Geomathematik II
SS2023

Übungsbeispiele ... „Flächentheorie“

1. Ein Torus sei gegeben durch:

$$\mathbf{x}(\delta,\lambda) = \begin{bmatrix} (4+\cos\delta)\cos\lambda \\ (4+\cos\delta)\sin\lambda \\ \sin\delta \end{bmatrix}, \quad 0 \le \delta, \lambda < 2\pi.$$

   Man berechne

   (a) die ersten und zweiten Fundamentalgrößen dieser Fläche;
   (b) den Inhalt des Flächenstückes zwischen $\delta = 0^o, \delta = 30^o$ und $\lambda = 0^o, \lambda = 60^o$;
   (c) die Hauptkrümmungen und zugehörigen Hauptkrümmungsrichtungen;
   (d) die Gaußsche Krümmung zur Charakterisierung der Flächenpunkte nach elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Kategorien.

2. Gegeben sei folgende Parameterdarstellung eines Torus:

$$\mathbf{x}(\vartheta,\lambda) = \begin{bmatrix} (3+2\sin\vartheta)\cos\lambda \\ (3+2\sin\vartheta)\sin\lambda \\ 2\cos\vartheta \end{bmatrix}, \quad 0 \le \vartheta, \lambda < 2\pi.$$

   Ausgehend von einem Punkt auf der λ-Linie mit $\vartheta = 30^o$ schreitet man entlang der ϑ-Linie bzw. λ-Linie um ein kleines Stück ds=0.004 fort. Gesucht ist näherungsweise die Änderung des Parameters ϑ bzw. des Parameters λ, welche dem Wegstück entspricht.

3. Man gebe für den Torus in allgemeiner Form eine implizite Darstellung an.

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{bmatrix} (a+b\cos u)\cos v \\ (a+b\cos u)\sin v \\ b\sin u \end{bmatrix}, \quad a, b = konst. \quad u. \quad a, b > 0.$$

4. Ein Kreis mit dem Radius $r = 2$ liegt in der (x_1, x_2)-Ebene und besitzt einen Mittelpunkt mit dem Ortsvektor $\mathbf{x} = (3, 0, 0)^T$. Durch Rotation desselben um die x_2-Achse entsteht ein Torus für dessen elliptische Flächenpunkte die implizite Darstellung anzugeben ist.

5. Ein Einheitskreis liegt in der (x_2, x_3)-Ebene eines kartesischen Koordinatensystems und besitzt einen Mittelpunkt mit dem Ortsvektor $\mathbf{m} = (0, 3, -3)^T$. Durch Rotation desselben um eine durch den Koordinatenursprung verlaufende Achse mit der Richtung $\omega = (0, 1, 1)^T$ entsteht ein Torus für dessen Punkte ein Ortsvektor $\mathbf{x}(\delta, \lambda)$ in Parameterform mit $(0 \leq \delta, \lambda < 2\pi)$ anzugeben ist. Die δ-Linien sind Kreise, die durch Schnitte des Torus mit Ebenen entstehen, welche die Rotationsachse enthalten, die λ-Linien sind Kreise, die durch Schnitte des Torus mit zur Rotationsachse normalen Ebenen erzeugt werden.

6. Welches infinitesimal kleine Stück ds schreitet man ausgehend vom Punkt $\varphi_0 = 45^o$ auf der φ-Linie nachfolgender Fläche $\mathbf{x}(\varphi, \lambda)$ voran, wenn man φ_0 um $d\varphi = 1'$ ändert. Spielt φ entlang der Parameterlinie die Rolle einer Bogenlänge? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\mathbf{x}(\varphi, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{4\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}} \begin{bmatrix} 4\cos\varphi\cos\lambda \\ 4\cos\varphi\sin\lambda \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$$

7. Auf der Fläche $\mathbf{x}(r, \lambda)$ schreitet man ausgehend vom Punkt P_0 mit dem Ortsvektor $\mathbf{x}_0$ ein infinitesimal kleines Stück $ds = 0.05$ unter einem Winkel $\alpha = 30^o$ zur r-Linie voran. Man berechne in erster Näherung die sich dadurch ergebenden Parameteränderungen dr und $d\lambda$.

$$\mathbf{x}(r, \lambda) = \begin{bmatrix} 3r\cos\lambda \\ 2r\sin\lambda \\ r^2 \end{bmatrix}, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \lambda < 2\pi; \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad .$$

8. Auf der Einheitskugel $\mathbf{x}(\varphi, \lambda)$ sei eine Loxodrome $\mathbf{x}(t)$ $(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2})$ wie folgt definiert:

$$\varphi(t) = t, \qquad \lambda(t) = \ln\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right) \quad .$$

Ausgehend vom Schnittpunkt A der Loxodrome mit dem Äquator schreitet man auf der Flächenkurve in Richtung des positiven Kurvenparameters t ein

Wegstück von 0.8 [LE] voran und gelangt zum Punkt B, dessen Kugelkoordinaten zu berechnen sind.

9. Gegeben ist das elliptische Paraboloid $bx^2 + ay^2 = 2abz$ mit $a, b = konst.$ u. $a, b > 0$. Auf dieser Fläche definiere man nun ein Parameternetz p, q wobei $p = \frac{x}{a}$ und $q = \frac{y}{b}$ gelten soll. Weiters gebe man einen allgemeinen Ausdruck für den Schnittwinkel zwischen den Parameterlinien auf dieser Fläche an.

10. Auf der Kugel $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\varphi, \lambda)$ $(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},\quad 0 \leq \lambda < 2\pi)$ mit dem Radius R sei eine Flächenkurve durch $\varphi = t$ und $\lambda = t$ gegeben. Man berechne den Schnittwinkel dieser Kurve mit dem Äquator und das begleitende Dreibein in diesem Schnittpunkt.

11. Auf der Einheitskugel sei eine Flächenkurve $(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2})$ wie folgt definiert:

$$\vartheta(t) = \frac{\pi}{2} - t, \qquad \lambda(t) = \ln\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right) \quad .$$

Zeige, daß der Schnittwinkel zwischen dieser Kurve und den Parameterlinien der Kugel in allen Punkten gleich ist, wobei die Parameterdarstellung der Kugel gegeben sei durch:

$$\mathbf{x}(\vartheta, \lambda) = \begin{bmatrix} \sin\vartheta\cos\lambda \\ \sin\vartheta\sin\lambda \\ \cos\vartheta \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \lambda < 2\pi.$$

12. Man gebe den Parameter u_p $\quad (0 \leq u_p \leq \frac{\pi}{2})$ jenes Punktes an, in dem der Winkel zwischen der u-Linie nachfolgender Fläche $\mathbf{x}(u, v)$ und der Flächenkurve $[u(t) = 2t, v(t) = \sqrt{13}t]$ 45^o beträgt!

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{bmatrix} 2\cos u\cos v \\ 2\cos u\sin v \\ \sin u \end{bmatrix}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq v < 2\pi.$$

13. Eine Flächenkurve $(\varphi(t) = t, \lambda(t))$ auf der Einheitskugel geht durch den Schnittpunkt von Nullmeridian und Äquator. Für den Winkel α zwischen den φ-Linien und der Flächenkurve gilt $\tan\alpha = \cos t$. Man gebe die Parameterdarstellung

$\mathbf{x}(t)$ der Flächenkurve an.

14. Eine Flächenkurve $(\vartheta(t) = 2t, \lambda(t))$ auf der Einheitskugel $\mathbf{x}(\vartheta, \lambda)$ geht durch den Punkt P_0 am Äquator mit $\lambda_0 = 90°$. Für den Winkel α zwischen den ϑ-Linien und der Flächenkurve gilt: $\tan\alpha = 3\sin 2t$. Man gebe die Parameterdarstellung $\mathbf{x}(t)$ der Flächenkurve an. Bemerkung: ϑ ist die Poldistanz.

15. Auf einem Zylinder in nachfolgender Parameterdarstellung sei eine Schraubenlinie durch $u = at, \quad v = t \quad (a = konst.)$ definiert. Man berechne den Winkel zwischen u-Linie und dieser Flächenkurve und prüfe, ob die Schraubenlinie eine geodätische Linie darstellt.

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{bmatrix} \cos v \\ \sin v \\ u \end{bmatrix}$$

16. Für die v-Linien nachfolgender Fläche beantworte man folgende Fragen und begründe die Antwort rechnerisch.

    (a) Handelt es sich um eine Schar ebener Kurven?

    (b) Handelt es sich um eine Schar von Kreisen?

    (c) Handelt es sich um eine Schar geodätischer Linien?

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{bmatrix} u\cos u\,(4 + \cos(u+v)) \\ u\sin u\,(4 + \cos(u+v)) \\ u\sin(u+v) \end{bmatrix}, \quad 0 < u \leq 4\pi, \quad 0 \leq v < 2\pi.$$

17. Für die nachfolgende Fläche führe man folgende Teilaufgaben durch:

    (a) Man beweise, daß es sich bei den v-Linien um Kreise handelt und berechne deren Radius und Mittelpunkt.

    (b) Gibt es unter den v-Linien geodätische Linien. Wenn ja, für welches u_0?

    (c) Für eine v-Linie mit vorgegebenem Radius r bestimme man die Parameter von Punkten mit einer geodätischen Krümmung $\kappa_g = 0$.

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{bmatrix} u\cos u\,(8 + 2\cos(u+v)) \\ u\sin u\,(8 + 2\cos(u+v)) \\ 2u\sin(u+v) \end{bmatrix}, \quad 0 < u \leq 4\pi, \quad 0 \leq v < 2\pi.$$

18. Auf dem Zylinder $\mathbf{x}(h,\lambda)$ ist eine Flächenkurve durch $\lambda = ch \quad (c = konst.)$ gegeben. Man bestimme die geodätische Krümmung der Kurve.

$$\mathbf{x}(h,\lambda) = \begin{bmatrix} a\cos\lambda \\ a\sin\lambda \\ h \end{bmatrix}, \quad a = konst.$$

19. Auf dem Kegel $\mathbf{x}(r,\lambda)$ ist eine Flächenkurve durch $r(t) = t^2$ und $\lambda(t) = t$ definiert. Man berechne die Normalkrümmung in Richtung der Flächenkurve für einen beliebigen Kurvenpunkt in Funktion von t.

$$\mathbf{x}(r,\lambda) = \begin{bmatrix} r\cos\lambda \\ r\sin\lambda \\ r \end{bmatrix}$$

20. Man diskutiere die Normalkrümmung und die geodätische Krümmung für Meridiane und Parallelkreise einer Kugel $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\varphi,\lambda)$ mit dem Radius R, berechne die Hauptkrümmungen und zeige rechnerisch, daß die Kugel ausschließlich aus Nabelpunkten besteht.

21. Auf der Einheitskugel $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\varphi,\lambda)$ sind für die durch $\lambda = 2\varphi \quad (0^o \leq \varphi \leq 90^o)$ gegebene Kurve im Punkt $\varphi = 45^o$ das begleitende Dreibein, das Azimut, sowie geodätische Krümmung und Normalkrümmung zu berechnen.

22. Auf nachfolgender Fläche ist eine Flächenkurve durch $27v = u^3$ gegeben. Es ist die geodätische Krümmung dieser Kurve im Punkt $u = 3$ zu bestimmen, und weiters die Bogenlänge zwischen diesem Punkt und dem Koordinatenursprung.

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{bmatrix} u - v \\ \frac{u^2}{3} \\ u + v \end{bmatrix}$$

23. Für welches $\beta \quad (-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2})$ der angegebenen Fläche $\mathbf{x}(\beta,\gamma)$ hat die geodätische Krümmung der entsprechenden γ-Linie $(0 \leq \gamma < 2\pi)$ den Wert $\kappa_g = \frac{\sqrt{3}}{3}$?

$$\mathbf{x}(\beta,\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\beta \\ (1+\sin\beta)\cos\gamma \\ (1+\sin\beta)\sin\gamma \end{bmatrix}$$

24. Man bestimme die Hauptkrümmungsradien des nachfolgenden Rotationsellipsoides am Äquator und am Pol.

$$\mathbf{x}(\beta,\lambda) = \begin{bmatrix} a\cos\beta\cos\lambda \\ a\cos\beta\sin\lambda \\ b\sin\beta \end{bmatrix}, \quad a,b = konst. \quad u. \quad a,b > 0.$$

25. In einem Punkt einer Fläche im dreidimensionalen Raum (F=M=0) besitzt die Normalkrümmung entlang der u-Linie den Wert 2 und jene entlang der Richtung in einem Winkel von 30^o zur u-Linie den Wert $\frac{5}{4}$. Man berechne die Normalkrümmung unter einem Winkel von 60^o zur u-Linie, die Normalkrümmung entlang der v-Linie und klassifiziere den Flächenpunkt auf Grund der Hauptkrümmungen. Weiters gebe man den Winkel einer Richtung zur u-Linie an, in der die Normalkrümmung den Wert $\frac{1}{2}$ besitzt.

26. Gegeben ist das Rotationsellipsoid:

$$\mathbf{x}(\beta,\lambda) = \begin{bmatrix} 5\cos\beta\cos\lambda \\ 5\cos\beta\sin\lambda \\ 3\sin\beta \end{bmatrix} \quad .$$

Für einen beliebigen Punkt auf der λ-Linie mit $\beta = 30^o$ berechne man die Flächenkrümmungen des Ellipsoides entlang den durch $d\beta = d\lambda$ bzw. $d\beta = -d\lambda$ vorgegebenen Richtungen und den Winkel zwischen diesen Richtungen.

27. Gegeben ist das Rotationsellipsoid:

$$\mathbf{x}(\beta,\lambda) = \begin{bmatrix} 5\cos\beta\cos\lambda \\ 5\cos\beta\sin\lambda \\ 3\sin\beta \end{bmatrix} \quad .$$

Für einen beliebigen Punkt auf der λ-Linie mit $\beta = 30^o$ berechne man den Winkel zwischen den Richtungen, entlang welchen sich die Fläche mit $\frac{1}{R} = 0.25$ krümmt.

28. Auf dem gegebenen Paraboloid ist der Inhalt jenes Flächenstückes zu berechnen, für das gilt: $0 \leq \lambda < 2\pi$ u. $0 \leq a \leq 1$. Außerdem sind Mittelpunkt, Radius und Parameterdarstellung jener Kugel zu suchen, welche sich im Punkt $z = 0$

an das Paraboloid anschmiegt.

$$\mathbf{x}(a,\lambda) = \begin{bmatrix} a\cos\lambda \\ a\sin\lambda \\ \frac{a^2}{4} \end{bmatrix}, \quad 0 \le a \le 10, \quad 0 \le \lambda < 2\pi.$$

29. Die Schmiegungskugel in einem Punkt P einer Fläche hat den Radius $R = 5$. Die Tangentialebene an die Fläche in P lautet $\epsilon : 2x - y + 3z = 10$. Eine Flächenkurve hat in P den Hauptnormalenvektor $\mathbf{n} = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, n_3)^T$ mit $n_3 \ge 0$. Man berechne die geodätische Krümmung der Flächenkurve in P.

30. Für eine bestimmte Richtung in einem Punkt P einer Fläche hat die Schmiegungskugel den Mittelpunkt $\mathbf{m} = (4,2,6)^T$. Die Tangentialebene an die Fläche in P lautet $\epsilon : 2x - y + 3z = 10$. In besagter Richtung hat eine Flächenkurve in P den Hauptnormalenvektor $\mathbf{n} = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, n_3)^T$ mit $n_3 \ge 0$. Für diese Flächenkurve gebe man an: die Koordinaten des Mittelpunktes des Schmiegungskreises an die Kurve in P und die Gleichung der Tangente an die Kurve in P.

31. Man charakterisiere die Punkte der angegebenen Fläche und gebe eine implizite Darstellung an.

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{bmatrix} u+v \\ u-v \\ u \cdot v \end{bmatrix}$$

32. Man klassifiziere die Flächenpunkte nachfolgender Fläche und gebe einen allgemeinen Ausdruck für die Normalkrümmung in der durch $du = dv$ gegebenen Richtung an.

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ u \cdot v \end{bmatrix}$$

33. Beschreibe die implizit angegebene Fläche $x_1 x_2 - x_3 = 0$ im Koordinatenursprung hinsichtlich Krümmungsverhalten und hinsichtlich der Richtung ihrer Krümmungslinien, wenn man die x_1- bzw. x_2-Koordinate als Flächenparameter ansetzt.

34. Man klassifiziere die folgende Fläche nach der Art ihrer Flächenpunkte. Kann es auch Nabelpunkte geben?

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{bmatrix} \cosh u \cos v \\ \cosh u \sin v \\ au \end{bmatrix}, \quad a = konst. \quad u. \quad a > 0.$$

35. Eine durch $f(u)$ $(0 \leq u \leq const.)$ gegebene Funktion erzeugt, als Meridiankurve interpretiert, durch Rotation um die z-Achse eine Rotationsfläche $\mathbf{x}(u,v)$, wobei die Parameterlinien durch die Meridiankurven (u-Linien) bzw. durch die auf Grund der Rotation enstehenden „Parallelkreise“ (v-Linien) festgelegt sind.

    (a) Für eine durch ein allgemeines $f(u)$ gegebene Rotationsfläche $\mathbf{x}(u,v)$ ist die Gaußsche Krümmung K als $K(u, f'(u), f''(u))$ anzugeben.

    (b) Auf dem Ergebnis aus (a) aufbauend ist die Gaußsche Krümmung für nachfolgendes spezielle $f(u)$ anzugeben.

$$f(u) = \ln \frac{1+\sqrt{1-u^2}}{u} - \sqrt{1-u^2}, \quad 0 < u \leq 1$$

36. Die durch $f(u) = e^{-u^2}$ $(0 \leq u < \infty)$ gegebene Funktion erzeugt, als Meridiankurve interpretiert, durch Rotation um die z-Achse eine Rotationsfläche $\mathbf{x}(u,v)$, wobei die Parameterlinien durch die Meridiankurven (u-Linien) bzw. durch die auf Grund der Rotation enstehenden „Parallelkreise“ (v-Linien) festgelegt sind. Man berechne die Hauptkrümmungen, die Gauß'sche und mittlere Krümmung in einem beliebigen Flächenpunkt, weiters die Krümmung, geodätische Krümmung und Normalkrümmung für $u-$ und $v-$Linien und interpretiere jene Ergebnisse, für die Erklärungsbedarf gegeben ist.

37. Gegeben sei eine Fläche, die durch Rotation der Gaußschen Glockenkurve $z = z(x)$ um die z-Achse entsteht. Man gebe die Fläche durch eine Wahl geodätischer Parallelkoordinaten in Parameterdarstellung an und diskutiere (formal) die Einführung eines geodätischen Polarkoordinatensystems. Weiters teile man die Fläche in Bereiche auf, die nur elliptische bzw. hyperbolische bzw. parabolische Flächenpunkte enthalten.

$$z(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

38. Man berechne die Gaußsche Krümmung für eine Rotationsfläche, die durch Drehung der Parabel $z = \frac{r^2}{2}$ um die z-Achse entsteht. Außerdem ist der Flächeninhalt jenes Teiles der Rotationsfläche zu bestimmen, welcher durch die Ebene

$z = 1$ abgeschnitten wird.

39. Die Funktion $z(r) = 1 - \cos r$ mit $0 \leq r \leq \frac{5\pi}{4}$ rotiert um die z-Achse. Wählen Sie eine geeignete Parameterdarstellung der entstehenden Rotationsfläche und geben Sie die Menge aller Punkte an, in welchen sich die Fläche in Richtung der einen oder der anderen Parameterlinie nicht krümmt.

40. Man bestimme die Gaußsche Krümmung einer Fläche, deren Bogenelement gegeben ist durch:
$$ds = \sqrt{dr^2 + e^{-2r} d\varphi^2} \quad .$$

41. Man bestimme die Gaußsche und mittlere Krümmung des elliptischen Paraboloids:
$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad .$$

42. Auf dem Bessel'schen Rotationsellipsoid ($a = 6377397.155m$, $b = 6356078.963m$) ist für Graz ($\varphi = 47^o 05'$, $\lambda = 15^o 22'$) die mittlere Flächenkrümmung zu berechnen. Die Parameterdarstellung des Ellipsoides in geographischen Parametern lautet:
$$\mathbf{x}(\varphi, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \begin{bmatrix} a^2 \cos\varphi \cos\lambda \\ a^2 \cos\varphi \sin\lambda \\ b^2 \sin\varphi \end{bmatrix} \quad .$$

43. In der (x, y)-Ebene sei eine Kurve durch $y = \frac{x^2}{4}$ gegeben. Durch Rotieren dieser Kurve um die y-Achse entsteht eine Fläche im dreidimensionalen Raum. Auf dieser Fläche ist ein System von geodätischen Parallelkoordinaten zu definieren. Die Gaußsche Krümmung im Punkt $x = y = z = 0$ ist anzugeben. Außerdem ist der Flächeninhalt jenes Teiles der Rotationsfläche zu bestimmen, welcher durch die Ebene $y = 1$ abgeschnitten wird.

44. Nachfolgendes Rotationsparaboloid $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ hat Hauptkrümmungsrichtungen, die nicht mit den Parameterlinien zusammenfallen. Die Fläche ist durch Parameter darzustellen, welche die richtungsmäßige Übereinstimmung

von Parameter- und Krümmungslinien gewährleisten. Außerdem sind im Punkt $u = 2, \quad v = 1$ die beiden Hauptkrümmungen und die Normalkrümmung in der durch $du = dv$ gegebenen Richtung zu bestimmen.

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 \end{bmatrix}$$

45. Gesucht sind eine Charakterisierung der Flächenpunkte, die Richtung der Krümmungslinien im Punkt $u = v = 0$ und die Krümmung der Flächenkurve $u = \frac{1}{\sqrt{3}} v$ in diesem Punkt für die Fläche:

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 4u^2 + v^2 \end{bmatrix} \quad .$$

46. Zeige, daß durch Rotation nachfolgender Schleppkurve um die z-Achse eine Fläche hyperbolischer Flächenpunkte konstanter Gaußscher Krümmung entsteht.

$$z(u) = \pm \left(\ln \frac{1 + \sqrt{1 - u^2}}{u} - \sqrt{1 - u^2} \right), \quad 0 < u \leq 1$$

47. Die Kurve $z(r) = ar^3 + 4r^2$ mit $(r \geq 0)$ rotiert um die z-Achse und erzeugt, als Meridiankurve interpretiert, eine Rotationsfläche $\mathbf{x}(r, \lambda)$, wobei die Parameterlinien durch die Meridiankurven (r-Linien) bzw. durch die auf Grund der Rotation entstehenden „Parallelkreise“ (λ-Linien) festgelegt sind.

    Bestimme a derart, daß in den Flächenpunkten mit $r = \frac{1}{3}$ für die Meridiankurven die geodätische Krümmung gleich der Normalkrümmung ist!

48. Auf dem nachfolgenden Helikoid ist die Richtung einer Flächenkurve durch $du = -dv$ gegeben. Im Punkt P_0 besitzt sie eine Krümmung $\kappa = 1/4$. Man berechne den Betrag ihrer geodätischen Krümmung $|\kappa_g|$.

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{bmatrix} 2u \cos v \\ 2u \sin v \\ 3v \end{bmatrix}; \qquad P_0 : \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ z_0 \end{bmatrix}, \, u_0 > 0$$

49. Für nachfolgende Wendelfläche berechne man die Hauptkrümmungen, gebe den Winkel einer der Hauptkrümmungsrichtungen zur u-Linie an und zeige, daß es sich um eine Minimalfläche handelt.

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{bmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ av \end{bmatrix}, \quad a = konst. \quad u. \quad a > 0.$$

50. Man bestimme die Normalkrümmungen $({}^1/R_u, {}^1/R_v)$ entlang der u- bzw. v-Linien nachfolgender Wendelfläche in Flächenpunkten mit u=1.

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{bmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ 3v \end{bmatrix}$$

51. Auf nachfolgender Fläche schreitet man ausgehend von einem Punkt P_0 mit $u_0 = 1$ entlang einer Richtung mit einer Flächenkrümmung $\frac{1}{R} = \frac{1}{4}$ ein Stück $ds = 0.05$ voran und gelangt zu einem Punkt P. Man berechne für jede mögliche dieser Richtungen die mittels der Parameterlinien durch P_0 und P aufgespannte Fläche in erster Näherung.

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{bmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ v \end{bmatrix}$$

52. Die Kurve $z(r) = -r^3 + 3r^2$ mit $(0 \leq r \leq 2)$ rotiert um die z-Achse und erzeugt, als Meridiankurve interpretiert, eine Rotationsfläche $\mathbf{x}(r,\lambda)$, wobei die Parameterlinien durch die Meridiankurven (r-Linien) bzw. durch die auf Grund der Rotation entstehenden „Parallelkreise“ (λ-Linien) festgelegt sind.

   (a) Man gebe jenes bestimmte Integral an, welches dem Inhalt des Flächenstückes im Bereich der elliptischen Flächenpunkte entspricht.

   (b) Gesucht ist ein allgemeiner Ausdruck $\omega(r)$ für den Winkel zwischen Richtungen mit verschwindender Flächenkrümmung im Bereich der hyperbolischen Flächenpunkte.

   (c) Für die durch $dr = d\lambda$ vorgegebene Richtung sind die Differentialgleichungen der geodätischen Linie allgemein durch Ausdrücke $r'' = r''(r)$ u. $\lambda'' = \lambda''(r)$ anzugeben.

(d) Gibt es auf der Fläche Punkte, in welchen für die Meridiankurven einerseits bzw. die Parallelkreise andererseits die geodätische Krümmung betragsmäßig gleich der Normalkrümmung ist? Wenn ja, gebe man dafür Werte von r oder zumindest Gleichungen in r an.

(e) Man gebe (formal) den Weg jener Parametertransformation $\mathbf{x}(r, \lambda) \Rightarrow \mathbf{x}(\ell, \lambda)$an, so daß eine 1. Fundamentalform $ds^2 = d\ell^2 + G(\ell) d\lambda^2$ resultiert.

53. Gegeben sei die Fläche:

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{bmatrix} u \cos v / \cosh v \\ u \sin v / \cosh v \\ u \tanh v \end{bmatrix} \quad .$$

Man beantworte folgende Fragen und begründe die Antworten:

(a) Entsteht die Fläche durch Rotation einer der u- bzw. v-Linien um eine Achse?

(b) Besitzt die Fläche ein orthogonales System von Parameterlinien?

(c) Handelt es sich im Fall der u-Linien um eine Schar von geodätischen Linien?

54. Die Parameterdarstellung eines Kegels mit Basiskreis in der (x, y)-Ebene lautet:

$$\mathbf{x}(r, \lambda) = \begin{bmatrix} r \cos \lambda \\ r \sin \lambda \\ 10 - 2r \end{bmatrix}$$

Man behandle folgende Fragen und begründe die Antworten:

(a) Wie groß ist der Radius des Basiskreises?

(b) Wie lauten die Koordinaten der Kegelspitze?

(c) Wie groß ist der Neigungswinkel der Kegelerzeugenden zur (x, y)-Ebene?

(d) Sind die λ-Linien geodätische Linien?

(e) Sind die Parameterlinienrichtungen die Hauptkrümmungsrichtungen?

(f) Welche Art von Flächenpunkten liegt vor?

55. Die Parameterdarstellung eines Rotationsparaboloides lautet:

$$\mathbf{x}(r,\lambda) = \begin{bmatrix} r\cos\lambda \\ r\sin\lambda \\ 9-r^2 \end{bmatrix}$$

Man behandle folgende Fragen und begründe die Antworten:

(a) Wie lauten die Koordinaten des Scheitelpunktes, wie der Radius der λ-Linie in der xy-Ebene?

(b) Man berechne die Flächenkrümmungen entlang der Parameterlinien! Sind es Hauptkrümmungen?

(c) Welche Art von Flächenpunkten liegt vor? Gibt es Nabelpunkte?

(d) Handelt es sich um ein System geodätischer Parallelkoordinaten? Sind es sogar geodätische Polarkoordinaten? (Tipp: man verwende zur „Prüfung auf eine geodätische Linie“ die Bedingungen $\mathbf{x}'' \perp \mathbf{x}_u$, $\mathbf{x}'' \perp \mathbf{x}_v$).

56. Man verifiziere für eine Fläche mit einem System orthogonaler Parameterlinien die folgende Differentialgleichung (Diff.gl. [1]) einer geodätischen Linie; dabei gehe man bei der formalen Herleitung von der Vektorform dieser Differentialgleichung (Diff.gl. [2]) aus und verwende die Definitionen der Christoffel-Symbole:

$$2G\,v'' = E_v\,u'^2 - G_u\,u'\,v' - G_v\,v'^2 \qquad \ldots \quad \text{Diff.gl.}[1]$$

$$v'' + \boldsymbol{\vartheta}'^T\,\boldsymbol{\Gamma}^v\,\boldsymbol{\vartheta}' = 0 \qquad \ldots \quad \text{Diff.gl.}[2]$$

57. Die Parameterdarstellungen eines Rotationsparaboloides bzw. einer Raumkurve lauten:

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ u^2+v^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} t \\ 2t \\ 5t^2 \end{bmatrix}, \quad -\infty < u,v,t < \infty$$

Man behandle folgende Fragen bzw. Aufgabenstellungen und begründe die Antworten:

(a) Fallen die Parameterlinien der Fläche im Allgemeinen mit ihren Krümmungslinien zusammen?

(b) Man gebe einen allgemeinen Ausdruck für die Flächenkrümmungen entlang der Parameterlinien an!

(c) Bestimmen Sie für den Koordinatenursprung den Radius der Schmiegungskugel, falls es in diesem Flächenpunkt eine eindeutige gibt!

(d) Gibt es auf dem Paraboloid parabolische Flächenpunkte?

(e) Wie lauten für diese Fläche die Differentialgleichungen für $u(s)$ u. $v(s)$ der geodätischen Linie?

(f) Man beweise, dass die Raumkurve auf der Fläche liegt!

(g) Entsteht die Kurve durch einen Schnitt der Fläche mit einer Ebene?

(h) Man gebe eine allgemeine Formel für den Winkel zwischen u-Linie und Kurve in Funktion von t an!

(i) Wie groß ist Flächenkrümmung in Richtung der Kurve im Punkt mit $t = 0$?

58. Gegeben sind zwei Parameterdarstellungen eines Paraboloids:

$$\mathbf{x}_1(r,\lambda) = \begin{bmatrix} r\,\cos\lambda \\ r\,\sin\lambda \\ r^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(u,v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ u^2+v^2 \end{bmatrix}.$$

Man behandle folgende Fragen bzw. Aufgaben und begründe die Antworten:

(a) Man zeige für $\mathbf{x}_1(r,\lambda)$, dass es sich um ein Rotationsparaboloid handelt, indem man herleitet, dass die λ-Linien Kreise sind.

(b) Man beweise, dass es sich bei $\mathbf{x}_1(r,\lambda)$ und $\mathbf{x}_2(u,v)$ um ein und dasselbe Rotationsparaboloid handelt.

(c) Wie lautet der Definitionsbereich für u u. v, wenn jener für r u. λ wie folgt gegeben ist: $0 \le r \le 10\,,\ \ 0 \le \lambda < 2\pi$?

(d) Für welche der beiden Parameterdarstellungen besteht Orthogonalität zwischen den Parameterlinien in jedem Punkt?

(e) Man gebe für jene Parameterdarstellung, bei der die Parameterlinien im Allgemeinen nicht aufeinander orthogonal stehen, eine Formel für den Winkel zwischen den Paramterlinien an.

(f) In Bezug auf die Parameterdarstellung $\mathbf{x}_1(r,\lambda)$ bestimme man die minimale und maximale Hauptflächenkrümmung und spezifiziere die Richtung der jeweiligen Krümmungslinie.

(g) Es geht um die Flächenkrümmung in Richtung der v-Linie im Punkt P_0 mit $u_0{=}2$ und $v_0{=}2\sqrt{3}$: Unter welchem Winkel zur r-Linie tritt die Krümmung auf und welchen Wert besitzt sie?

(h) Man beweise, dass es sich bei den r-Linien um geodätische Linien handelt. Tipp: Man benutze zur Beweisführung die Tatsache, dass $\mathbf{x}'' \perp \mathbf{x}_r$ und $\mathbf{x}'' \perp \mathbf{x}_\lambda$ gilt.

(i) Handelt es sich bei $\mathbf{x}_1(r, \lambda)$ um geodätische Parallelkoordinaten oder geodätische Polarkoordinaten?

59. Die Parameterdarstellungen eines elliptischen Zylinders und einer Schraubenlinie als Flächenkurve auf diesem Zylinder lauten:

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{bmatrix} \cos v \\ 2 \sin v \\ u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ 2 \sin t \\ t \end{bmatrix}, \quad 0 \leq u, v, t < 2\pi$$

Man behandle folgende Fragen bzw. Aufgabenstellungen und begründe die Antworten:

(a) Man berechne die ersten und zweiten Fundamentalgrößen der Fläche.

(b) Man berechne die Hauptkrümmungen inkl. der zugehörigen Hauprkrümmungsrichtungen und klassifiziere die Flächenpunkte.

(c) Ist die gegebene Schraubenlinie eine Loxodrome?

(d) Für den Kurvenpunkt mit $t{=}\frac{\pi}{6}$ berechne man den Winkel der Schraubenlinie zur u-Linie, die Flächenkrümmung in Richtung dieser Flächenkurve und die Gleichung der Schmiegebene.

(e) Ist die v-Linie eine geodätische Linie? Tipp: Zur Beantwortung benutze man die Tatsache, dass $\mathbf{x}'' \perp \mathbf{x}_u$ und $\mathbf{x}'' \perp \mathbf{x}_v$ gilt.

(f) Man gebe alle drei Differentialgleichungen einer geodätischen Linie auf dem Zylinder in allgemeiner Form an. Ist die geodätische Linie gleichzeitig Loxodrome?

60. Die Parameterdarstellung eines elliptischen Kegels lautet:

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{bmatrix} 2u \cos v \\ u \sin v \\ 10 - u \end{bmatrix}, \quad 0 \leq u \leq 10\,, \quad 0 \leq v < 2\pi$$

Man behandle folgende Fragen bzw. Aufgabenstellungen und begründe die Antworten:

(a) Wie lauten die Koordinaten der Kegelspitze, wie groß sind die Halbachsen der Basisellipse und welchen Winkel schließt deren Trägerebene mit den Kegelerzeugenden in den Hauptscheiteln ein?

(b) Man berechne die ersten und zweiten Fundamentalgrößen der Fläche.

(c) Stehen die Parameterlinien im allgemeinen orthogonal aufeinander? Wenn nein, gebe man eine allgemeine Formel für den Winkel an.

(d) Man berechne die Flächenkrümmungen entlang der Parameterlinien und bestimme, wo diese den Hauptkrümmungen entsprechen. Weiters gebe man die Gauß'sche Krümmung an und klassifiziere die Flächenpunkte.

(e) Ausgehend von einem Flächenpunkt mit u_0=10 und v_0=$\frac{\pi}{2}$ schreitet man unter einem Winkel α=$\frac{\pi}{4}$ eine Strecke von 0.1[LE] voran. Wie ändern sich die Parameter in erster Näherung?

(f) Sind die Parameterlinien geodätische Linien? Tipp: Zur Beantwortung benutze man die Tatsache, dass im Fall einer geodätischen Linie $\mathbf{x}'' \perp \mathbf{x}_u$ und $\mathbf{x}'' \perp \mathbf{x}_v$ gelten müsste.

(g) Für den Flächenpunkt mit u_1=5 und v_1=$\frac{\pi}{4}$ berechne man die Krümmung, die geodätische Krümmung und die Normalkrümmung der v-Linie. Außerdem gebe man die Hauptkrümmungen an.

61. Es sei ein Torus (vgl. Beispiel 1) gegeben:

$$\mathbf{x}(\delta, \lambda) = \begin{bmatrix} (4 + \cos\delta)\cos\lambda \\ (4 + \cos\delta)\sin\lambda \\ \sin\delta \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \delta, \lambda < 2\pi.$$

(a) Es sind die Differentialgleichungen einer geodätischen Linie aufzustellen;

(b) ausgehend von (a) ist die erste geodätische Hauptaufgabe durch Reihenentwicklung bis zum Glied 2. Ordnung zu lösen und zwar für die Anfangswerte $\delta_0 = \frac{\pi}{4}, \quad \lambda_0 = \frac{\pi}{3},$ unter dem Azimut $\alpha = \frac{\pi}{3}$ und der Distanz $s = 0.1$;

(c) Aufbauend auf (b) ist zu untersuchen, ob die Glieder 3. Ordnung noch einen Einfluß auf die ersten vier signifikanten Stellen der Ergebnisse haben.

62. Man berechne mittels Reihenentwicklung bis zum 2. Glied die 1. Hauptaufgabe auf der Kugel $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\varphi, \lambda)$ mit $R = 6370km$ und vergleiche das Ergebnis mit der strengen Lösung im Weg über die sphärische Geometrie: $\varphi_0 = 46^o37'45''$, $\lambda_0 = 17^o49'28''$, $\alpha = 324^o17'$, $s = 128.43km$.

63. Auf dem Kegel $\mathbf{x} = \mathbf{x}(h, \lambda)$ ist ausgehend vom Punkt $h = 1, \lambda = \frac{\pi}{4}$, mit einer Anfangsrichtung $\alpha = \frac{\pi}{3}$ und einer Entfernung $s = 0.1$ die erste geodätische Hauptaufgabe mittels Reihenansatz bis zum Glied 3. Ordnung (einschließlich) zu lösen.

$$\mathbf{x}(h, \lambda) = \begin{bmatrix} h \cos \lambda \\ h \sin \lambda \\ h \end{bmatrix}$$

64. Gegeben ist das Rotationsellipsoid:

$$\mathbf{x}(\beta, \lambda) = \begin{bmatrix} a \cos \beta \cos \lambda \\ a \cos \beta \sin \lambda \\ b \sin \beta \end{bmatrix} \quad .$$

(a) Gesucht ist für $\beta = 0^o, 30^o, 60^o$ der Schnittwinkel der beiden Kurven $d\beta = d\lambda$ und $d\beta = -d\lambda$, wobei die Halbachsen durch $a = 2, \quad b = 1$ gegeben sind.

(b) Die Halbachsen sind durch $a = 6400km$, $b = 6350km$ gegeben. Man bestimme (auf Größen zweiter Ordnung genau) für Punkte auf den Breitenkreisen $\beta = 0^o, 30^o, 60^o$ die Differenzen in Breite und Länge, die sich ergeben, wenn man auf dem Ellipsoid $1km$ nach Nordosten fortschreitet.

65. Für das nachfolgende Ellipsoid ist eine geodätische Linie zu betrachten, die von einem Punkt auf dem Breitenkreis $\beta = 30^o$ ausgeht und dort dieselbe Richtung wie die λ-Linie hat. Man gebe näherungsweise das Azimut dieser geodätischen Linie in einem Punkt an, der um das kleine Stück ds=0.015 vom Ausgangspunkt entfernt ist.

$$\mathbf{x}(\beta, \lambda) = \begin{bmatrix} 3 \cos \beta \cos \lambda \\ 3 \cos \beta \sin \lambda \\ \sin \beta \end{bmatrix}$$

66. Auf einer Kugel mit R=0.75 [LE] schreitet man ausgehend von einem Punkt $P_0(\varphi_0{=}\frac{\pi}{6}, \lambda_0)$ unter einem Winkel $\alpha_0{=}\frac{\pi}{4}$ zum Meridian ein Stück entlang eines Großkreises voran. Nach welcher Entfernung [LE] ändert sich dabei α_0 um 5°, wenn man zur Berechnung eine Taylorreihe für $\alpha(s)$ bis zum Glied einschließlich 2. Ordnung ansetzt?

67. Für das nachfolgende Paraboloid sind die geodätischen Krümmungen der Parameterlinien anzugeben. Wie ändert sich für eine geodätische Linie, welche im Punkt $r = 2,\ \lambda = \lambda_0$ dieselbe Richtung wie die λ-Linie hat, dieser Richtungswinkel, wenn λ um $10'$ vergrößert wird?

$$\mathbf{x}(r,\lambda) = \begin{bmatrix} r\cos\lambda \\ r\sin\lambda \\ r^2 \end{bmatrix}$$

68. Auf einem Zylinder in der nachfolgenden Parameterdarstellung sei eine Flächenkurve durch $\lambda = t$ und $h = \sqrt{3}\frac{t}{2}$ definiert.

$$\mathbf{x}(h,\lambda) = \begin{bmatrix} \cos\lambda \\ \sin\lambda \\ 2h \end{bmatrix}$$

   (a) Man gebe die Flächenparameter jenes Punktes an, zu dem man gelangt, wenn man ausgehend vom Punkt P_0 mit dem Ortsvektor $\mathbf{x}_0 = (x_1, \frac{1}{2}, x_3)^T$ ein Stück $s = 0.1$ entlang o.g. Flächenkurve in jener Richtung fortschreitet, die einem zunehmenden Kurvenparameter t entspricht.

   (b) Kommt man zum selben Punkt, wenn man ausgehend von P_0 eine erste geodätische Hauptaufgabe mit $s = 0.1$ unter einem Azimut $\alpha = 30^o$ zur h-Linie durchführt? Man begründe die Antwort rechnerisch!

69. Für die angegebene Fläche sind die Differentialgleichungen der geodätischen Linie als Beziehung zwischen u, v, u', v', u'', v'' darzustellen. Mit Hilfe dieser Differentialgleichungen sind die vom Punkt $u = v = 0$ ausgehenden geodätischen Linien in der unmittelbaren Umgebung dieses Punktes zu charakterisieren. Außerdem ist festzustellen, ob unter den Parameterlinien der Fläche geodätische Linien vorkommen.

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ u^2 - v^2 \end{bmatrix}$$

70. Auf der Fläche $\mathbf{x}(r,\lambda)$ schreitet man von einem Punkt mit $r_0 = 1$ unter einem Azimut $\alpha = 45^o$ zur r-Linie entlang einer geodätischen Linie um ein s=0.04 voran. Bis zu welchem Grad hat man Glieder in s einer Reihenentwicklung anzusetzen, um eine Änderung des Parameters r auf 3 Nachkommastellen genau

zu erfassen?

$$\mathbf{x}(r,\lambda) = \begin{bmatrix} r\cos\lambda \\ r\sin\lambda \\ \frac{r^2}{2} \end{bmatrix}$$

71. Auf der Fläche $\mathbf{x}(h,\lambda)$ schreitet man von einem Punkt mit dem Ortsvektor $\mathbf{x}_0 = (0, x_2, 0)^T$ unter einem Azimut $\alpha = \frac{\pi}{3}$ entlang einer geodätischen Linie um ein $s = 0.1$ voran. Bis zu welchem Grad hat man Glieder in s einer Reihenentwicklung anzusetzen, um eine Änderung des Azimutes (im Bogenmaß) auf vier Nachkommastellen genau zu erfassen?

$$\mathbf{x}(h,\lambda) = \begin{bmatrix} \cos\lambda \\ \sin\lambda \\ \sqrt{3}h \end{bmatrix}$$

72. Ausgehend von einem Punkt A ($\beta = 45^o, \quad \lambda = 30^o$) des nachfolgend definierten Rotationsellipsoides $\mathbf{x}(\beta,\lambda)$ schreitet man zum einen entlang der λ-Linie und zum anderen in Richtung der λ-Linie, jedoch entlang einer geodätischen Linie jeweils um ein kleines Stück $ds = 0.25$ voran. Man gebe für beide Fälle die Koordinaten (β,λ) des Zielpunktes B und das Azimut in B an, wobei im Fall der geodätischen Linie dieser 1. Hauptaufgabe eine Reihenentwicklung bis zum Glied 2. Ordnung (für die Koordinaten) bzw. bis zum Glied 1. Ordnung (für das Azimut) zugrunde zu legen ist.

$$\mathbf{x}(\beta,\lambda) = \begin{bmatrix} 4\cos\beta\cos\lambda \\ 4\cos\beta\sin\lambda \\ 2\sin\beta \end{bmatrix}, \quad -\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \lambda < 2\pi.$$

73. Ausgehend von einem Punkt A der λ-Linie mit $\beta = 45^o$ des nachfolgend definierten Rotationsellipsoides $\mathbf{x}(\beta,\lambda)$ schreitet man unter einem Winkel $\alpha = 85^o$ zur β-Linie entlang einer geodätischen Linie voran, bis man in einem Punkt B wieder auf jene λ-Linie trifft, von der man gestartet ist. Man berechne die auf der geodätischen Linie zurückgelegte Wegstrecke s_g, wobei man dieser geodätischen Hauptaufgabe eine Reihenentwicklung bis zum Glied 2. Ordnung zugrunde legt. Außerdem gebe man den Unterschied jenes Wegstückes zu s_g an, welches man abschreitet, wenn man nicht auf einer geodätischen Linie von A nach B unterwegs ist, sondern auf der A und B verbindenden λ-Linie.

$$\mathbf{x}(\beta,\lambda) = \begin{bmatrix} 3\cos\beta\cos\lambda \\ 3\cos\beta\sin\lambda \\ 2\sin\beta \end{bmatrix}, \quad -\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \lambda < 2\pi.$$

74. Ausgehend von einem Punkt A ($\beta = 45^o, \lambda = 30^o$) des nachfolgend definierten Rotationsellipsoides $\mathbf{x}(\beta,\lambda)$ schreitet man unter einem Winkel $\alpha = 85^o$ zur β-Linie entlang einer geodätischen Linie voran, bis man in einem Punkt B anlangt, in welchem das Azimut 85.5^o beträgt.
Man berechne die Koordinaten von B, wobei man dieser geodätischen Hauptaufgabe Reihenentwicklungen bis zum Glied 2. Ordnung zugrunde legt.

$$\mathbf{x}(\beta,\lambda) = \begin{bmatrix} 3\cos\beta\cos\lambda \\ 3\cos\beta\sin\lambda \\ 2\sin\beta \end{bmatrix}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \lambda < 2\pi.$$

75. Ausgehend von einem Punkt $P_o(r_o = 1, \lambda_o)$ des nachfolgenden Rotationsparaboloides $\mathbf{x}(r,\lambda)$ schreitet man in Richtung der λ-Linie entlang einer geodätischen Linie solange voran, bis λ_o um 30' zunimmt. Man berechne die Änderung des Azimutes, wobei man den Berechnungen Reihenentwicklungen bis zum Glied 2. Ordnung zugrunde legt.

$$\mathbf{x}(r,\lambda) = \begin{bmatrix} 2r\cos\lambda \\ 2r\sin\lambda \\ r^2 \end{bmatrix}$$

76. Ausgehend von einem Punkt $P_o(r_o = 1, \lambda_o)$ des nachfolgenden Rotationsparaboloides $\mathbf{x}(r,\lambda)$ schreitet man in Richtung der λ-Linie entlang einer geodätischen Linie solange voran, bis r_o um $5 * 10^{-5}$ zunimmt. Man berechne die Änderung des Azimutes α, wobei den Berechnungen Reihenentwicklungen bis zum Glied 2. Ordnung (für r) bzw. bis zum Glied 3. Ordnung (für α) zugrunde zu legen sind.

$$\mathbf{x}(r,\lambda) = \begin{bmatrix} 2r\cos\lambda \\ 2r\sin\lambda \\ r^2 \end{bmatrix}$$

77. Auf dem Zylinder $\mathbf{x}(u,v) = (\cos v, \sin v, u)^T$ schreitet man ausgehend von einem Punkt $P_0(u_0, v_0)$ unter einem Winkel $\alpha_0=\frac{\pi}{3}$ zur $u-$Linie ein Stück s=0.1 entlang einer geodätischen Linie voran. Wie ändern sich dabei u_0 und v_0?

78. Die durch den Punkt P mit $x_P = 3$, $y_P = 4$ und $z_P = 5$ gehende, zur z-Achse parallele Gerade rotiert um die z-Achse. Welche Fläche wird dabei erzeugt? Man stelle die Fläche in Parameterform so dar, dass die Richtung der Parameterlinien gleichzeitig mit den Hauptkrümmungsrichtungen zusammenfallen. Man gebe die Richtung zu einer der Parameterlinien in P an, um entlang einer geodätischen Linie zum Punkt Q mit $x_Q = 0$, $y_Q > 0$ und $z_Q = 6$ zu gelangen. Wie krümmt sich die Fläche in dieser Richtung?