19 - Ebene Ähnlichkeitstransformation

Die Koordinaten der Punkte 1 und 2 sind in einem lokalen Koordinatensystem (η, ξ) und dem übergeordneten Koordinatensystem (y,x) gegeben, jene des Punktes N nur im lokalen System. Berechnen Sie die Koordinaten von N im übergeordneten System mit Hilfe einer ebenen Ähnlichkeitstransformation.

Punktbezeichnung	y [m]	x [m]	η [m]	ξ [m]
1	12092.718	5349728.001	55.486	-15.817
2	14829.446	5350182.777	-1245.821	-2466.024
N	**13461.083**	**5349955.389**	-595.168	-1240.921

Die ebene Ähnlichkeitstransformation ist definiert als:

$$y = \mu\eta\cos(\varphi) - \mu\xi\sin(\varphi) + y_0$$
$$x = \mu\eta\sin(\varphi) + \mu\xi\cos(\varphi) + x_0$$

Für die Berechnung der Parameter werden die Differenzen der Koordinaten benötigt:

$$\Delta y = y_2 - y_1 = 2736.728\ m$$
$$\Delta x = x_2 - x_1 = 454.776\ m$$

$$\Delta \eta = \eta_2 - \eta_1 = -1301.307\ m$$
$$\Delta \xi = \xi_2 - \xi_1 = -2450.207\ m$$

Aus dem Abstand der Punkte ergibt sich der Skalierungsfaktor:

$$d = \sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta x)^2} = 2774.257\ m$$
$$d' = \sqrt{(\Delta \xi)^2 + (\Delta \eta)^2} = 2774.331\ m$$
$$\mu = \frac{d}{d'} = 0.99997$$

Aus der Differenz der Orientierungen ergibt sich der Rotationswinkel:

$$t = \operatorname{arctan2}(\Delta y, \Delta x) = 89.517\ \text{gon}$$
$$t' = \operatorname{arctan2}(\Delta \xi, \Delta \eta) = 231.081\ \text{gon}$$
$$\varphi = t' - t = 141.564\ \text{gon}$$

Nun lässt sich der Verschiebungsvektor aus den Drehstreckungs-Parametern und einem beliebigen Punktpaar berechnen:

$$y_0 = y - \mu\eta\cos(\varphi) + \mu\xi\sin(\varphi) = 12113.86\ m$$
$$x_0 = x - \mu\eta\sin(\varphi) - \mu\xi\cos(\varphi) = 5349674.32\ m$$

Durch Einsetzen aller Parameter ergibt sich der gesuchte Punkt N (siehe Tabelle).

20 - Ebene Ähnlichkeitstransformation (Varianzfortpflanzung Parameter)

Berechnen Sie die Standardabweichung der Transformationsparameter aus Beispiel (19) unter der Annahme, dass die gegebenen Koordinaten unkorreliert sind, im übergeordneten System jeweils eine Standardabweichung von 5 mm haben, und im lokalen Koordinatensystem 1 mm.

$$s_{xy} = 5 \text{ mm}$$
$$s_{\eta\xi} = 1 \text{ mm}$$

Für die Koordinatendifferenz gilt:

$$s_{\Delta xy} = \sqrt{2} s_{xy} = 7.071 \text{ mm}$$
$$s_{\Delta \eta\xi} = \sqrt{2} s_{\eta\xi} = 1.414 \text{ mm}$$

Die Varianz für die Distanzberechnung vereinfacht sich zur Varianz der Koordinatendifferenzen, sofern die Varianzen in x- und y-Richtung identisch sind:

$$s_d = \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 s_{\Delta xy}^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 s_{\Delta xy}^2}$$
$$s_d = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} s_{\Delta xy}^2}$$
$$s_d = s_{\Delta xy}$$
$$s_{d'} = s_{\Delta \eta\xi}$$

Aus den Distanzen lässt sich der Skalierungsfaktor $\mu = \frac{d}{d'}$ berechnen, für dessen Varianz gilt:

$$s_\mu = \sqrt{\left(\frac{1}{d'}\right)^2 s_d^2 + \left(-\frac{d}{d'^2}\right)^2 s_{d'}^2} = 2.599.\,10^{-6}$$

Die Varianz der Orientierung $t = \arctan(\frac{y}{x})$ vereinfacht sich bei gleicher Varianz für beide Richtungen:

$$s_t = \sqrt{\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 s_y^2 + \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2 s_x^2}$$
$$s_t = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} s_{xy}^2}$$
$$s_t = \sqrt{\frac{1}{x^2+y^2}} s_{xy}$$
$$s_t = \frac{1}{d} s_{xy} \quad = 2.549.\,10^{-6} \text{ rad}$$
$$s_{t'} = \frac{1}{d'} s_{xy} = 5.097.\,10^{-6} \text{ rad}$$

Das heißt für den Rotationswinkel $\varphi = t' - t$:

$$s_\varphi = \sqrt{s_t^2 + s_{t'}^2} = 2.599.\,10^{-6} \text{ rad}$$

Für die Varianz der Verschiebungsparameter gilt:

$$y_0 = y - \mu\eta\cos(\varphi) + \mu\xi\sin(\varphi)$$
$$\frac{\delta y_0}{\delta y} = 1$$
$$\frac{\delta y_0}{\delta \mu} = -\eta\cos(\varphi) + \xi\sin(\varphi)$$
$$\frac{\delta y_0}{\delta \eta} = -\mu\cos(\varphi)$$
$$\frac{\delta y_0}{\delta \xi} = \mu\sin(\varphi)$$
$$\frac{\delta y_0}{\delta \varphi} = \mu\eta\sin(\varphi) + \mu\xi\cos(\varphi)$$
$$s_{y_0} = \sqrt{\left(\frac{\delta y_0}{\delta y}\right)^2 s_y^2 + \left(\frac{\delta y_0}{\delta \mu}\right)^2 s_\mu^2 + \left(\frac{\delta y_0}{\delta \eta}\right)^2 s_\eta^2 + \left(\frac{\delta y_0}{\delta \xi}\right)^2 s_\xi^2 + \left(\frac{\delta y_0}{\delta \varphi}\right)^2 s_\varphi^2}$$

sowie

$$x_0 = x - \mu\eta\sin(\varphi) - \mu\xi\cos(\varphi)$$
$$\frac{\delta x_0}{\delta x} = 1$$
$$\frac{\delta x_0}{\delta \mu} = -\eta\sin(\varphi) - \xi\cos(\varphi)$$
$$\frac{\delta x_0}{\delta \eta} = -\mu\sin(\varphi)$$
$$\frac{\delta x_0}{\delta \xi} = -\mu\cos(\varphi)$$
$$\frac{\delta x_0}{\delta \varphi} = -\mu\eta\cos(\varphi) + \mu\xi\sin(\varphi)$$
$$s_{x_0} = \sqrt{\left(\frac{\delta x_0}{\delta x}\right)^2 s_x^2 + \left(\frac{\delta x_0}{\delta \mu}\right)^2 s_\mu^2 + \left(\frac{\delta x_0}{\delta \eta}\right)^2 s_\eta^2 + \left(\frac{\delta x_0}{\delta \xi}\right)^2 s_\xi^2 + \left(\frac{\delta x_0}{\delta \varphi}\right)^2 s_\varphi^2}$$

Da die Verschiebungsparameter mit beiden zuvor bekannten Punktpaaren berechnet werden kann, hängt die Varianz davon ab, welches Punktpaar verwendet wird.

Für Punkt 1:	Für Punkt 2:
$s_{y_0} = 5.14$ mm	$s_{y_0} = 8.83$ mm
$s_{x_0} = 4.98$ mm	$s_{x_0} = 8.74$ mm

21 - Ebene Ähnlichkeitstransformation (Varianzfortpflanzung Koordinaten)

Welche Schwierigkeit ergibt sich bei der Berechnung der Standardabweichung der transformierten Koordinaten von N in Beispiel (19), wenn angenommen wird, dass die gegebenen Koordinaten unkorreliert sind, im übergeordneten System jeweils eine Standardabweichung von 5 mm haben, und im lokalen Koordinatensystem 1 mm?

Aus der Berechnungsvorschrift für die Ähnlichkeitstransformation ergeben sich Varianzen, die nicht gleichförmig verteilt sind. Insbesondere durch die Rotation (die entlang eines Kreisbogen streut) und der Skalierung (die entlang eines Strahls durch den Koordinatenursprung streut) ergibt sich eine ungleichmäßige Streuung, die nicht als unkorreliert in x- und y-Richtung angenommen werden kann.

22 - Orthogonalaufnahme

Die Punkte A, B und C wurden orthogonal auf die Messlinie 1-2 projiziert. Gegeben sind die Abstände d_i von der Messlinie und die Entfernung l_i der Fußpunkte vom Punkt 1, weiters die Koordinaten der Punkte 1 und 2. Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte A, B und C (die Punkte liegen rechts von der Messlinie).

Punktbezeichnung	y [m]	x [m]	d_i [m]	l_i [m]
1	19.93	-52.17		
2	51.40	15.66		
A	**24.10**	**-48.36**	2.18	5.21
B	**26.26**	**-47.18**	3.64	7.19
C	**25.29**	**-44.69**	1.71	9.04

Um zum gewünschten Punkt zu kommen, muss erst von P1 aus der Abstand l entlang der Richtung v der Messlinie gelaufen werden um zum Fußpunkt zu kommen, wobei die Richtung normalisiert sein muss:

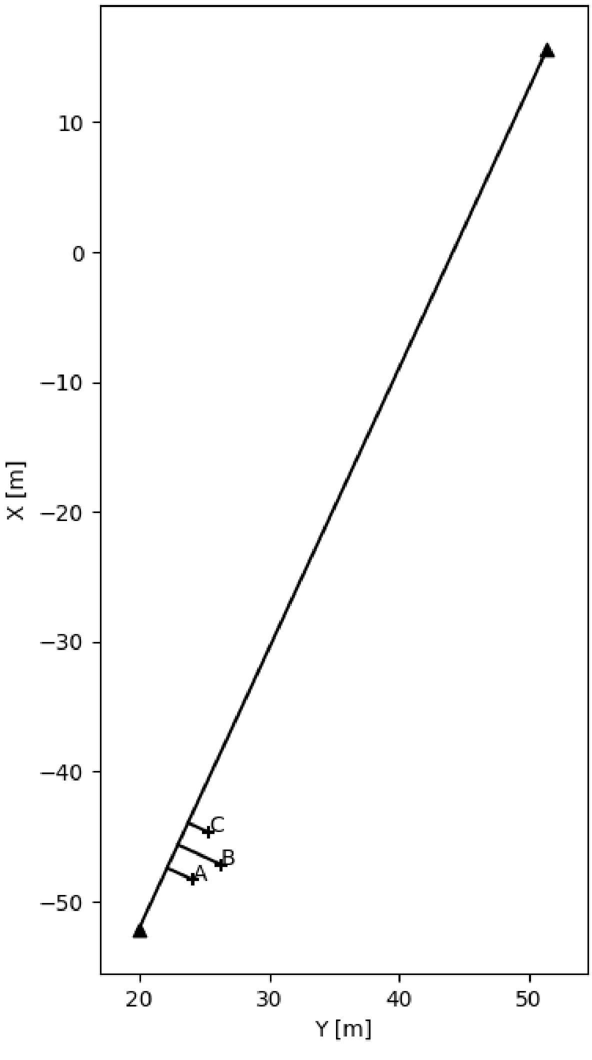
$$v = \frac{p_2 - p_1}{|p_2 - p_1|}$$

Anschließend wird der Abstand d in die Orthogonalrichtung n gelaufen, die durch Vertauschung der Koordinaten und Vorzeichenwechsel entsteht:

$$n_y = v_x$$
$$n_x = -v_y$$

Daraus ergibt sich die Gesamtformel:

$$p_i = p_1 + l_i v + d_i n$$



23 - Freie Stationierung

Gegeben sind die Koordinaten der Punkte PP1 und PP2 im Landessystem. Die Koordinaten des Standpunktes 1000 und die Orientierung in 1000 werden durch eine freie Stationierung bestimmt. Anschließend sind die Koordinaten des polar eingemessenen Punktes N im Landessystem zu berechnen (Messwerte bereits in GK-Ebene reduziert).

	Koordinatenverzeichnis (GK, M34)		Richtungs- und Distanzmessung			
Punktbezeichnung	**y [m]**	**x [m]**	**von**	**nach**	**R [gon]**	**d [m]**
PP1	-48934.585	255724.471	1000	PP1	15.9390	44.280
PP2	-48928.588	255821.571	1000	PP2	223.2140	53.172
N	**-48918.233**	**255710.304**	1000	N	398.6191	60.721

Zunächst müssen die Koordinaten des Punktes 1000 bestimmt werden. Da der Abstand des Punktes zu den bekannten Punkten PP1 und PP2 bekannt ist, kann ein Bogenschnitt verwendet werden. Dabei werden 2 mögliche Positionen des Punktes ermittelt (da das Ergebnis von der Reihenfolge der angegebenen Basispunkte abhängt), von denen eine verworfen werden muss.

$$\begin{aligned}
s_{12}, t_{12} &= \mathrm{HA2}(\mathrm{PP1}, \mathrm{PP2}) \\
\alpha, \beta, \gamma &= \mathrm{Halbwinkelsatz}(s_{23}, s_{13}, s_{12}) \\
t_{13} &= t_{12} + \alpha \\
\mathrm{P1000} &= \mathrm{HA1}(\mathrm{P1}, s_{13}, t_{13})
\end{aligned}$$

Um zu überprüfen, ob ein möglicher Kandidat für P1000 korrekt ist, muss der Winkel zwischen den Richtungen $t_{1000,\mathrm{PP1}}$ und $t_{1000,\mathrm{PP2}}$ betrachtet werden. Dieser sollte der Richtungsdifferenz $R_{1000,\mathrm{PP1}} - R_{1000,\mathrm{PP2}} = 207.275\ \mathrm{gon}$ entsprechen.

Dies ist für die mögliche Position (-48934.695, 255768.751) der Fall, die also dem Punkt P1000 entspricht.

Nun kann in diesem Punkt die Orientierung des Teilkreises bestimmt werden, mit der bekannten Formel $O_{1000} = \arctan\left(\frac{y_{1000} - y_{\mathrm{PP1}}}{x_{1000} - x_{\mathrm{PP1}}}\right) - t_{1000,\mathrm{PP1}} = 183.9029\ \mathrm{gon}.$

Mit der Orientierung kann die unorientierte Richtungsmessung von dem Punkt aus in eine Orientierung umgewandelt werden, und zusammen mit der bekannten Distanz der Punkt N mittels einer zweiten Hauptaufgabe gerechnet werden.