Geomathematik I / Geomathematik
WS 2022/23

Übungsbeispiele ... „Koordinatenrechnung im $\mathbb{R}_2$ u. $\mathbb{R}_3$“

1. Gegeben sind die Koordinaten der Punkte A, B.

	y	x
A	40.24	9.64
B	22.25	32.69

Zur Bestimmung von Neupunkten P_1 und P_2 wurden folgende Messungen (unorientierte Richtungen und Distanzen) getätigt. Man berechne die Koordinaten der Neupunkte.

von	nach	unor.Ri.[g]	Distanz[m]
A	B	75.235	
	P_1	152.236	62.24
P_1	A	0	
	P_2	122.901	46.35

2. Gegeben sind die Koordinaten der Punkte A, B und S_1 in einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}_2$ (geodätisch orientiert).

Der Punkt A liegt auf einem Kreis K_A, der Punkt B liegt auf einem Kreis K_B. Die beiden Kreise schneiden sich in S_1. Der Mittelpunkt des Kreises K_A liegt auf der Geraden durch A und S_1, der Mittelpunkt des Kreises K_B auf jener durch B und S_1.

Man berechne den zweiten Schnittpunkt S_2 der beiden Kreise (Tipp: zweimalige Anwendung des Satzes von Thales hilft weiter).

	y	x
A	-13.75	15.05
B	50.25	-34.26
S_1	39.86	10.71

3. Gegeben sind die Koordinaten der Punkte A, C und S_1 in einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}_2$ (geodätisch orientiert).

   Der Punkt A liegt auf einem Kreis K_A, ein Punkt B liegt auf einem Kreis K_B mit dem Radius r_B=15.95. Die beiden Kreise schneiden sich in S_1 und S_2. Der Mittelpunkt M_A des Kreises K_A liegt auf der Geraden durch A und S_1, der Mittelpunkt M_B des Kreises K_B auf jener durch B und S_1. Der Punkt B liegt auf der Geraden durch C und S_2.

   Gesucht ist der Punkt B. Gibt es eine Lösung? Wenn ja, geben Sie an, wie viele mögliche Punkte (einen, zwei, mehr als zwei) es gibt und berechnen Sie die Koordinaten von zumindest einem möglichen Punkt B.

	y	x
A	-14.07	14.81
C	75.21	-55.34
S_1	40.12	11.17

4. Gegeben sind die Koordinaten der Punkte A, B und C in einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}_2$ (geodätisch orientiert). Der Punkt A ist Mittelpunkt eines Kreises mit Radius $r = 70.23\,$[LE] (LE ... Längeneinheit). Man berechne den Schnittwinkel (in Neugrad) des Kreises mit der Geraden, die durch B und C geht.

	y [LE]	x [LE]
A	63.75	18.05
B	51.25	-33.26
C	-45.43	25.09

5. Gegeben sind die Koordinaten der Punkte A, B und C in einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}_2$ (geodätisch orientiert). Der Punkt A ist Mittelpunkt eines Kreises mit Radius $r_A = 69.84\,$[LE] und der Punkt B ist Mittelpunkt eines Kreises, auf dem der Punkt C liegt (LE ... Längeneinheit). Man berechne den Schnittwinkel (in Neugrad), unter welchem sich die beiden Kreise schneiden.

	y [LE]	x [LE]
A	63.35	17.59
B	51.62	-34.01
C	20.05	-14.54

6. Gegeben sind die Koordinaten der Punkte A, B, und C in einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}_2$ (geodätisch orientiert). Eine Gerade durch A schneidet in B einen Kreis, auf dem auch der Punkt C liegt und dessen Mittelpunkt M auf der Geraden zwischen A und B liegt.

   Man berechne bitte die Koordinaten des zweiten Schnittpunktes D der Geraden mit dem Kreis und den Mittelpunkt M des Kreises.

   Tipp: man nehme u.a. den Satz von Thales zu Hilfe.

	y	x
A	-85.66	-94.10
B	115.25	120.95
C	151.63	38.14

7. Gegeben sind die Koordinaten der Punkte M, P_1, P_2 und P_3 in einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}_2$ (geodätisch orientiert). M ist der Mittelpunkt eines Kreises, der in T_1 von einer Geraden g_1, die durch P_1 geht, berührt wird. Die Gerade g_1 ist parallel zur Geraden g_2, die durch P_2 und P_3 verläuft.

   Man berechne bitte die Koordinaten des Berührungspunktes T_1 und den Radius des Kreises.

	y	x
M	15.86	5.01
P_1	10.75	-13.05
P_2	20.24	-14.26
P_3	30.19	4.26

8. Gegeben sind die Koordinaten der Punkte P_1, P_2, P_3 in einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}_2$ (geodätisch orientiert). Im Punkt P_3 wurde ein Azimut (orientierte Richtung) $\nu_{3N} = 23.2456^g$ zu einem Neupunkt P_N gemessen.

   Man berechne die Koordinaten von P_N, wenn man weiß, dass P_N auf der Geraden durch P_1 und P_2 liegt.

	y	x
P_1	-11.35	12.21
P_2	40.93	5.20
P_3	15.27	-21.64

9. Gegeben sind die Koordinaten der Punkte M und T_1 in einem kartesischen Koordinatensystem des $I\!R_2$ (geodätisch orientiert). Ein weiterer Punkt T_2 ist zum Teil bekannt. M ist der Mittelpunkt eines Kreises, der in T_1 von einer Geraden g_1 und in T_2 von einer Geraden g_2 berührt wird.

   Man berechne bitte die Koordinaten des Schnittpunktes S der beiden Tangenten g_1 und g_2.

	y	x
M	-16.86	-6.01
T_1	-13.75	135.05
T_2	y>0	-34.26

10. Gegeben sind die Gerade g_1 durch die Punkte P_1 und P_2 und die Gerade g_2 durch die Punkte P_2 und P_3. Zwischen den beiden Geraden ist als Übergangsbogen ein Kreis mit dem Radius $50m$ so einzupassen, dass der Kreis beide Geraden berührt, und zwar in U_1 zwischen P_1 und P_2 bzw. in U_2 zwischen P_2 und P_3. Man berechne die Koordinaten von U_1, U_2 und jene vom Mittelpunkt M des Kreises und weiters die Länge des Übergangsbogens.

	y	x
P_1	-11 350.11	230 292.02
P_2	-11 169.56	230 238.64
P_3	-11 100.48	230 056.52

11. Gegeben sind die Koordinaten der Punkte M_1, M_2 und P in einem kartesischen Koordinatensystem des $I\!R_2$ (geodätisch orientiert). Der Punkt M_1 ist Mittelpunkt eines Kreises K_1 und der Punkt M_2 ist Mittelpunkt eines Kreises K_2. K_1 und K_2 berühren einander im Punkt T, wobei K_1 innerhalb von K_2 liegt. Die Kreise besitzen die gemeinsame Tangente t, welche mit einer Geraden g im Punkt T einen Winkel $\varphi = 49.7243^g$ einschließt. Die Gerade g geht durch den Punkt P, wobei P auf der den Kreisen abgewandten Seite von t liegt. Man fertige eine Skizze an und berechne die den Kreisen zugehörigen Radien r_1 und r_2 in [LE].

	y [LE]	x [LE]
M_1	50.75	25.15
M_2	41.25	48.26
P	135.63	-29.81

12. Gegeben sind die Koordinaten der Punkte A, B.

	y	x
A	4538.20	2825.31
B	4561.47	2887.49

Zur Bestimmung der beiden Neupunkte N_1 und N_2 (A, N_1, B, N_2 im Uhrzeigersinn!) wurden folgende Distanzen [m] gemessen. Man berechne die Koordinaten der Neupunkte und deren Abstand.

von	nach	Distanz	von	nach	Distanz
A	N_1	47.43	B	N_1	53.95
	N_2	57.54		N_2	46.09

13. Gegeben sind die Koordinaten (in [m]) der Punkte P_1, P_2, P_3 in einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}_2$ (geodätisch orientiert). Im Punkt P_2 wurde eine Distanz $s_{2N} = 32.48\,m$ zu einem Neupunkt P_N gemessen.

    Man berechne die Koordinaten von P_N, wenn man weiß, dass P_N auf der Geraden $g = \{P_1, P_3\}$ liegt, und zwar zwischen P_1 und P_3!

	y	x
P_1	-10.98	12.76
P_2	15.21	-22.04
P_3	18.41	8.21

14. Gegeben sind die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2.

	y	x
P_1	23 569.15	212 569.24
P_2	23 592.11	212 472.75

Zur Bestimmung weiterer Punkte A, B, N sind neben der Distanz $s_{AB} = 48.25m$ folgende unorientierte Richtungen gemessen.

von	nach	unor. Ri.	von	nach	unor. Ri.
A	P_1	0	B	N	0
	B	67.736^g		A	63.427^g
	N	132.918^g		P_1	114.589^g
				P_2	215.438^g

15. Gegeben sind die Punkte A, B, C. Der Punkt C ist der Mittelpunkt eines Kreises mit dem Radius $r = 35.15\,$[LE]. Die Punkte A und B definieren eine Gerade. Man berechne jenen Schnittpunkt der Geraden mit dem Kreis, welcher zwischen A und B liegt.

	y [LE]	x [LE]
A	5.06	-28.06
B	30.47	-15.11
C	10.29	9.95

16. Gegeben sind die Punkte A, B, C. Der Punkt C ist der Mittelpunkt eines Kreises. Die Punkte A und B definieren eine Gerade. Welche Bedingung(en) muss der Kreisradius erfüllen, damit

    (a) der Kreis die Gerade berührt (man gebe zusätzlich die Koordinaten des Berührungspunktes an).

    (b) es keinen Schnitt zwischen dem Kreis und der Geraden gibt.

    (c) beide Schnittpunkte zwischen A und B liegen.

    (d) zumindest ein Schnittpunkt zwischen A und B zu liegen kommt.

    (e) sich keiner der Schnittpunkte zwischen A und B befindet.

	y [LE]	x [LE]
A	4.96	-27.94
B	31.04	-15.66
C	10.67	10.01

17. In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}_2$ (geodätisch orientiert) sind die Koordinaten der Festpunkte $P1$ und $P2$ sowie die Näherungskoordinaten von H und N gegeben.

	y [LE]	x [LE]
P1	15.050	273.372
P2	100.787	294.122
H	90	220
N	140	250

Zur Bestimmung der Neupunkte H und N wurden folgende unorientierte Richtungen gemessen:

von	nach	unor. Ri.
H	P2	64.9237^g
	N	120.7330^g
	P1	393.9451^g
N	H	60.3581^g
	P1	106.1511^g

In H wurde zusätzlich die Horizontaldistanz $s_{HP2} = 74.264$ $[LE]$ zu $P2$ gemessen.
Man bestimme die Koordinaten von H und N.

18. Zur Berechnung der Neupunkte N_1 und N_2 wurden in diesen Neupunkten zwei unorientierte Richtungssätze zu den Festpunkten P_1 und P_2 gemessen.

	y	x
P_1	-70 178.81	5 207 864.64
P_2	-70 021.36	5 208 032.30

von	nach	unor. Ri.	von	nach	unor. Ri.
N_1	P_1	0	N_2	N_1	0
	P_2	54.593^g		P_1	22.426^g
	N_2	106.778^g		P_2	71.204^g

19. Ausgehend von den Koordinaten der Punkte L, M, R und einem Satz von unorientierten Richtungen in einem Neupunkt N sind dessen Koordinaten zu berechnen.

	y	x
L	900.16	1116.01
M	801.57	522.89
R	350.13	230.53

von	nach	unor. Ri.
N	L	0
	M	121.6816^g
	R	165.8394^g

20. Gegeben sind die Koordinaten der Punkte P_1, P_2 und P_3. Weiters kennt man die orientierte Richtung $\nu_{N2} = 349.421^g$ vom Punkt P_N nach P_2. Man berechne die Koord. von P_N für den Fall, dass P_1, P_2, P_3 und P_N auf einem Kreis liegen.

	y	x
P_1	-8.64	42.21
P_2	19.04	76.11
P_3	72.85	63.27

21. Gegegeben sind die Koordinaten von vier Eckpunkten A, B, C, D eines Grundstückes.

	y	x
A	25.52	91.15
B	15.23	40.82
C	117.03	96.22
D	126.37	25.18

Es wurde eine Teilungslinie durch die Punkte N_1 und N_2 festgelegt. Zur Bestimmung der Punkte N_1 und N_2 wurden in diesen Punkten folgende unorientierten Richtungen gemessen.

von	nach	unor. Ri.	von	nach	unor. Ri.
N_1	A	0	N_2	C	0
	N_2	157.554^g		D	122.958^g
	B	311.440^g		N_1	273.691^g

Man berechne die Koordinaten der Punkte N_1 und N_2 und weiters die Koord. der Schnittpunkte der Teilungslinie mit den bestehenden Grundstücksgrenzen.

22. Gegeben sind die Koordinaten der Punkte A, B, C, D in einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}_2$ (geodätisch orientiert). Eine Gerade durch A schneidet in B einen Kreis, auf dem auch die Punkte C und D liegen.

Man berechne bitte die Koordinaten des zweiten Schnittpunktes E der Geraden mit dem Kreis.

	y	x
A	-86.86	-96.01
B	113.75	127.05
C	149.26	37.86
D	-32.01	107.22

23. Die vier Punkte A, B, C, D liegen auf einem Kreis. Gegeben sind die Koordinaten der Punkte A, B, C in einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}_2$ (geodätisch orientiert) und ein Richtungssatz im Punkt A.

Man berechne die Koordinaten des Punktes D.

	y	x
A	148.93	38.06
B	-20.11	-21.47
C	-31.95	107.29

von	nach	unor. Ri.
A	C	0^g
	D	52.5973^g

24. Die vier Punkte A, B, C, D liegen auf einem Kreis. Gegeben sind die Koordinaten der Punkte A, B, C in einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}_2$ (geodätisch orientiert) und ein Richtungssatz im Punkt C.

Man berechne die Koordinaten des Punktes D.

	y	x
A	149.27	37.81
B	-19.44	-21.63
C	-32.37	106.91

von	nach	unor. Ri.
C	B	18.1349^g
	D	316.0375^g

25. In einem kartesischen Koordinatensystem des R_2 (geodätisch orientiert) ist durch die Punkte A, B und C ein Kreis definiert, und durch die Punkte A und C ist die Gerade g festgelegt. Eine auf g orthogonale Gerade h schneidet den Kreis in den Punkten B u. D. Man berechne die Koordinaten von D. Zwischenergebnisse in Form von Winkeln sind in Neugrad anzugeben.

	y [LE]	x [LE]
A	4.51	-14.12
B	-24.57	-25.03
C	-60.93	29.37

26. Man zeige, daß die Matrix $\mathbf{R}$ eine Drehmatrix ist, und man bestimme die Eulerschen Winkel, weiters die Drehachse und den Drehwinkel.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.8584 & 0.4723 & 0.2004 \\ -0.2834 & 0.7621 & -0.5821 \\ -0.4277 & 0.4429 & 0.7880 \end{bmatrix}$$

27. Die erste Zeile einer Drehmatrix $\mathbf{R} = \mathbf{R}_3(\varphi)\,\mathbf{R}_1(\vartheta)\,\mathbf{R}_3(\psi)$ lautet:

$$[0.3536, \text{-}0.6124, 0.7071].$$

Wie groß sind φ und ψ, wenn $\vartheta = 90^o$ gilt? Man gebe alle möglichen Lösungen in Altgrad an.

28. Ausgehend von einem dreidimensionalen, euklidischen Koordinatensystem entsteht durch Verschiebung entlang des Vektors $\mathbf{x}_0 = (1, 1, 2)^T$ und durch anschließende Verdrehung ein neues System, wobei die Verdrehung durch die Eulerschen Winkel $\varphi = 25^o$, $\vartheta = -10^o$ und $\psi = 54^o$ gegeben ist.

    (a) Ein Raumpunkt hat im ursprünglichen System den Ortsvektor $(2, 3, 4)^T$. Welchen hat er im neuen System?

    (b) Läßt sich die Verdrehung auch durch einen zweiten Satz Eulerscher Winkel darstellen? Wenn ja, durch welchen?

29. Gegeben sind die zwei nachfolgenden, unvollständigen Sätze Euler'scher Winkel. Ergänzen Sie diese so, dass sie die gleiche Gesamtdrehung eines Koordinatensystems im Raum beschreiben. Begründen Sie bitte Ihre Antwort!

Satz 1:	$\varphi_1 = ?$	$\vartheta_1 = ?$	$\psi_1 = 291.2301°$
Satz 2:	$\varphi_2 = 240.6355°$	$\vartheta_2 = 99.2476°$	$\psi_2 = ?$

30. Bei einer Drehung des Koordinatensystems im dreidimensionalen Raum geht das Dreibein ($\mathbf{e}_1$,$\mathbf{e}_2$,$\mathbf{e}_3$) eines natürlichen, kartesischen Koordinatensystems in das Dreibein ($\bar{\bar{\bar{\mathbf{e}}}}_1$, $\bar{\bar{\bar{\mathbf{e}}}}_2$, $\bar{\bar{\bar{\mathbf{e}}}}_3$) über. Es sind die Eulerschen Winkel dieser Drehung

zu ermitteln.

$$\bar{\bar{\bar{\mathbf{e}}}}_1 = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2\sqrt{6}-\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}+\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} \end{bmatrix}, \quad \bar{\bar{\bar{\mathbf{e}}}}_2 = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -2\sqrt{6}-\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2}+\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} \end{bmatrix}, \quad \bar{\bar{\bar{\mathbf{e}}}}_3 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

31. Ein kartesisches Koordinatensystem des $I\!R_3$ (Rechtssystem) wird mittels Euler'scher Winkel verdreht. Die e_1'-Achse des verdrehten Systems hat im ursprünglichen System die Koordinaten $(0.3621,\ -0.4562,\ 0.8129)^T$, die e_2'-Achse hat die Koordinaten $(0.7833,\ 0.6217,\ 0)^T$.

    Man berechne bitte beide mögliche Sätze Euler'scher Winkel.

32. Bei einer Drehung des Koordinatensystems im Raum ist $\mathbf{x}$ der Vektor im ursprünglichen und $\bar{\bar{\bar{\mathbf{x}}}}$ jener im gedrehten System. Zwei der zugehörigen Eulerschen Winkel sind bekannt und zwar $\varphi = 30^o$ und $\vartheta = 225^o$. Gesucht ist der dritte Winkel ψ.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -0.1876 \\ -0.4072 \\ -1.6730 \end{bmatrix}, \quad \bar{\bar{\bar{\mathbf{x}}}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

33. Ein dreidimensionales, kartesisches Koordinatensystem wird um seine $\mathbf{e}_2$-Achse um 60^0 im Uhrzeigersinn gedreht. Man gebe dafür die Drehmatrix $\mathbf{R}$ und sämtliche Sätze Eulerscher Winkel an.

34. In einem kartesischen Koordinatensystem des $I\!R_3$ (Rechtssystem) wird ein Vektor $\mathbf{x}$ um die $\mathbf{e}_1$-Achse um einen Winkel α in den Vektor $\mathbf{y}$ gedreht. Im Anschluss daran erfolgt eine Drehung von $\mathbf{y}$ wieder um die $\mathbf{e}_1$-Achse um einen Winkel β in den Vektor $\mathbf{z}$.

    Geben sie bitte für die Drehung, welche $\mathbf{x}$ direkt nach $\mathbf{z}$ dreht, Drehachse und Drehwinkel an. Das an und für sich triviale Ergebnis ist formal durch Rechnung zu belegen.

    Für die Drehungen ist als Drehsinn der Uhrzeigersinn anzusetzen.

35. In einem kartesischen Koordinatensystem des $I\!R_3$ (Rechtssystem) wird ein Vektor $\mathbf{x}$ um die $\mathbf{e}_1$-Achse um einen Winkel $\alpha = 30^o$ in den Vektor $\mathbf{y}$ gedreht. Im Anschluss daran erfolgt eine Drehung von $\mathbf{y}$ um die $\mathbf{e}_2$-Achse um einen Winkel $\beta = 45^o$ in den Vektor $\mathbf{z}$.

    Geben sie bitte jene Drehmatrix an, welche $\mathbf{x}$ direkt nach $\mathbf{z}$ dreht.

    Für die Drehungen ist als Drehsinn der Uhrzeigersinn anzusetzen.

36. Gesucht wird jene orthogonale Matrix $\mathbf{R}$, die mittels der Gleichung $\mathbf{x} = \mathbf{R}^T\mathbf{y}$ die auf das natürliche System bezogenen Koordinaten eines Punktes im dreidimensionalen Raum (Komponenten von $\mathbf{y}$) in jene bezüglich eines verdrehten Systems (Komponenten von $\mathbf{x}$) transformiert, das aus dem natürlichen System durch Verdrehung desselben um die $\mathbf{e}_2$-Achse (Drehwinkel $\alpha = 30^o$) und anschließender Verdrehung um die mitgedrehte $\mathbf{e}_3$-Achse (Drehwinkel $\beta = 60^o$), jeweils im Uhrzeigersinn, hervorgeht.

37. Aus dem natürlichen Sytem entsteht durch Verdrehung desselben um die $\mathbf{e}_1$-Achse (Drehwinkel α) und durch anschließende Verdrehung um die mitgedrehte $\mathbf{e}_2$-Achse (Drehwinkel β), jeweils im Uhrzeigersinn, ein neues Koordinatensystem. Die Koordinaten eines Punktes des dreidimensionalen Raumes bezüglich des verdrehten Systems (Komponenten von $\mathbf{x}$) berechnen sich aus jenen bezüglich des ursprünglichen Systems (Komponenten von $\mathbf{y}$) wie folgt: $\mathbf{x} = \mathbf{R}^T\mathbf{y}$. Welches Paar $(\alpha,\ \beta)$ von Drehwinkeln liegt der orthogonalen Drehmatrix $\mathbf{R}$ zugrunde?

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

38. Ein Punkt des dreidimensionalen Raumes besitzt in einem kartesischen Koordinatensystem den Ortsvektor $\mathbf{x}$ und in einem verdrehten Koordinatensystem den Ortsvektor $\mathbf{y}$. Von den der Drehung zugrunde liegenden Eulerschen Winkel sind zwei bekannt und zwar $\vartheta = 29.26^o$ und $\psi = -156.78^o$. Gesucht ist der dritte Winkel φ.
    Gibt es eine od. mehrere Lösungen? Wenn ja, geben Sie den Wert bzw. die Werte an; wenn nein, begründen Sie die Antwort rechnerisch.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1.2699 \\ 1.1551 \\ ? \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

39. Ein Punkt des dreidimensionalen Raumes besitzt in einem kartesischen Koordinatensystem den Ortsvektor $\mathbf{x}$ und in einem verdrehten Koordinatensystem den Ortsvektor $\mathbf{y}$. Von den der Drehung zugrunde liegenden Eulerschen Winkel sind zwei bekannt und zwar $\varphi = 150.09^o$ und $\vartheta = 29.26^o$. Gesucht ist der dritte Winkel ψ.
Gibt es eine od. mehrere Lösungen? Wenn ja, geben Sie den Wert bzw. die Werte an; wenn nein, begründen Sie die Antwort rechnerisch.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} ? \\ 1.1551 \\ ? \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

40. Welche Drehmatrix $\mathbf{R}$ bewirkt eine Drehung um die Achse $\omega = (2, -1, 0.5)^T$ um einen Winkel $\alpha = 330^o$? Man berechne $\mathbf{R}$ auf zwei Varianten, und verifiziere die Drehmatrix durch Anwendung auf ω sowie auf einen der Drehebene angehörenden Vektor.

41. Es ist jene Drehmatrix $\mathbf{R}$ gesucht, die den Vektor $\mathbf{x} = (2, 1, -3)^T$ unverändert läßt und jeden Vektor in der Drehebene um 120^o verdreht.

42. Man bestimme die durch die Drehmatrix $\mathbf{R}$ festgelegte Drehachse und den zugehörigen Drehwinkel mittels Eigenwertmethode.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.28033 & -0.73920 & 0.61237 \\ -0.73920 & -0.57322 & -0.35355 \\ 0.61237 & -0.35355 & -0.70711 \end{bmatrix}$$

43. Ein Satellit bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit im Uhrzeigersinn in einer kreisförmigen Erdumlaufbahn. Zum Zeitpunkt t_0 besitzt er in einem kartesischen Koordinatensystem (mathematisch) die Position $\mathbf{x}_0$, zum Zeitpunkt t_1 $(= t_0 + \triangle t_1)$ die Position $\mathbf{x}_1$ und zum Zeitpunkt t_2 $(= t_1 + \triangle t_2)$ die Position $\mathbf{x}_2$, wobei $\triangle t_1 = \triangle t_2$ ist. Man gebe den für beide Zeitabschnitte identen Rotationswinkel φ $(0 < \varphi \leq 180^o)$ an, den der Satellit bei der Rotation um die Achse der Kreisbahn beschreibt.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

44. Ein Satellit bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit im Uhrzeigersinn in einer kreisförmigen Erdumlaufbahn. Zum Zeitpunkt t_0 besitzt er in einem kartesischen Koordinatensystem (mathematisch) die Position $\mathbf{x}_0$, zum Zeitpunkt t_1 $(= t_0 + \triangle t_1)$ die Position $\mathbf{x}_1$ und zum Zeitpunkt t_2 $(= t_1 + \triangle t_2)$ die Position $\mathbf{x}_2$, wobei $\triangle t_1 \neq \triangle t_2$ ist. Man gebe die Achse der Kreisbahn an und die den Zeitabschnitten $\triangle t_1$ und $\triangle t_2$ entsprechenden Rotationswinkel φ_1 bzw. φ_2 $(0^o < \varphi_1, \varphi_2 \leq 180^o)$, die der Satellit bei seiner Drehbewegung beschreibt.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1.185640 \\ 0.133975 \\ 2.139230 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 2.0 \\ 1.4 \end{bmatrix}$$

45. Ein Satellit bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit im Uhrzeigersinn in einer kreisförmigen Erdumlaufbahn. Zum Zeitpunkt t_0 besitzt er in einem kartesischen Koordinatensystem (mathematisch) die Position $\mathbf{x}_0$ und gelangt nach $3^h 40^{min}$ zur Position $\mathbf{x}_1$. Nach einem weiteren Zeitabschnitt nimmt er die Position $\mathbf{x}_2$ ein. Man berechne die Dauer für den zweiten Teil des Fluges.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1.121332 \\ 0.433975 \\ 3.090999 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -0.28 \\ 2.60 \\ 2.04 \end{bmatrix}$$

46. Drei Satelliten bewegen sich mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit im Uhrzeigersinn in konzentrischen Umlaufbahnen derselben Raumebene. Zum Zeitpunkt t_0 besitzen sie in einem kartesischen Koordinatensystem (mathematisch) die Positionen $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ bzw. $\mathbf{x}_3$. Man berechne die konstanten Winkelunterschiede zwischen den Radialstrahlen der Satelliten in der Kreisbahn, wobei der Koordinatenursprung in der Achse der Kreisbahn liegt.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

47. Zwei Flugkörper F_1, F_2 rotieren in zwei zueinander parallelen Raumebenen um ein und dieselbe Raumachse, wobei F_1 und F_2 zum einen die gleiche Winkelgeschwindigkeit und zum anderen die gleiche Bahngeschwindigkeit aufweisen. Zum Zeitpunkt t_i befindet sich F_1 in der Position $\mathbf{x}$ und F_2 in der Position $\mathbf{u}$, zum Zeitpuntk t_j nimmt F_1 die Position $\mathbf{y}$ und F_2 die Position $\mathbf{v}$ ein.
Man gebe an, wieviel mögliche Kombinationen von Rotationsachse & Rotationswinkel es zum nachfolgenden Satz von Ortsvektoren geben kann: keine, eine, zwei, drei, vier, ... , unendlich viele?

Man begründe die Antwort rechnerisch, wobei vorausgesetzt werden kann, daß die Rotationsachse durch den Koordinatenursprung verläuft.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ y_3 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ u_3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad y_3, u_3 \geq 0, \, v_1 \leq 0$$

48. Zwei Flugkörper (F_1 u. F_2) rotieren mit gleichen Geschwindigkeiten um die z-Achse eines Rechtssystems: F_1 rotiert im postiven Drehhsinn, F_2 im dazu gegenläufigen. Zu einem bestimmten Zeitpunkt besitzt F_1 den Ortsvektor $\mathbf{x}_1 = (3, 4, 10)^T$ und F_2 den Ortsvektor $\mathbf{x}_2 = (-1, 2, 2)^T$.

    Welche Drehungen (gesucht sind die Drehwinkel α_1 für F_1 und α_2 für F_2) vollführen die Flugkörper bis zu einem ersten Rendezvous mit der räumlich kürzesten Entfernung zueinander?

49. Zwei Flugkörper (F_1 u. F_2) rotieren mit gleichen Winkelgeschwindigkeiten um eine Ursprungsgerade mit dem Richtungsvektor $\mathbf{a} = (1, 2, 2)^T$. Was den Drehsinn betrifft, rotieren sie gegenläufig. Zu einem bestimmten Zeitpunkt besitzt F_1 den Ortsvektor $\mathbf{x}_1 = (3, 4, 3)^T$ und F_2 den Ortsvektor $\mathbf{x}_2 = (-1, 2, 5)^T$.

    Welche Drehungen (gesucht sind die Drehwinkel α_1 für F_1 und α_2 für F_2) vollführen die Flugkörper bis zu einem ersten Rendezvous mit der räumlich kürzesten Entfernung zueinander? Der Drehsinn von F_1 und jener von F_2 gewährleisten, dass α_1 und α_2 kleiner als 90° sind.

50. Die Ebene ϵ: x=−6 stellt eine Drehebene dar. Die Drehachse geht durch den Koordinatenursprung. Ein Punkt P besitzt vor der Drehung den Ortsvektor $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1 > 0, 3)^T$ und nach der Drehung den Ortsvektor $\mathbf{p}_2 = (x_1, -3, 4)^T$.

    Man berechne den Drehwinkel $180° \leq \alpha < 360°$ und die dazugehörige Kreisbahnlänge.

51. Die Ebene ϵ: 2x+y+5z=30 stellt eine Drehebene dar. Die Drehachse geht durch den Koordinatenursprung. Ein Punkt P besitzt vor der Drehung den Ortsvektor $\mathbf{p}_1 = (3, y_1, 3)^T$ und nach der Drehung den Ortsvektor $\mathbf{p}_2 = (-1, y_2 > 0, z_2)^T$.

    Man berechne den Drehwinkel $0 \leq \alpha < 180°$.

52. Der Punkt A mit dem Ortsvektor $\mathbf{a}$=$(4,3,5)^T$ rotiert um die z-Achse und ergibt den Punkt B mit dem Ortsvektor $\mathbf{b}$=$(3, b_2 > 0, b_3)^T$. Der Punkt C mit dem Ortsvektor $\mathbf{c}$=$(5,2,10)^T$ rotiert ebenfalls um die z-Achse und ergibt den Punkt D mit dem Ortsvektor $\mathbf{d}$. Beide Drehungen erfolgen im positiven Drehsinn. Man berechne die Komponenten von $\mathbf{d}$ für den Fall, dass A einen gleich langen Kreisbogen wie C beschreibt.

53. Der Punkt A mit dem Ortsvektor $\mathbf{a}$=$(5,4,3)^T$ rotiert um die x-Achse und ergibt den Punkt B mit dem Ortsvektor $\mathbf{b}$=$(b_1, 3, b_3)^T$. Der Punkt C mit dem Ortsvektor $\mathbf{c}$=$(10,5,2)^T$ rotiert im gleichen Zeitraum ebenfalls um die x-Achse und ergibt den Punkt D mit dem Ortsvektor $\mathbf{d}$. Beide Drehungen erfolgen im positiven Drehsinn. Man berechne die Komponenten von $\mathbf{d}$ für den Fall, dass die Winkelgeschwindigkeit von A doppelt so groß ist wie jene von C. Hat A auch die größere Bahngeschwindigkeit? Begründen Sie die Antwort.

54. Welche Drehmatrix $\mathbf{R}$ leistet eine Drehung von $2'$ um die Achse $(1,2,-1)^T$? Man beachte bei der Berechnung von $\mathbf{R}$ die Tatsache, daß es sich um eine infinitesimale Drehung handelt!

55. Die Matrix $\mathbf{R}$ bewirkt eine infinitesimale Drehung. Um welche Achse und um welchen Winkel?

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2.909 \cdot 10^{-4} \\ 0 & 2.909 \cdot 10^{-4} & 1 \end{bmatrix}$$

56. Ein Satellit rotiert um die Achse $\boldsymbol{\omega}$=$(-1.1, -2.0, 3.5)^T$ und braucht für eine Gesamtdrehung 12 Stunden; die Achse geht durch den Koordinatenursprung. Welchen Weg ([LE]) in seiner Bahn legt der Satellit in einer Zeitspanne von 3 Sekunden zurück, wenn er zu einem bestimmten Zeitpunkt den Ortsvektor $\mathbf{x}$=$(-1.4, -2.7, 2.8)^T$ besitzt? Die Komponenten der Vektoren sind ebenfalls in [LE] gegeben. Man führe die Berechnung unter Berücksichtigung der Tatsache aus, dass es sich um eine infinitesimale Drehung handelt und überprüfe das Ergebnis durch exakte Rechnung.

57. Zwei infinitesimale Drehungen im dreidimensionalen Raum werden hintereinander ausgeführt: zuerst erfolgt eine Drehung von $1'$ um die Achse $(2,0,-1)^T$, darauf eine Drehung von $2'$ um die Achse $(-2,1,2)^T$.

Gesucht sind jene Drehachse und jener Winkel, die dieselbe infinitesimale Drehung verursachen, wie die Summe der beiden angeführten.

58. Durch eine infinitesimale Drehung wird der Ortsvektor ξ eines Punktes im dreidimensionalen Raum um den Vektor $d\xi$ verfälscht. Man bestimme Drehachse und Drehwinkel, wobei das Element R_{21} der Drehmatrix $\mathbf{R}$ den Wert $2.90888 \cdot 10^{-4}$ besitzt.

$$\xi = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}\xi = 10^{-4} \begin{bmatrix} -5.81776 \\ 4.36332 \\ -1.45444 \end{bmatrix}$$

59. Die ξ_1-Koordinate des Ortsvektors $\xi = (1,1,2)^T$ wird durch eine infinitesimale Drehung um die Achse $\omega = (1,2,2)^T$ um den Wert $d\xi_1 = 0.0004$ verfälscht. Geben Sie den zugehörigen infinitesimal kleinen Drehwinkel φ im Bogenmaß an.

60. Die ξ_1- bzw. ξ_2-Koordinaten des Ortsvektors $\xi = (1,1,1)^T$ werden durch eine infinitesimale Drehung um die Achse $\omega_1 = (1,2,1)^T$ und eine anschließende infinitesimale Drehung um die Achse $\omega_2 = (2,1,0)^T$ um den Wert $d\xi_1 = 0.0004$ bzw. $d\xi_2 = 0.0002$ verfälscht. Geben Sie die zugehörigen infinitesimal kleinen Drehwinkel φ_1 bzw. φ_2 im Bogenmaß an.

61. Ein Flugkörper bewegt sich auf einer kreisförmigen Umlaufbahn und nimmt zu einem Zeitpunkt t_0 in einem kartesischen Koordinatensystem die Position $\mathbf{x}_0$ ein. Nach einem infinitesimal kleinen Zeitabschnitt nimmt er die Position $\mathbf{x}_1$ ein.
Man gebe eine mögliche Achse der Kreisbahn an, wenn der infinitesimal kleine Rotationswinkel, den der Satellit bei seiner Drehbewegung beschreibt, bekannt ist: $\triangle\varphi = 2.5'$.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1.9991603 \\ 2.0008397 \\ 4 \end{bmatrix}$$

62. Im dreidimensionalen Raum kennt man in einem kartesischen System die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2.

	x	y	z
P_1	2112.55	318.28	4400.17
P_2	4361.12	1200.21	4370.18

Durch eine Richtung $\mathbf{e}_{1N}$ und eine Strecke s_{2N} sind die zu ermittelnden Koordinaten von möglichen Neupunkten P_N bestimmt, wobei auch die Lösungsvielfalt zu diskutieren ist.

$$\mathbf{e}_{1N} = \begin{bmatrix} 0.824908 \\ 0.520018 \\ -0.221604 \end{bmatrix}, \qquad s_{2N} = 1816.13m$$

63. Man bestimme den Ortsvektor zu einem Neupunkt P_N mit Hilfe von Ortsvektoren zu den Punkten P_1 und P_2 und den Richtungsvektoren $\mathbf{e}_{1N}$ und $\mathbf{e}_{2N}$.

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 2923.10 \\ 2466.41 \\ 266.71 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 3893.75 \\ 4556.29 \\ 376.54 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_{1N} = \begin{bmatrix} 0.6658288 \\ -0.4376900 \\ 0.6042346 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_{2N} = \begin{bmatrix} 0.1171899 \\ -0.9303201 \\ t \end{bmatrix}$$

64. Gegeben sind die Koordinaten der Punkte P_1, P_2 und P_3 sowie die Strecken $[m]$ von diesen Punkten zu einem Neupunkt P_N mit positiver z-Koordinate. Man berechne die Koordinaten des Neupunktes.

	x	y	z
P_1	2730.82	6460.72	421.67
P_2	2142.16	6615.95	315.20
P_3	3210.66	6927.68	327.35

$$s_{1N} = 877.13, \quad s_{2N} = 1033.70, \quad s_{3N} = 1073.99$$