$

car on a construit f de sorte à ce qu'elle soit intégrable et que $\mathrm{Re}(z) > -1$. Ainsi par Fubini on a

$$f(z) = \int_0^1 t^z \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(-1+is)e^{-is\log t}dsdt.$$

Posons $g(s) = f(-1+is)$, on a

$$f(z) = \int_0^1 t^z \hat{g}(\log t)dt.$$

Posons $d\mu(t) = \hat{g}(\log t)dt$, on a donc bien f de la forme

$$f(z) = \int_I t^z d\mu(t)$$

telle que f vaut 0 en $0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ Ce qui conclut la preuve de 2.

$\square$

5 Sous espace invariant du shift

5.1 Introduction et définitions

Nous définissons l'opérateur du *shift* sur l'espace de Hardy par la multiplication par z, plus précisément nous le définissons de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl} S : H^2(\mathbb{D}) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{D}) \\ f & \longmapsto & z \mapsto zf(z) \end{array}.$$

Cet opérateur est borné sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$.

Le but de cette section est de décrire les sous espaces invariants fermés non triviaux de S. D'une manière générale, soit T un opérateur sur X un espace de Banach, on dit qu'un sous espace fermé E de X est *invariant* par T (ou T-*invariant*) lorsque

$$T(E) \subset E.$$

Il est dit *non trivial* si $E \neq \{0\}$ et si $E \neq X$. Nous notons Lat(T) l'ensemble des sous espaces invariants de T.

Soit $x \in X$, notons

$$[x]_X := \overline{\text{vect}}^{\mathrm{X}} \{T^n x \mid n \in \mathbb{N}\}$$

l'enveloppe linéaire fermé engendré par $T^n x$. x est dit *cyclique* si $[x]_X = X$.

Soit $f \in H^2(\mathbb{D})$, d'après le théorème 3.19 nous pouvons écrire f de la forme suivante :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f^*}(n) z^n \text{ pour } z \in \mathbb{D}.$$

Par un petit abus de notation nous écrirons dans la suite

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n \text{ pour } z \in \mathbb{D}.$$

Nous avons pour $z \in \mathbb{D}$

$$Sf(z) = zf(z) = \sum_{n \geq 1} \widehat{f}(n-1) z^n.$$

Ainsi nous remarquons que nous pouvons identifier Sf à la suite $\left(\widehat{f}(n-1)\right)_{n\geq 1}$. Plus précisément introduisons les opérateurs suivant :

$$\begin{array}{rccc} T : & \ell^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{N}) \\ & (a_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & (a_{n-1})_{n\geq 0} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \ell^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{D}) \\ & (a_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & f \end{array} \quad \text{où } \; f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n, \; z \in \mathbb{D}.$$

L'opérateur T est le *shift* sur $\ell^2(\mathbb{N})$, c'est une isométrie, et si nous désignons le *spectre ponctuelle* de T par $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda Id) \text{ non injective }\}$ et le *spectre* de T par $\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda Id) \text{ non inversible }\}$, nous avons

$$\sigma_p(T) = \emptyset \text{ et } \sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}.$$

De plus, l'opérateur φ est un isomorphisme isométrique d'après le théorème 3.19. Nous avons le lemme suivant :

Lemme 5.1. Nous avons

$$S = \varphi \circ T \circ \varphi^{-1}$$

De plus $\sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}$ et $\sigma_p(S) = \emptyset$.

Démonstration. Soit $f \in H^2(\mathbb{D})$ définie par $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ avec $a = (a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$. On a donc $\varphi^{-1}(f) = a$ et $T \circ \varphi^{-1}(f) = (a_{n-1})_{n\geq 0}$ avec $a_{-1} = 0$. Finalement $S(f) = g$ avec

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{n\geq 0} a_{n-1} z^n \\ &= zf(z). \end{aligned}$$

On a que $S - \lambda Id = \varphi \circ (T - \lambda Id) \circ \varphi^{-1}$ avec φ et φ^{-1} inversibles, il est clair que $T - \lambda Id$ est inversible si et seulement si $S - \lambda Id$ est inversible. Ainsi en utilisant la proposition **??** on a

$$\sigma(S) = \sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}.$$

D'autre part, on a

$$(S - \lambda Id)f = 0 \Leftrightarrow \varphi \circ (T - \lambda Id) \circ \varphi^{-1} f = 0 \Leftrightarrow (T - \lambda Id) \circ \varphi^{-1} f = 0,$$

l'injectivité de $T - \lambda Id$ et le fait que φ^{-1} soit injective, nous garantit que $S - \lambda Id$ est injective et donc $\sigma_p(T) = \emptyset$.

□

Enfin le lemme suivant nous donne le lien entre le shift sur $\ell^2(\mathbb{N})$ et $H^2(\mathbb{D})$

Lemme 5.2. $\mathrm{Lat}(T) = \left\{\varphi^{-1}(\mathcal{M}) \mid \mathcal{M} \in \mathrm{Lat}(S)\right\}$.

Démonstration. φ^{-1} est une application linéaire isométrique, si $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel fermé, il en est de même pour $\varphi^{-1}(\mathcal{M})$. De plus, si $\mathcal{M} \in \mathrm{Lat}(S)$, on a $\left(\varphi \circ T \circ \varphi^{-1}\right)(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$ et donc $T\left(\varphi^{-1}(\mathcal{M})\right) \subset \varphi^{-1}(\mathcal{M})$. Par conséquent nous avons $\left\{\varphi^{-1}(\mathcal{M}) : \mathcal{M} \in \mathrm{Lat}(S)\right\} \subset \mathrm{Lat}(T)$.

D'autre part, si $\mathcal{N} \in \mathrm{Lat}(T)$, posons $\mathcal{M} = \varphi(\mathcal{N})$. On remarque que

$$S(\mathcal{M}) = \left(\varphi \circ T \circ \varphi^{-1}\right)(\mathcal{M}) = (\varphi \circ T)(\mathcal{N}) \subset \varphi(\mathcal{N}) = \mathcal{M}$$

Par conséquent tout élément $\mathcal{N} \in \mathrm{Lat}(T)$ est de la forme $\varphi^{-1}(\mathcal{M})$ où $\mathcal{M} \in \mathrm{Lat}(S)$. Ainsi nous avons $\mathrm{Lat}(T) = \left\{\varphi^{-1}(\mathcal{M}) : \mathcal{M} \in \mathrm{Lat}(S)\right\}$.

□

5.2 Description des sous espaces invariants du shift sur $H^2(\mathbb{D})$

D'après le lemme 5.2, si nous connaissons $\mathrm{Lat}(S)$ alors nous connaîtrons $\mathrm{Lat}(T)$. Le but de cette partie est alors de décrire $\mathrm{Lat}(S)$.

Lemme 5.3. Soit Φ une fonction intérieure. Alors $\Phi H^2(\mathbb{D}) := \left\{\Phi f : f \in H^2(\mathbb{D})\right\}$ est un élément de Lat(S).

Démonstration. $\Phi H^2(\mathbb{D})$ est un sous-espace vectoriel de $H^2(\mathbb{D})$.

Montrons que $\Phi H^2(\mathbb{D})$ est fermé dans $H^2(\mathbb{D})$. Remarquons que $\Phi H^2(\mathbb{D})$ est l'image de $H^2(\mathbb{D})$ par l'opérateur M_Φ défini par $M_\Phi(f) = \phi f$ pour $f \in H^2(\mathbb{D})$. Puisque

$$\|\Phi f\|_{H^2(\mathbb{D})} = \|\Phi^* f^*\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|f^*\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|f\|_{H^2(\mathbb{D})}$$

on a que M_Φ est une isométrie et donc son image est fermée dans $H^2(\mathbb{D})$ (car $H^2(\mathbb{D})$ est complet et M_ϕ est une isométrie donc $M_\phi\left(H^2(\mathbb{D})\right)$ est complet donc fermé). Ainsi $\Phi H^2(\mathbb{D})$ est bien un sous espace vectoriel fermé dans $H^2(\mathbb{D})$.

Remarquons qu'avec le lemme 5.1 on a

$$S\left(\Phi H^2(\mathbb{D})\right) = \left\{\alpha \Phi f : f \in H^2(\mathbb{D})\right\} \subset \left\{\Phi g : f \in H^2(\mathbb{D})\right\} = \Phi H^2(\mathbb{D})$$

car si $f \in H^2(\mathbb{D})$ alors $\alpha f \in H^2(\mathbb{D})$, en effet

$$\|\alpha f\|_{H^2(\mathbb{D})} = \|\alpha^* f^*\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|f^*\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|f\|_{H^2(\mathbb{D})}.$$

Finalement $\Phi H^2(\mathbb{D}) := \left\{\Phi f : f \in H^2(\mathbb{D})\right\} \in \mathrm{Lat}(S)$ lorsque Φ est une fonction intérieure.

□

Le prochain lemme énonce qu'il y a unicité (à constante multiplicative près de module 1) de la "représentation" de tout élément de $\mathrm{Lat}(S)$ de la forme $\Phi H^2(\mathbb{D})$ où Φ est une fonction intérieure.

Lemme 5.4. Soient Φ_1 et Φ_2 deux fonctions intérieures telles que $\Phi_1 H^2(\mathbb{D}) = \Phi_2 H^2(\mathbb{D})$. Alors il existe $c \in \mathbb{T}$ tel que $\Phi_1 = c\Phi_2$.

Démonstration. D'après le théorème 3.13, il existe $c_1, c_2 \in \mathbb{T}$, B_1 et B_2 deux produits de Blaschke associés à deux suites $\left(\alpha_n^1\right)_{n\geq 0}$ et $\left(\alpha_n^2\right)_{n\geq 0}$ de $\mathbb{D}$ (vérifiant $\sum_{n\geq 0} 1 - \left|\alpha_n^i\right| < \infty$ pour $i \in \{1,2\}$) et deux mesures μ_1, μ_2 positives et singulières par rapport à la mesure de Lebesgue tels que

$$\Phi_i(z) = c_i B_i(z) S_{\mu_i}(z) \text{ avec } S_{\mu_i}(z) = e^{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\mu_i(t)} \text{ pour } i \in \{1,2\}.$$

Les fonctions intérieures singulières S_{μ_1} et S_{μ_2} ne s'annulent pas sur $\mathbb{D}$. L'égalité $\Phi_1 H^2(\mathbb{D}) = \Phi_2 H^2(\mathbb{D})$ implique qu'il existe $f_1, f_2 \in H^2(\mathbb{D})$ telles que

$$c_1 B_1 S_{\mu_1} f_1 = c_2 B_2 S_{\mu_2} \text{ et } c_1 B_1 S_{\mu_1} = c_2 B_2 S_{\mu_2} f_2$$

En particulier $B_1(z) = 0$ implique $B_2(z) = 0$ et réciproquement. De ce fait B_1 et B_2 ont la même suite de zéros avec même multiplicité ainsi $B_1 = B_2$. On a donc

$$c_1 S_{\mu_1} f_1 = c_2 S_{\mu_2} \text{ et } c_1 S_{\mu_1} = c_2 S_{\mu_2} f_2 \tag{*}$$

Puisque S_{μ_1} et S_{μ_2} sont des fonctions intérieures, $\left|f_i^*\left(e^{it}\right)\right| = 1$ m-presque partout pour $i \in \{1,2\}$. Or $f_i \in H^2(\mathbb{D})$ pour $i \in \{1,2\}$, d'après le théorème 3.19, pour $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, on a :

$$f_i\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f_i^*\left(e^{it}\right) dt.$$

Par conséquent $|f_i(z)| \leq 1$ pour $z \in \mathbb{D}$ et $i \in \{1,2\}$. On déduit de $(*)$ que

$$|S_{\mu_1}(z)| \leq |S_{\mu_2}(z)| \text{ et } |S_{\mu_2}(z)| \leq |S_{\mu_1}(z)|$$

pour $z \in \mathbb{D}$. Ainsi

$$|S_{\mu_1}(z)| = |S_{\mu_2}(z)|$$

pour $z \in \mathbb{D}$. La fonction $\frac{S_{\mu_1}}{S_{\mu_2}}$ étant holomorphe sur l'ouvert simplement connexe $\mathbb{D}$ et ne s'annulant pas il existe donc $\ell \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ tel que $\frac{S_{\mu_1}}{S_{\mu_2}} = e^{\ell}$ sur $\mathbb{D}$. En particulier on obtient

$$\mathrm{Re}(l(z)) = \log\left|\frac{S_{\mu_1}(z)}{S_{\mu_2}(z)}\right|$$

Or S_{μ_1} et S_{μ_2} sont des fonctions intérieurs donc de module 1, on en déduit que

$$\mathrm{Re}(l(z)) = \log\left|\frac{S_{\mu_1}(z)}{S_{\mu_2}(z)}\right| = 0$$

pour tout $z \in \mathbb{D}$. Par les équations de Cauchy-Riemann il existe λ tel que

$$\mathrm{Im}\left(\ell\left(z\right)\right) = i\lambda.$$

Ainsi en séparant la partie réelle et imaginaire de ℓ on obtient

$$\frac{S_{\mu_1}(z)}{S_{\mu_2}(z)} = e^{i\lambda}$$

ce qui donne $S_{\mu_1} = e^{i\lambda} S_{\mu_2}$ et donc il existe $c \in \mathbb{T}$ tel que $\Phi_1 = c\Phi_2$.

□

Théorème 5.5. Soit $p \in]0,\infty]$ prenons $f \in H^p(\mathbb{D})$ non identiquement nulle alors $f^*\left(e^{it}\right) \neq 0$ m-presque partout.

De plus, si $f, g \in H^p(\mathbb{D})$ sont telles que $f^*\left(e^{it}\right) = g^*\left(e^{it}\right)$ sur un sous-ensemble de $\mathbb{T}$ de mesure de Lebesgue strictement positive, nécessairement $f = g$.

Démonstration. Si $f^*\left(e^{it}\right) = 0$ sur un ensemble de mesure positive alors on a $\log\left|f^*\left(e^{it}\right)\right| = -\infty$ ce qui contredit le fait que $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$. En appliquant la contraposé de ce qu'on vient de montrer a $f - g \in H^p(\mathbb{D})$ on a le résultat.

$\square$

Le prochain résultat énonce que tous les éléments de $\mathrm{Lat}(S)$ différents de $\{0\}$ sont de la forme $\Phi H^2(\mathbb{D})$ où Φ est une fonction intérieure. Ce qui achèvera la description des sous espaces invariants du shift.

Théorème 5.6. (Beurling [5]) Soit $\mathcal{M} \neq \{0\}$ un élément de Lat (S). Alors il existe une fonction intérieure Φ (unique à une constante de module 1 près) tel que $\mathcal{M} = \Phi H^2(\mathbb{D})$.

Démonstration. L'unicité à une constante de module 1 près résulte du lemme 5.4

Soit $\mathcal{M} \neq \{0\}$ un élément de $\mathrm{Lat}(S)$ et posons

$$p := \inf\{k \geq 0 \mid \exists f \in \mathcal{M} \text{ avec } 0 \text{ qui est zéro d'ordre } k \text{ de } f\}$$

Soit $f \in \mathcal{M}$ de la forme $f(z) = \sum_{n \geq p} c_n z^n$ avec $c_p \neq 0$. Alors $f \notin S(\mathcal{M})$ en effet, par définition de p on a :

$$S(\mathcal{M}) \subset \left\{g \in H^2(\mathbb{D}) \mid 0 \text{ zéro d'ordre au moins } p+1 \text{ de } g\right\},$$

et $f \notin \left\{g \in H^2(\mathbb{D}) \mid 0 \text{ zéro d'ordre au moins } p+1 \text{ de } g\right\}$. D'après le lemme 5.1, S est une isométrie (donc bijective sur son image), on a que $\mathcal{M}$ un sous-espace vectoriel fermé de $H^2(\mathbb{D})$ ainsi $S(\mathcal{M})$ est un sous-espace vectoriel fermé de $H^2(\mathbb{D})$. On a donc

$$\mathcal{M} = S(\mathcal{M}) \oplus \left(S(\mathcal{M})^\perp \cap \mathcal{M}\right).$$

On sait que $S(\mathcal{M})^\perp \cap \mathcal{M} \neq \{0\}$ en effet, d'après ce qu'il précède il existe $f \in \mathcal{M} \backslash S(\mathcal{M})$ donc $\mathcal{M} \neq S(\mathcal{M})$ et donc $S(\mathcal{M})^\perp \cap \mathcal{M} \neq \{0\}$. De ce fait prenons $g \in \mathcal{M} \cap S(\mathcal{M})^\perp$, g non identiquement nulle, et posons

$$\Phi := \frac{g}{\|g\|_2}.$$

Montrons que Φ est une fonction intérieur. Puisque $\mathcal{M} \in \mathrm{Lat}(S)$ et $\Phi \in \mathcal{M}$, on a

$$S(\Phi) \in S(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$$

d'où

$$S^2(\Phi) \in S(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$$

de proche en proche on déduit que pour tout entier $n \geq 1$

$$S^n(\Phi) \in S(\mathcal{M}).$$

Ainsi $\langle \Phi, S^n(\Phi) \rangle = 0$ pour tout $n \geq 1$ puisque par construction $\Phi \in S(\mathcal{M})^\perp$. Ainsi nous avons :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi^*\left(e^{it}\right) \overline{e^{int} \Phi^*\left(e^{it}\right)} dt = 0, \; n \geq 1.$$

En passant au conjugué on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{\Phi^*\left(e^{it}\right)} e^{int} \Phi^*\left(e^{it}\right) dt = 0, \; n \leq -1.$$

Ainsi

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{\Phi^*\left(e^{it}\right)} e^{int} \Phi^*\left(e^{it}\right) dt = 0, \; \text{pour } n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},$$

donc

$$\int_0^{2\pi} \left|\Phi^*\left(e^{it}\right)\right|^2 e^{int}dt = 0, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}.$$

Posons $u\left(e^{it}\right) := \left|\Phi^*\left(e^{it}\right)\right|^2$. Puisque $\Phi \in H^2(\mathbb{D}), \Phi^* \in L^2(\mathbb{T})$ et donc $u \in L^1(\mathbb{T})$ et $\widehat{u}(n) = 0$ pour $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ d'après ce qu'il précède. De plus

$$\widehat{u}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\varphi^*\left(e^{it}\right)\right|^2 dt = \|\Phi\|_2^2 = 1$$

Remarquons que tous les coefficients de Fourier de f coïncident avec ceux de la fonction constante égale à 1, de plus la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ sur $L^1(\mathbb{T})$ est injective et que $u\left(e^{it}\right) = 1$ m-presque partout on a donc

$$\left|\Phi^*\left(e^{it}\right)\right| = 1 \ m-\text{presque partout}.$$

Puisque $\Phi \in H^2(\mathbb{D})$, d'après le l'assertion 2. du théorème 3.19, pour $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, on a :

$$\Phi\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\Phi^*\left(e^{it}\right)dt$$

En utilisant la proposition 1.3 on a $|\Phi(z)| \leq 1$ pour $z \in \mathbb{D}$ et donc $\Phi \in H^\infty(\mathbb{D})$. Finalement Φ est une fonction intérieure.

Désormais, montrons que $\mathcal{M} = \Phi H^2(\mathbb{D})$. Commençons par montrer que $\Phi H^2(\mathbb{D}) \subset \mathcal{M}$. Puisque $\Phi \in \mathcal{M}$ et $\mathcal{M} \in \mathrm{Lat}(S)$, on a d'après le lemme 5.1 $S^n(\Phi) = \alpha^n\Phi \in \mathcal{M}$ où $\alpha : z \mapsto z$ pour $z \in \mathbb{D}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On sait que $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel de $H^2(\mathbb{D})$, donc $P(\alpha)\Phi \in \mathcal{M}$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$. Soit $f \in H^2(\mathbb{D})$ d'après le théorème 3.19, il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbb{C}$ telle que

$$\sum_{n\geq 0}|a_n|^2 < \infty \text{ et } f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \text{ si } z \in \mathbb{D}.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $P_k(z) = \sum_{n=0}^k a_n z^n$. On a $\|f - P_k(\alpha)\|_2^2 = \sum_{n\geq k+1}|a_n|^2$, ce qui implique $\lim_{k\to\infty}\|f - P_k(\alpha)\|_2 = 0$ puisque $\sum_{n\geq 0}|a_n|^2 < \infty$. Or Φ est intérieure donc

$$\|\Phi f - \Phi P_k(\alpha)\|_{H^2(\mathbb{D})} = \|\Phi^*\left(f^* - P_k(\alpha)^*\right)\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|f^* - P_k(\alpha)^*\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|f - P_k(\alpha)\|_{H^2(\mathbb{D})}.$$

Par conséquent $\lim_{k\to\infty}\|\Phi f - \Phi P_k(\alpha)\|_2 = 0$ avec $\Phi P_k(\alpha) \in \mathcal{M}$ pour tout entier k. Puisque $\mathcal{M}$ est fermé dans $H^2(\mathbb{D})$, $\Phi f \in \mathcal{M}$ pour tout $f \in H^2(\mathbb{D})$. On a donc montré que $\Phi H^2(\mathbb{D}) \subset \mathcal{M}$.

Montrons que $\mathcal{M} \subset \Phi H^2(\mathbb{D})$, pour cela montrons que $\mathcal{M} \cap H^2(\mathbb{D}) = \{0\}$. Soit $v \in \mathcal{M}$ tel que $v \perp \Phi H^2(\mathbb{D})$. Remarquons que $v \perp \Phi H^2(\mathbb{D})$ implique que $\langle v, \Phi\alpha^n\rangle = 0$ pour tout $n \geq 0$ car toute $f \in H^2(\mathbb{D})$ peut s'écrire pour $z \in \mathbb{D}$, $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ où $\sum_{n\geq 0}|a_n|^2 < \infty$. D'autre part, puisque $\Phi \perp S(\mathcal{M})$, on a $\langle \Phi, S^n(v)\rangle = 0$ pour tout $n \geq 1$ d'après ce qu'il précède. Ainsi :

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v^*\left(e^{it}\right)\overline{\Phi^*\left(e^{it}\right)}e^{-int}dt & n \geq 0 \\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v^*\left(e^{it}\right)\overline{\Phi^*\left(e^{it}\right)}e^{int}dt & n \geq 1 \end{cases}$$

Puisque $v \in H^2(\mathbb{D})$ d'après la proposition 3.19 on a que $v^* \in L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$. De plus, Φ est intérieure, nous avons donc

$$\left|v^*\left(e^{it}\right)\overline{\Phi^*\left(e^{it}\right)}\right| = \left|v^*\left(e^{it}\right)\right| m - \text{presque partout}.$$

Finalement la fonction $v^*\overline{\Phi^*}$ appartient à $L^1(\mathbb{T})$ et tous ses coefficients de Fourier sont nuls. L'injectivité de la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ donne que $v^*\overline{\Phi^*} = 0$. Puisque $\left|\Phi^*\left(e^{it}\right)\right| = 1$ m-presque partout, on a $v^* = 0$ et par ainsi d'après le théorème 5.5 $v = 0$.

$\square$

6 Opérateur de composition

6.1 Théorème de Littlewood

Définition 6.1. Soient $b \in H^\infty(\mathbb{D})$ et $f \in H^2(\mathbb{D})$, on definit *l'opérateur de multiplication* par b, M_b par

$$M_b f = bf.$$

Proposition 6.2. Soient $b \in H^\infty(\mathbb{D})$ et $f \in H^2(\mathbb{D})$,

1. $bf \in H^2(\mathbb{D})$.
2. $\|bf\|_2 \leq \|b\|_\infty \|f\|_2$.
3. $\|M_b\| \leq \|b\|_\infty$..

Démonstration.

1. Cela vient du fait que $H(\Omega)^\infty(\mathbb{D}) \subset H^2(\mathbb{D})$ (théorème 3.8).
2. Direct.
3. Se déduit directement du point précédent.

□

Définition 6.3. Soit φ une fonction holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ avec $\varphi(0) = 0$. On définit l'opérateur de composition par

$$\begin{array}{rccc} C_\varphi : & H^2(\mathbb{D}) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{D}) \\ & f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array}.$$

Théorème 6.4. (Principe de subordination de Littlewood) Supposons que φ soit une application holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$, telle que $\varphi(0) = 0$. Alors pour tout $f \in H^2(\mathbb{D})$,

$$C_\varphi f \in H^2(\mathbb{D}) \text{ et } \|C_\varphi f\|_2 \leq \|f\|_2.$$

Démonstration. Soit $f \in H^2(\mathbb{D})$, d'après le théorème 3.19 on peut écrire f de la manière suivante

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f^*}(n) z^n \text{ pour } z \in \mathbb{D}.$$

Considérons le shift inverse (backward shift) B, défini sur $H^2(\mathbb{D})$ par

$$Bf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f^*}(n+1) z^n.$$

Remarquons que pour toute f holomorphe sur $\mathbb{D}$ on a :

$$f(z) = \widehat{f^*}(0) + zBf(z) \quad (z \in \mathbb{D}), \tag{*}$$

$$\widehat{B^n f^*}(0) = \widehat{f^*}(n) \text{ pour } n \in \mathbb{N}. \tag{**}$$

Commençons par supposer que f est un polynôme. On a que $f \circ \varphi$ est borné sur $\mathbb{D}$ donc $f \circ \varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$ qui est inclus dans H^2 d'après le théorème 3.8.
Pour l'estimation de la norme de $f \circ \varphi$, utilisons (*), on a pour $z \in \mathbb{D}$

$$f(\varphi(z)) = f(0) + \varphi(z)(Bf)(\varphi(z))$$

c'est à dire

$$C_\varphi f = \widehat{f^*}(0) + M_\varphi C_\varphi Bf.$$

L'hypothèse $\varphi(0) = 0$ implique que tous les termes de la série entière de φ ont en facteur commun z, et donc qu'il en est de même pour le second terme de l'égalité précédente, le rendant ainsi orthogonal dans $H^2(\mathbb{D})$ à la fonction constante $f(0)$. Ainsi, nous obtenons :

$$\|C_\varphi f\|_2^2 = |\widehat{f^*}(0)|^2 + \|M_\varphi C_\varphi B f\|_2^2 \leq |\widehat{f^*}(0)|^2 + \|C_\varphi B f\|_2^2,$$

où la dernière inégalité découle de l'assertion 3. de la proposition 6.2. Nous substituons ensuite successivement $Bf, B^2 f, \cdots$ à f dans l'égalité précédente, ce qui donne en utilisant (**) :

$$\begin{aligned} \|C_\varphi B f\|_2^2 &\leq |\widehat{f^*}(0)|^2 + \left\|C_\varphi B^2 f\right\|_2^2, \\ \left\|C_\varphi B^2 f\right\|_2^2 &\leq \left|\widehat{f^*}(1)\right|^2 + \left\|C_\varphi B^3 f\right\|_2^2, \\ &\vdots \\ \|C_\varphi B^n f\|_2^2 &\leq \left|\widehat{f^*}(n)\right|^2 + \left\|C_\varphi B^{n+1} f\right\|_2^2. \end{aligned}$$

En regroupant toutes ces inégalités, nous obtenons

$$\|C_\varphi f\|^2 \leq \sum_{k=0}^{n} \left|\widehat{f^*}(k)\right|^2 + \left\|C_\varphi B^{n+1} f\right\|^2$$

pour tout entier $n \geq 0$. Rappelons nous que f est un polynôme. Si nous choisissons n comme étant le degré de f, alors $B^{n+1} f = 0$, ce qui réduit la dernière inégalité à

$$\begin{aligned} \|C_\varphi f\|^2 &\leq \sum_{k=0}^{n} |\widehat{f^*}(k)|^2 \\ &= \|f\|_2^2, \end{aligned}$$

Cela montre que C_φ est une contraction pour la norme $H^2(\mathbb{D})$ sur l'espace vectoriel des polynômes.

Pour conclure, supposons que $f \in H^2$ n'est pas un polynôme. Soit f_n la somme partielle d'ordre n de son développement en série entière. Alors $f_n \to f$ en norme H^2, donc d'après le corollaire 3.22, (f_n) converge uniformément sur tout compact vers f, d'où $(f_n \circ \varphi)$ converge uniformément sur tout compact vers $f \circ \varphi$. On a que

$$\|f_n\|_2 \leq \|f\|_2,$$

et nous venons de montrer que $\|f_n \circ \varphi\| \leq \|f_n\|$. Ainsi, pour tout $0 < r < 1$ fixé, nous avons en utilisant la convergence uniforme sur tout compact de $(f_n \circ \varphi)$ et la proposition 3.6

$$\begin{aligned} M_2(f \circ \varphi, r) &= \lim_{n \to \infty} M_2 (f_n \circ \varphi, r) \\ &\leq \limsup_{n \to \infty} \|f_n \circ \varphi\|_2 \\ &\leq \limsup_{n \to \infty} \|f_n\|_2 \\ &\leq \|f\|_2. \end{aligned}$$

Pour conclure la démonstration, nous faisons tendre r vers 1.

□

Pour prouver que C_φ est borné même lorsque φ ne fixe pas l'origine, nous allons utiliser une transformation conforme pour déplacer les points de $\mathbb{D}$ là où nous le souhaitons. Pour tout point $p \in \mathbb{D}$, notons α_p la transformation homographique suivante

$$\alpha_p(z) = \frac{p - z}{1 - \bar{p}z},$$

On peut vérifier que cette application envoie $\mathbb{D}$ sur lui-même, que $\alpha_p(p) = 0$ et que $\alpha_p^{-1} = \alpha_p$.

Posons $p := \varphi(0)$. Alors la fonction holomorphe $\psi = \alpha_p \circ \varphi$ envoie $\mathbb{D}$ dans lui-même et $\psi(0) = \alpha_{\varphi(0)} (\varphi(0)) = 0$. Puisque $\alpha_p^{-1} = \alpha_p$, nous avons $\varphi = \alpha_p \circ \psi$, ce qui se traduit par l'équation

$$C_\varphi = C_\psi C_{\alpha_p}.$$

Lemme 6.5. Pour $p \in \mathbb{D}$, l'opérateur C_{α_p} est borné sur $H^2(\mathbb{D})$. De plus,

$$\left\|C_{\alpha_p}\right\|_2 \leq \left(\frac{1+|p|}{1-|p|}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. Supposons d'abord que f soit holomorphe dans un voisinage de $\bar{\mathbb{D}}$, disons dans $D(0,R)$ pour un certain $R>1$. On peut alors effectuer une interversion limite intégrale dans l'expression de $\|.\|_2$ de f :

$$\begin{aligned}\|f\|_2^2 &= \lim_{r\to 1^-} M_2(f,r)\\ &= \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta\end{aligned}$$

Enfin remarquons que

$$\begin{aligned}\|f\circ\alpha_p\|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(\alpha_p\left(e^{i\theta}\right)\right)\right|^2 d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(e^{it}\right)\right|^2\left|\alpha_p'\left(e^{it}\right)\right| dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(e^{it}\right)\right|^2 \frac{1-|p|^2}{|1-\bar{p}e^{it}|^2}dt\\ &\leq \frac{1-|p|^2}{(1-|p|)^2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(e^{it}\right)\right|^2 dt\right)\\ &= \frac{1+|p|}{1-|p|}\|f\|^2.\end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité souhaitée est valable pour toutes les fonctions holomorphes dans $D(0,R)$; en particulier, elle est vraie pour les polynômes, ainsi pour généraliser le résultat sur $H^2(\mathbb{D})$, il suffit de répéter l'argument que nous avons utilisé pour terminer la démonstration du théorème de subordination de Littlewood (théorème 6.4).

□

Théorème 6.6. (Littlewood) Supposons que φ soit une application holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$. Alors, l'opérateur de composition C_φ est un opérateur borné sur $H^2(\mathbb{D})$, et

$$\|C_\varphi\|_2 \leq \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}.$$

Démonstration. Comme mentionné précédemment, nous avons

$$C_\varphi = C_\psi C_{\alpha_p},$$

où $p=\varphi(0)$ et ψ fixe l'origine. Le lemme 6.5 et le principe de subordination de Littlewood (théorème 6.4) montrent que les deux opérateurs à droite sont bornés sur $H^2(\mathbb{D})$, donc C_φ est le produit d'opérateurs bornés sur $H^2(\mathbb{D})$, et est donc lui-même borné. De plus,

$$\|C_\varphi\|_2 \leq \|C_\psi\|_2\left\|C_{\alpha_p}\right\|_2 \leq \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}$$

où la dernière inégalité découle du lemme 6.5 et du fait que C_ψ est une contraction (théorème 6.4).

□

6.2 Compacité de l'opérateur de composition

Soit $f \in H^2(\mathbb{D})$, d'après le théorème 3.19 on peut écrire f de la forme suivante :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f^*}(n) z^n \text{ pour } z \in \mathbb{D}.$$

Par un petit abus de notation nous écrirons dans la suite

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n \text{ pour } z \in \mathbb{D}.$$

Théorème 6.7. Si $\|\varphi\|_\infty < 1$, alors C_φ est un opérateur compact sur $H^2(\mathbb{D})$.

Démonstration. Soit $f \in H^2(\mathbb{D})$ notons $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n$ pour $z \in \mathbb{D}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons l'opérateur

$$T_n f = \sum_{k=0}^{n} \hat{f}(k) \varphi^k.$$

Ainsi, T_n envoie H^2 sur vect $\{1, \varphi, \cdots \varphi^n\}$. T_n est un opérateur borné, en effet pour tout $f \in H^2(\mathbb{D})$ on a

$$\begin{aligned} \|T_n f\|_\infty &\leq \sum_{k=0}^{n} |\hat{f}(k)| \|\varphi\|_\infty^k \\ &\leq \|f\|_2^2 (n+1) \text{ car } \|\varphi\|_\infty < 1 \end{aligned}$$

Et T_n est de rang fini sur $H^2(\mathbb{D})$. Montrons que $\|C_\varphi - T_n\| \to 0$. Puisque $\|\varphi\|_\infty < 1$ on a

$$\begin{aligned} \|(C_\varphi - T_n) f\|_\infty &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\hat{f}(k)| \|\varphi\|_\infty^k \\ &\leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \|\varphi\|_\infty^{2k} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{\|\varphi\|_\infty^{n+1}}{\sqrt{1 - \|\varphi\|_\infty^2}} \|f\|_2 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|C_\varphi - T_n\| \leq \frac{\|\varphi\|_\infty^{n+1}}{\sqrt{1 - \|\varphi\|_\infty^2}} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc (Tn) est suite d'opérateur de rang fini qui converge (en norme d'opérateur) vers C_φ, donc C_φ est compact sur $H^2(\mathbb{D})$.

□

Théorème 6.8. Si $\|\varphi\|_\infty < 1$ et si

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 - |\varphi(e^{i\theta})|^2} d\theta < \infty,$$

alors C_φ est compact sur $H^2(\mathbb{D})$.

Démonstration. Soit $f \in H^2(\mathbb{D})$ notons $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n$ pour $z \in \mathbb{D}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons l'opérateur

$$T_n f = \sum_{k=0}^{n} \hat{f}(k) \varphi^k.$$

Par Cauchy-Schwarz on a

$$\begin{aligned}
\|(C_\varphi - T_n) f\|_2 &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\hat{f}(k)| \|\varphi^k\|_2 \\
&\leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \|\varphi^k\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

donc

$$\|C_\varphi - T_n\| \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \|\varphi^k\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Or,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 - |\varphi(e^{i\theta})|^2} d\theta < \infty$$

et on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 - |\varphi(e^{i\theta})|^2} d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} |\varphi(e^{i\theta})|^{2n} d\theta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(e^{i\theta})|^{2n} d\theta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \lim_{r \to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(e^{i\theta})|^{2n} d\theta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi^n\|_2^2 \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

où l'interversion série intégrale est valide par le théorème de Fubini. et l'interversion limite intégrale vient du fait que $\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(re^{i\theta})|^{2n} d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(e^{i\theta})|^{2n} d\theta$ pour tout $0 \leq r \leq 1$. Finalement

$$\|C_\varphi - T_n\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

or les T_n sont des opérateurs de rang fini donc C_φ est compact.

□

Remarque. La condition $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 - |\varphi(e^{i\theta})|^2} d\theta < \infty$ est équivalente à

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi^n\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|C_\varphi(z^n)\|_2^2.$$

Or la famille $(z \mapsto z^n)_{n \geq 0}$ est une base hilbertienne dans $H^2(\mathbb{D})$ donc C_φ est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Théorème 6.9. Soit φ une application holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$. C_φ est un opérateur compact sur $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si pour toute suite (f_n) bornée dans $H^2(\mathbb{D})$ qui converge uniformément vers zéro sur tout compact de $\mathbb{D}$ on a $\|C_\varphi f_n\|_2 \to 0$.

Démonstration. La clé de cette démonstration est le lemme 3.21, qui affirme que la convergence dans $H^2(\mathbb{D})$ implique la convergence simple sur $\mathbb{D}$, et que les sous-ensembles bornés de $H^2(\mathbb{D})$ sont, en tant que classes de fonctions, uniformément bornés sur tout compact de $\mathbb{D}$. Notons B la boule unité fermée de $H^2(\mathbb{D})$.

Commençons la démonstration en supposant que C_φ est un opérateur compact. Prenons une suite (f_n) appartenant à $B(0, M)$ $(0 < M < 1)$, qui converge uniformément vers zéro sur tout compacts de $\mathbb{D}$. Montrons que $\|C_\varphi f_n\|_2 \to 0$, et pour cela, il suffit de montrer que la fonction nulle est le seul point d'accumulation de la suite $(C_\varphi f_n)$. Or $(C_\varphi f_n)$ converge uniformément vers zéro sur tout compacts de $\mathbb{D}$, et puisque la convergence dans $H^2(\mathbb{D})$ implique la convergence simple, zéro est le seul point d'accumulation possible. Par compacité de C_φ, l'ensemble $\{C_\varphi f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact, donc il doit admettre un point d'accumulation, qui est donc 0, ainsi $\|C_\varphi f_n\|_2 \to 0$.

Réciproquement, prenons (f_n) une suite de fonctions de B. Montrons que la suite $(C_\varphi f_n)$ a une sous-suite convergente. Puisque les fonctions de B sont uniformément bornées sur tout compact de $\mathbb{D}$, le théorème de Montel permet d'extraire une sous-suite (n_k) telle que la suite (g_k) où $g_k := f_{n_k}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$ vers une fonction holomorphe g. Remarquons que $g \in H^2(\mathbb{D})$. En effet, pour tout $0 < r < 1$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|g\left(re^{2\theta}\right)\right|^2 d\theta = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|g_k\left(re^{2\theta}\right)\right|^2 d\theta \leq \sup_{k\in\mathbb{N}}\|g_k\|^2 \leq 1.$$

donc $g \in H^2$, et en fait $\|g\|_2 \leq 1$. Ainsi la suite $(g_k - g)$ est bornée sur $H^2(\mathbb{D})$ et $g_k - g \to 0$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$ donc par hypothèse on a

$$\|C_\varphi (g_k - g)\| \to 0$$

ainsi $(C_\varphi f_n)$ a une sous-suite convergente et donc par caractérisation séquentielle de la compacité $C_\varphi(B)$ est compact, et finalement C_φ est compact.

□

Donnons quelques exemples où l'opérateur de composition n'est pas compact. Nous utiliserons le résultat précédent pour montrer que C_φ peut ne pas être compact si $\varphi\left(e^{i\theta}\right)$ s'approche du bord de $\mathbb{D}$ soit trop rapidement, soit trop fréquemment.

Notre premier exemple montre que C_φ peut ne pas être compact même si $\left|\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right| = 1$ en un seul point $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$.

Proposition 6.10. Pour $0 < \lambda < 1$, pour $z \in \mathbb{D}$ posons $\varphi(z) := \lambda z + (1 - \lambda)$. Alors C_φ n'est pas compact sur $H^2(\mathbb{D})$.

Démonstration. Pour $0 < r < 1$ fixé, définissons

$$f_r(z) := \frac{\sqrt{1-r^2}}{1-rz} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

On a

$$\begin{aligned} f_r(z) &= \sqrt{1-r^2}\frac{1}{1-rz} \\ &= \sqrt{1-r^2}\sum_{n=0}^{\infty} r^n z^n \end{aligned}$$

Par définition de la norme H^2 on a

$$\|f_r\|_2 = \sqrt{1-r^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(r^2)^n\right)^{1/2} = 1.$$

De plus, il est clair que $f_r \underset{r\to 1^-}{\longrightarrow} 0$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$. On a pour $z \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned} f_r(\varphi(z)) &= \sqrt{1-r^2}\frac{1}{1-r(1-\lambda)-r\lambda z} \\ &= \frac{\sqrt{1-r^2}}{1-r(1-\lambda)}\frac{1}{1-\frac{r\lambda}{1-r(1-\lambda)}z} \\ &= \frac{\sqrt{1-r^2}}{1-r(1-\lambda)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r\lambda}{1-r(1-\lambda)}\right)^n z^n. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|C_\varphi f_r\|_2 &= \frac{\sqrt{1-r^2}}{1-r(1-\lambda)}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{r\lambda}{1-r(1-\lambda)}\right)^2\right)^n\right)^{1/2} \\ &= \frac{\sqrt{1-r^2}}{1-r(1-\lambda)}\left(\frac{1}{1-\frac{r^2\lambda^2}{(1-r(1-\lambda))^2}}\right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{1-r^2}{(1-r(1-\lambda))^2-r^2\lambda^2}\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} (1-r(1-\lambda))^2-r^2\lambda^2 &= 1-2r(1-\lambda)+r^2-2r^2\lambda \\ &= 1-2r+r^2+2\lambda r-2r^2\lambda \\ &= (1-r)^2+2\lambda r(1-r) \\ &= (1-r)(1-r+2\lambda r) \end{aligned}$$

et puisque $1-r^2=(1+r)(1-r)$ on obtient

$$\|C_\varphi f_r\|_2^2 = \frac{1+r}{1+r(2\lambda-1)},$$

Ainsi $\|C_\varphi f_r\|_2 \underset{r\to 1^-}{\to} \lambda^{-1/2} \neq 0$. D'après le théorème 6.9 C_φ n'est pas compact.

□

Définition 6.11. Une fonction f est dite *univalente* sur un domaine $D \subset \mathbb{C}$ si f est holomorphe sur D et si f est injective sur D.

Intuitivement, si une application induit un opérateur non compact, alors toute application dont les valeurs s'approchent du cercle unité "plus rapidement" devrait également induire un opérateur non compact. Le théorème ci-dessous formalise cette idée et nous permet de transformer des résultats concernant des classes spécifiques d'applications, comme celles mentionnées ci-dessus, en théorèmes généraux de compacité.

Théorème 6.12. Supposons que φ et ψ soient deux applications holomorphes de $\mathbb{D}$ dans lui-même, avec φ univalente et $\psi(U) \subset \varphi(U)$. Si C_φ est compact sur $H^2(\mathbb{D})$, alors C_ψ l'est aussi.

7 Annexe

7.1 Théorème de Hahn-Banach et conséquence

Théorème 7.1. Si M est un sous-espace d'un espace vectoriel normé X et si f est une forme linéaire bornée sur M, alors f peut alors être prolongée en une forme linéaire bornée F sur X, de sorte que $\|F\| = \|f\|$.

Théorème 7.2. Soit M un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé X, et soit $x_0 \in X$. x_0 appartient à la fermeture de M si et seulement s'il n'existe pas de forme linéaire bornée f sur X telle que $f(x) = 0$ pour tout $x \in M$ tandis que $f(x_0) \neq 0$.

Théorème 7.3. Soit X un espace vectoriel normé et soit X^* son dual topologique. Pour $M \subset X$, on pose $M^\perp := \{\ell \in X^* : M \subset \ker \ell\}$. Soit E un sous-espace vectoriel de X. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. E est dense dans X.
2. $E^\perp = \{0\}$.

7.2 Mesure complexe

Pour les démonstrations des différents résultats voir [2]. Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable.

Définition 7.4. Une *mesure complexe* est une application $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ vérifiant : pour tout $E \in \mathcal{M}$ et toute partition dénombrable $(E_i)_{i\geq 1}$ de E, on a

$$\mu(E) = \sum_{i\geq 1} \mu(E_i).$$

Remarque. La convergence de la série fait partie des hypothèses !

Définition 7.5. Soit μ une mesure complexe on associe sa *variation totale* $|\mu|$ définie par :

$$|\mu|(E) = \sup \left\{ \sum_{i\geq 1} |\mu(E_i)| : (E_i)_{i\geq 1} \text{ partition dénombrable de } E \right\}$$

pour tout $E \in \mathcal{M}$.

Remarque. Si μ est une mesure positive finie (i.e. $\mu(X) < \infty$) alors $|\mu| = \mu$.

Théorème 7.6. La variation totale d'une mesure complexe $|\mu|$ sur $\mathcal{M}$ est une mesure positive sur $\mathcal{M}$.

Théorème 7.7. Toute mesure complexe sur X vérifie

$$|\mu|(X) < \infty$$

Théorème 7.8. Soit X un espace topologique séparé localement compact, alors $(\mathcal{M}(X), ||.||)$ où $||\mu|| := |\mu|(X)$ est un espace de Banach.

Définition 7.9. Soit μ une mesure réelle sur $\mathcal{M}$. On définit $|\mu|$ comme ci-dessus, puis on définit aussi

$$\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu), \quad \mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu).$$

Remarque. μ^+et μ^-sont toutes les deux des mesures positives sur $\mathcal{M}$ et elles sont bornées grâce au théorème précédent.

Proposition 7.10. (Décomposition de Jordan) Avec les mêmes notations que la définition précédente, on a

$$\mu = \mu^+ - \mu^-, \quad |\mu| = \mu^+ + \mu^-.$$

Les mesures μ^+et μ^-sont appelées respectivement les *variations positive et négative* de μ. La représentation de μ comme différence de deux mesures positives μ^+ et μ^- s'appelle la *décomposition de Jordan* de μ.

Remarque. Rappelons qu'une mesure complexe a son image dans le plan complexe, tandis qu'une mesure positive peut inclure $+\infty$ comme mesure d'un ensemble, on ne peut donc pas considérer les mesures positives comme un cas particulier des mesures complexes.

Définition 7.11. Soit μ une mesure positive sur $\mathcal{M}$ et soit λ une mesure arbitraire sur $\mathcal{M}$, λ pouvant être positive ou complexe.

Si $\lambda(E) = 0$ pour tout $E \in M$ tel que $\mu(E) = 0$, nous disons que λ est *absolument continue* par rapport à μ, et écrivons

$$\lambda \ll \mu.$$

Définition 7.12. S'il existe un ensemble $A \in \mathcal{M}$ tel que $\lambda(E) = \lambda(A \cap E)$ pour tout $E \in \mathcal{M}$, on dit que λ est *portée* par A.

Ceci équivaut à l'hypothèse $\lambda(E) = 0$ pour tout E tel que $E \cap A = \emptyset$.

Définition 7.13. Soient λ_1 et λ_2 deux mesures sur $\mathcal{M}$ et supposons qu'il existe deux ensembles disjoints A et B tels que λ_1 soit portée par A et λ_2 soit portée par B. On dit que λ_1 et λ_2 sont *mutuellement singulières*, et on écrit

$$\lambda_1 \perp \lambda_2.$$

Théorème 7.14. (Decomposition de Lebesgue-Radon-Nikodym) Soit μ une mesure positive σ-finie sur $(\mathcal{M}, X)$, et soit λ une mesure complexe sur $\mathcal{M}$.

1. Il existe un unique couple de mesures complexes λ_a et λ_s sur $\mathcal{M}$ telles que

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \quad \lambda_a \ll \mu, \quad \lambda_s \perp \mu.$$

   Si λ est positive et finie, λ_a et λ_s le sont aussi et $\lambda_a \perp \lambda_s$.
2. Il existe un unique élément $h \in L^1(\mu)$ tel que pour tout $E \in M$

$$\lambda_a(E) = \int_E h d\mu$$

Le couple (λ_a, λ_s) est appelé *décomposition de Lebesgue* de λ relative à μ. h est appelé la *dérivée de Radon-Nikodym* de λ_a par rapport à μ.

Théorème 7.15. (Décomposition polaire) Soit μ une mesure complexe sur $\mathcal{M}$. Il existe une fonction mesurable h telle que $|h(x)| = 1$ pour tout $x \in X$ et

$$d\mu = hd|\mu|.$$

Cette écriture est appelée *décomposition polaire* de μ.

Théorème 7.16. Soit μ une mesure positive sur m et $g \in L^1(\mu)$. Posons pour $E \in M$

$$\lambda(E) = \int_E g d\mu.$$

On a

$$|\lambda|(E) = \int_E |g| d\mu.$$

Théorème 7.17. (Décomposition de Hahn) Soit μ une mesure réelle sur $(\mathcal{M}, X)$. Il existe deux ensembles A et B de $\mathcal{M}$ tels que $A \cup B = X,\ A \cap B = \emptyset$ et tels que les variations positive et négative μ^+ et μ^-de μ vérifient pour $E \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \mu^+(E) &= \mu(A \cap E), \\ \mu^-(E) &= -\mu(B \cap E) \end{aligned}$$

ce qui implique que $\mu^+ \perp \mu^-$.

En d'autres termes, X est la réunion de deux sous-ensembles mesurables disjoints qui sont tels que "A porte toute la masse positive de μ " et "B porte toute la masse négative de μ ". Le couple (A, B) est appelé la *décomposition de Hahn* de X induite par μ.

Définition 7.18. Soit μ une mesure positive sur $(\mathcal{M}, X)$ on dit que :

— μ est *extérieurement régulière* si pour tout $E \in \mathcal{M}$

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) \mid E \subset V,\ V \text{ ouvert}\}$$

— μ est *intérieurement régulière* si pour tout $E \in \mathcal{M}$

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset E,\ K \text{ compact}\}$$

— μ est *régulière* si elle est à la fois extérieurement et intérieurement régulière.

Théorème 7.19. (Théorème de représentation de Riesz) Soit X un espace séparé localement compact. Toute forme linéaire bornée Φ sur $C_0(X)$ est représentée par une unique mesure de Borel, complexe et régulière μ, i.e. pour tout $f \in C_0(X)$ on a

$$\Phi(f) = \int_X f d\mu$$

De plus, la norme de Φ est la variation totale de μ,

$$\|\Phi\| = |\mu|(X) = ||\mu||$$

Définition 7.20. On dit qu'un sous ensemble E d'un espace topologique est *σ-compact* s'il peut s'écrire comme réunion dénombrable de sous ensemble compact.

Théorème 7.21. Soit X un espace topologique, séparé, localement compact sur lequel tout ouvert est σ-compact. Soit λ une mesure de Borel positive. Si pour tout K compact de X on a $\lambda(K) < \infty$ alors λ est régulière.

Corollaire 7.22. Toute mesure de Borel complexe sur un espace topologique, séparé, compact est régulière.

Reformulons le théorème de Riesz dans le cadre qui nous intéresse :

Théorème 7.23. (Théorème de représentation de Riesz) Soit X un espace topologique séparé compact. Alors les applications

$$\begin{array}{rcl} L_c : \mathcal{M}(X) & \longrightarrow & \mathcal{C}^*(X), \\ \mu & \longmapsto & L_c(\mu) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} L_c : \mathcal{M}^+(X) & \longrightarrow & \mathcal{C}_+^*(X) \\ \mu & \longmapsto & L_+(\mu) \end{array},$$

sont des isométries bijectives. Où

$$L_c(\mu)(f) = \int_X f d\mu, \qquad L_+(\mu)(f) = \int_X f d\mu.$$

7.3 Dérivées supérieurs et inférieurs d'une mesure à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}$

Pour les démonstrations des différents résultats voir [1]. Notons m la mesure de Lebesgue.

Définition 7.24. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $s > 0$, on pose $I_{x,s} =]x - s, x + s[$. Soit μ une mesure à valeurs réelles et définie sur $\mathbb{R}$.

On appelle *dérivée supérieure* de μ en x la quantité

$$\bar{D}(\mu)(x) := \limsup_{s \to 0} \frac{\mu(I_{x,s})}{2s}.$$

On appelle *dérivée inférieure* de μ en x la quantité

$$\underline{D}(\mu)(x) := \liminf_{s \to 0} \frac{\mu(I_{x,s})}{2s}.$$

Proposition 7.25. Si $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ est positive alors $\bar{D}(\mu)$ et $\underline{D}(\mu)$ sont des fonctions boréliennes.

Proposition 7.26. Soit μ une mesure de Borel positive sur $\mathbb{R}$ non nécessairement finie mais telle que $\mu(K) < \infty$ pour tout compact K de $\mathbb{R}$ et soit A un borélien tel que $\mu(A) = 0$. Alors il existe un borélien $B \subset A$ tel que $m(B) = 0$ avec $\bar{D}(\mu)(x) = 0$ pour tout $x \in A \backslash B$.

Proposition 7.27. Si $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ est telle que $\mu \perp m$ alors

$$D(\mu)(x) := \lim_{s \to 0} \frac{\mu(I_{x,s})}{2s}$$

existe et est nul m-presque partout.

Proposition 7.28. Si $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ est telle que $\mu \ll m$ alors

$$D(\mu)(x) := \lim_{s \to 0} \frac{\mu(I_{x,s})}{2s}$$

existe et coïncide avec $f(x)$ m-presque partout où f est la fonction de $L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mu(E) = \int_E f(x)dx$ (théorème de Radon-Nikodym) pour tout borélien E de $\mathbb{R}$.

En combinant ces deux propositions avec la décomposition de Lebesgue-Radon-Nikodym (thèorème 7.14), nous obtenons :

Théorème 7.29. Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Alors il existe un unique couple de mesures (μ_a, μ_s) avec et $\mu_a \ll m$ et $\mu_s \perp m$ telles que $\mu = \mu_a + \mu_s$ et il existe une unique fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\begin{cases} \mu_s(E) = \int_E f(x)dx \text{ pour tout borélien } E \text{ de } \mathbb{R} \\ D(\mu)(x) := \lim_{s \to 0} \frac{\mu(]x-s,x+s[)}{2s} = f(x) \text{ m-presque partout.} \end{cases}$$

Autrement dit, si $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, alors $D(\mu)(x) \in L^1(\mathbb{R})$ et si on pose $\mu_a(E) := \mu(E) - \int_E D(\mu)(x)dx$ pour tout borélien E de $\mathbb{R}$ alors $\mu_s \perp m$.

Références

[1] Isabelle CHALENDAR - *ANALYSE FONCTIONNELLE : Fonctions Harmoniques, Classe de Nevanlinna, Espaces de Hardy, et une introduction aux opérateurs de Toeplitz et de Hankel.*

[2] Walter RUDIN - *Analyse réelle et complexe.*

[3] Marvin ROSENBLUM, James ROVNYAK - *Topics in Hardy classes and univalent functions.*

[4] Thomas RANSFORD - *Potential theory in the complex plane.*

[5] Arne Beurling - *On two problems concerning linear transformations in Hilbert space.*

[6] Joel Shapiro - *Composition Operators and Classical Function Theory.*