Strukturskriptum

Geomathematik I (Geodäsie)
Geomathematik (GST)

1.5 VO

WS 2022/23

M. Wieser

Institut für Geodäsie
AG Navigation
TU Graz

Inhalt

Koordinatenrechnung im $I\!R_2$ u. $I\!R_3$

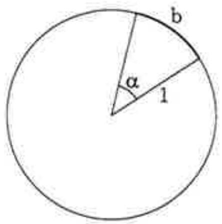
Winkelmaße

- Bogenmaß: $0 \leq \widehat{\alpha} < 2\pi$ (Einheitskreisbogenlänge)
  Altgrad: $0^o \leq \alpha^o < 360^o$ $(1^o = 60', 1' = 60'')$
  Neugrad: $0^g \leq \alpha^g < 400^g$ $(1^g(gon) = 100^c, 1^c = 100^{cc})$

Winkelminuten/Sekunde

c = Zentigon

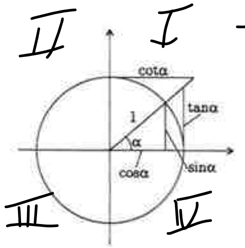
cc = Milligon

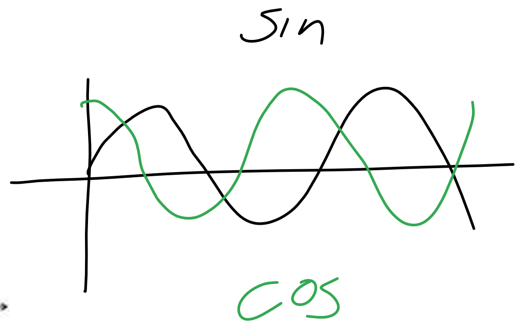


- Umrechnungen:
  - Altgrad(AG), Altmin.(AM), Altsek.(AS) $\rightarrow$
    Altgrad u. Bruchteile:
    $\alpha^o = AG + \frac{AM}{60} + \frac{AS}{3600}$
  - Altgrad und Bruchteile $\rightarrow$ AG, AM, AS:
    $AG = [\alpha^o]$, $AM = [(\alpha^o - AG) * 60]$,
    $AS = ((\alpha^o - AG) * 60 - AM) * 60$
  - Altgrad $\leftrightarrow$ Bogenmaß:
    $\widehat{\alpha} = \alpha^o / \rho^o$, $\alpha^o = \widehat{\alpha} * \rho^o$, mit $\rho^o = 180^o / \pi$
  - Neugrad $\leftrightarrow$ Bogenmaß:
    $\widehat{\alpha} = \alpha^g / \rho^g$, $\alpha^g = \widehat{\alpha} * \rho^g$, mit $\rho^g = 200^g / \pi$
  - Altgrad $\leftrightarrow$ Neugrad:
    $\alpha^g = \alpha^o / 0.9$, $\alpha^o = \alpha^g * 0.9$

Trigonometrische Funktionen

- $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$:
  $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$,
  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$





$$\tan = \frac{\sin}{\cos}$$

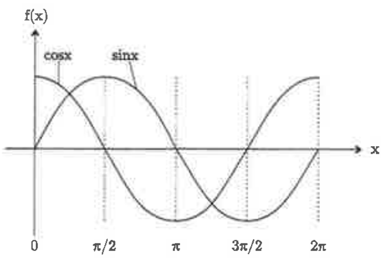
$$\cot = \frac{\cos}{\sin}$$

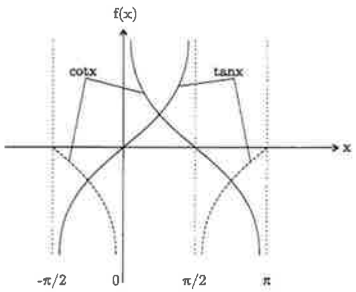
- Vorzeichen:

	1.Q	2.Q	3.Q	4.Q
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-
cot	+	-	+	-

- Spezielle Werte:

	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
sin	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$*$
cot	$*$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0





!! Lernen!

- Komplementär- und Supplementärwinkel:

$\sin(90-\alpha)=\cos\alpha$ $\quad\sin(180-\alpha)=\sin\alpha$ $\quad\sin(270-\alpha)=-\cos\alpha$
$\cos(90-\alpha)=\sin\alpha$ $\quad\cos(180-\alpha)=-\cos\alpha$ $\quad\cos(270-\alpha)=-\sin\alpha$
$\tan(90-\alpha)=\cot\alpha$ $\quad\tan(180-\alpha)=-\tan\alpha$ $\quad\tan(270-\alpha)=\cot\alpha$
$\cot(90-\alpha)=\tan\alpha$ $\quad\cot(180-\alpha)=-\cot\alpha$ $\quad\cot(270-\alpha)=\tan\alpha$

- Erhöhung des Argumentes:

$\sin(\alpha+90)=\cos\alpha$ $\quad\sin(\alpha+180)=-\sin\alpha$ $\quad\sin(\alpha+270)=-\cos\alpha$
$\cos(\alpha+90)=-\sin\alpha$ $\quad\cos(\alpha+180)=-\cos\alpha$ $\quad\cos(\alpha+270)=\sin\alpha$
$\tan(\alpha+90)=-\cot\alpha$ $\quad\tan(\alpha+180)=\tan\alpha$ $\quad\tan(\alpha+270)=-\cot\alpha$
$\cot(\alpha+90)=-\tan\alpha$ $\quad\cot(\alpha+180)=\cot\alpha$ $\quad\cot(\alpha+270)=-\tan\alpha$

- Negativer Winkel:

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\quad \cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha,\quad \cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

- Doppelter Winkel:

$$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$
$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha},\quad \cot(2\alpha)=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}$$

- Halber Winkel:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},\quad \cot\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

- 1.Summensatz:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}$$

- 2.Summensatz:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

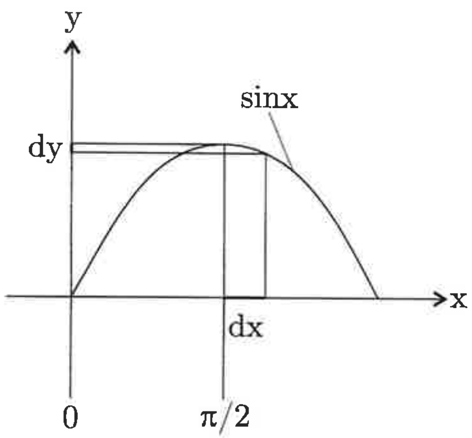
- Ableitungen:

$y = \sin x$: $y' = \cos x \rightarrow dy = \cos x \, dx$

$y = \cos x$: $y' = -\sin x \rightarrow dy = -\sin x \, dx$

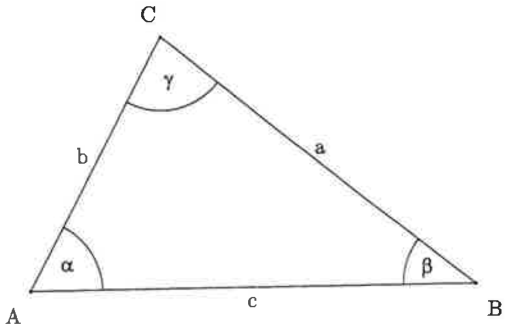
$y = \tan x$: $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$y = \cot x$: $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$



Auflösung ebener Dreiecke

- Fundamentalformeln:



  - Winkelsumme ... $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$
  - Sinussatz ... $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$
  - Cosinussatz ... $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$
  - Halbwinkelsatz ... $\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$, mit $s = \frac{a+b+c}{2}$

- Auflösungsfälle:
  - geg.: eine Seite und zwei Winkel; z.B. a, β, γ

    $\Rightarrow$ $\alpha = 180^o - \beta - \gamma$

    2∗ Sinussatz $\rightarrow b, c$

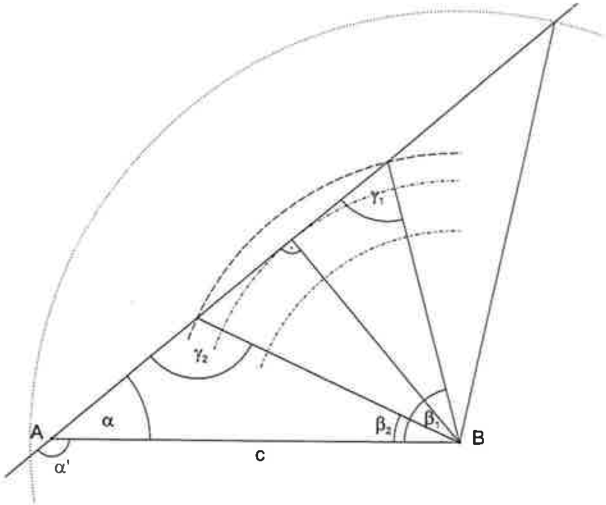
    Kontolle: Halbwinkelsatz
  - geg.: zwei Seiten und eingeschlossener Winkel; z.B. a, b, γ

    $\Rightarrow$ Cosinussatz $\rightarrow c$

    2∗ Halbwinkelsatz $\rightarrow \alpha, \beta$

    Kontrolle: Sinussatz, Winkelsumme

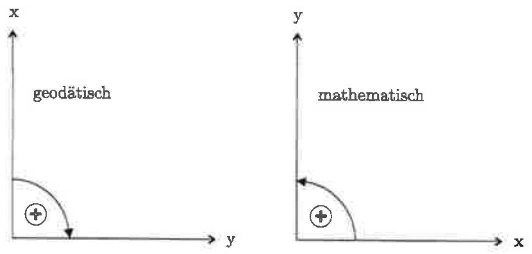
– geg.: zwei Seiten und gegenüberliegender Winkel; z.B. a, c, α
Achtung: casus ambiguus!
$\Rightarrow$ Sinussatz $\rightarrow \gamma_{1,2}$
$\beta_{1,2} = 180^o - \alpha - \gamma_{1,2}$
Sinussatz $\rightarrow b_{1,2}$
Kontrolle: Halbwinkelsatz



– geg.: drei Seiten a, b, c
$\Rightarrow$ 3$*$ Halbwinkelsatz $\rightarrow \alpha, \beta, \gamma$
Kontrolle: Sinussatz, Winkelsumme

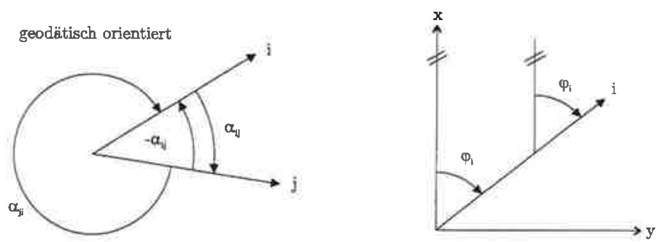
Koordinatensysteme im $\mathbb{R}_2$

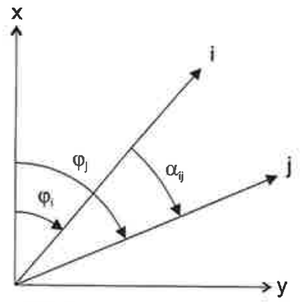
- Drehsinn kartesischer Koordinatensysteme:



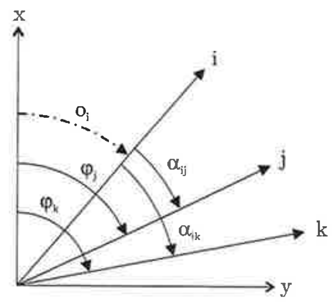
  - mathematisch orientiert:
    positiver Drehsinn ... gegen den Uhrzeigersinn
  - geodätisch orientiert:
    positiver Drehsinn ... im Uhrzeigersinn

- Winkel und Richtungswinkel:
  - Winkel (unorientierter Richtungswinkel) α_{ij} ...
    Drehung von Halbstrahl i in den Halbstrahl j
    $\rightarrow \alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 0$
  - orientierter Richtungswinkel φ_i ($= \alpha_{+x,i}$) ...
    Winkel zw. positiver x-Achse u. Halbstrahl i
    $\rightarrow \varphi_j = \varphi_i + \alpha_{ij}$, Orientierung ... $o_i = \varphi_j - \alpha_{ij}$





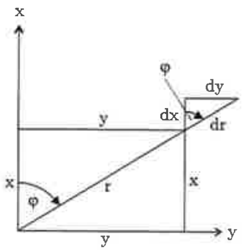
geg: φ_i , α_{ij}

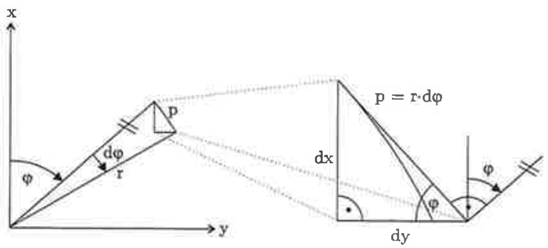


geg: φ_j , α_{ij}

- Kartesische Koordinaten $(x, y) \Leftrightarrow$ Polarkoordinaten (r, φ):
  - $(r, \varphi) \rightarrow (x, y)$ ... $x = r\,\cos\varphi,\ y = r\,\sin\varphi$
  - $(x, y) \rightarrow (r, \varphi)$ ... $r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \tan\varphi = \frac{y}{x}$

- $(x, y) \Leftrightarrow (r, \varphi)$ ... differentielle Beziehungen:
  - $dr \rightarrow dx, dy \ldots\ dx = \cos\varphi\,dr, \qquad dy = \sin\varphi\,dr$
    $d\varphi \rightarrow dx, dy \ldots\ dx = -r\sin\varphi\,d\varphi, \quad dy = r\cos\varphi\,d\varphi$
  - $dx \rightarrow dr, d\varphi \ldots\ dr = \cos\varphi\,dx, \qquad d\varphi = -\frac{\sin\varphi}{r}\,dx$
    $dy \rightarrow dr, d\varphi \ldots\ dr = \sin\varphi\,dy, \qquad d\varphi = \frac{\cos\varphi}{r}\,dy$





Vektor- und Matrizenrechnung

- Definition:

  Vektor (n-Tupel von Zahlen)

  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \ldots$ Spaltenvektor $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \ldots$ Zeilenvektor

  Matrix (n∗m Tupel von Zahlen)

  $$\mathbf{A}_{(n*m)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

  Sonderfälle:

  - quadratische Matrix (n=m)
  - symmetrische Matrix $a_{ij} = a_{ji}$
  - schiefsymmetrische Matrix $a_{ij} = -a_{ji}, \quad a_{ii} = 0$

- Addition: $\mathbf{C}_{(n*m)} = \mathbf{A}_{(n*m)} + \mathbf{B}_{(n*m)} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i, j$
- Multiplikation mit Skalar: $\mathbf{C}_{(n*m)} = \lambda \cdot \mathbf{A}_{(n*m)} \quad c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} \quad \forall i, j$
- Multiplikation: $\mathbf{C}_{(n*m)} = \mathbf{A}_{(n*k)} \cdot \mathbf{B}_{(k*m)} \quad c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} \cdot b_{lj} \quad \forall i, j$
- Multiplikation Sonderfall: $\mathbf{A} \cdot \vec{a}^{(1)} = \vec{a}^{(2)} \quad \vec{b}^{(1)} \cdot \mathbf{A} = \vec{b}^{(2)}$
- Determinante: $\det(\mathbf{A}) \ldots$ Entwicklen nach einer Zeile (allgemein)

  $\mathbf{A}_{(2*2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \ldots \det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

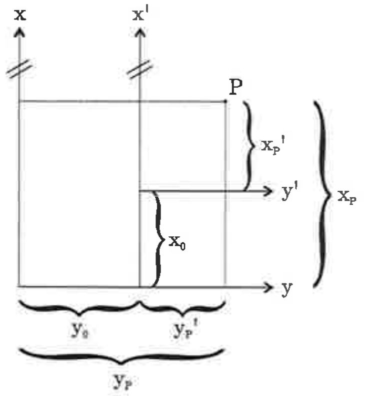
- Transponieren: $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \quad b_{ij} = a_{ji}$
- Inverse einer Matrix: $\mathbf{A}^{-1}$

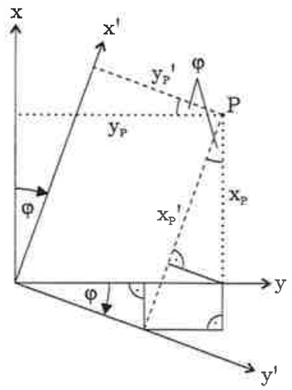
  $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \qquad \mathbf{A}^{-1}_{(2*2)} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

- Orthogonale Matrix: $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \implies \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}$

Koordinatentransformationen im $\mathbb{R}_2$

- Verschiebung des Koordinatenursprungs:
  (x_0, y_0) ... Ursprungskoord. des neuen Systems im alten
  $\rightarrow \quad x = x_0 + x',\ y = y_0 + y';\ x' = x - x_0,\ y' = y - y_0$





- Verdrehung des Koordinatensystems:
  - φ ... Richtungswi. der neuen x-Achse im alten System
    x, y ... Koord. des Punktes im ursprünglichen System
    x', y' ... Koord. des Punktes im verdrehten Systems

    $$\rightarrow \quad \begin{aligned} x &= x' \cos\varphi - y' \sin\varphi \\ y &= x' \sin\varphi + y' \cos\varphi \end{aligned}$$

    $$\rightarrow \quad \begin{aligned} x' &= x \cos\varphi + y \sin\varphi \\ y' &= -x \sin\varphi + y \cos\varphi \end{aligned}$$

  - Matrizenschreibweise:

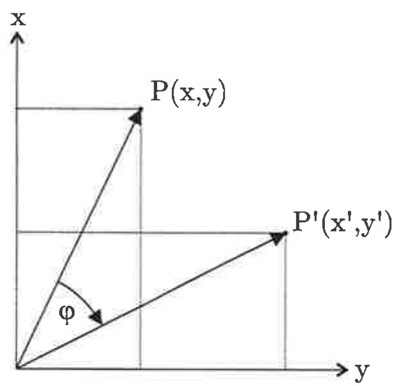
    $$\mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{x}', \quad \mathbf{x}' = \mathbf{U}^T\mathbf{x}, \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

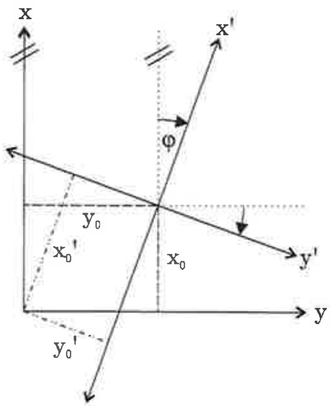
    $$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{I},\ det(\mathbf{U}) = 1$$

– Interpretation ... Drehung des Ortsvektors:

φ ... Winkel um den der Ortsvektor gedreht wird
x, y ... Koord. des ursprünglichen Punktes
x', y' ... Koord. des gedrehten Punktes

$\rightarrow \quad \mathbf{x}' = \mathbf{U}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{U}^T\mathbf{x}'$





- Verschiebung und Verdrehung:

(x_0, y_0)... Ursprungskoord. des neuen Systems im alten
(x_0', y_0')... Ursprungskoord. des alten Systems im neuen
φ ... Richtungswi. der neuen x-Achse im alten System

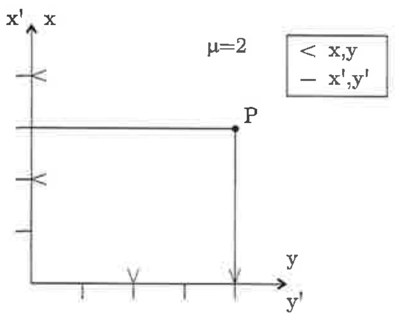
$$\rightarrow \quad \begin{aligned} x &= x' \cos\varphi - y' \sin\varphi + x_0 \\ y &= x' \sin\varphi + y' \cos\varphi + y_0 \end{aligned} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{x}' + \mathbf{x}_o$$

$$\rightarrow \quad \begin{aligned} x' &= x \cos\varphi + y \sin\varphi + x_0' \\ y' &= -x \sin\varphi + y \cos\varphi + y_0' \end{aligned} \qquad \mathbf{x}' = \mathbf{U}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}_o'$$

- Maßstabsänderung:

$\mu > 0$ ... Maßstabsfaktor (Maßeinheit(alt)=μ Maßeinheit(neu))

$$\rightarrow \quad \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{\mu} x' \\ y &= \tfrac{1}{\mu} y' \end{aligned} \qquad \rightarrow \quad \begin{aligned} x' &= \mu x \\ y' &= \mu y \end{aligned}$$



- Verschiebung, Verdrehung und Maßstabsänderung:

(x_0, y_0)... Ursprungskoord. des neuen Systems im alten
(x_0', y_0')... Ursprungskoord. des alten Systems im neuen
φ ... Richtungswi. der neuen x-Achse im alten System
$\mu > 0$ ... Maßstabsfaktor (Maßeinheit(alt)=μ Maßeinheit(neu))

$$\rightarrow \quad \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{\mu} x' \cos\varphi - \tfrac{1}{\mu} y' \sin\varphi + x_0 \\ y &= \tfrac{1}{\mu} x' \sin\varphi + \tfrac{1}{\mu} y' \cos\varphi + y_0 \end{aligned} \qquad \mathbf{x} = \tfrac{1}{\mu}\mathbf{U}\mathbf{x}' + \mathbf{x}_o$$

$$\rightarrow \quad \begin{aligned} x' &= \mu x \cos\varphi + \mu y \sin\varphi + x_0' \\ y' &= -\mu x \sin\varphi + \mu y \cos\varphi + y_0' \end{aligned} \qquad \mathbf{x}' = \mu\mathbf{U}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}_o'$$

- Helmert-Transformation:

geg.: $P_1 : (x_1, y_1), (x_1', y_1')$; $P_2 : (x_2, y_2), (x_2', y_2')$

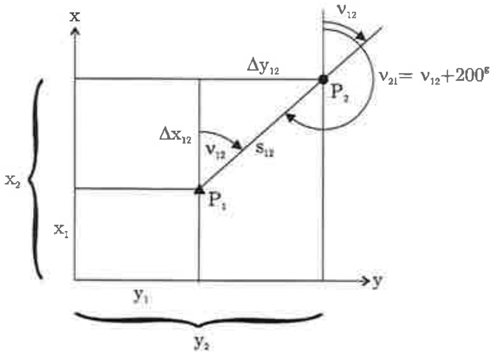
$$\begin{aligned} x &= a\,x' - b\,y' + c \\ y &= b\,x' + a\,y' + d \end{aligned} \quad \rightarrow \quad a, b, c, d \quad (\varphi, \mu, x_0, y_0)$$

$$\begin{aligned} x' &= a'\,x + b'\,y + c' \\ y' &= -b'\,x + a'\,y + d' \end{aligned} \quad \rightarrow \quad a', b', c', d' \quad (\varphi, \mu, x_0', y_0')$$

Punktbestimmung im $\mathbb{R}_2$

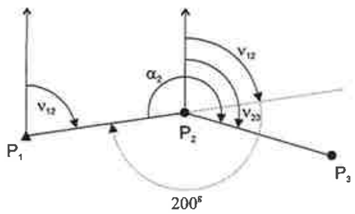
- Grundaufgaben:
  - Erste Grundaufgabe, 1.HA (Hauptaufgabe):

    geg.: $P_1 : (x_1, y_1)$
    s_{12} ... Distanz zwischen P_1 und P_2
    ν_{12} ... (orientierter) Richtungswi. von P_1 nach P_2
    ges.: $P_2 : (x_2, y_2)$



$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x_2 &= x_1 + s_{12} \cos \nu_{12} \\ y_2 &= y_1 + s_{12} \sin \nu_{12} \end{aligned}$$

Bem.: fortgesetzte 1.HA ... fliegender Polygonzug mit
$\nu_{i,i+1} = (\nu_{i-1,i} + \alpha_i + 200^g) \bmod 400^g$



– Zweite Grundaufgabe, 2.HA (Hauptaufgabe):

geg.: $P_1 : (x_1, y_1)$, $P_2 : (x_2, y_2)$
ges.: s_{12}, ν_{12}

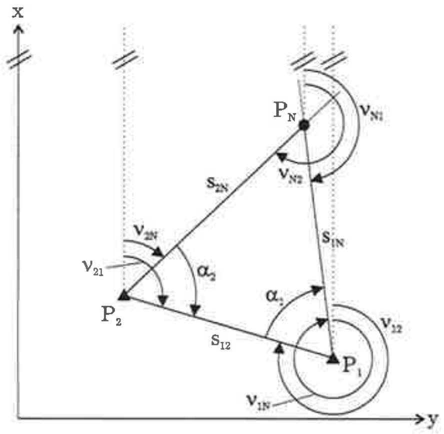
$\Rightarrow$ $s_{12} = \sqrt{\Delta x_{12}^2 + \Delta y_{12}^2}$, $\tan \nu_{12} = \frac{\Delta y_{12}}{\Delta x 12}$

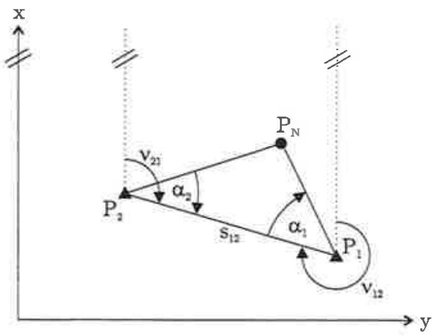
- Vorwärtsschnitt:

– Vorwärtsschnitt mit Winkeln:

geg.: $P_1 : (x_1, y_1)$, $P_2 : (x_2, y_2)$
$\alpha_1 \, (\nu_{1N} - \nu_{12})$, $\alpha_2 \, (\nu_{21} - \nu_{2N})$
ges.: $P_N : (x_N, y_N)$; P_1, P_2, P_N im Uhrzeigersinn!

$\Rightarrow$ 2.HA: s_{12}, ν_{12}
Sinussatz: $s_{1N} = \frac{s_{12} \sin \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$, $s_{2N} = \frac{s_{12} \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$
$\nu_{1N} = \nu_{12} + \alpha_1$, $\nu_{2N} = \nu_{12} + 200^g - \alpha_2$
$\rightarrow$ P_N aus 1.HA von P_1 bzw. P_2

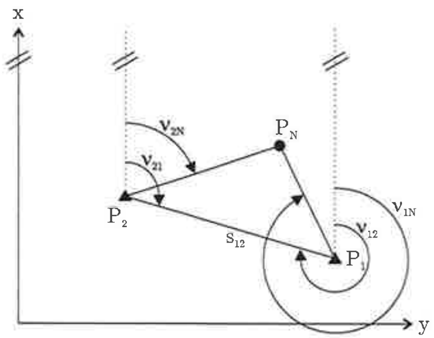




- Vorwärtsschnitt mit Richtungen:

  geg.: $P_1 : (x_1, y_1), \quad P_2 : (x_2, y_2)$
  $\nu_{1N}, \quad \nu_{2N}$
  ges.: $P_N : (x_N, y_N)$

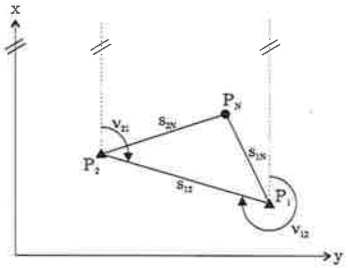
  $\Rightarrow$ 2.HA: s_{12}, ν_{12}
  $s_{1N} = s_{12} \frac{\sin(\nu_{2N} - \nu_{12})}{\sin(\nu_{2N} - \nu_{1N})}$, $s_{2N} = s_{12} \frac{\sin(\nu_{1N} - \nu_{12})}{\sin(\nu_{2N} - \nu_{1N})}$
  $\rightarrow$ P_N aus 1.HA von P_1 bzw. P_2



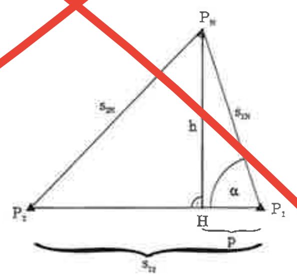
- Bogenschnitt:

geg.: $P_1 : (x_1, y_1)$, $\quad P_2 : (x_2, y_2)$
$\quad\quad s_{1N}, \quad s_{2N}$
ges.: $P_N : (x_N, y_N)$; $\quad P_1, P_2, P_N$ im Uhrzeigersinn!

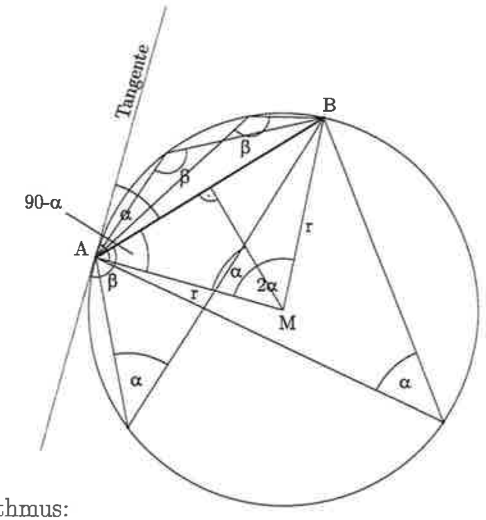
$\Rightarrow$ 2.HA: s_{12}, ν_{12}
$\alpha_1\,(\nu_{1N} - \nu_{12})$, $\alpha_2\,(\nu_{21} - \nu_{2N})$ aus Halbwinkelsatz
$\nu_{1N} = \nu_{12} + \alpha_1$, $\nu_{2N} = \nu_{12} + 200^g - \alpha_2$
$\rightarrow$ P_N aus 1.HA von P_1 bzw. P_2



alt: 2.HA: s_{12}
$\lambda = \frac{s_{12}^2 + s_{1N}^2 - s_{2N}^2}{2\, s_{12}^2}$
$\mu = \sqrt{(s_{1N}/s_{12})^2 - \lambda^2}$
$\rightarrow$ $x_N = x_1 + \lambda\,\Delta x_{12} - \mu\,\Delta y_{12}$
$\quad y_N = y_1 + \lambda\,\Delta y_{12} + \mu\,\Delta x_{12}$

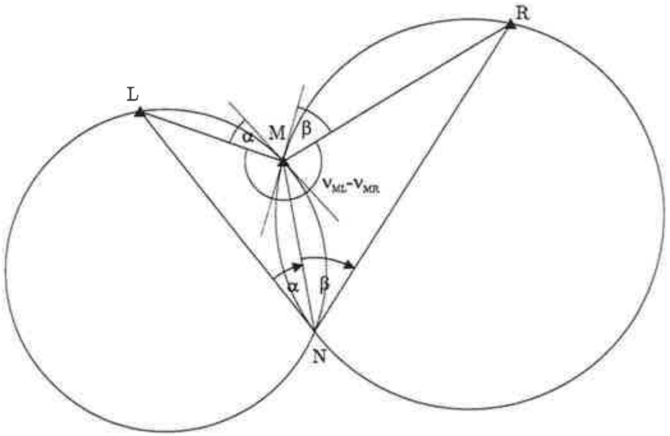


- Rückwärtsschnitt:
  - Zentriwinkel, Peripheriewinkel, Sehnen/Tangenten-Winkel:



  - Algorithmus:

geg.: $P_L : (x_L, y_L)$, $P_M : (x_M, y_M)$, $P_R : (x_R, y_R)$
$\alpha\,(\nu_{NM} - \nu_{NL})$, $\beta\,(\nu_{NR} - \nu_{NM})$
ges.: $P_N : (x_N, y_N)$



$\Rightarrow$ Numerisch stabiler Algorithmus ...

2.HA: s_{ML}, ν_{ML}; s_{MR}, ν_{MR}

$a = \sin\alpha / s_{ML}$, $\quad b = -\sin\beta / s_{MR}$

$\lambda = \frac{a \cos(\nu_{MR}-\beta) - b \cos(\nu_{ML}+\alpha)}{\sin(\nu_{ML}-\nu_{MR}+\alpha+\beta)}$

$\mu = \frac{a \sin(\nu_{MR}-\beta) - b \sin(\nu_{ML}+\alpha)}{\sin(\nu_{ML}-\nu_{MR}+\alpha+\beta)}$

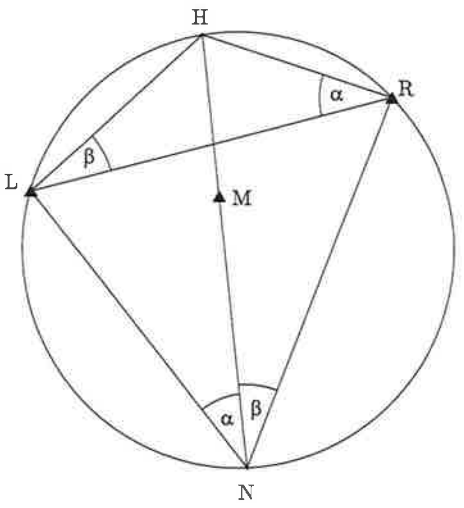
$s_{mn}^2 = 1/(\lambda^2 + \mu^2)$

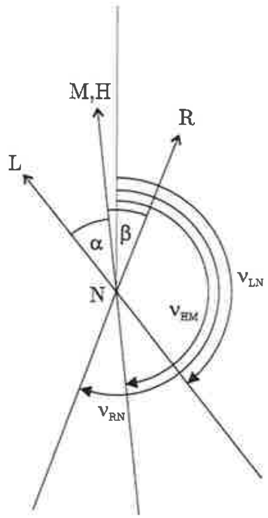
$\Delta x_{mn} = \lambda\, s_{mn}^2$, $\Delta y_{mn} = \mu\, s_{mn}^2$

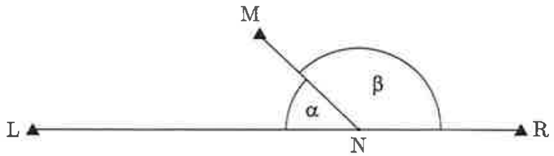
$\rightarrow \quad x_n = x_m + \Delta x_{mn}$, $y_n = y_m + \Delta y_{mn}$

Bem.: „Gefährlicher“ Kreis $\doteq$ Kreis durch P_L, P_M, P_R und P_N

– Collins'scher Hilfspunkt

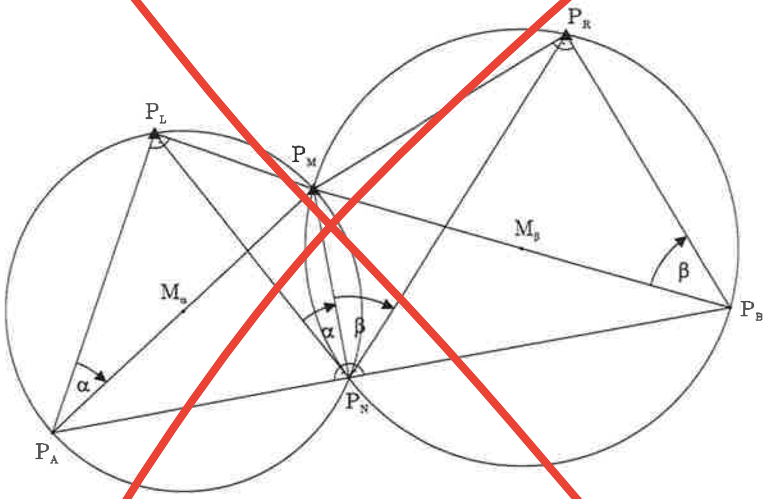






$\alpha + \beta \neq 200g$

– Verfahren von Cassini



Koordinatensysteme im $I\!R_3$

- Nachtrag: griechische Buchstaben ...

  Alpha (α), Beta (β), Gamma (γ, Γ), Delta (δ, Δ),
  Epsilon (ε), Zeta (ζ), Eta (η), Theta (ϑ, θ, Θ), Iota (ι),
  Kappa (κ), Lambda (λ, Λ), My (μ), Ny (ν), Xi (ξ, Ξ),
  Omikron (o), Pi (π, Π), Rho (ρ), Sigma (σ, Σ), Tau (τ),
  Ypsilon (υ, Υ), Phi (φ, ϕ, Φ), Chi (χ), Psi (ψ, Ψ), Omega (ω, Ω)

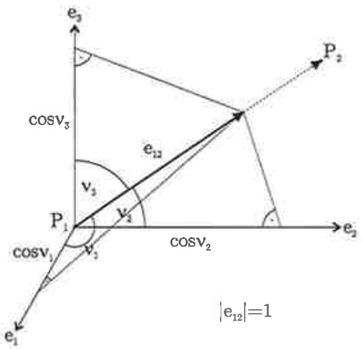
- Definition: Rechtssystem ...

  „die $\mathbf{e}_1$-Achse, $\mathbf{e}_2$-Achse und $\mathbf{e}_3$-Achse sind gerichtet wie der gespreizte Daumen, der Zeigefinger und der Mittelfinger der rechten Hand“.

  $\Rightarrow$ positiver Drehsinn in den Koordinatenebenen ...
  (e_1, e_2)-Ebene: im Uhrzeigersinn
  (e_1, e_3)-Ebene: gegen den Uhrzeigersinn
  (e_2, e_3)-Ebene: im Uhrzeigersinn

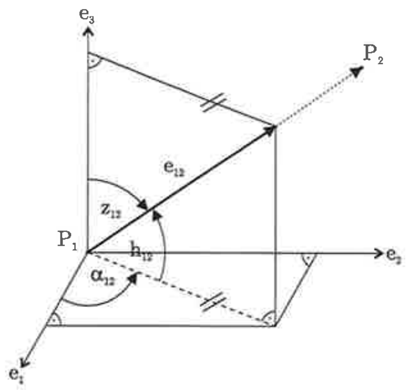
- Raumrichtung/Richtungsvektor:

  Richtungskosinus : $\rightarrow \quad \mathbf{e}_{12} = \begin{bmatrix} \cos\nu_1 \\ \cos\nu_2 \\ \cos\nu_3 \end{bmatrix}$



$$2\,\text{Winkel}: \alpha_{12},\ h_{12} \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}_{12} = \begin{bmatrix} \cos h_{12}\,\cos\alpha_{12} \\ \cos h_{12}\,\sin\alpha_{12} \\ \sin h_{12} \end{bmatrix}$$

$$2\,\text{Winkel}: \alpha_{12},\ z_{12} \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}_{12} = \begin{bmatrix} \sin z_{12}\,\cos\alpha_{12} \\ \sin z_{12}\,\sin\alpha_{12} \\ \cos z_{12} \end{bmatrix}$$



- Kartesische Koordinaten $\Leftrightarrow$ Polarkoordinaten:

  - $(x_1, x_2, x_3) \Leftrightarrow (r, \varphi, \lambda)$:

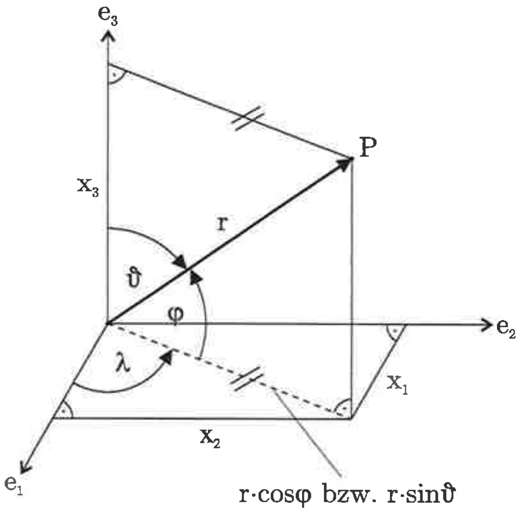
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\,\cos\varphi\,\cos\lambda \\ r\,\cos\varphi\,\sin\lambda \\ r\,\sin\varphi \end{bmatrix} \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \lambda < 2\pi$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \sin\varphi = \frac{x_3}{r}, \quad \tan\lambda = \frac{x_2}{x_1}$$

$-\ (x_1, x_2, x_3) \Leftrightarrow (r, \vartheta, \lambda):$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\,\sin\vartheta\,\cos\lambda \\ r\,\sin\vartheta\,\sin\lambda \\ r\,\cos\vartheta \end{bmatrix} \qquad 0 \le \vartheta \le \pi, \quad 0 \le \lambda < 2\pi$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \cos\vartheta = \frac{x_3}{r}, \quad \tan\lambda = \frac{x_2}{x_1}$$



Vektorprodukte

$$\vec{\mathrm{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathrm{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

- Skalares Produkt:

  $\vec{\mathrm{a}} \cdot \vec{\mathrm{b}} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

  $\vec{\mathrm{a}} \cdot \vec{\mathrm{b}} = |\vec{\mathrm{a}}| \cdot |\vec{\mathrm{b}}| \cos(\varphi) \quad \vec{\mathrm{a}} \cdot \vec{\mathrm{b}} = 0 \iff \vec{\mathrm{a}} \perp \vec{\mathrm{b}} \quad (\varphi = 90^\circ)$

  $\vec{\mathrm{a}} \cdot \vec{\mathrm{b}} = < \vec{\mathrm{a}}, \vec{\mathrm{b}} > = \vec{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}} \vec{\mathrm{b}}$

  $\vec{\mathrm{a}} \cdot \vec{\mathrm{a}} = |\vec{\mathrm{a}}|^2$

- Dyadisches Produkt:

  $$\vec{\mathrm{a}} \cdot \vec{\mathrm{b}}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$$

- Vektorprodukt(Kreuz-, Dachprodukt):

  $$\vec{\mathrm{a}} \times \vec{\mathrm{b}} = \vec{\mathrm{a}} \wedge \vec{\mathrm{b}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

  $\vec{\mathrm{a}} \times \vec{\mathrm{b}} = \vec{\mathrm{c}} \iff \vec{\mathrm{a}} \perp \vec{\mathrm{c}}, \vec{\mathrm{b}} \perp \vec{\mathrm{c}}, \quad |\vec{\mathrm{a}} \times \vec{\mathrm{b}}| = |\vec{\mathrm{a}}| \cdot |\vec{\mathrm{b}}| \cdot \sin\varphi$

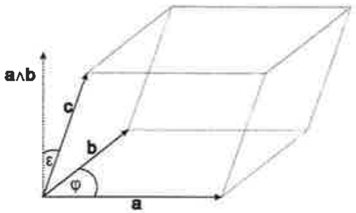
  $$\vec{\mathrm{a}} \times \vec{\mathrm{b}} = \mathbf{A}_{\vec{\mathrm{a}}} \cdot \vec{\mathrm{b}} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

  $\vec{\mathrm{a}} || \vec{\mathrm{b}} \implies \vec{\mathrm{a}} \times \vec{\mathrm{b}} = \vec{0}$

- Spatprodukt:

  $[\vec{\mathrm{a}}, \vec{\mathrm{b}}, \vec{\mathrm{c}}] = < \vec{\mathrm{a}} \wedge \vec{\mathrm{b}}, \vec{\mathrm{c}} > = < \vec{\mathrm{b}} \wedge \vec{\mathrm{c}}, \vec{\mathrm{a}} > = < \vec{\mathrm{c}} \wedge \vec{\mathrm{a}}, \vec{\mathrm{b}} > =$

  $$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \equiv |\vec{\mathrm{a}} \wedge \vec{\mathrm{b}}| \cdot |\vec{\mathrm{c}}| \cdot \cos\epsilon = |\vec{\mathrm{a}}| \cdot |\vec{\mathrm{b}}| \cdot \sin\varphi \cdot |\vec{\mathrm{c}}| \cdot \cos\epsilon$$



Orthogonale Transformationen im $\mathbb{R}_3$

- Spezielle Drehmatrizen im $\mathbb{R}_3$:

  $\mathbf{U}(\mathrm{p}, \mathrm{q}; \varphi)$ $\quad \ldots$
  Drehung in der $(\mathbf{e_p}, \mathbf{e_q})$ - Ebene um φ im Uhrzeigersinn!

  $$\mathbf{U}(1,2;\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{Drehung um } \mathbf{e}_3\text{-Achse}$$

  $$\mathbf{U}(1,3;\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \text{Drehung um } \mathbf{e}_2\text{-Achse}$$

  $$\mathbf{U}(2,3;\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \text{Drehung um } \mathbf{e}_1\text{-Achse}$$

- Eulersche Winkel bei Koordinatentransformationen:
  - der Übergang zwischen zwei allgemein zueinander verdrehten Koordinatensystemen im $\mathbb{R}_3$ lässt sich durch *drei* Teildrehungen beschreiben.
  - Teildrehungen nach Euler:

    1. φ-Drehung um die e_3-Achse:

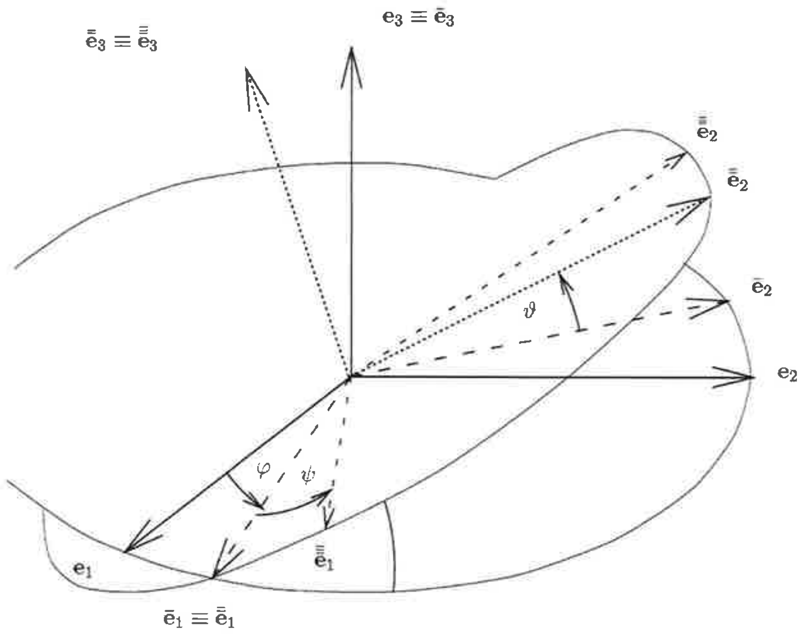
    $$\mathbf{R}_3(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{R}_3(\varphi)\,\bar{\mathbf{x}}$$

2. ϑ-Drehung um die mitgedrehte e_1-Achse:

$$\mathbf{R}_1(\vartheta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{R}_1(\vartheta)\,\bar{\bar{\mathbf{x}}}$$

3. ψ-Drehung um die mitgedrehte e_3-Achse:

$$\mathbf{R}_3(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \bar{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{R}_3(\psi)\,\bar{\bar{\bar{\mathbf{x}}}}$$



– Gesamtdrehung:

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}\,\bar{\bar{\mathbf{x}}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{R} = \mathbf{R_3}(\varphi)\,\mathbf{R_1}(\vartheta)\,\mathbf{R_3}(\psi)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\,\cos\psi - \sin\varphi\,\sin\psi\,\cos\vartheta & -\cos\varphi\,\sin\psi - \sin\varphi\,\cos\psi\,\cos\vartheta & \sin\varphi\,\sin\vartheta \\ \sin\varphi\,\cos\psi + \cos\varphi\,\sin\psi\,\cos\vartheta & -\sin\varphi\,\sin\psi + \cos\varphi\,\cos\psi\,\cos\vartheta & -\cos\varphi\,\sin\vartheta \\ \sin\psi\,\sin\vartheta & \cos\psi\,\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

- Drehachse u. Drehwinkel bei Ähnlichkeitstransformationen:

– $(\boldsymbol{\omega}, \alpha) \rightarrow \mathbf{R}$ (Variante 1):

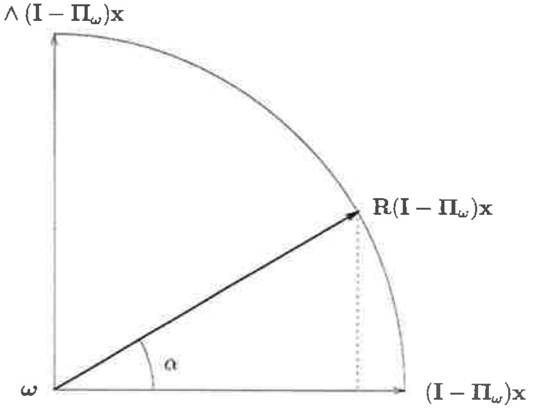
Ausgangsbasis ... $\mathbf{y} = \mathbf{R}\,\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ gedreht, $\mathbf{x}$ ungedreht
Koord.transf. ... $\mathbf{V} = [\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^* = \boldsymbol{\omega}]$, $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y} = \mathbf{V}\mathbf{y}^*$
$\rightarrow \mathbf{V}\mathbf{y}^* = \mathbf{R}\,\mathbf{V}\mathbf{x}^*, \quad \mathbf{y}^* = \mathbf{V}^T\mathbf{R}\,\mathbf{V}\,\mathbf{x}^*$
$\rightarrow \mathbf{y}^* = \mathbf{R}^*\mathbf{x}^*, \quad \mathbf{R}^* = \mathbf{V}^T\mathbf{R}\,\mathbf{V}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{V}\,\mathbf{R}^*\,\mathbf{V}^T$

$$\text{mit} \quad \mathbf{R}^* = \mathbf{R}_3(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

– $(\boldsymbol{\omega}, \alpha) \rightarrow \mathbf{R}$ (Variante 2):

Separation von $\mathbf{x}$ ... $\mathbf{x} = \boldsymbol{\Pi}_\omega\,\mathbf{x} + (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi}_\omega)\,\mathbf{x}$
$\boldsymbol{\Pi}_\omega = \boldsymbol{\omega}\,(\boldsymbol{\omega}^T\,\boldsymbol{\omega})^{-1}\,\boldsymbol{\omega}^T = \boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{\omega}^T$ ... Proj.matrix auf $\boldsymbol{\omega}$
$\boldsymbol{\Pi}_\omega\,\mathbf{x}$ ... Anteil in $\boldsymbol{\omega}$
$(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi}_\omega)\,\mathbf{x}$ ... Anteil orthogonal zu $\boldsymbol{\omega}$

$$\rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{R}\,\mathbf{x} = \boldsymbol{\Pi}_\omega\,\mathbf{x} + \mathbf{R}\,(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi}_\omega)\,\mathbf{x}$$



$$\mathbf{R}\,(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi}_\omega)\,\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi}_\omega)\,\mathbf{x}\,\cos\alpha \;+\; (\boldsymbol{\omega} \wedge\; (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi}_\omega)\,\mathbf{x})\;\sin\alpha$$
$$\rightarrow \mathbf{y} = \boldsymbol{\Pi}_\omega\,\mathbf{x} \;+\; (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi}_\omega)\,\mathbf{x}\,\cos\alpha \;+\; (\boldsymbol{\omega} \wedge\; (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi}_\omega)\,\mathbf{x})\;\sin\alpha$$

$$\text{mit}\quad \mathbf{A}_\omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_\omega\,\mathbf{z} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{z}$$

$$\rightarrow \mathbf{y} = \boldsymbol{\Pi}_\omega\,\mathbf{x} \;+\; (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi}_\omega)\,\mathbf{x}\,\cos\alpha \;+\; A_\omega\,(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi}_\omega)\,\mathbf{x}\,\sin\alpha$$

$$\rightarrow \mathbf{y} = (\boldsymbol{\Pi}_\omega \;+\; (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi}_\omega)\;\cos\alpha \;+\; A_\omega\,(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi}_\omega)\;\sin\alpha)\,\mathbf{x}$$
$$\rightarrow \mathbf{R} = \boldsymbol{\Pi}_\omega \;+\; (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi}_\omega)\;\cos\alpha \;+\; A_\omega\,(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi}_\omega)\;\sin\alpha$$

$$\text{mit}\quad \mathbf{A}_\omega\,\boldsymbol{\Pi}_\omega \;=\; \mathbf{A}_\omega\,\boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{\omega}^T \;=\; (\boldsymbol{\omega} \;\wedge\; \boldsymbol{\omega})\,\boldsymbol{\omega}^T \;=\; \mathbf{0}$$

$$\boxed{\rightarrow \mathbf{R} = \boldsymbol{\Pi}_\omega \;+\; (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi}_\omega)\;\cos\alpha \;+\; \mathbf{A}_\omega\;\sin\alpha}$$

– $\mathbf{R} \to (\boldsymbol{\omega}, \alpha)$ (Variante 1):

Drehung eines beliebigen Vektors ... $\mathbf{y} = \mathbf{R}\,\mathbf{x}$
Differenzvektor orth. zu $\boldsymbol{\omega}$ ... $\mathbf{h} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$
Drehung des Differenzvektors ... $\mathbf{h}' = \mathbf{R}\,\mathbf{h}$

$\to\ \boldsymbol{\omega}^* = \mathbf{h} \wedge \mathbf{h}', \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{\omega}^*}{|\boldsymbol{\omega}^*|}$

$\cos\alpha = \frac{<\mathbf{h},\mathbf{h}'>}{|\mathbf{h}|\,|\mathbf{h}'|} = \frac{<\mathbf{h},\mathbf{h}'>}{<\mathbf{h},\mathbf{h}>}$

– $\mathbf{R} \to (\boldsymbol{\omega}, \alpha)$ (Variante 2):

$\boldsymbol{\omega}$ ist Eigenvektor von $\mathbf{R}$ zum Eigenwert 1 ...
$\mathbf{R}\,\boldsymbol{\omega}^* = \boldsymbol{\omega}^* \to (\mathbf{R} - \mathbf{I})\,\boldsymbol{\omega}^* = \mathbf{0} \to \boldsymbol{\omega}^* \to \boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{\omega}^*}{|\boldsymbol{\omega}^*|}$

$\cos\alpha = \frac{tr(\mathbf{R})-1}{2} \to \alpha$

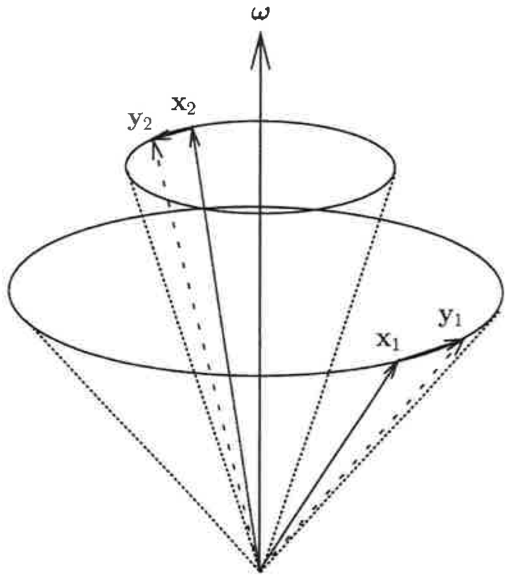
Kontrolle: $r_{12} = \omega_1\omega_2(1 - \cos\alpha) - \omega_3 \sin\alpha$

– $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)\ \&\ (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \to (\boldsymbol{\omega}, \alpha)$:

Diff.vektoren orth. zu $\boldsymbol{\omega}$ ... $\mathbf{h}_1 = \mathbf{y}_1 - \mathbf{x}_1, \ \mathbf{h}_2 = \mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_2$
$\to\ \boldsymbol{\omega}^* = \mathbf{h}_1 \wedge \mathbf{h}_2, \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{\omega}^*}{|\boldsymbol{\omega}^*|}$

Separation von z.B. $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{y}_1$ $(= \mathbf{x}, \mathbf{y})$ ...
$\mathbf{p}_\omega = \mathbf{\Pi}_\omega\,\mathbf{x} = <\boldsymbol{\omega}, \mathbf{x}>\boldsymbol{\omega}$
$= \mathbf{\Pi}_\omega\,\mathbf{y} = <\boldsymbol{\omega}, \mathbf{y}>\boldsymbol{\omega}$ ... Anteil in $\boldsymbol{\omega}$
$\mathbf{p}_x = \mathbf{x} - \mathbf{p}_\omega, \ \mathbf{p}_y = \mathbf{y} - \mathbf{p}_\omega$ ... Anteile orth. zu $\boldsymbol{\omega}$

$\to\ \cos\alpha = \frac{<\mathbf{p}_x,\mathbf{p}_y>}{|\mathbf{p}_x|\,|\mathbf{p}_y|} = \frac{<\mathbf{p}_x,\mathbf{p}_y>}{<\mathbf{p}_x,\mathbf{p}_x>}$



- Infinitesimale Drehungen
  - Infinitesimale Koord.transf. ($\cos\varphi \doteq 1$ u. $\sin\varphi \doteq \varphi$):

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \delta\,\mathbf{R}, \quad \text{z.B.}: \quad \mathbf{R}_3(\varphi) = \mathbf{I} + \begin{bmatrix} 0 & -\varphi & 0 \\ \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^T\mathbf{R} &= (\mathbf{I} + \delta\,\mathbf{R}^T)\,(\mathbf{I} + \delta\,\mathbf{R}) \\ &= \mathbf{I} + \delta\,\mathbf{R}^T + \delta\,\mathbf{R} + \underbrace{\delta\,\mathbf{R}^T\,\delta\,\mathbf{R}}_{\doteq 0} = \mathbf{I} \rightarrow \delta\,\mathbf{R}^T = -\delta\,\mathbf{R} \end{aligned}$$

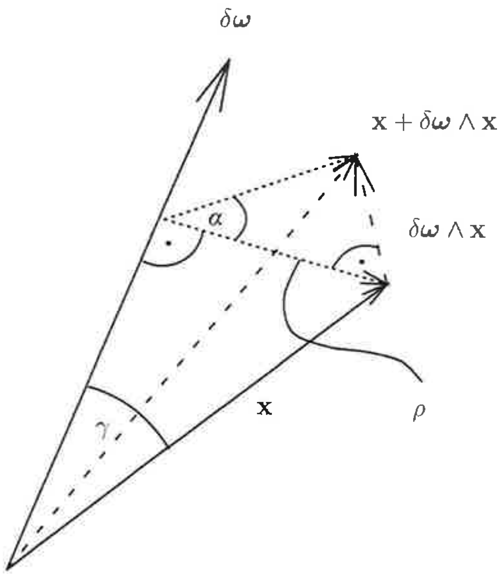
$$\begin{aligned} \rightarrow \mathbf{R}(\varphi,\vartheta,\psi) &= [\mathbf{I} + \delta\mathbf{R}_3(\varphi)]\,[\mathbf{I} + \delta\mathbf{R}_1(\vartheta)]\,[\mathbf{I} + \delta\mathbf{R}_3(\psi)] \\ &= \mathbf{I} + \delta\mathbf{R}_3(\varphi) + \delta\mathbf{R}_1(\vartheta) + \delta\mathbf{R}_3(\psi) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \mathbf{R}(\varphi,\vartheta,\psi) = \mathbf{I} + \begin{bmatrix} 0 & -\varphi-\psi & 0 \\ \varphi+\psi & 0 & -\vartheta \\ 0 & \vartheta & 0 \end{bmatrix}$$

– Infinitesimale Ähnlichkeitstransformation:

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \begin{bmatrix} 0 & -\delta\omega_3 & \delta\omega_2 \\ \delta\omega_3 & 0 & -\delta\omega_1 \\ -\delta\omega_2 & \delta\omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \delta\omega_1 \\ \delta\omega_2 \\ \delta\omega_3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{y} = (\mathbf{I} + \delta\,\mathbf{R})\,\mathbf{x} = \mathbf{x} + \delta\,\mathbf{R}\,\mathbf{x} = \mathbf{x} + (\delta\,\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x})$$



$$|\,\delta\,\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}\,| = |\,\delta\,\boldsymbol{\omega}\,| \cdot |\,\mathbf{x}\,|\,\sin\gamma = |\,\delta\,\boldsymbol{\omega}\,| \cdot \rho$$

$\rightarrow \delta\,\boldsymbol{\omega}$ ... Richtung der Drehachse $\boldsymbol{\omega}$
$|\delta\,\boldsymbol{\omega}|$ ... Drehwinkel $\hat{\alpha}$

Geraden- und Ebenengleichungen

$\mathbb{R}_2$

<u>Gerade:</u>

Parameterform ... $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x_0}} + \lambda\vec{\mathbf{a}} \quad \vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{x_0}} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$

parameterfrei ... $\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{x_0}} \quad \vec{\mathbf{n}} \perp \vec{\mathbf{a}}, \quad \vec{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}_3$

<u>Gerade:</u>

Parameterform ... $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x_0}} + \lambda\vec{\mathbf{a}} \quad \vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{x_0}} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$

parameterfrei ... $\left.\begin{matrix} \vec{\mathbf{n_1}} \cdot \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{n_1}} \cdot \vec{\mathbf{x_0}} \\ \vec{\mathbf{n_2}} \cdot \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{n_2}} \cdot \vec{\mathbf{x_0}} \end{matrix}\right\} \quad \vec{\mathbf{n_1}}, \vec{\mathbf{n_2}} \perp \vec{\mathbf{a}}$

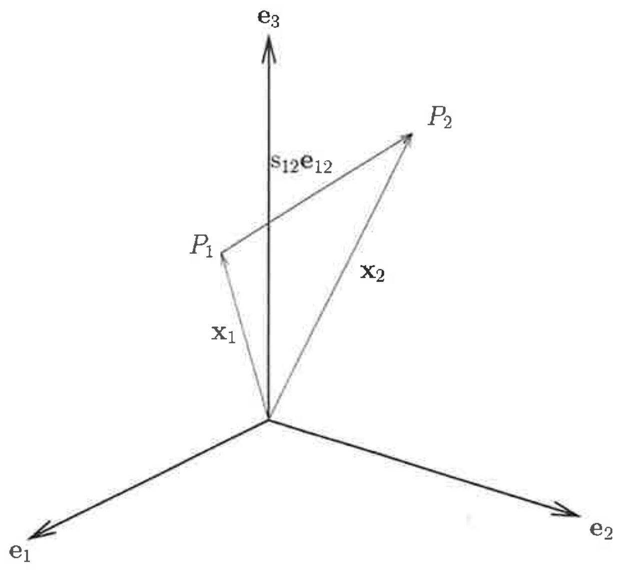
<u>Ebene:</u>

Parameterform ... $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x_0}} + \lambda\vec{\mathbf{a}} + \mu\vec{\mathbf{b}}$

parameterfrei ... $\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{x_0}} \quad \vec{\mathbf{n}} \perp \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$

Punktbestimmung im $\mathbb{R}_3$

- Grundaufgaben im Raum:



  - Erste Grundaufgabe:

    geg.: $P_1 : (x_1, y_1, z_1)$
    s_{12} ... Distanz zwischen P_1 und P_2
    $\mathbf{e}_{12}$ ... Einheitsvektor von P_1 in Richtung P_2
    ges.: $P_2 : (x_2, y_2, z_2)$

    $\Rightarrow \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + s_{12}\,\mathbf{e}_{12}$

– Zweite Grundaufgabe:

geg.: $P_1 : (x_1, y_1, z_1), \quad P_2 : (x_2, y_2, z_2)$
ges.: s_{12}, $\mathbf{e}_{12}$

$$\Rightarrow \quad \Delta\mathbf{x}_{12} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$$
$$s_{12} = |\Delta\mathbf{x}_{12}|, \quad \mathbf{e}_{12} = \tfrac{\Delta\mathbf{x}_{12}}{s_{12}}$$

- Polygonzug im Raum:

fortgesetzte 1.HA ...
$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + s_{i,i+1}\,\mathbf{e}_{i,i+1}$$
mit Richtungsvektor
$$\mathbf{e}_{i,i+1} = \begin{bmatrix} \cos h_{i,i+1} \; \cos\alpha_{i,i+1} \\ \cos h_{i,i+1} \; \sin\alpha_{i,i+1} \\ \sin h_{i,i+1} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{e}_{i,i+1} = \mathbf{R}_i\,\mathbf{e}_{i-1,i}$$
zugrunde liegende Richtungsübertragung ...
$$\alpha_{i,i+1} = (\alpha_{i-1,i} + \beta_i + 180^o) \bmod 360^o$$

- Räumlicher Vorwärtsschnitt mit Richtungen:

geg.: $P_1 : (x_1, y_1, z_1), \quad P_2 : (x_2, y_2, z_2)$
$\mathbf{e}_{1N}, \quad \mathbf{e}_{2N}$
ges.: $P_N : (x_N, y_N, z_N)$

Achtung: Überbestimmung!
$(\Delta\mathbf{x}_{12}, \mathbf{e}_{1N}, \mathbf{e}_{2N}) \doteq 0$ ... Spatprodukt

Lösung:

$\mathbf{x}_N = \mathbf{x}_1 + s_{1N}\,\mathbf{e}_{1N}$ mit $s_{1N} = \frac{<\mathbf{e}_{2N}^{\perp}, \Delta\mathbf{x}_{12}>}{<\mathbf{e}_{2N}^{\perp}, \mathbf{e}_{1N}>}$

Beweis:

$\mathbf{x}_N = \mathbf{x}_1 + s_{1N}\,\mathbf{e}_{1N}\ , \quad \mathbf{x}_N = \mathbf{x}_2 + s_{2N}\,\mathbf{e}_{2N}$

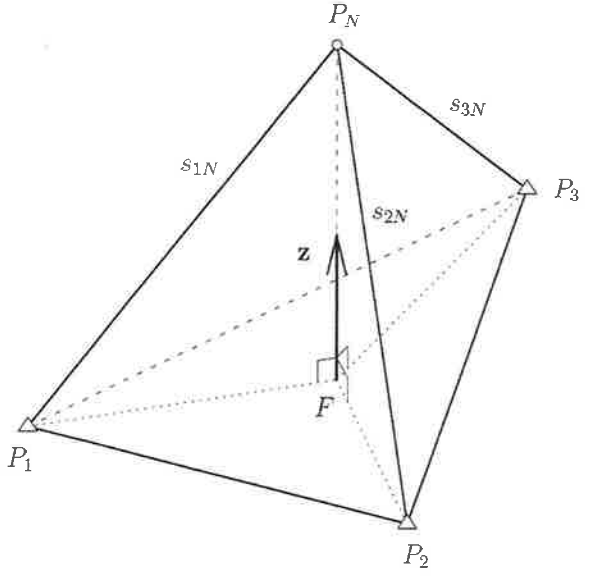
$\mathbf{x}_1 + s_{1N}\,\mathbf{e}_{1N} = \mathbf{x}_2 + s_{2N}\,\mathbf{e}_{2N}\ /\ < \mathbf{e}_{2N}^{\perp}, \cdot >$

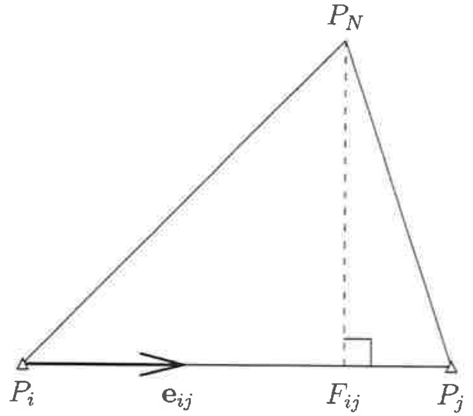
$< \mathbf{e}_{2N}^{\perp}, \mathbf{x}_1 > + \ s_{1N} < \mathbf{e}_{2N}^{\perp}, \mathbf{e}_{1N} > = < \mathbf{e}_{2N}^{\perp}, \mathbf{x}_2 >$

- Räumlicher Bogenschnitt:

geg.: $P_1 : (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 : (x_2, y_2, z_2)$, $P_3 : (x_3, y_3, z_3)$,
s_{1N}, s_{2N}, s_{3N}

ges.: $P_N : (x_N, y_N, z_n)$





– Herleitung:

Ebene durch P_1, P_2, P_3:
$E_{123} \ldots \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \lambda\,(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + \mu\,(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)$

Normalebenen auf $\mathbf{e}_{ij}$ durch P_N:
$E_{ij} \ldots \mathbf{e}_{ij}^T\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{F_{ij}}) = 0, \quad (i,j) = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$
mit $\mathbf{x}_{F_{ij}} = \mathbf{x}_i + \frac{s_{iN}^2 - s_{jN}^2 + s_{ij}^2}{2\,s_{ij}}\,\mathbf{e}_{ij}$

Schnitt zw. E_{123}, E_{12}, E_{13}:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{12}^T\,(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{F_{12}}) + \lambda\,\mathbf{e}_{12}^T\,(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + \mu\,\mathbf{e}_{12}^T\,(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) &= 0\\
\mathbf{e}_{13}^T\,(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{F_{13}}) + \lambda\,\mathbf{e}_{13}^T\,(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + \mu\,\mathbf{e}_{13}^T\,(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) &= 0
\end{aligned}$$

Gleichungssystem in λ, μ:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda\,s_{12} + \mu\cos\beta\,s_{13} &= s_{1,F_{12}}\\
\lambda\,s_{12}\cos\beta + \mu\,s_{13} &= s_{1,F_{13}}
\end{aligned}\right\}\ \text{mit } \cos\beta = \mathbf{e}_{12}^T\,\mathbf{e}_{13}$$

Lösung des Gleichungssystems:

$$\mu = \frac{s_{1,F_{13}} - s_{1,F_{12}}\cos\beta}{s_{13}\sin^2\beta}, \qquad \lambda = \frac{s_{1,F_{12}} - s_{1,F_{13}}\cos\beta}{s_{12}\sin^2\beta}$$

– Rezept:

(1) 2.HA: s_{12}, $\mathbf{e}_{12}$; s_{13}, $\mathbf{e}_{13}$

(2)
$$\left.\begin{array}{l} \cos\beta = \mathbf{e}_{12}^T\,\mathbf{e}_{13} \\ s_{1,F_{12}} = \frac{s_{1N}^2 - s_{2N}^2 + s_{12}^2}{2\,s_{12}} \\ s_{1,F_{13}} = \frac{s_{1N}^2 - s_{3N}^2 + s_{13}^2}{2\,s_{13}} \end{array}\right\} \rightarrow \lambda,\ \mu$$

(3) $\mathbf{x}_F = \mathbf{x}_1 + \lambda\,(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + \mu\,(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)$

(4) $h = \sqrt{s_{iN}^2 - s_{iF}^2}\,, \quad i = 1, 2, 3$

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{e}_{12} \wedge \mathbf{e}_{13}}{|\mathbf{e}_{12} \wedge \mathbf{e}_{13}|}$$

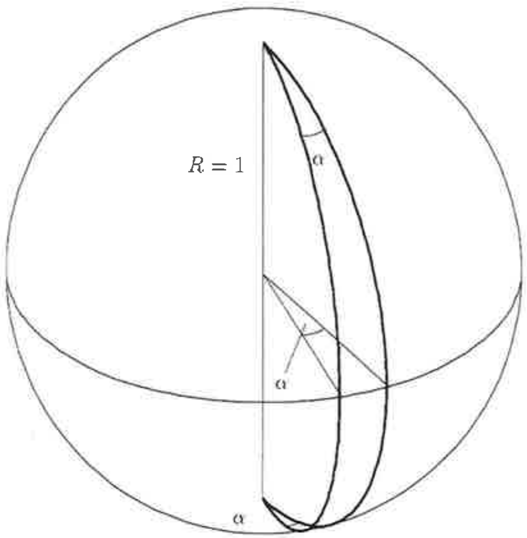
(5) $\mathbf{x}_N = \mathbf{x}_F \pm h\,\mathbf{z}$

Koordinatenrechnung auf der Kugel

Sphärische Trigonometrie

- Das sphärische Zweieck:

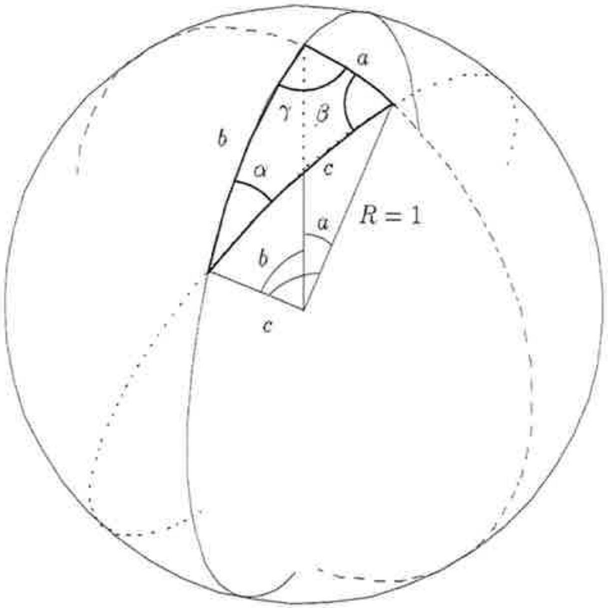
  Definition: zwei Großkreise teilen die Kugeloberfläche
  in vier sphärische „Zweiecke".



F ... Fläche des Zweiecks auf der Einheitskugel:
$\frac{F}{4\pi} = \frac{\alpha}{2\pi} \quad \rightarrow \quad F = 2\,\alpha$

- Das sphärische Dreieck:

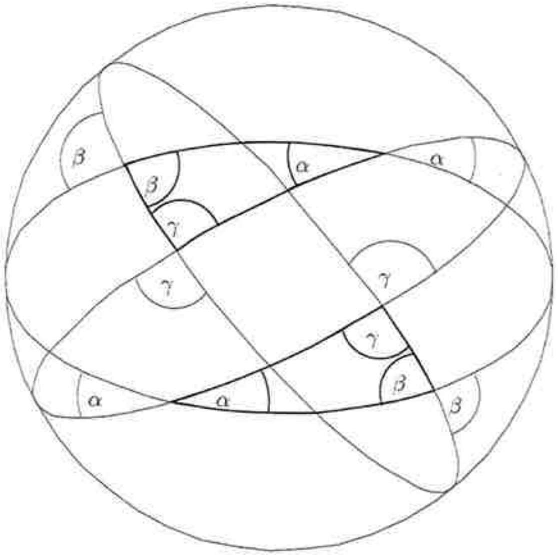
  Definition: Schnitt eines Dreikants mit einer Kugel $\rightarrow$ Dreieck auf der Kugel begrenzt durch Großkreisbögen.



  Eigenschaften: $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma < 180^o$
  $a + b + c < 360^o$
  $180^o < \alpha + \beta + \gamma < 540^o$

- Der sphärische Exzess ε:

  Definition: $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi$



Fläche des sphärischen Dreiecks ... F
Flächen der drei Kugelzweiecke ... $F(\alpha), F(\beta)$ u. $F(\gamma)$:

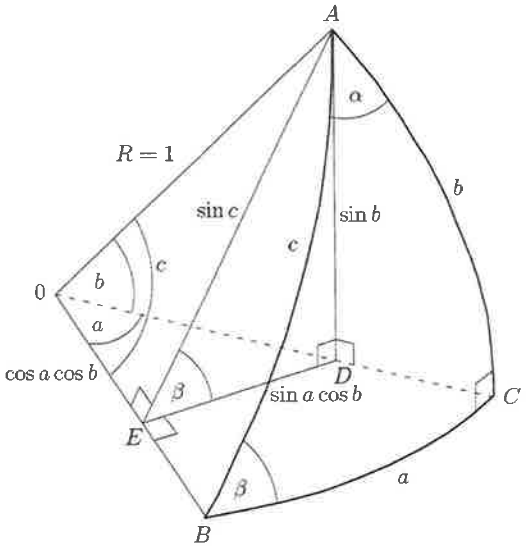
$\Rightarrow 2\,[F(\alpha) + F(\beta) + F(\gamma)] = 4\pi + 4F$

$\Rightarrow F = \alpha + \beta + \gamma - \pi$

Fläche eines sphärischen Dreiecks auf einer
Kugel mit Radius R :

$\Rightarrow F = R^2\,\varepsilon$

- Das rechtwinkelige sphärische Dreieck:



Kugel			Ebene		
$\sin a$	$=$	$\sin c \sin\alpha$	a	$=$	$c \sin\alpha$
$\sin b$	$=$	$\sin c \sin\beta$	b	$=$	$c \sin\beta$
$\tan a$	$=$	$\sin b \tan\alpha$	a	$=$	$b \tan\alpha$
	$=$	$\tan c \cos\beta$		$=$	$c \cos\beta$
$\tan b$	$=$	$\sin a \tan\beta$	b	$=$	$a \tan\beta$
	$=$	$\tan c \cos\alpha$		$=$	$c \cos\alpha$
$\cos c$	$=$	$\cos a \cos b$	c^2	$=$	$a^2 + b^2$
$\cos c$	$=$	$\cot\alpha \cot\beta$	1	$=$	$\cot\alpha \cot\beta$
$\cos\alpha$	$=$	$\cos a \sin\beta$	$\cos\alpha$	$=$	$\sin\beta$
$\cos\beta$	$=$	$\cos b \sin\alpha$	$\cos\beta$	$=$	$\sin\alpha$

- Das schiefwinkelige sphärische Dreieck:
  - Sphärischer Sinussatz:

    $$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

  - Sphärischer Cosinussatz für Seiten:

    $$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

    Numerisch stabile Alternative:

    $$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\sin^2 \frac{b-c}{2} + \sin b \sin c \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

    $$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\cos^2 \frac{b+c}{2} + \sin b \sin c \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

  - Sphärischer Cosinussatz für Winkel:

    $$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

    Numerisch stabile Alternative:

    $$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\cos^2 \frac{\beta+\gamma}{2} + \sin \beta \sin \gamma \sin^2 \frac{a}{2}}$$

    $$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\sin^2 \frac{\beta-\gamma}{2} + \sin \beta \sin \gamma \cos^2 \frac{a}{2}}$$

  - Halbseitensatz:

    $$\cot \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}} \quad mit \quad \sigma = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

– Halbwinkelsatz:

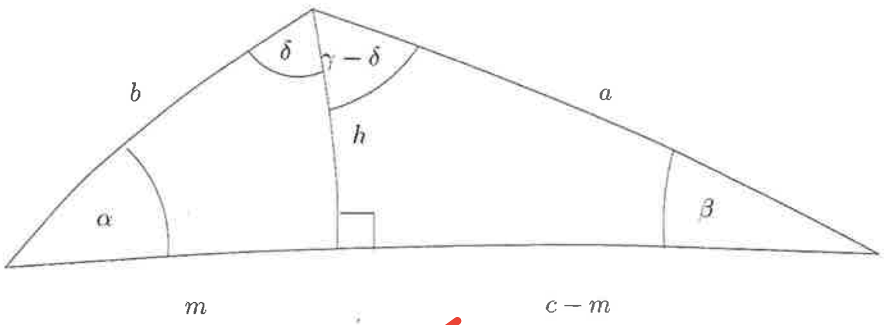
$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}} \quad mit \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

– Hilfsformel:

$$k \sin\frac{a}{2} = \sqrt{\sin^2\frac{b-c}{2} + \sin b \sin c \cos^2\frac{\beta+\gamma}{2}}$$

$$k \cos\frac{a}{2} = \sqrt{\cos^2\frac{b+c}{2} + \sin b \sin c \sin^2\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

$$k = \sqrt{1 - \sin b \sin c \sin\beta \sin\gamma}$$



- Ausgewählte Beweise zu den o.g. Lehrsätzen:
  – Beweis Sinussatz:

$$\begin{aligned} \sin h &= \sin b \sin\alpha \\ \sin h &= \sin a \sin\beta \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

– Beweis Seitencosinussatz:

Anwendung des sphärischen Pythagoras ...

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos h\ \cos(c-m)\\ &= \cos h\,(\cos c\ \cos m + \sin c\ \sin m)\\ &= \cos c\ \underbrace{\cos h\ \cos m}_{\cos b} + \sin c\ \cos h\ \sin m\end{aligned}$$

Umformung von $(\cos h\ \sin m)$ ergibt ...

$$\begin{aligned}\cos h\ \sin m &= \cos h\ \tan m\ \cos m\\ &= \cos b\ \tan m\\ &= \cos b\ \tan b\ \cos\alpha\\ &= \sin b\ \cos\alpha\end{aligned}$$

$\rightarrow \quad \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$

– Beweis Halbwinkelsatz:

Aus Seitenkosinussatz folgt ...

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b\ \sin c}$$

Aus elementarer Trigonometrie folgt ...

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Weiters bildet man Ausdrücke für $(1 - \cos\alpha)$ und $(1 + \cos\alpha)$ ...

$$1 - \cos\alpha = \frac{\sin b \, \sin c + \cos b \, \cos c - \cos a}{\sin b \, \sin c}$$

$$= \frac{\cos(b - c) - \cos a}{\sin b \, \sin c}$$

$$= \frac{-2\sin\dfrac{b - c + a}{2} \, \sin\dfrac{b - c - a}{2}}{\sin b \, \sin c}$$

$$1 + \cos\alpha = \frac{-2\sin\dfrac{a + b + c}{2} \, \sin\dfrac{a - b - c}{2}}{\sin b \, \sin c}$$

Einsetzen in $\tan\frac{\alpha}{2}$ ergibt ...

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{\sin\dfrac{b - c + a}{2} \, \sin\dfrac{b - c - a}{2}}{\sin\dfrac{a + b + c}{2} \, \sin\dfrac{a - b - c}{2}}$$

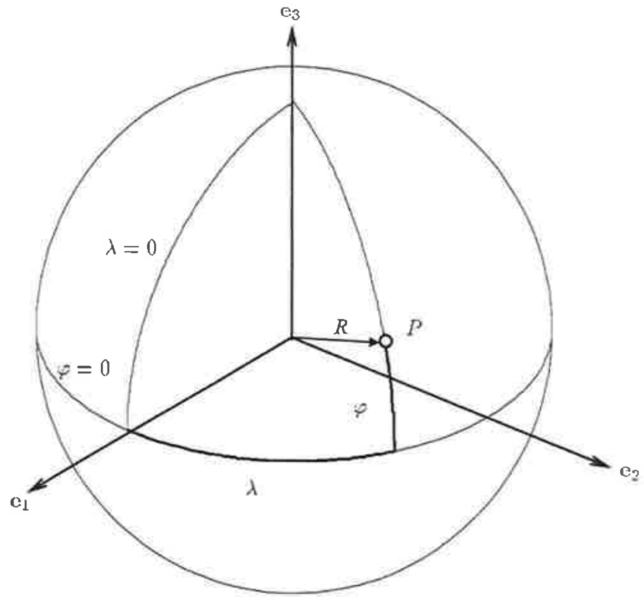
$$= \frac{\sin\dfrac{b - c + a}{2} \, \sin\dfrac{a + c - b}{2}}{\sin\dfrac{a + b + c}{2} \, \sin\dfrac{b + c - a}{2}}$$

$$\rightarrow \quad \tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s - b) \, \sin(s - c)}{\sin s \, \sin(s - a)}}$$

- Auflösung schiefwinkeliger Dreiecke:
  - geg.: zwei Seiten und eingeschlossener Winkel; z.B. a, b, γ
    $\Rightarrow$ Seitencosinussatz $\rightarrow c$
    2* Halbwinkelsatz $\rightarrow \alpha, \beta$
    Kontrolle: Sinussatz
  - geg.: zwei Winkel und eingeschlossene Seite; z.B. α, β, c
    $\Rightarrow$ Winkelcosinussatz $\rightarrow \gamma$
    2* Halbseitensatz $\rightarrow a, b$
    Kontrolle: Sinussatz
  - geg.: zwei Seiten und gegenüberliegender Winkel; z.B. a, c, α
    Achtung: casus ambiguus!
    $\Rightarrow$ Sinussatz $\rightarrow \gamma_{1,2}$
    Hilfsformel $\rightarrow b_{1,2}$
    Halbwinkelsatz $\rightarrow \beta_{1,2}$
    Kontrolle: Halbwinkelsatz
  - geg.: zwei Winkel und gegenüberliegende Seite; z.B. α, γ, a
    Achtung: casus ambiguus!
    $\Rightarrow$ Sinussatz $\rightarrow c_{1,2}$
    Hilfsformel $\rightarrow b_{1,2}$
    Halbwinkelsatz $\rightarrow \beta_{1,2}$
    Kontrolle: Halbwinkelsatz
  - geg.: drei Seiten a, b, c
    $\Rightarrow$ 3* Halbwinkelsatz $\rightarrow \alpha, \beta, \gamma$
    Kontrolle: Sinussatz
  - geg.: drei Winkel α, β, γ
    $\Rightarrow$ 3* Halbseitensatz $\rightarrow a, b, c$
    Kontrolle: Sinussatz

Sphärische Geometrie

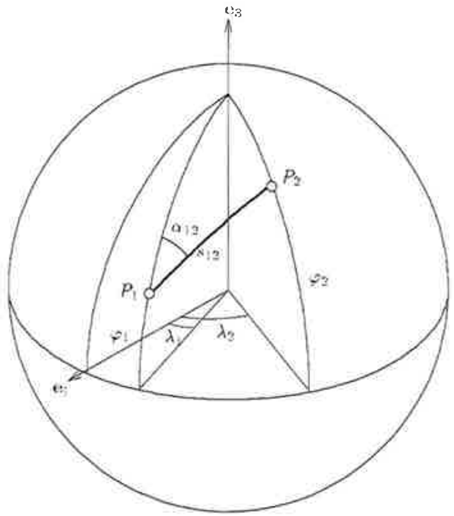
- Geographische Koordinaten:



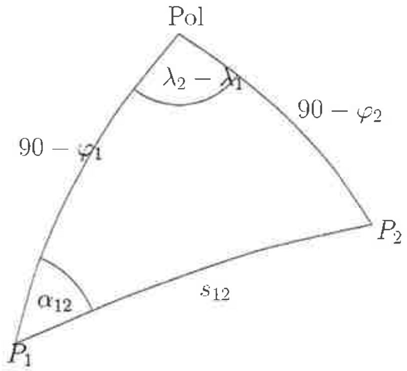
Nomenklatur:

φ ... geographische Breite
λ ... geographische Länge
$\varphi = 0$ ... Äquator
$\varphi = 90^o$ ... Nordpol
$\varphi = -90^o$ ... Südpol
$\lambda = 0$ ... Nullmeridian
λ positiv nach Osten

- Lösung der Grundaufgaben:
  - Ausgangssituation:



  - Poldreieck:



– Erste Grundaufgabe, 1.HA (Hauptaufgabe):

geg.: $P_1 : (\varphi_1, \lambda_1)$
s_{12} ... sphärische Distanz zwischen P_1 und P_2
α_{12} ... Azimut von P_1 nach P_2
ges.: $P_2 : (\varphi_2, \lambda_2)$
α_{21} ... Azimut von P_2 nach P_1

$\Rightarrow$ Seitencosinussatz $\rightarrow \varphi_2$
2$*$ Halbwinkelsatz $\rightarrow \Delta\lambda$, α_{21}

z.B.: aus $(90^o - \varphi_1)$, s_{12}, α_{12} $\quad\rightarrow$
$(90^o - \varphi_2)$, $\Delta\lambda_{12}$ bzw. $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda_{12}$,
$(360^o - \alpha_{21})$

– Zweite Grundaufgabe, 2.HA (Hauptaufgabe):

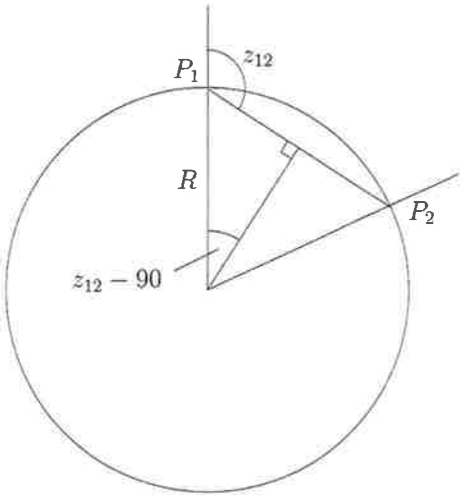
geg.: $P_1 : (\varphi_1, \lambda_1)$
$P_2 : (\varphi_2, \lambda_2)$
ges.: $s_{12}, \alpha_{12}, \alpha_{21}$

$\Rightarrow$ Seitencosinussatz $\rightarrow s_{12}$
2$*$ Halbwinkelsatz $\rightarrow \alpha_{12}, \alpha_{21}$

z.B.: aus $(90^o - \varphi_1)$, $(90^o - \varphi_2)$,
$\Delta\lambda_{12} = \lambda_2 - \lambda_1 \quad\rightarrow$
s_{12}, α_{12}, $(360^o - \alpha_{21})$

Vektorielle Berechnungen auf der Kugel

- Ausgangssituation:
  - „Zenitdistanz“ auf der Kugel:



  - Notwendige Drehung des Koordinatensystems:

    Ausgehend von

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \cos\varphi \ \cos\lambda \\ \cos\varphi \ \sin\lambda \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$$

    folgt mit $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{R}_3(-\lambda_1)\,\mathbf{x}$:

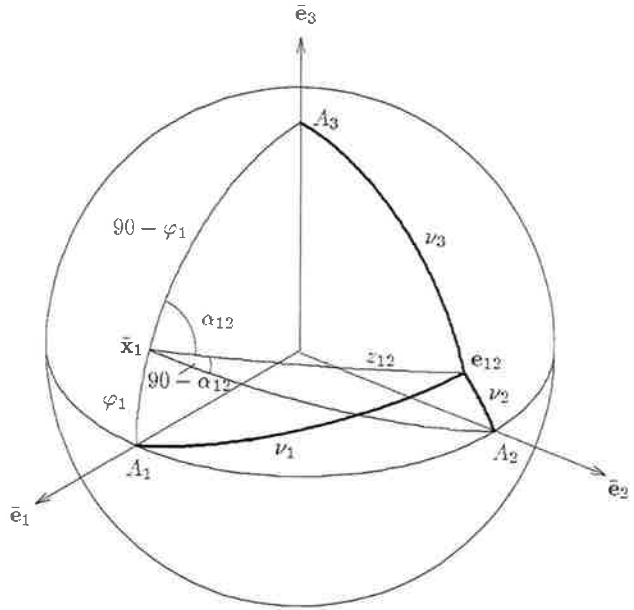
$$\bar{\mathbf{x}}_1 = R \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 \\ 0 \\ \sin\varphi_1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{x}}_2 = R \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 \ \cos(\lambda_2 - \lambda_1) \\ \cos\varphi_2 \ \sin(\lambda_2 - \lambda_1) \\ \sin\varphi_2 \end{bmatrix}$$

Weiters gilt:

$$\Delta\bar{\mathbf{x}}_{12} = \bar{\mathbf{x}}_2 - \bar{\mathbf{x}}_1\,, \quad \bar{s}_{12} = |\,\Delta\bar{\mathbf{x}}_{12}\,|$$

$$\mathbf{e}_{12} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \frac{\Delta\bar{\mathbf{x}}_{12}}{\bar{s}_{12}} \quad \text{mit} \quad e_i = \cos\nu_i$$

– Richtungskugel um P_1:



Beziehungen für ν_i aus dem sphärischen Kosinussatz:

$$\begin{aligned} e_1 &= \cos\nu_1 = \cos\varphi_1 \cos z_{12} - \sin\varphi_1 \sin z_{12} \cos\alpha_{12} \\ e_2 &= \cos\nu_2 = \sin z_{12} \sin\alpha_{12} \\ e_3 &= \cos\nu_3 = \sin\varphi_1 \cos z_{12} + \cos\varphi_1 \sin z_{12} \cos\alpha_{12} \end{aligned}$$

- Lösung der Grundaufgaben:
  - Erste Grundaufgabe, 1.HA (Hauptaufgabe):

geg.: $P_1 : (\varphi_1, \lambda_1)$
$\bar{s}_{12}$ ... räumliche Distanz zwischen P_1 und P_2
α_{12} ... Azimut von P_1 nach P_2
ges.: $P_2 : (\varphi_2, \lambda_2)$
α_{21} ... Azimut von P_2 nach P_1

$\Rightarrow$ aus $\cos z_{12} = -\frac{\bar{s}_{12}}{2R} \rightarrow z_{12}$
aus $\varphi_1, \alpha_{12}, z_{12} \rightarrow \mathbf{e}_{12}$
$\bar{\mathbf{x}}_2 = \bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{s}_{12}\,\mathbf{e}_{12} \rightarrow \varphi_2, \Delta\lambda_{12} \rightarrow \varphi_2, \lambda_2$

  - Zweite Grundaufgabe, 2.HA (Hauptaufgabe):

geg.: $P_1 : (\varphi_1, \lambda_1)$, $P_2 : (\varphi_2, \lambda_2)$
ges.: $\bar{s}_{12}, \alpha_{12}, \alpha_{21}$

$\Rightarrow$ $\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2 \rightarrow \Delta\,\bar{\mathbf{x}}_{12} \rightarrow \bar{s}_{12}, \mathbf{e}_{12}, z_{12}$
$\sin\alpha_{12} = \frac{e_2}{\sin z_{12}}$, $\cos\alpha_{12} = \frac{e_3 - \sin\varphi_1 \cos z_{12}}{\cos\varphi_1 \sin z_{12}} \rightarrow \alpha_{12}$
$\mathbf{e}_{21} = -\mathbf{R}_3\,(\lambda_1 - \lambda_2)\,\mathbf{e}_{12} \rightarrow \alpha_{21}$