Übungsbeispielsammlung – Mathematik 1

Inhaltsverzeichnis

1 Gleichungen und Ungleichungen

1. Man bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen

$$\text{(a)}\quad \frac{x+4}{12x+4}-\frac{x-4}{3x+1}=5\,,\qquad \frac{x+\sqrt{a}}{x+\sqrt{b}}-\frac{x+\sqrt{a}}{x-\sqrt{b}}=0\,,\ a,b\in\mathbb{R},\text{fest}$$

$$\text{(b)}\quad 3x-\frac{3x-10}{9-2x}=2+\frac{6x^2-40}{2x-1}\,,\qquad x^4-13x^2+36=0$$

$$\text{(c)}\quad \sqrt{x^2-2x+1}+x-1=0\,,\qquad 8^x=4$$

$$\text{(d)}\quad \ln x=2\,,\quad \ln x=-1\,,\quad \ln x=1/3\,,\quad \ln x=0\,,\quad \log_x 8=3\,,\quad \log_x 25=2$$

(e) $2x-9<5x-1\,,\quad (3x+1)(x-2)+x^2>12+(2x-1)^2\,,\quad \dfrac{5x+4}{8}-\dfrac{x-2}{12}>0$

$$\text{(f)}\quad \frac{1}{x+3}\le\frac{1}{4}\,,\quad \frac{3x}{5+x}<-3$$

$$\text{(g)}\quad x^2+x-2<0\,,\quad \frac{x-4}{x-9}<0$$

2. Man bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen

$$\text{(a)}\quad \frac{8x+7}{9x^2-4}=\frac{16}{15x-10}\,,\quad \frac{a}{a-2x}-\frac{b}{b-2x}=0\,,\ a,b\in\mathbb{R},\text{fest}$$

$$\text{(b)}\quad \frac{3}{x-2}-\frac{8}{4-3x}=\frac{19}{2x+1}\,,\quad (x^2+10)(x^2+4)+5=0$$

$$\text{(c)}\quad \sqrt{2x^2+3}+x=0\,,\quad 3^x=\frac{1}{27}$$

(d) $\ln x=1\,,\quad \ln x=-2\,,\quad \ln x=-1/2\,,\quad \ln x=0\,,\quad \log_x 243=5\,,\quad \log_x 4=1/2\,,$

(e) $3x-13<4x-7\,,\quad 4(x-1)-(x-1)(x+1)>5-(x-2)^2\,,\quad \dfrac{x}{7}-9<\dfrac{8-x}{5}$

$$\text{(f)}\quad \frac{4}{x-1}\le\frac{2}{5}\,,\quad \frac{4x-3}{x}\le 3$$

$$\text{(g)}\quad x^2+4x+3\le 0\,,\quad \frac{x-2}{x+3}\ge 0$$

3. Man bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen

$$\text{(a)}\quad \frac{24-5x}{6-2x}-5=\frac{34-14x}{9-3x}\,,\quad \frac{2a+x}{2a-x}=\frac{a+b}{a-b}\,,\ a,b\in\mathbb{R},\text{fest}$$

$$\text{(b)}\quad \frac{3}{x-1}-\frac{5}{2-3x}=\frac{4}{2x-1}\,,\quad (x^2-5)^2+(x^2-1)^2=40$$

$$\text{(c)}\quad \sqrt{2x^2-1}+x=0\,,\quad 5^x=0.04$$

(d) $\ln x=-1\,,\quad \ln x=3\,,\quad \ln x=1/4\,,\quad \ln x=0\,,\quad \log_x 1024=10\,,\quad \log_x 27=3$

(e) $3x+3<9x+5\,,\quad (3-x)^2>(x-2)(x+8)+1\,,\quad \dfrac{3x-2}{6}-\dfrac{x+8}{9}<0$

$$\text{(f)}\quad \frac{1}{x-4}<\frac{1}{2}\,,\quad \frac{2x}{4-x}<-2$$

$$\text{(g)}\quad x^2-x-2>0\,,\quad \frac{x+2}{x-5}>0$$

4. Man bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen

$$\text{(a)}\quad \frac{8x+7}{4x^2-9} = \frac{12}{10x-15}\,, \qquad \frac{x-\sqrt{a}}{x-\sqrt{b}} - \frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{b}} = 0\,,\ a,b \in \mathbb{R}, \text{fest}$$

$$\text{(b)}\quad \frac{5}{x+1} - \frac{1}{3-2x} = \frac{3}{3x-1}\,, \qquad 10x^4 - 21 = x^2$$

$$\text{(c)}\quad x - \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2-1} = 0\,, \qquad 2^x = \frac{1}{8}$$

$$\text{(d)}\quad \ln x = 1\,, \quad \ln x = -3\,, \quad \ln x = 1/2\,, \quad \ln x = 0\,, \quad \log_x 8 = -3\,, \quad \log_x 25 = -2$$

$$\text{(e)}\quad 5x-1 > 31x+95\,, \quad 16(2-x)^2 + (3x-2)^2 < (15-5x)^2\,, \quad 3x-11 < \frac{13-2x}{5} + 7$$

$$\text{(f)}\quad \frac{2}{3-x} \le \frac{5}{8}\,, \qquad \frac{x}{3+x} < 1$$

$$\text{(g)}\quad x^2 + x - 6 \ge 0\,, \qquad \frac{5x+1}{3-2x} \ge 0$$

5. Man löse das Ungleichungssystem

$$(2x-5<7) \ \wedge\ (-3x-1 \le -7)$$

6. Man löse das Ungleichungssystem

$$(2x-5<9) \ \wedge\ (3x+1 \ge 10)$$

7. Man löse das Ungleichungssystem

$$(3x+12>-9) \ \wedge\ (-2x+9 \ge -10)$$

8. Man löse das Ungleichungssystem

$$(5x+4>14) \ \wedge\ (3x-9<5)$$

2 Vektoren, Geraden, Ebenen

9. Es ist zu untersuchen, ob die Punkte $P_1(5,5,9)$ und $P_2(-1,-1,-3)$ auf der Geraden $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ liegen.

10. Es ist zu untersuchen, ob die Punkte $P_1(1,-1,2)$ und $P_2(4,-1,5)$ auf der Geraden $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ liegen.

11. Es ist zu untersuchen, ob die Punkte $P_1(3,0,5)$ und $P_2(-1,1,3)$ auf der Geraden $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegen.

12. Es ist zu untersuchen, ob die Punkte $P_1(-11,11,-14)$ und $P_2(1,5,15)$ auf der Geraden $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$ liegen.

13. Es ist zu untersuchen, ob sich die Geraden
$g_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $g_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix}$
schneiden, und gegebenenfalls der Schnittpunkt und der Schnittwinkel anzugeben.

14. Es ist zu untersuchen, ob sich die Geraden
$g_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $g_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
schneiden, und gegebenenfalls der Schnittpunkt und der Schnittwinkel anzugeben.

15. Es ist zu untersuchen, ob sich die Geraden
$g_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $g_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
schneiden, und gegebenenfalls der Schnittpunkt und der Schnittwinkel anzugeben.

16. Es ist zu untersuchen, ob die Punkte $P(0,4,3)$ bzw. $Q(4,-6,4)$ auf der Ebene $E_1:$
$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$
liegen.

17. Es ist zu untersuchen, ob die Punkte $P(1,3,-6)$ bzw. $Q(5,-5,4)$ auf der Ebene
$E_2:\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1$
liegen.

18. Es ist zu untersuchen, ob die Punkte $P(0,4,3)$ bzw. $Q(4,-6,4)$ auf der Ebene
$E_2:\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6$
liegen.

19. Es ist zu untersuchen, ob die Punkte $P(1,3,-6)$ bzw. $Q(5,-5,4)$ auf der Ebene $E_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$
liegen.

20. Bestimme die Gleichung der Ebene durch die Punkte $A(3, 2, 3)$, $B(2, 0, -1)$ und $C(2, 1, -4)$ in parameterfreier Form und in Parameterform.

21. Bestimme die Gleichung der Ebene durch die Punkte $A(-1, 3, -2)$, $B(1, 2, 1)$ und $C(2, -1, -1)$ in parameterfreier Form und in Parameterform.

22. Bestimme die Gleichung der Ebene durch die Punkte $A(2, 0, 0)$, $B(-1, 2, 0)$ und $C(1, 1, 3)$ in parameterfreier Form und in Parameterform.

23. Bestimme die Gleichung der Ebene durch die Punkte $A(1, 2, 3)$, $B(4, 2, 0)$ und $C(3, 1, 1)$ in parameterfreier Form und in Parameterform.

24. Zu ermitteln ist die Lage der Geraden
$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zur Ebene $E: \ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 18.$

25. Zu ermitteln ist die Lage der Geraden
$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ zur Ebene $E: \ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 18.$

26. Zu ermitteln ist die Lage der Geraden
$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
zur Ebene $E: \ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 18.$

27. Zu ermitteln ist die Lage der Geraden
$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
zur Ebene $E: \ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 18.$

28. Man zeige, dass die Gerade

    (a) $g_1: \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ in der Ebene $E: \ x + 2y + z = 1$ liegt,

    (b) $g_2: \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ zu E parallel ist und

    (c) $g_3: \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit E den Schnittpunkt $S(0, 0, 1)$ hat.

29. Man zeige, dass die Gerade

(a) $g_1: \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ in der Ebene $E: \ x - y + 2z = 11$ liegt,

(b) $g_2: \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu E parallel ist und

(c) $g_3: \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit E den Schnittpunkt $S(7, 6, 5)$ hat.

30. Man ermittle die im Abstand $d = 2$ zur Ebene $E: \ 2x - y + 2z = 2$ liegenden Ebenen.

31. Man ermittle die im Abstand $d = 1$ zur Ebene $E: \ 2x - 2y + 2z = 3$ liegenden Ebenen.

32. Man ermittle die im Abstand $d = 2$ zur Ebene $E: \ x - 2y + 2z = 1$ liegenden Ebenen.

33. Man ermittle die im Abstand $d = 2$ zur Ebene $E: \ x - 2y + 3z = 4$ liegenden Ebenen.

34. Geben Sie für die Ebene

$$E = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

die HESSE'sche Normalform an.

35. Geben Sie für die Ebene

$$E = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

die HESSE'sche Normalform an.

36. Geben Sie für die Ebene

$$E = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

die HESSE'sche Normalform an.

37. Geben Sie für die Ebene

$$E = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

die HESSE'sche Normalform an.

38. Man bestimme die Schnittgerade der Ebenen
$x - y + 2z = 3$ und $x + y + z = 1$.

39. Man bestimme die Schnittgerade der Ebenen
$x + 2y - z = 1$ und $2x + y + z = 2$.

40. Man bestimme die Schnittgerade der Ebenen
$x - y + z = 1$ und $x + y - z = 2$.

41. Man bestimme die Schnittgerade der Ebenen
$2x - y - z = 2$ und $x + 2y + 2z = 3$.

42. Man berechne $|\vec{u} \times \vec{v}|$ und $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$ für
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

43. Man berechne $|\vec{u} \times \vec{v}|$ und $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$ für
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

44. Man berechne $|\vec{u} \times \vec{v}|$ und $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$ für
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

45. Man berechne $|\vec{u} \times \vec{v}|$ und $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$ für
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

46. Man berechne $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ mit den Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ von Beispiel 42.

47. Man berechne $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ mit den Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ von Beispiel 43.

48. Man berechne $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ mit den Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ von Beispiel 44.

49. Man berechne $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ mit den Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ von Beispiel 45.

50. Man berechne den Normalabstand des Punktes $P(3,2,-2)$ von der Ebene

$$E = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

51. Berechnen Sie das Volumen des Parallelepipeds $ABCDEFGH$ mit $A(5,-3,1)$, $B(3,3,2)$, $D(-1,-2,3)$, $E(4,-2,7)$.

52. Berechnen Sie das Volumen des Parallelepipeds $ABCDEFGH$ mit $A(0,0,0)$, $B(2,2,2)$, $D(-2,2,3)$, $E(0,1,7)$.

53. Berechnen Sie das Volumen des Parallelepipeds $ABCDEFGH$ mit $A(1,1,0)$, $B(0,1,0)$, $D(-1,2,1)$, $E(2,2,5)$.

54. Berechnen Sie das Volumen des Parallelepipeds $ABCDEFGH$ mit $A(0,0,0)$, $B(3,0,0)$, $D(1,3,0)$, $E(2,2,4)$.

3 Funktionen

55. Man ermittle den Definitionsbereich der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-2}$ (b) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-x-6}$ (c) $f(x) = \sqrt{2-3x}$

56. Man ermittle den Definitionsbereich der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \dfrac{x-1}{4-x^2}$ (b) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+5x+6}$ (c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-2x}}$

57. Man ermittle den Definitionsbereich der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ (b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+5x+4}$ (c) $f(x) = \sqrt{3-2x}$

58. Man ermittle den Definitionsbereich der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \dfrac{x+1}{3-x^2}$ (b) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+2x-3}$ (c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-3x}}$

59. Man untersuche, welche Symmetrieeigenschaften die folgenden Funktionen besitzen:

(a) $f(x) = 3x^2 - \dfrac{2}{x^2}$ (b) $f(x) = e^{3x} + e^{-3x}$ (c) $f(x) = \left(\dfrac{2}{x} - 2x\right)^2$

60. Man untersuche, welche Symmetrieeigenschaften die folgenden Funktionen besitzen:

$$\text{(a)}\quad f(x) = 4x + \frac{1}{x^3} \qquad \text{(b)}\quad f(x) = e^{x^2+1} \qquad \text{(c)}\quad f(x) = (1+x^3)^2$$

61. Man untersuche, welche Symmetrieeigenschaften die folgenden Funktionen besitzen:

$$\text{(a)}\quad f(x) = 3x^2 - \frac{2}{x^2} \qquad \text{(b)}\quad f(x) = e^{2x} - e^{-2x} \qquad \text{(c)}\quad f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

62. Man untersuche, welche Symmetrieeigenschaften die folgenden Funktionen besitzen:

$$\text{(a)}\quad f(x) = \frac{x}{(x^2+2)^3} \qquad \text{(b)}\quad f(x) = \left(\frac{1}{x} + 4x\right)^2 \qquad \text{(c)}\quad f(x) = \left(\frac{1}{x} + 4x\right)^3$$

63. Welche der folgenden Funktionen ist periodisch?

$$\text{(a)}\quad f(x) = \sqrt{1-\cos x} \quad \text{(b)}\quad f(x) = \sin(1+x) \quad \text{(c)}\quad f(x) = \cos(\pi/4 - x)$$

64. Welche der folgenden Funktionen ist periodisch?

$$\text{(a)}\quad f(x) = \sqrt{\sin x - \cos x} \quad \text{(b)}\quad f(x) = 2 - \frac{1}{\sin x} \quad \text{(c)}\quad f(x) = \cos(2x + \pi/3)$$

65. Welche der folgenden Funktionen ist periodisch?

$$\text{(a)}\quad f(x) = \sqrt{\sin x + \cos x} \quad \text{(b)}\quad f(x) = 2 + \frac{2}{\cos x} \quad \text{(c)}\quad f(x) = \sin(\pi/6 - x)$$

66. Welche der folgenden Funktionen ist periodisch?

$$\text{(a)}\quad f(x) = 2 + \tan x \quad \text{(b)}\quad f(x) = \frac{1}{2 - \sin x} \quad \text{(c)}\quad f(x) = \sin(2x + \pi/3)$$

4 Grenzwerte, Stetigkeit

67. Man bestimme folgende Grenzwerte, falls sie existieren:

$$a)\quad \lim_{x\to-4} \frac{x^2+5x+4}{x^2+3x-4} \qquad b)\quad \lim_{x\to-3} \frac{x^2-9}{2x^2+7x+3}$$

$$c)\quad \lim_{x\to-6^+} \frac{2x+12}{|x+6|} \qquad d)\quad \lim_{x\to1^+} \frac{x^2-9}{x^2+2x-3}$$

$$e)\quad \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2+x} - 3x\right) \qquad f)\quad \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+ax} - \sqrt{x^2+bx}\right)$$

68. Man bestimme folgende Grenzwerte, falls sie existieren:

$$a)\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1} \qquad b)\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x^2+x}$$

$$c)\quad \lim_{x\to -6}\frac{2x+12}{|x+6|} \qquad d)\quad \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{|x|}\right)$$

$$e)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+5x}{2x^3-x^2+4} \qquad f)\quad \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x}{9x+4}}$$

69. Man bestimme folgende Grenzwerte, falls sie existieren:

$$a)\quad \lim_{x\to 2}\frac{2x^2+1}{x^2+6x-4} \qquad b)\quad \lim_{x\to -2}\sqrt{x^4+3x+6}$$

$$c)\quad \lim_{x\to -1}\frac{x^2-4x}{x^2-3x-4} \qquad d)\quad \lim_{x\to -6^-}\frac{2x+12}{|x+6|}$$

$$e)\quad \lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right) \qquad f)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{\sqrt{9x^2+1}}$$

Hinweis zu e): Ersetze x durch $-y$ und führe dann den Genzübergang $y\to\infty$ durch.

70. Man bestimme folgende Grenzwerte, falls sie existieren:

$$a)\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2} \qquad b)\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-x+6}{x-2}$$

$$c)\quad \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right) \qquad d)\quad \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right)$$

$$e)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{4x^4+5}{(x^2-2)(2x^2-1)} \qquad f)\quad \lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+2}{x^3+x^2-1}$$

71. Gegeben ist die Funktion

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x+1 & \text{für} \quad -1\le x\le 0\\ 1-x & \text{sonst}\end{cases}$$

(a) Man berechne – falls möglich – die Grenzwerte

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)\,,\quad \lim_{x\to -1^+} f(x)\,,\quad \lim_{x\to -1} f(x)\,,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)\,,\quad \lim_{x\to 0^+} f(x)\,,\quad \lim_{x\to 0} f(x)\,.$$

(b) Ist $f(x)$ stetig auf $\mathbb{R}$?

(c) Man skizziere den Graph der Funktion.

72. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{für} \quad x < 0 \\ 3 - x & \text{für} \quad 0 \leq x < 3 \\ (x-3)^2 & \text{für} \quad x > 3 \end{cases}$$

(a) Man berechne – falls möglich – die Grenzwerte

$$\lim_{x \to 0^-} f(x)\,, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x)\,, \quad \lim_{x \to 0} f(x)\,,$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x)\,, \quad \lim_{x \to 3^+} f(x)\,, \quad \lim_{x \to 3} f(x)\,.$$

(b) Wo ist die Funktion $f(x)$ unstetig?

(c) Man skizziere den Graph der Funktion.

73. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|+x}{2} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

(a) Man berechne – falls möglich – die Grenzwerte

$$\lim_{x \to 0^-} f(x)\,, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x)\,, \quad \lim_{x \to 0} f(x)\,.$$

(b) Man untersuche, ob die Funktion an der Stelle $x = 0$ stetig ist.

(c) Man skizziere den Graph der Funktion.

74. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x + x^2 & \text{für} \quad x < -1 \\ \sqrt{2+x} & \text{für} \quad -1 \leq x < 0 \\ \dfrac{\sqrt{2}(x-1)}{x+1} & \text{für} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Man berechne – falls möglich – die Grenzwerte

$$\lim_{x \to -1^-} f(x)\,, \quad \lim_{x \to -1^+} f(x)\,, \quad \lim_{x \to -1} f(x)\,,$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x)\,, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x)\,, \quad \lim_{x \to 0} f(x)\,.$$

(b) Wo ist die Funktion $f(x)$ unstetig?

(c) Man skizziere den Graph der Funktion.

75. Man untersuche für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \alpha x & \text{für} \quad x < -1 \\ (x-1)^2 & \text{für} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ stetig ist.
Man skizziere die Funktion.

76. Man untersuche für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{für} \quad x \leq -1 \\ x + \alpha & \text{für} \quad x > -1 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ stetig ist.
Man skizziere die Funktion.

77. Man untersuche für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{für} \quad x \leq 1 \\ 3 + \alpha x & \text{für} \quad x > 1 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ stetig ist.
Man skizziere die Funktion.

78. Man untersuche für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} (x+\alpha)^2 & \text{für} \quad x \leq 0 \\ 4 + 3x & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ stetig ist.
Man skizziere die Funktion.

79. Man untersuche für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 9 & \text{für} \quad x < 0 \\ (x+\alpha)^2 & \text{für} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ stetig ist.
Man skizziere die Funktion.

5 Differenzialrechnung

Man differenziere folgende Funktionen:

80.

$$f_1(x) = (5x^2 + 7x - 1) \cdot (2x^2 - 3x + 2)\,, \quad f_2(x) = \frac{\sinh x}{x^2 + 1}\,, \quad f_3(x) = \frac{3x - 2}{\sqrt{2x + 1}}$$

81.

$$f_1(x) = \frac{5x^2 + 7x - 1}{2x^2 - 3x + 2}\,, \quad f_2(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\,, \quad f_3(x) = (x^2 - 1)^5 (x^3 + 1)^7$$

82.

$$f_1(x) = (2x^2 + 1)(2x^2 + 2)(2x^2 + 3)\,, \quad f_2(x) = \sqrt[3]{x^4} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,, \quad f_3(x) = x^2 \tan x$$

83.

$$f_1(x) = (x^2 - 1)e^{2x}\,, \quad f_2(x) = x^2\sqrt{2x + 4}\,, \quad f_3(x) = x^2 \tan\sqrt{x}$$

84.

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{2x + 1}{3x - 1}}\,, \quad f_2(x) = e^{\ln x - 1}\,, \quad f_3(x) = \frac{x}{\sin(x/2)}$$

85.

$$f_1(x) = \frac{\cos x}{1 + x^2}\,, \quad f_2(x) = \sqrt{x \ln(x^4)}\,, \quad f_3(x) = \frac{x^2}{\cos x}$$

86.

$$f_1(x) = \frac{1 + x^2}{\cos x}\,, \quad f_2(x) = e^{\sin x} + e^{\cos x}\,, \quad f_3(x) = \frac{1}{1 - \cos 3x}$$

87.

$$f_1(x) = \frac{x \ln x}{x + 1}\,, \quad f_2(x) = \ln(e^x - 1)\,, \quad f_3(x) = \frac{1}{1 + \sin 2x}$$

88.

$$f_1(x) = \sqrt{1 + (x^2 + 1)^2}\,, \quad f_2(x) = \sin(e^{2x}) + e^{\sin 2x}$$

89.

$$f_1(x) = \ln(\sin x) - \frac{1}{2}\sin^2 x\,, \quad f_2(x) = \sqrt{\ln(x^2)} + \ln\sqrt{x^2 + 2}$$

90.

$$f_1(x) = \frac{1}{\sin(\cot x)}\,, \quad f_2(x) = \sin(\ln x) - \frac{1}{2}\cos^2 x$$

91.

$$f_1(x) = (1 + \sqrt{x^2 + 1})^2\,, \quad f_2(x) = \tan^2(\sin x)$$

92.

$$f_1(x) = \sin(\cos x) - \cos(\sin x)\,, \quad f_2(x) = \operatorname{arccot}\sqrt{x}$$

93.

$$f_1(x) = \arcsin\frac{x}{3}\,, \quad f_2(x) = \arcsin(\cos x)$$

94.

$$f_1(x) = \ln\frac{1}{x^2+1}\,, \quad f_2(x) = \frac{1}{\arctan x^2}$$

95.

$$f_1(x) = \arccos\frac{1}{x}\,, \quad f_2(x) = \ln(x\sqrt{x^2+1})$$

96.

$$f_1(x) = \ln\frac{1}{x^2+1}\,, \quad f_2(x) = \frac{1}{\arctan x^2}$$

97.

$$f_1(x) = \ln\frac{2x+1}{3x-5}\,, \quad f_2(x) = e^{\sqrt{x}}$$

98.

$$f_1(x) = \ln(\ln x) + \sqrt{\ln x}\,, \quad f_2(x) = x^{2x+1}$$

99.

$$f_1(x) = \ln\sqrt{x+1}\,, \quad f_2(x) = x^{1/x}$$

100.

$$f_1(x) = \ln(\sinh x)\,, \quad f_2(x) = \sinh\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

101.

$$f_1(x) = (\ln x)^x\,, \quad f_2(x) = \frac{1}{1-\cos 3x}$$

102.

$$f_1(x) = \sqrt{\sinh x}\,, \quad f_2(x) = \operatorname{arsinh}\sqrt{x^2+1}$$

103.

$$f_1(x) = e^{\sqrt{3x-2}}\,, \quad f_2(x) = \frac{x}{(6x+4)^{2/3}}$$

104.

$$f_1(x) = \arctan\frac{1}{x}\,, \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2x}}$$

105.

$$f_1(x) = \operatorname{arccot}(x^2)\,, \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$$

106.

$$f_1(x) = \arcsin\frac{x^2}{3}\,, \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{3x-1}}$$

107.

$$f_1(x) = \arccos\frac{x}{2}\,, \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{3x}{x+1}}$$

6 Integralrechnung

108. Man bestimme folgende Integrale

$$a)\quad \int \left(5x^4 - 4x^5 - \frac{3}{x^4}\right) dx \qquad b)\quad \int \cos 3x\, dx$$

$$c)\quad \int (1+x)^{-5}\, dx \qquad d)\quad \int \frac{\sin t}{\cos^2 t}\, dt \qquad e)\quad \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3x^2}{x^3-1}\right) dx$$

109. Man bestimme folgende Integrale

$$a)\quad \int \left(4x^3 - 3x^4 + \frac{1}{x^4}\right) dx \qquad b)\quad \int \sin 2x\, dx$$

$$c)\quad \int (1-x)^{-9}\, dx \qquad d)\quad \int \sin t\ \cos^2 t\ dt \qquad e)\quad \int \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\sinh x}{1+\cosh x}\right) dx$$

110. Man bestimme folgende Integrale

$$a)\quad \int \left(3x^3 - 2x^4 + \frac{4}{x^5}\right) dx \qquad b)\quad \int \sin 3x\, dx$$

$$c)\quad \int (1+x)^7\, dx \qquad d)\quad \int \sin^2 t\ \cos t\ dt \qquad e)\quad \int \left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{x}{x^2+1}\right) dx$$

111. Man bestimme folgende Integrale

$$a)\quad \int \left(2x^4 - 4x^2 + \frac{2}{x^3}\right) dx \qquad b)\quad \int \sin 4x\, dx$$

$$c)\quad \int (1-x)^9\, dx \qquad d)\quad \int \sin \pi t\ \cos \pi t\ dt \qquad e)\quad \int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{2x}{1-x^2}\right) dx$$

112. Man ermittle die folgenden Integrale unter Verwendung einer geeigneten Substitution

$$a)\quad \int x\sqrt{4-x^2}\, dx \qquad b)\quad \int \frac{(\sqrt{x}-4)^3}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$c)\quad \int \frac{2x}{4-x^2}\, dx \qquad d)\quad \int \frac{\cos t}{1+4\sin^2 t}\, dt$$

113. Man ermittle die folgenden Integrale unter Verwendung einer geeigneten Substitution

$$a) \quad \int x\sqrt{x^2+1}\,dx \qquad b) \quad \int \frac{(1+3\sqrt{x})^4}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$c) \quad \int \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx \qquad d) \quad \int \frac{\cos t}{1-4\sin^2 t}\,dt$$

114. Man ermittle die folgenden Integrale unter Verwendung einer geeigneten Substitution

$$a) \quad \int x\sqrt{x^2+4}\,dx \qquad b) \quad \int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$c) \quad \int \frac{x}{x^2+9}\,dx \qquad d) \quad \int \frac{\sin t}{1+4\cos^2 t}\,dt$$

115. Man ermittle die folgenden Integrale unter Verwendung einer geeigneten Substitution

$$a) \quad \int x\sqrt{x^2-9}\,dx \qquad b) \quad \int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$c) \quad \int \frac{x}{x^2-4}\,dx \qquad d) \quad \int \frac{\sin t}{1-9\cos^2 t}\,dt$$

116. Mittels partieller Integration berechne man

$$a) \quad \int x\sinh 2x\,dx \qquad b) \quad \int \ln(2x+1)\,dx$$

$$c) \quad \int xe^{5x}\,dx \qquad d) \quad \int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

117. Mittels partieller Integration berechne man

$$a) \quad \int x\cosh 5x\,dx \qquad b) \quad \int x^2\ln(x^2)\,dx$$

$$c) \quad \int x^2\,e^{-x}\,dx \qquad d) \quad \int \sqrt{x}\,\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

118. Mittels partieller Integration berechne man

$$a) \quad \int t\sin t\,dt \qquad b) \quad \int x^5\ln x\,dx$$

$$c) \quad \int x\cosh x\,dx \qquad d) \quad \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$$

119. Mittels partieller Integration berechne man

$$a) \int t\cos \pi t\, dt \qquad b) \int x\, e^{2x}\, dx$$

$$c) \int x \sinh x\, dx \qquad d) \int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$$

120. Man ermittle die Partialbruchzerlegung des Integranden und bestimme dann die folgenden Integrale

$$a) \int \frac{x}{x-6}\, dx \qquad b) \int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)}\, dx$$

$$c) \int \frac{x^3}{(x+1)^3}\, dx \qquad d) \int \frac{dx}{x^4-x^2}$$

121. Man ermittle die Partialbruchzerlegung des Integranden und bestimme dann die folgenden Integrale

$$a) \int \frac{dx}{x^2-5x+6} \qquad b) \int \frac{x^5-3}{x^3-x^2}\, dx$$

$$c) \int \frac{3x^2-3x-6}{x^3-x}\, dx \qquad d) \int \frac{x^2}{(x+1)^3}\, dx$$

122. Man ermittle die Partialbruchzerlegung des Integranden und bestimme dann die folgenden Integrale

$$a) \int \frac{dx}{(x^2-1)(x-1)} \qquad b) \int \frac{x-3}{x^2-3x+2}\, dx$$

$$c) \int \frac{4x-4}{x^2(x-2)^2}\, dx \qquad d) \int \frac{x^2+8x-4}{x^3-4x}\, dx$$

123. Man ermittle die Partialbruchzerlegung des Integranden und bestimme dann die folgenden Integrale

$$a) \int \frac{dx}{x^2-4} \qquad b) \int \frac{8x}{(x^2-4)(x+2)}\, dx$$

$$c) \int \frac{x}{(x-1)^3}\, dx \qquad d) \int \frac{3x^2-33}{x^2-9}\, dx$$

124. Man bestimme folgende Integrale

$$a) \int_{-2}^{2} \left(2x^4-4x^2+9\right)\, dx \qquad b) \int_{-1}^{1} \cosh 3x\, dx$$

$$c) \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{3x+2}}\, dx \qquad d) \int_1^{\pi} \frac{\sinh\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\, dt \qquad e) \int_{-2}^{-1} \frac{1}{4x^2-1}\, dx$$

125. Man bestimme folgende Integrale

$$a)\quad \int_{-1}^{1}\left(x^4-3x^2+4x\right)\,dx \qquad b)\quad \int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\,dx$$

$$c)\quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\,dx \qquad d)\quad \int_1^{\pi}\frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt \qquad e)\quad \int_{-1}^{2}\frac{1}{x^2-9}\,dx$$

126. Man bestimme folgende Integrale

$$a)\quad \int_0^2\left(6x^4+3x^2-2x\right)\,dx \qquad b)\quad \int_0^{\pi/2}\sin 2x\,dx$$

$$c)\quad \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx \qquad d)\quad \int_1^{\pi}\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt \qquad e)\quad \int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2-4}\,dx$$

127. Man bestimme folgende Integrale

$$a)\quad \int_{-2}^0\left(5x^4-\frac{1}{2}x^2+4\right)\,dx \qquad b)\quad \int_{-1}^{1}\sinh 2x\,dx$$

$$c)\quad \int_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx \qquad d)\quad \int_1^{\pi}\frac{\cosh\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt \qquad e)\quad \int_{2}^{3}\frac{1}{2x^2-1}\,dx$$

128. Man ermittle die folgenden uneigentlichen Integrale, falls sie existieren

$$a)\quad \int_0^{1/2}\frac{dx}{x\,(\ln x)^3} \qquad b)\quad \int_{-2}^{-1}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,dx \quad c)\quad \int_0^2\frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

$$d)\quad \int_0^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \qquad e)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{t}{t^2+16}\,dt$$

129. Man ermittle die folgenden uneigentlichen Integrale, falls sie existieren

$$a)\quad \int_0^{1/2}\frac{dx}{x\,(\ln x)^2} \qquad b)\quad \int_1^{2}\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}}\,dx \quad c)\quad \int_0^2\frac{1}{x-1}\,dx$$

$$d)\quad \int_2^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx \qquad e)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t^2+9}\,dt$$

130. Man ermittle die folgenden uneigentlichen Integrale, falls sie existieren

$$a)\quad \int_0^{1/2}\frac{\ln x}{x}\,dx \qquad b)\quad \int_0^{2}\frac{x}{\sqrt[3]{4-x^2}}\,dx \quad c)\quad \int_0^{10}\frac{1}{(x-3)^2}\,dx$$

$$d)\quad \int_0^{\infty}\frac{1}{4+x^2}\,dx \qquad e)\quad \int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-t^3}\,dt$$

131. Man ermittle die folgenden uneigentlichen Integrale, falls sie existieren

$$a) \quad \int_0^{1/2} \frac{\ln x}{x^2} \qquad b) \quad \int_{-1/2}^{0} \frac{x}{\sqrt[3]{4x^2-1}}\,dx \quad c) \quad \int_{-2}^{0} \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$d) \quad \int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx \qquad e) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{1+t^2}\,dt$$

132. Man skizziere den von den folgenden Kurven begrenzten Bereich und berechne dann den Flächeninhalt dieses Bereichs.

$$a) \quad \begin{cases} y = \dfrac{1}{2+\sqrt{x}} \\ y = \dfrac{1}{2-\sqrt{x}} \\ x = 1 \end{cases} \qquad b) \quad \begin{cases} y = x^3 \\ y = x \end{cases}$$

133. Man skizziere den von den folgenden Kurven begrenzten Bereich und berechne dann den Flächeninhalt dieses Bereichs.

$$a) \quad \begin{cases} y = \dfrac{1}{3+\sqrt{x}} \\ y = \dfrac{1}{3-\sqrt{x}} \\ x = 2 \end{cases} \qquad b) \quad \begin{cases} y = \dfrac{x^3}{3} \\ y = x^2 \end{cases}$$

134. Man skizziere den von den folgenden Kurven begrenzten Bereich und berechne dann den Flächeninhalt dieses Bereichs.

$$a) \quad \begin{cases} y^2 - x^2 = 1 \\ y = 3 \end{cases} \qquad b) \quad \begin{cases} x = y^2 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

135. Man skizziere den von den folgenden Kurven begrenzten Bereich und berechne dann den Flächeninhalt dieses Bereichs.

$$a) \quad \begin{cases} y = \cos x \\ y = \cos^2 x \\ 0 \le x \le \pi/2 \end{cases} \qquad b) \quad \begin{cases} x = y^2 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

136. Man berechne das Volumen des Körpers, der durch Rotation des von den Kurven

$$y = x^2,\ x + y = 2,\ x = 0\ (x \ge 0)$$

begrenzten Bereichs um die y-Achse entsteht.

137. Man berechne das Volumen des Körpers, der durch Rotation des von den Kurven

$$x = y^2 + 1,\ x = 0,\ y = 1,\ y = -1$$

begrenzten Bereichs um die y-Achse entsteht.

138. Man berechne das Volumen des Körpers, der durch Rotation des von den Kurven

$$y = \frac{2}{\cos x},\ y = 1,\ x = 0,\ x = \pi/4$$

begrenzten Bereichs um die x-Achse entsteht.

139. Man berechne das Volumen des Körpers, der durch Rotation des von den Kurven

$$y = 4x - x^2,\ x = y$$

begrenzten Bereichs um die x-Achse entsteht.

140. Man berechen den Flächeninhalt des Flächenstücks, das durch Rotation des Kurvenstücks

$$y = \sqrt{x},\ 4 \leq x \leq 9$$

um die x-Achse entsteht.

141. Man berechen den Flächeninhalt des Flächenstücks, das durch Rotation des Kurvenstücks

$$y = x^3,\ 0 \leq x \leq 2$$

um die x-Achse entsteht.

142. Man berechen den Flächeninhalt des Flächenstücks, das durch Rotation des Kurvenstücks

$$9x = y^2 + 18,\ 2 \leq x \leq 6$$

um die x-Achse entsteht.

143. Man berechen den Flächeninhalt des Flächenstücks, das durch Rotation des Kurvenstücks

$$y = \cosh x,\ 0 \leq x \leq 1$$

um die x-Achse entsteht.

7 Kurvendiskussion

144. Man ermittle die ersten drei Ableitungen der Funktion

$$f(x) = x^{2/3} - x^{-2/3}$$

145. Man ermittle die ersten drei Ableitungen der Funktion

$$f(x) = \sqrt{1-x}$$

146. Man ermittle die ersten drei Ableitungen der Funktion

$$f(x) = x^{2/3} - x^{-2/3}$$

147. Man ermittle die ersten drei Ableitungen der Funktion

$$f(x) = \sqrt{x+2}$$

Man bestimme die Lage und den Typ der relativen Extrema und der Wendepunkte der folgenden Funktionen und fertige eine Skizze des Graphen der Funktion an.

148. $f(x) = 2 - x - x^3$
149. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
150. $f(x) = x^{1/3}(x^2 - 7)$
151. $f(x) = |x^2 + 4x - 12|$
152. $f(x) = (2x-1)^{2/3}$
153. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$
154. $f(x) = x^3 + x$
155. $f(x) = \dfrac{8x}{x^2+4}$
156. $f(x) = \dfrac{x^{2/3}}{16}(x^2 - 16)$
157. $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$
158. $f(x) = (1-3x)^{2/3}$
159. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$
160. $f(x) = 64x^2 - 16x$
161. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$
162. $f(x) = \dfrac{x^{2/3}}{4}(x + 40)$
163. $f(x) = |12 + 4x - x^2|$
164. $f(x) = (4x-1)^{1/3}$
165. $f(x) = \dfrac{(x^2-1)^2}{x^4}$
166. $f(x) = 3x^4 + 4x^3$
167. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$
168. $f(x) = \dfrac{x}{4}(x - 40)^{2/3}$
169. $f(x) = |-3 + 4x - x^2|$
170. $f(x) = (x-3)^{1/3}$
171. $f(x) = \dfrac{10(x^2-1)}{x^5}$

8 Komplexe Zahlen

172. Für $z_1 = 3 + 2i$ und $z_2 = -3 + 2i$ berechne man
$$|z_1|,\ |z_2|,\ z_1 + z_2,\ z_1 - z_2,\ z_1 \cdot z_2,\ \frac{z_1}{z_2}$$

173. Für $z_1 = 4 + 3i$ und $z_2 = 5 - 4i$ berechne man
$$|z_1|,\ |z_2|,\ z_1 + z_2,\ z_1 - z_2,\ z_1 \cdot z_2,\ \frac{z_1}{z_2}$$

174. Für $z_1 = 1 + 2i$ und $z_2 = 3 + 5i$ berechne man
$$|z_1|,\ |z_2|,\ z_1 + z_2,\ z_1 - z_2,\ z_1 \cdot z_2,\ \frac{z_1}{z_2}$$

175. Für $z_1 = -2 + 3i$ und $z_2 = -1 + i$ berechne man
$$|z_1|,\ |z_2|,\ z_1 + z_2,\ z_1 - z_2,\ z_1 \cdot z_2,\ \frac{z_1}{z_2}$$

176. Schreibe die komplexen Zahlen z_1 und z_2 von Beispiel 172 in Polardarstellung an und berechne dann das Produkt $z_1 \cdot z_2$ und den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$ in Polardarstellung. Man vergleiche das Ergebnis.

177. Schreibe die komplexen Zahlen z_1 und z_2 von Beispiel 173 in Polardarstellung an und berechne dann das Produkt $z_1 \cdot z_2$ und den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$ in Polardarstellung. Man vergleiche das Ergebnis.

178. Schreibe die komplexen Zahlen z_1 und z_2 von Beispiel 174 in Polardarstellung an und berechne dann das Produkt $z_1 \cdot z_2$ und den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$ in Polardarstellung. Man vergleiche das Ergebnis.

179. Schreibe die komplexen Zahlen z_1 und z_2 von Beispiel 175 in Polardarstellung an und berechne dann das Produkt $z_1 \cdot z_2$ und den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$ in Polardarstellung. Man vergleiche das Ergebnis.

180. Für z_1 und z_2 wie in Beispiel 172 berechne man z_1^4 und alle dritten Wurzeln aus z_2. Hinweis: Man verwende die Polardarstellung der komplexen Zahlen.

181. Für z_1 und z_2 wie in Beispiel 173 berechne man z_1^4 und alle dritten Wurzeln aus z_2. Hinweis: Man verwende die Polardarstellung der komplexen Zahlen.

182. Für z_1 und z_2 wie in Beispiel 174 berechne man z_1^4 und alle dritten Wurzeln aus z_2. Hinweis: Man verwende die Polardarstellung der komplexen Zahlen.

183. Für z_1 und z_2 wie in Beispiel 175 berechne man z_1^4 und alle dritten Wurzeln aus z_2. Hinweis: Man verwende die Polardarstellung der komplexen Zahlen.

9 Lineare Unabhängigkeit, Basen, Vektorräume

184. Man untersuche, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}$$

185. Man untersuche, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

186. Man untersuche, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\\-1\end{pmatrix}$$

187. Man untersuche, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind

$$\begin{pmatrix}-2\\3\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix}$$

188. Stellen Sie den Vektor $\vec{w}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_1}$ und $\vec{v_3}$ dar:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix}, \ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}-6\\7\\11\end{pmatrix}$$

189. Stellen Sie den Vektor $\vec{w}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_1}$ und $\vec{v_3}$ dar:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix}-3\\3\\-4\end{pmatrix}, \ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

190. Stellen Sie den Vektor $\vec{w}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_1}$ und $\vec{v_3}$ dar:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}, \ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

191. Stellen Sie den Vektor $\vec{w}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_1}$ und $\vec{v_3}$ dar:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

192. Man bestimme eine Basis des von den folgenden Vektoren aufgespannten Vektorraumes

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

193. Man bestimme eine Basis des von den folgenden Vektoren aufgespannten Vektorraumes

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

194. Man bestimme eine Basis des von den folgenden Vektoren aufgespannten Vektorraumes

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

195. Man bestimme eine Basis des von den folgenden Vektoren aufgespannten Vektorraumes

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

196. Man bestimme $k \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} k^2 \\ k \\ -3 \end{pmatrix}$$

orthogonal sind.

197. Man bestimme $k \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} k^2 \\ k \\ 3 \end{pmatrix}$$

orthogonal sind.

198. Man bestimme $k \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ k \\ k^2 \end{pmatrix}$$

orthogonal sind.

199. Man beschreibe im $\mathbb{R}^2$ alle Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, die orthogonal sind zu $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

200. Man beschreibe im $\mathbb{R}^2$ alle Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, die orthogonal sind zu $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

201. Man berechne eine Orthonormalbasis des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Raumes.

202. Man berechne eine Orthonormalbasis des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Raumes.

203. Man berechne eine Orthonormalbasis des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Raumes.

204. Die folgenden Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Mit dem Verfahren von Gram-Schmidt ermittle man daraus eine orthonormale Basis.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

205. Die folgenden Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Mit dem Verfahren von Gram-Schmidt ermittle man daraus eine orthonormale Basis.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}$$

206. Die folgenden Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Mit dem Verfahren von Gram-Schmidt ermittle man daraus eine orthonormale Basis.

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

207. Die folgenden Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Mit dem Verfahren von Gram-Schmidt ermittle man daraus eine orthonormale Basis.

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}$$

208. Man berechne eine Orthonormalbasis des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

aufgespannten Vektorraumes.

209. Man berechne eine Orthonormalbasis des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

aufgespannten Vektorraumes.

210. Man berechne eine Orthonormalbasis des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

aufgespannten Vektorraumes.

211. Man berechne eine Orthonormalbasis des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Vektorraumes.

10 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

212. Man bestimme den Rang der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

213. Man bestimme den Rang der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 10 & 11 & -2 \end{pmatrix}$$

214. Man bestimme den Rang der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

215. Man bestimme den Rang der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

216. Man bestimme den Rang der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -5 & 10 & 5 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

217. Man bestimme den Rang der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ -5 & 10 & 5 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

218. Man bestimme den Rang der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 & -5 & 10 & 5 \\ -3 & 1 & 1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

219. Man bestimme den Rang der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & 10 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

220. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssysystems

$$A \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

221. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssysystems

$$A \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

222. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssysystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 6x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & & & + & 3x_3 & & & = & 0 \end{array}$$

223. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssysstems

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & & & & & & & - & x_5 & = & 0 \end{array}$$

224. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & z & = & 4 \\ 2x & - & 2y & + & 4z & = & 2 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 5 \end{array}$$

225. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & z & = & 4 \\ x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 5 \end{array}$$

226. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 6y & - & 2z & = & 8 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 5 \end{array}$$

227. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & 3y & - & z & = & 4 \\ -4x & - & 4y & - & 2z & = & -10 \end{array}$$

228. Besitzt das folgende Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung?

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -x & & & - & 5z & + & 6w & = & 0 \\ 2x & + & 5y & & & + & 8w & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & + & 2w & = & 0 \end{array}$$

229. Besitzt das folgende Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung?

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ & & 2y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \end{array}$$

230. Besitzt das folgende Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung?

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & 2y & - & 3z & = & 0 \\ -3x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array}$$

231. Besitzt das folgende Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung?

$$\begin{array}{rcrcrcl} & - & 2y & + & z & = & 0 \\ x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ 2x & & & + & z & = & 0 \end{array}$$

232. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Gleichungssysteme

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 9 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 12 \\ 3x_1 & & & + & 2x_3 & & & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & & & - & 2x_4 & = & 9 \end{array}$$

233. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Gleichungssysteme

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & = & 2 \end{array}$$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & -4 & 8 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

234. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Gleichungssysteme

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & = & 3 \\ 4x_1 & + & x_2 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & = & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & - & z & + & w & = & 3 \\ 2x & - & y & - & z & + & 2w & = & 4 \\ & - & 3y & + & z & & & = & -2 \\ -3x & + & 3y & + & z & - & 3w & = & -5 \end{array}$$

235. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Gleichungssysteme

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -3 \\ & & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \end{array}$$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 8 & -1 \\ 1 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

236. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 3y & + & 2z & + & w & = & 4 \\ 2x & + & 2y & + & z & + & w & = & 3 \\ 3x & + & y & - & z & - & 2w & = & -1 \end{array}$$

237. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & 3z & + & 2w & = & 4 \\ x & + & 2y & + & 2z & + & w & = & 3 \\ -2x & + & 3y & + & z & - & w & = & -1 \end{array}$$

238. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 3y & - & z & - & 2w & = & -1 \\ 2x & + & 2y & + & z & + & w & = & 3 \\ 3x & + & y & + & 2z & + & w & = & 4 \end{array}$$

239. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & 2z & + & 2w & = & 3 \\ 2x & + & y & + & z & + & 3w & = & 4 \\ -x & - & 2y & + & 3z & + & w & = & -1 \end{array}$$

240. Man bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, für die das folgende System lösbar ist und gebe in diesem Fall die Lösung an.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & a^2 \\ x & + & y & + & 3z & = & a \\ 3x & + & 4y & + & 7z & = & 8 \end{array}$$

241. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0\,, \\ -2\lambda x_1 + \lambda x_2 + 9x_3 &= 6\,, \\ 2x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 &= 1\,. \end{aligned}$$

(a) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar?

(b) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren beliebig viele Lösungen?

(c) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren keine Lösungen?

(d) Man berechne die Lösung für $\lambda = 1$.

(e) Man berechne die Lösung zu b).

(f) Wie können die Ergebnisse von a), b) und c) geometrisch gedeutet werden?

242. Für welche Werte von α und $\beta \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} \beta \\ -1 \end{pmatrix}$$

lösbar, eindeutig lösbar bzw. nicht lösbar?

243. Man bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, für die das System

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 3 \\ x & - & y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & y & + & (a^2-10)z & = & a \end{array}$$

(a) keine Lösung,

(b) eine eindeutig bestimmte Lösung,

(c) beliebig viele Lösungen besitzt.

244. Man bestimme die Summe, die Differenz $A - B$ und das Produkt $A \cdot B$ der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

245. Man bestimme die Summe, die Differenz $A - B$ und das Produkt $A \cdot B$ der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

246. Man bestimme die Summe, die Differenz $A - B$ und das Produkt $A \cdot B$ der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

247. Man bestimme die Summe, die Differenz $A - B$ und das Produkt $A \cdot B$ der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

248. Man berechne
$$A - B^T\,,\quad B^T \cdot B\,,\quad A^T \cdot B^T - (B \cdot A)^T$$
mit den Matrizen von Beispiel 244.

249. Man berechne
$$A - B^T\,,\quad B^T \cdot B\,,\quad A^T \cdot B^T - (B \cdot A)^T$$
mit den Matrizen von Beispiel 245.

250. Man berechne
$$A - B^T\,,\quad B^T \cdot B\,,\quad A^T \cdot B^T - (B \cdot A)^T$$
mit den Matrizen von Beispiel 247.

251. Man bestimme - falls möglich - die Inverse folgender Matrizen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

252. Man bestimme - falls möglich - die Inverse folgender Matrizen
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

253. Man bestimme - falls möglich - die Inverse folgender Matrizen
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$
Für die Matrix C und ihre Inverse C^{-1} gebe man eine geometrische Interpretation der durch sie vermittelten Transformation an. (Hinweis: Man betrachte die Bilder der kanonischen Basisvektoren)

254. Man bestimme - falls möglich - die Inverse folgender Matrizen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$
Für die Matrix C und ihre Inverse C^{-1} gebe man eine geometrische Interpretation der durch sie vermittelten Transformation an. (Hinweis: Man betrachte die Bilder der kanonischen Basisvektoren)

255. Man ermittle - falls möglich - die Inverse der folgenden Matrizen unter Verwendung elementarer Zeilenumformungen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 10 & 1 & -9 \\ 4 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

256. Man ermittle - falls möglich - die Inverse der folgenden Matrizen unter Verwendung elementarer Zeilenumformungen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

257. Man ermittle - falls möglich - die Inverse der folgenden Matrizen unter Verwendung elementarer Zeilenumformungen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

258. Man ermittle - falls möglich - die Inverse der folgenden Matrizen unter Verwendung elementarer Zeilenumformungen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & 10 & -9 \\ -1 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

259. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1+a & a \\ a & 1+a \end{pmatrix}$$

regulär?

Man berechne in diesem Fall die Inverse.

260. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a-2 & 2 & 2 \\ 2 & a-2 & 2 \\ 2 & 2 & a-2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$$

regulär?

Man berechne in diesem Fall die Inverse.

261. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ 3 & 1+a \end{pmatrix}$$

regulär?

Man berechne in diesem Fall die Inverse.

262. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ a & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$$

regulär?

Man berechne in diesem Fall die Inverse.

263. Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Matrizen regulär?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

264. Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Matrizen regulär?

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 2 & a & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -2 & a & -2 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

265. Man berechne die Determinante der folgenden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

266. Man berechne die Determinante der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -4 & -6 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ -2 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

267. Man berechne die Determinante der folgenden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -6 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

268. Man berechne die Determinante der folgenden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

269. Man berechne die Determinante der folgenden Matrizen
unter Verwendung elementarer Zeilenumformungen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ -4 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

270. Mit Hilfe der Cramer'schen Regel berechne man die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$$

271. Mit Hilfe der Cramer'schen Regel berechne man die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x - y &= 5 \\ x + 3y &= -1 \end{aligned}$$

272. Mit Hilfe der Cramer'schen Regel berechne man die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ x - 2y &= -3 \end{aligned}$$

273. Unter Verwendung der Cramer'schen Regel bestimme man alle $a \in \mathbb{R}$, für die das System

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & - & z & = & 19 \\ 4x & - & y & + & 2z & = & 4 \\ 2x & + & 4y & - & 5z & = & a \end{array}$$

eine Lösung mit $x = 3$ besitzt.

274. Unter Verwendung der Cramer'schen Regel bestimme man alle $a \in \mathbb{R}$, für die das System

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x & - & 3y & - & 2z & = & 31 \\ 2x & + & 6y & + & 3z & = & 4 \\ 4x & + & 2y & - & z & = & a \end{array}$$

eine Lösung mit $z = -6$ besitzt.

275. Unter Verwendung der Cramer'schen Regel bestimme man alle $a \in \mathbb{R}$, für die das System

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 9 \\ ax & + & 2y & - & 3z & = & -4 \end{array}$$

eine Lösung mit $x = 1$ besitzt.

276. Unter Verwendung der Cramer'schen Regel bestimme man alle $a \in \mathbb{R}$, für die das System

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 2z & = & 9 \\ 2x & + & y & & & = & a \\ 3x & - & y & - & z & = & -10 \end{array}$$

eine Lösung mit $y = 1$ besitzt.

11 Weitere Anwendungen der Differenzialrechnung

277. Man bestimme die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren):

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to\pi/6} \frac{\sin x - \frac{1}{2}}{x - \pi/6}\,, \quad \text{b)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{3x^2 - x + 2}\,, \quad \text{c)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x\ \sin^2 x}{1 - \cos x}$$

$$\text{d)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x\ \sin x}{x}\,, \quad \text{e)} \quad \lim_{x\to 0} x\ \cot 2x\,, \quad \text{f)} \quad \lim_{x\to 0^+} (e^x - 1)^x$$

278. Man bestimme die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren):

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to\pi/4} \frac{\tan x - 1}{x - \pi/4}\,, \quad \text{b)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x}{3x - 5}\,, \quad \text{c)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x\ \sin x}{x}$$

$$\text{d)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{5x^2 + 4x + 3}\,, \quad \text{e)} \quad \lim_{x\to 0} \sin 2x\ \cot 3x\,, \quad \text{f)} \quad \lim_{x\to 0} (\cot x)^{\sin x}$$

279. Man bestimme die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren):

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}\,, \quad \text{b)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{3x^2-x+2}\,, \quad \text{c)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{x+4}}{\sin 2x}\,,$$

$$\text{d)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}\,, \quad \text{e)} \quad \lim_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x}\,, \quad \text{f)} \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x\right)$$

280. Man bestimme die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren):

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2}\,, \quad \text{b)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-9}{2x^2+3x+1}\,, \quad \text{c)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x\sqrt{1-\sin x}}{x}$$

$$\text{d)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+2}{3x-2}\,, \quad \text{e)} \quad \lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x^2}\,, \quad \text{f)} \quad \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$$

281. Man ermittle das Differential der folgenden Funktionen

$$f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 2\,, \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,, \quad f_3(x) = \cos 3x$$

282. Man ermittle das Differential der folgenden Funktionen

$$f_1(x) = x^3 - x\,, \quad f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,, \quad f_3(x) = \sin 2x$$

283. Man ermittle das Differential der folgenden Funktionen

$$f_1(x) = 1 - x^2\,, \quad f_2(x) = \sqrt{1-2x}\,, \quad f_3(x) = \cot x$$

284. Man ermittle das Differential der folgenden Funktionen

$$f_1(x) = x^2 + 1\,, \quad f_2(x) = \sqrt{2x+1}\,, \quad f_3(x) = \tan x$$

285. Man verwende die lineare Approximation von

$$f(x) = x^{3/4}$$

für x in der Nähe von $x_0 = 16$, um den Wert von $f(15.96)$ zu approximieren.

286. Man verwende die lineare Approximation von

$$f(x) = x^{2/3}$$

für x in der Nähe von $x_0 = 8$, um den Wert von $f(7.97)$ zu approximieren.

287. Man verwende die lineare Approximation von

$$f(x) = x^{13}$$

für x in der Nähe von $x_0 = 1$, um den Wert von $f(1.02)$ zu approximieren.

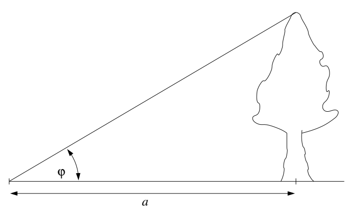
288. Man verwende die lineare Approximation von

$$f(x) = x^{17}$$

für x in der Nähe von $x_0 = 1$, um den Wert von $f(1.03)$ zu approximieren.

289. Der Radius einer Kugel wird mit dem Wert $r = 21$cm gemessen, wobei der Messfehler maximal 0.05cm beträgt. Man ermittle den maximalen Fehler, der bei der Berechnung des Volumens dieser Kugel auf Grund des Messfehlers auftreten kann.

290. Die Höhe eines Baumes wird dadurch bestimmt, dass man den Höhenwinkel φ zur Spitze des Baumes von einem Punkt, der $a = 22$m vom Baum entfernt ist, misst.



Man berechne die Höhe des Baumes und den absoluten und den relativen Fehler des berechneten Wertes, wenn der Winkel φ mit $30°$ und einem möglichen Fehler von $1°$ gemessen wird.
Hinweis: Man verwende für die Angabe der Winkel das Bogenmaß! (Weshalb?)

291. Die Seitenlänge eines gleichseitigen Dreiecks wird mit dem Wert $s = 6$m gemessen, wobei der Messfehler maximal 1cm beträgt. Man ermittle den maximalen Fehler, der bei der Berechnung des Flächeninhalts dieses Dreiecks auf Grund des Messfehlers auftreten kann.

292. Man berechne den maximalen relativen Fehler bei der Bestimmung des Volumens eines Würfels mit der Kantenlänge $a = 1$m, wenn die Länge der Kante auf 3% genau gemessen wurde.

293. Man bestimme das Taylorpolynom $P_n(x)$ vom Grad n mit dem Entwicklungspunkt x_0 für folgende Funktionen:

$$f(x) = 2x^4 + 5x^2 + 2x\,, n = 4, x_0 = -1, \quad g(x) = \tan x\,, n = 5, x_0 = 0$$

294. Man bestimme das Taylorpolynom $P_n(x)$ vom Grad n mit dem Entwicklungspunkt x_0 für folgende Funktionen:

$$f(x) = x^4 + 3x - 1\,, n = 4, x_0 = 1, \quad g(x) = a^x, a > 0\,, n = 4, x_0 = 0$$

295. Man bestimme das Taylorpolynom $P_n(x)$ vom Grad n mit dem Entwicklungspunkt x_0 für folgende Funktionen:

$$f(x) = x^4 - x^2 + 1\,, n = 4, x_0 = -1, \quad g(x) = \frac{\sin x}{x}\,, n = 4, x_0 = 0$$

296. Man bestimme das Taylorpolynom $P_n(x)$ vom Grad n mit dem Entwicklungspunkt x_0 für folgende Funktionen:

$$f(x) = x^4 + 4x^2 - x\,, n = 4, x_0 = 2, \quad g(x) = \sqrt{1+x}\,, n = 4, x_0 = 0$$

297. Unter Verwendung bekannter Taylorpolynome berechne man das Taylorpolynom $P_n(x)$ vom Grad n mit dem Entwicklungspunkt x_0 für

$$f(x) = e^{x^2}\,, n = 10, x_0 = 0$$

Hinweis: Verwende man das entsprechende Polynom für die Funktion e^x und ersetze dann x durch x^2.

298. Unter Verwendung bekannter Taylorpolynome berechne man das Taylorpolynom $P_n(x)$ vom Grad n mit dem Entwicklungspunkt x_0 für

$$f(x) = x\,e^{-x}\,, n = 6, x_0 = 0$$

Hinweis: Zunächst verwende man das entsprechende Polynom für die Funktion e^x und ersetze dann x durch $-x$. Danach multipliziere man das Ergebnis mit x.

299. Unter Verwendung bekannter Taylorpolynome berechne man das Taylorpolynom $P_n(x)$ vom Grad n mit dem Entwicklungspunkt x_0 für

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}\,, n = 6, x_0 = 0$$

Hinweis: Verwende man das entsprechende Polynom für die Funktion $\cos x$, bilde den Ausdruck $1 - \cos x$ und dividiere diesen dann durch x^2.

300. Unter Verwendung bekannter Taylorpolynome berechne man das Taylorpolynom $P_n(x)$ vom Grad n mit dem Entwicklungspunkt x_0 für

$$f(x) = \cos\frac{x}{2}\,, n = 8, x_0 = 0$$

Hinweis: Verwende man das entsprechende Polynom für die Funktion $\cos x$ und ersetze dann x durch $x/2$.

301. Man ermittle das Taylorpolynom $P_n(x)$ von

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

um $x_0 = 1$ für $n = 1, 2, 3$ und vergleiche die Werte von $f(1.01)$ und $P_n(1.01)$.

302. Man ermittle das Taylorpolynom $P_n(x)$ von

$$f(x) = \sqrt{x}$$

um $x_0 = 1$ für $n = 1, 2, 3$ und vergleiche die Werte von $f(0.98)$ und $P_n(0.98)$.

303. Man ermittle das Taylorpolynom $P_n(x)$ von

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

um $x_0 = 1$ für $n = 1, 2, 3$ und vergleiche die Werte von $f(1.02)$ und $P_n(1.02)$.

304. Man ermittle das Taylorpolynom $P_n(x)$ von

$$f(x) = \sqrt[4]{x}$$

um $x_0 = 1$ für $n = 1, 2, 3$ und vergleiche die Werte von $f(0.99)$ und $P_n(0.99)$.

305. Man verwende das Taylorpolynom $P_4(x)$ (mit $x_0 = 0$) des Integranden, um folgendes Integral näherungsweise zu berechnen

$$\int_0^{0.5} \sin^2 x \, dx$$

und vergleiche den gewonnenen Wert mit dem Ergebnis $I \approx 0.0396323$.

306. Man verwende das Taylorpolynom $P_4(x)$ (mit $x_0 = 0$) des Integranden, um folgendes Integral näherungsweise zu berechnen

$$\int_0^{1} \frac{\cos x}{1+x} \, dx$$

und vergleiche den gewonnenen Wert mit dem Ergebnis $I \approx 0.601044$.

307. Man verwende das Taylorpolynom $P_4(x)$ (mit $x_0 = 0$) des Integranden, um folgendes Integral näherungsweise zu berechnen

$$\int_0^{0.5} \frac{\sin x}{x} \, dx$$

und vergleiche den gewonnenen Wert mit dem Ergebnis $I \approx 0.493107$.

308. Man verwende das Taylorpolynom $P_4(x)$ (mit $x_0 = 0$) des Integranden, um folgendes Integral näherungsweise zu berechnen

$$\int_0^{0.2} e^{-x^2}\, dx$$

und vergleiche den gewonnenen Wert mit dem Ergebnis $I \approx 0.197365$.

309. Approximieren Sie die folgenden Stützpunkte mit einem LAGRANGE'schen Interpolationspolynom vom Rang zwei

x	2	4	6
y	-12	-8	-9

und bestimmen Sie den Interpolationswert an der Stelle $x = 3$.
Stellen Sie die Punkte und das Polynom graphisch dar.

310. Approximieren Sie die folgenden Stützpunkte mit einem LAGRANGE'schen Interpolationspolynom vom Rang zwei

x	-2	0	3
y	15	2	-3

und bestimmen Sie den Interpolationswert an der Stelle $x = 1$.
Stellen Sie die Punkte und das Polynom graphisch dar.

311. Approximieren Sie die folgenden Stützpunkte mit einem LAGRANGE'schen Interpolationspolynom vom Rang zwei

x	-1	1	3
y	2	-1	4

und bestimmen Sie den Interpolationswert an der Stelle $x = 2$.
Stellen Sie die Punkte und das Polynom graphisch dar.

312. Approximieren Sie die folgenden Stützpunkte mit einem LAGRANGE'schen Interpolationspolynom vom Rang zwei

x	1	3	5
y	-2	-1	1

und bestimmen Sie den Interpolationswert an der Stelle $x = 0$.
Stellen Sie die Punkte und das Polynom graphisch dar.

313. Man ermittle das LAGRANGE'sche Interpolationspolynom $P_2(x)$, das an den Stellen $x_1 = \pi/4, x_2 = \pi/3, x_3 = \pi/2$ mit der Funktion

$$f(x) = \cos x$$

übereinstimmt.
Stellen Sie die Funktion f und das Polynom P_2 graphisch dar.
Man vergleiche die Werte $f(1.8)$ und $P_2(1.8)$.

314. Man ermittle das LAGRANGE'sche Interpolationspolynom $P_2(x)$, das an den Stellen $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 4$ mit der Funktion

$$f(x) = \sqrt{x}$$

übereinstimmt.
Stellen Sie die Funktion f und das Polynom P_2 graphisch dar.
Man vergleiche die Werte $f(2)$ und $P_2(2)$.

315. Man ermittle das LAGRANGE'sche Interpolationspolynom $P_2(x)$, das an den Stellen $x_1 = 0, x_2 = \pi/6, x_3 = \pi/4$ mit der Funktion

$$f(x) = \sin x$$

übereinstimmt.
Stellen Sie die Funktion f und das Polynom P_2 graphisch dar.
Man vergleiche die Werte $f(1)$ und $P_2(1)$.

316. Man ermittle das LAGRANGE'sche Interpolationspolynom $P_2(x)$, das an den Stellen $x_1 = 1.5, x_2 = 2, x_3 = 2.5$ mit der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

übereinstimmt.
Stellen Sie die Funktion f und das Polynom P_2 graphisch dar.
Man vergleiche die Werte $f(2.3)$ und $P_2(2.3)$.

12 Differenzialgleichungen

317. Man löse folgende Differentialgleichungen

$$a) \quad y' = \frac{y}{x} \qquad b) \quad y' = x^2(x+1) \qquad c) \quad y' = \frac{2x^2}{y}$$

318. Man löse folgende Differentialgleichungen

$$a) \quad y' = \frac{x^2}{y^2} \qquad b) \quad y' = y^2 + 1 \qquad c) \quad y' = y^2\,(x+1)$$

319. Man löse folgende Differentialgleichungen

$$a) \quad y' = x^2 y \qquad b) \quad x\,y' = y^2 \qquad c) \quad y' = \frac{x}{y^2}$$

320. Man löse folgende Differentialgleichungen

$$a) \quad y' = xe^y \qquad b) \quad y' = y^2 \sin x \qquad c) \quad y' = \sqrt{1-y^2}$$

321. Man bestimme die Lösung der Differentialgleichung, die die gegebene Anfangsbedingung erfüllt.

$$x\,y' + y = y^2\,, \quad y(1) = -1$$

322. Man bestimme die Lösung der Differentialgleichung in, die die gegebene Anfangsbedingung erfüllt.
Dabei sind die allgemeine Lösung der Differentialgleichung und die spezielle Lösung des Anfangswertproblems nur in impliziter Form anzugeben.

$$y' = \frac{y\cos x}{1+y^2}\,, \quad y(0) = 1$$

323. Man bestimme die Lösung der Differentialgleichung, die die gegebene Anfangsbedingung erfüllt.

$$y' = y^2 + 1\,, \quad y(1) = 0$$

324. Man bestimme die Lösung der Differentialgleichung, die die gegebene Anfangsbedingung erfüllt.
Dabei sind die allgemeine Lösung der Differentialgleichung und die spezielle Lösung des Anfangswertproblems nur in impliziter Form anzugeben.

$$x\cos x = (2y + e^{3y})\,y'\,, \quad y(0) = 0$$

325. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden linearen Differentialgleichungen.

$$a) \quad y' - 2y = 2x \qquad b) \quad y' + 2xy = x \qquad c) \quad (1+x)\,y' + y = 1 + x$$

326. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden linearen Differentialgleichungen.

$$a) \quad y' + \frac{1}{x-1}\,y = 1\,, x > 1 \qquad b) \quad y' + 2y = 2e^x \qquad c) \quad y' = x\sin(2x) + y\,\tan x$$

327. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden linearen Differentialgleichungen.

$$a) \quad y' + y = \sin x \qquad b) \quad y' + 3x^2\,y = 6x^2 \qquad c) \quad x^2 + xy = x\,y'$$

328. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden linearen Differentialgleichungen.

$$a) \quad y' + 4y = e^x \qquad b) \quad x\,y' + y = \sqrt{x} \qquad c) \quad x \,\ln x\, y' + y = xe^x$$

329. Man ermittle die Lösung des Anfangswertproblems

$$a) \quad x\,y' + x\,y = x^2\,,\ x > 0\,, \qquad y(1) = 2$$

$$b) \quad y' + \left(\frac{1}{x} + 1\right) y = \frac{1}{x}\,,\ x > 0\,, \qquad y(1) = 0$$

330. Man ermittle die Lösung des Anfangswertproblems

$$a) \quad y' - 2x\,y = 3x^2\,e^{x^2}\,, \qquad y(0) = 5$$

$$b) \quad y' + y = \frac{1}{1 + e^x}\,, \qquad y(1) = 0$$

331. Man ermittle die Lösung des Anfangswertproblems

$$a) \quad y' = x + y\,, \qquad y(0) = 2$$

$$b) \quad y' - \frac{2x}{1 + x^2} y = x\,, \qquad y(0) = 0$$

332. Man ermittle die Lösung des Anfangswertproblems

$$a) \quad x\,y' + 2y = x^3\,,\ x > 0\,, \qquad y(1) = 0$$

$$b) \quad y' - \frac{1}{x}\,y = \frac{1}{x + 1}\,,\ x > 0\,, \qquad y(1) = 0$$

13 Lineare Abbildungen

333. Welche geometrische Bedeutung hat die Koordinatentransformation $\vec{y} = A \cdot \vec{x}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ?$$

Hinweis: Man ermittle zunächst die Bilder der kanonischen Basisvektoren und dann das Bild eines beliebigen Vektors.

334. Welche geometrische Bedeutung hat die Koordinatentransformation $\vec{y} = A \cdot \vec{x}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ?$$

Hinweis: Man ermittle zunächst die Bilder der kanonischen Basisvektoren und dann das Bild eines beliebigen Vektors.

335. Welche geometrische Bedeutung hat die Koordinatentransformation $\vec{y} = A \cdot \vec{x}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} ?$$

Hinweis: Man ermittle zunächst die Bilder der kanonischen Basisvektoren und dann das Bild eines beliebigen Vektors.

336. Welche geometrische Bedeutung hat die Koordinatentransformation $\vec{y} = A \cdot \vec{x}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} ?$$

Hinweis: Man ermittle zunächst die Bilder der kanonischen Basisvektoren und dann das Bild eines beliebigen Vektors.

337. Man bestimme die Matrix A die gemäß der Transformationsformel $\vec{y} = A\,\vec{x}$ eine Drehung im $\mathbb{R}^2$ um den Winkel $\varphi = 120°$ beschreibt.
Welche Abbildung beschreibt die Matrix A^2, welche die Matrix A^{-1} ?

338. Man bestimme die Matrix A die gemäß der Transformationsformel $\vec{y} = A\,\vec{x}$ eine Drehung im $\mathbb{R}^2$ um den Winkel $\varphi = -30°$ beschreibt.
Welche Abbildung beschreibt die Matrix A^2, welche die Matrix A^{-1} ?

339. Man bestimme die Matrix A die gemäß der Transformationsformel $\vec{y} = A\,\vec{x}$ eine Drehung im $\mathbb{R}^2$ um den Winkel $\varphi = 45°$ beschreibt.
Welche Abbildung beschreibt die Matrix A^2, welche die Matrix A^{-1} ?

340. Man bestimme die Matrix A die gemäß der Transformationsformel $\vec{y} = A\,\vec{x}$ eine Drehung im $\mathbb{R}^2$ um den Winkel $\varphi = -90°$ beschreibt.
Welche Abbildung beschreibt die Matrix A^2, welche die Matrix A^{-1} ?

341. Man untersuche, ob die folgende Matrix othogonal ist, und berechne gegebenenfalls die Inverse

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\varphi & -\cos\varphi & -\sin^2\varphi \\ \cos^2\varphi & \sin\varphi & -\cos\varphi\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Hinweis: Man beachte die Eigenschaften orthogonaler Matrizen!

342. Man untersuche, ob die folgende Matrix othogonal ist, und berechne gegebenenfalls die Inverse

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Man beachte die Eigenschaften orthogonaler Matrizen!

343. Man untersuche, ob die folgende Matrix othogonal ist, und berechne gegebenenfalls die Inverse

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Hinweis: Man beachte die Eigenschaften orthogonaler Matrizen!

344. Man untersuche, ob die folgende Matrix othogonal ist, und berechne gegebenenfalls die Inverse

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Hinweis: Man beachte die Eigenschaften orthogonaler Matrizen!

14 Eigenwerte

345. Man berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

346. Man berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

347. Man berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -11 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

348. Man berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

349. Man diagonalisiere folgende Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

350. Man diagonalisiere folgende Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

351. Man diagonalisiere folgende Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

352. Man diagonalisiere folgende Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

353. Man ermittle die orthogonale Diagonalisierung der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

D.h. man bestimme eine orthogonale Matrix T so, dass der Ausdruck T^tAT eine Diagonalmatrix ist.

354. Man ermittle die orthogonale Diagonalisierung der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D.h. man bestimme eine orthogonale Matrix T so, dass der Ausdruck T^tAT eine Diagonalmatrix ist.

355. Man ermittle die orthogonale Diagonalisierung der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

D.h. man bestimme eine orthogonale Matrix T so, dass der Ausdruck T^tAT eine Diagonalmatrix ist.

356. Man ermittle die orthogonale Diagonalisierung der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

D.h. man bestimme eine orthogonale Matrix T so, dass der Ausdruck T^tAT eine Diagonalmatrix ist.

357. Man bestimme eine symmetrische 2×2 Matrix mit den Eigenwerten λ_1 und λ_2 und den dazugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ wobei

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

358. Man bestimme eine symmetrische 2×2 Matrix mit den Eigenwerten λ_1 und λ_2 und den dazugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ wobei

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

359. Man bestimme eine symmetrische 2×2 Matrix mit den Eigenwerten λ_1 und λ_2 und den dazugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ wobei

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

360. Man bestimme eine symmetrische 2×2 Matrix mit den Eigenwerten λ_1 und λ_2 und den dazugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ wobei

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$