12 - Vergleich Abschätzung - Varianzfortpflanzung

Vergleichen Sie die Ergebnisse aus Beispiel (10) und Beispiel (11). Stimmen die Ergebnisse überein? Kommentieren/Erklären Sie warum die Ergebnisse übereinstimmen bzw. nicht übereinstimmen.

$$\text{Beispiel 10: } \Delta h = 11.28 \text{ mm}$$
$$\text{Beispiel 11: } s_h = 8.03 \text{ mm}$$

Beispiel 10 ist die Abweichung für den konkreten Fall $\Delta\zeta = 2 \text{ mgon}$ und $\Delta s = 5 \text{ mm}$. Beispiel 11 zeigt die Varianz an, wenn diese Werte die Standardabweichung bilden. Allerdings sind in einer Normalverteilung 2/3 der Werte geringer als die Standardabweichung - kleinere Fehler treten häufiger auf, der erwartete Fehler ist daher geringer.

13 - Varianzfortpflanzung bei Koordinatenumrechung

Berechnen Sie die Standardabweichung der Koordinatendifferenzen aus Beispiel (5) unter der Annahme, dass der Richtungswinkel eine Standardabweichung von 1.5 mgon und die Distanz eine Standardabweichung von 5 mm hat. (Diese Größen werden als untereinander unkorreliert angesehen.)

$$
\begin{aligned}
t_{\mathrm{AB}} &= 381.720 \mathrm{gon} \pm 1.5 \mathrm{mgon} \\
s_{\mathrm{AB}} &= 201.344 m \pm 5 \mathrm{mm}
\end{aligned}
$$

Funktionaler Zusammenhang:

$$
\begin{aligned}
f_1 &: x = s \sin t \\
f_2 &: y = s \cos t
\end{aligned}
$$

Totale Differentiale:

$$
\begin{aligned}
s_x &= \sqrt{\left(\frac{\delta f_1}{\delta s}\right)^2 s_s^2 + \left(\frac{\delta f_1}{\delta t}\right)^2 s_t^2} = \sqrt{(\sin t)^2 s_s^2 + (s \cos t)^2 s_t^2} \\
s_y &= \sqrt{\left(\frac{\delta f_2}{\delta s}\right)^2 s_s^2 + \left(\frac{\delta f_2}{\delta t}\right)^2 s_t^2} = \sqrt{(\cos t)^2 s_s^2 + (-s \sin t)^2 s_t^2}
\end{aligned}
$$

Eingesetzt:

$$
\begin{aligned}
s_x &= \sqrt{(\sin 381.720 \mathrm{gon})^2 (5 \mathrm{mm})^2 + ((201.344 m)(\cos 381.720 \mathrm{gon}))^2 (1.5 \mathrm{mgon})^2} = 4.8 \ \mathrm{mm} \\
s_y &= \sqrt{(\cos 381.720 \mathrm{gon})^2 (5 \mathrm{mm})^2 + ((-201.344 m)(\sin 381.720 \mathrm{gon}))^2 (1.5 \mathrm{mgon})^2} = 5.0 \ \mathrm{mm}
\end{aligned}
$$

14 - Teilkreisorientierung

Wie groß ist die Standardabweichung der berechneten Teilkreisorientierung aus Beispiel (6), wenn die Standardabweichung der gemessenen Richtungen jeweils 1 mgon beträgt, und jene der gegebenen Koordinaten jeweils 1 cm (alle Größen untereinander unkorreliert).

Funktionaler Zusammenhang:

$$f : O = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - R$$

Differentiale:

$$\frac{\delta f}{\delta y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$
$$\frac{\delta f}{\delta x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$
$$\frac{\delta f}{\delta R} = -1$$

Varianzfortpflanzung:

$$s_x = \sqrt{2} \cdot 1 \text{ cm (Durch Subtraktion zweier fehlerbehafteter Koordinaten)}$$
$$s_y = \sqrt{2} \cdot 1 \text{ cm}$$
$$s_R = 1 \text{ mgon}$$
$$s_O = \sqrt{\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)^2 s_y^2 + \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right)^2 s_x^2 + (-1)^2 s_R^2}$$

von	**nach**	**dy [m]**	**dx [m]**	**R [gon]**	s_O **[mgon]**
P10	P11	0	5	204.7964	2.823
P10	P14	45.74	20.21	278.3129	0.281
P10	P71	-319.02	-385.0	48.8534	0.032

15 - Polarpunktberechnung

Berechnen Sie die Standardabweichung der Koordinaten der Neupunkte NA und NB aus Beispiel (8) unter der Annahme, dass keine der Eingangsgrößen fix ist. Nehmen Sie z.B. an, die Standardabweichung der gemessenen Richtungen betrage jeweils 1 mgon, jene der Distanzen jeweils 5 mm, und jene der gegebenen Koordinaten jeweils 1 cm.

Funktionaler Zusammenhang:

$$f_1 : y = d \sin R + y_{10}$$
$$f_2 : x = d \cos R + x_{10}$$

Differentiale:

$$\frac{\delta f_1}{\delta d} = \sin R \qquad \frac{\delta f_2}{\delta d} = \cos R$$
$$\frac{\delta f_1}{\delta R} = d \cos R \qquad \frac{\delta f_2}{\delta R} = -d \sin R$$
$$\frac{\delta f_1}{\delta y_{10}} = 1 \qquad \frac{\delta f_2}{\delta x_{10}} = 1$$

Varianzfortpflanzung:

$$s_d = 5 \text{ mm}$$
$$s_R = 1 \text{ mgon}$$
$$s_{x_{10}} = s_{y_{10}} = 1 \text{ cm}$$
$$s_y = \sqrt{(\sin R)^2 s_d^2 + (d \cos R)^2 s_R^2 + (1)^2 s_{y_{10}}^2}$$
$$s_x = \sqrt{(\cos R)^2 s_d^2 + (-d \sin R)^2 s_R^2 + (1)^2 s_{x_{10}}^2}$$

von	nach	R [gon]	d [m]	s_y [mm]	s_x [mm]
P10	NA	87.8787	172.081	11.15	10.39
P10	NB	207.4406	19.994	10.02	11.17

16 - Allgemeiner Richtungsschnitt

Bei der Messung für einen Polygonzug von KT 130-152 nach KT 136-152 wurden im Anfangs und Endpunkt Richtungen zu den Hochzielen 1-152, 14-152 und einem weiteren Punkt (Stangensignal) gemessen, dessen Punktbezeichnung und Lage Sie vorerst nicht kennen. Sie wollen ihn aber für die Berechnung der Orientierung bei der späteren Polygonzugsauswertung verwenden. Ermitteln Sie die (Näherungs-) Koordinaten des unbekannten Punktes mittels allgemeinem Richtungsschnitt, damit Sie ihn am zuständigen Vermessungsamt erheben können! Koordinatenverzeichnis: GK (M31), auf m gerundet

Pkt.-Nr.	y [m]	x [m]	Anmerkung
130-152	-60751	5207637	Anfangspunkt Polygonzug
136-152	-61001	5208713	Endpunkt Polygonzug
1-152	-60176	5207125	Kirche Matrei, Knaufv
14-152	-59252	5212812	Nüssingkogel, Stg.-Signal
Unbekannt			*Unbek. Gipfel, Stg.-Signal*

Messdaten im Anfangs- und Endpunkt des Polygonzugs

von	nach	R [g]	Anmerkung
130-152	1-152	144.314	Kirche Matrei, Knauf
	14-152	15.949	Nüssingkogel, Stg.-Signal
	Unbekannt	42.715	Unbekannt, Stg.-Signal
136-152	1-152	166.497	Kirche Matrei, Knauf
	14-152	22.675	Nüssingkogel, Stg.-Signal
	Unbekannt	60.936	Unbekannt, Stg.-Signal

Zunächst wird die Orientierung in den Punkten 130-152 und 136-152 berechnet. Dazu wird die Koordinatendifferenz aus dem Messpunkt zu den bekannten Hochzielen berechnet, daraus der Richtungswinkel bestimmt und von der gemessenen Richtung abgezogen:

$$O = \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) - R$$

$$O_{130\text{-}152} = 2.00\text{gon}$$
$$O_{136\text{-}152} = 3.00\text{gon}$$

Mittels der Orientierung können nun die unorientierten gemessenen Winkel zum unbekannten Punkt korrigiert werden:

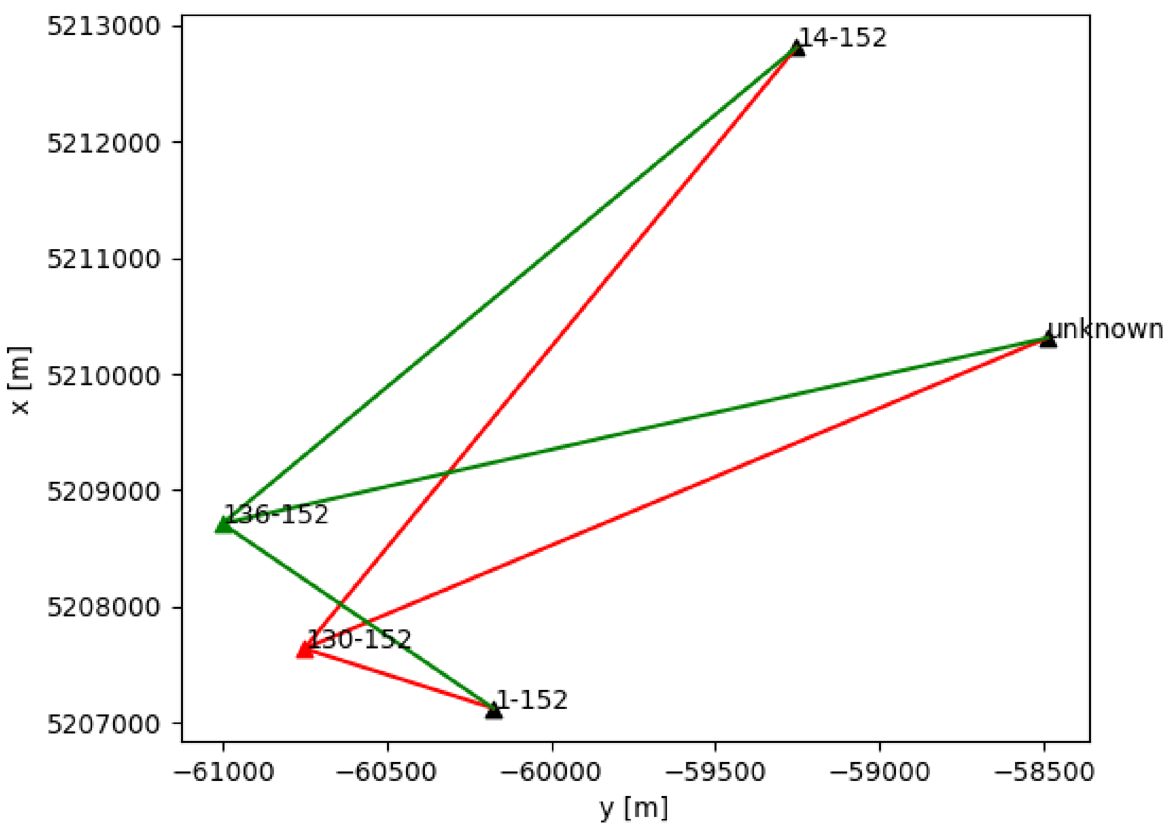
$$t_{130\text{-}152} = 2.00\text{gon} + 42.715\text{gon} = 44.715\text{gon}$$
$$t_{136\text{-}152} = 3.00\text{gon} + 60.936\text{gon} = 63.936\text{gon}$$

Und dann mithilfe eines Vorwärtsschnitts (ausgehend von den Punkten 130-152 und 136-152) die Koordinaten des unbekannten Punktes berechnet werden:

$$d_{12}, t_{12} = \text{HA2}(p_1, p_2)$$
$$d_{13} = d_{12}\frac{\sin(t_{23} - t_{12})}{\sin(t_{23} - t_{13})}$$
$$p_3 = \text{HA1}(p_1, d_{13}, t_{13})$$

Damit ergeben sich die Koordinaten des unbekannten Punktes:

$$y = -58487m$$
$$x = 5210312m$$



17 - Nivelliertest

Je eine Nivellierlatte steht auf den Punkten A und B (Abstand ca. 60m). Das Nivellier wird insgesamt 10 Mal (ISO: 20 Mal) ungefähr in der Mitte zwischen den Latten aufgestellt, und jeweils eine Ablesung auf beiden Latten durchgeführt (Rück- und Vor-Lesung). Der Höhenunterschied zwischen den Punkten A und B, sowie seine empirische Standardabweichung sind gesucht.

Messung	**rück [m]**	**vor [m]**
1	1.767	1.275
2	1.691	1.200
3	1.734	1.235
4	1.722	1.228
5	1.759	1.265
6	1.753	1.252
7	1.722	1.219
8	1.675	1.180
9	1.756	1.256
10	1.718	1.222

Höhendifferenz:

$$\Delta h = h_{\text{vor}} - h_{\text{rück}}$$

Mittelwert:

$$\mu_{\Delta h} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Delta h_i = -0.4965\ m$$

Standardabweichung:

$$s_{\overline{\Delta h}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\Delta h_i - \mu_{\Delta h}\right)^2} = 4.03\ \text{mm}$$

18 - Gruppenweise Mittelbildung (gewichtetes Mittel)

Der Höhenunterschied zwischen den Punkten A und B aus Beispiel (17) soll zunächst für die Gruppen der Beobachtungen 1,2 sowie 3, 4,...,10 getrennt berechnet werden. Aus diesen beiden Mitteln ist das Gesamtmittel zu berechnen und mit dem Ergebnis von vorhin zu vergleichen. Was muss bei der Mittelung der Gruppenergebnisse beachtet werden?

Bei Differenzbildung einzelner Werte kann stattdessen auch die Differenz aus den Mittelwerten genommen werden.

Bei der Standardabweichung müssen die einzelnen Terme quadriert und dann die Wurzel gezogen werden:

$$s_{\mathrm{Diff}} = \sqrt{s_{\mathrm{vor}}^2 + s_{\mathrm{rück}}^2}$$

Gruppe	μ **[m]**	s **[mm]**
vor	1.2332	29.67
rück	1.730	30.27
Differenz	-0.4965	42.39
Differenz (Aufgabe 17)	-0.4965	4.03

Es fällt auf, dass der Mittelwert der Höhenunterschiede auf beiden Rechenwegen identisch ist, die Standardabweichung sich aber deutlich unterscheidet. Die Ursache dafür ist, dass die Höhenmessung nach vorne und hinten nicht unabhängig, sondern korreliert sind. Grund dafür dürfte die ungenaue Positionierung des Nivelliers zwischen den beiden Punkten sein - dadurch ändert sich zwar nicht die Höhendifferenz (bei einem ausreichend kalibrierten Nivellier), jedoch die einzelnen Höhenmessungen pro Latte unterscheiden sich, je nachdem wie nah das Nivellier an der Latte steht.