Geomathematik I / Geomathematik
WS 2022/23

Übungsbeispiele ... „Koordinatenrechnung auf der Kugel“

1. Von einem sphärischen Dreieck mit den Punkten P_1, P_2 und P_3 (im Uhrzeigersinn!) sind folgende Bestimmungsstücke gegeben:

$$\begin{array}{lcrl} \text{a} & = & 5^o41'16.38'' & \text{(Seite von } P_3 \text{ nach } P_2\text{)} \\ \text{b} & = & 2^o37'44.60'' & \text{(Seite von } P_3 \text{ nach } P_1\text{)} \\ \gamma & = & 86^o19'21.40'' & \text{(Winkel in } P_3\text{)} \quad . \end{array}$$

Gesucht sind

(a) die restlichen unbekannten Größen des Dreiecks;

(b) die Koordinaten φ_i, λ_i der Punkte $P_i \quad (i = 1, 2, 3)$, wenn man weiß, daß der Punkt P_2 der Schnittpunkt von Äquator und Nullmeridian ist und P_1 in positiver λ-Richtung am Äquator liegt.

2. Auf einer Kugel mit R=100 $[LE]$ ist von einem sphärischen Dreieck mit den Punkten A, B und C (im Uhrzeigersinn!) Folgendes bekannt:

- Das Dreieck ist gleichschenklig mit a=b (a, b: Seiten gegenüber A bzw. B).
- Das Dreieck ist rechtwinkelig mit rechtem Winkel in C.
- Das Dreieck hat eine Fläche F=22.75 $[LE^2]$.

Gesucht sind (in Altgrad und Bruchteilen auf fünf Nachkommastellen)

(a) alle Seiten a, b, c und alle Winkel α, β, γ des Dreiecks;

(b) die Koordinaten φ_i, λ_i (mit i=A, B, C) der Punkte A, B, C, wenn man weiß, dass der Punkt A der Schnittpunkt von Äquator und Nullmeridian ist und dass B westlich von A am Äquator liegt.

3. Auf einer Einheitskugel (R=1 [LE]) sind die geographischen Koordinaten von P_1 durch $\varphi_1 = -15^o$ und $\lambda_1 = 112^o$ und weiters das Azimut bzw. die sphärische Distanz zu einem Punkt P_2 gegeben: $\alpha_{12} = 326^o$, $s_{12} = 0.35$ [LE].
   Man berechne die Koordinaten von P_2 mittels 1. Hauptaufgabe inklusive des Gegenazimuts α_{21} und kontrolliere die Ergebnisse durch Anwendung einer 2. Hauptaufgabe auf P_1, P_2.

4. Bei einem Erdbeben mit Epizentrum im Punkt P_1 ($\varphi_1 = 46^o17'$, $\lambda_1 = 13^o08'$) wurden innerhalb eines Umkreises von ca. 200 km im Punkt P_2 ($\varphi_2 = 46^o15'$, $\lambda_2 = 11^o11'$) die stärksten Zerstörungen registriert.
   Man berechne das Azimut dieser Wellenausbreitung und die für die Bebenauswertung wichtige Differenz zwischen der sphärischen und räumlichen Distanz auf der Basis eines Erdradius $R = 6379\ km$.

5. Auf einer Erdkugel mit dem Radius $R = 6379\,km$ kennt man die geographischen Koordinaten (φ, λ) von Punkten A und B im Atlantik.

   Für die Verbindung von A nach B ist s_{AB} die kürzeste Entfernung für ein Schiff auf der Meeresoberfläche und $\bar{s}_{AB}$ die direkte Distanz für ein U-boot. Im Punkt C der Erdkugel befindet sich das Schiff in maximaler vertikaler Entfernung t_m über dem Kurs des U-bootes. Man berechne s_{AB}, $\bar{s}_{AB}$, φ_C, λ_C und t_m.

   Sämtliche Entfernungsangaben sind in der Dimension [m] zu machen.

	φ	λ
A	$20°30'$	$-30°15'$
B	$21°45'$	$-31°30'$

6. Auf einer Kugel mit dem Radius $R = 6379813\ m$ kennt man die geographischen Koordinaten des Punktes P_1 ($\varphi_1 = 47^o15'12.43''$, $\lambda_1 = 15^o14'8.23''$). Im Punkt P_1 wurden zudem noch zu einem Punkt P_2 das Azimut $\alpha_{12} = 6^o14'12''$ und die sphärische Distanz $s_{12} = 5381.4\ m$ gemessen und zu einem Punkt P_3 das Azimut $\alpha_{13} = 312^o31'24''$ und die Distanz $s_{13} = 2812.5\ m$. Gesucht sind die Koordinaten der Punkte P_2 und P_3 und die Fläche des sphärischen Dreiecks $P_1 - P_2 - P_3$.

7. Auf der Kugel mit dem Radius $R = 6379\ km$ sind die Punkte P_1 und P_2 gegeben. Man berechne mit numerisch stabilen Formeln die Seite s_{12} [m] und die Richtungswinkel α_{12} und α_{21}.

$$P_1: \quad \begin{array}{rcl} \varphi_1 & = & 47^o30'00'' \\ \lambda_1 & = & 15^o26'04'' \end{array} \qquad P_2: \quad \begin{array}{rcl} \varphi_2 & = & 47^o38'35'' \\ \lambda_2 & = & 15^o38'56'' \end{array}$$

8. Berechne die sphärische Distanz auf der Kugel (Erdradius ... 6379241 m) zwischen den Punkten:

$$\begin{array}{lrclrcl} \text{TU Graz ...} & \varphi & = & 47^o04'03.23'' & \lambda & = & 15^o27'04.51'' \\ \text{Lustbühel ...} & \varphi & = & 47^o03'58.14'' & \lambda & = & 15^o29'39.22'' \end{array} \quad .$$

Welche Auswirkung hat eine Änderung des Radius von 1000 m auf die berechnete Distanz?

9. Ein sphärisches Dreieck $P_1 - P_2 - P_3$ auf einer Kugel mit $R = 6370\ km$ ist durch zwei Winkel und eine Seite gegeben:

$$\begin{array}{rcrl} \beta & = & 110^o15'30.22'' & \text{(Winkel in } P_2\text{)} \\ \gamma & = & 57^o00'00.03'' & \text{(Winkel in } P_3\text{)} \\ \text{s} & = & 520132.37\ m & \text{(Seite von } P_2 \text{ nach } P_3\text{)} \end{array} \quad .$$

Das Dreieck soll nun so auf der Kugel eingepaßt werden, daß:
(a) das Azimut von P_1 nach P_2 $32^o10'0.12''$ ist;
(b) P_1 auf dem Parallelkreis mit $\varphi = 10^o$ liegt;
(c) P_3 auf dem Meridian mit $\lambda = 20^o$ liegt.

Man berechne die sphärischen Koordinaten der Punkte P_1, P_2 und P_3.

10. Bei einem Flugzeug mit eingebautem Radaraufnahmesystem werden in gewissen Abständen die geographischen Koordinaten φ und λ des Flugweges mitbestimmt. Die Flughöhe über Grund ist konstant und beträgt $h = 12000\ m$. In dem relativ kleinen Bereich des Flugweges betrachten wir die Erde als Kugel mit dem Radius $R = 6371\ km$.

Flugweg:	φ_0	$=$	$4^o37'10.3''$	λ_0	$=$	$30^o15'00''$
	φ_1	$=$	$5^o42'22.7''$	λ_1	$=$	$30^o30'00''$
	φ_2	$=$	$6^o47'31.4''$	λ_2	$=$	$30^o45'00''$
	φ_3	$=$	$7^o52'36.9''$	λ_3	$=$	$31^o00'00''$
	φ_4	$=$	$8^o57'40.7''$	λ_4	$=$	$31^o15'00''$
	φ_5	$=$	$10^o02'45.1''$	λ_5	$=$	$31^o30'00''$
	φ_6	$=$	$11^o07'53.6''$	λ_6	$=$	$31^o45'00''$

Man berechne die kürzeste Entfernung auf der Erdoberfläche von P_0 über P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 nach P_6 und jene direkt von P_0 nach P_6 und deute die Ergebnisse. Weiters gebe man die räumliche, geradlinige Entfernung zwischen der ersten und letzten Flugzeugposition an.

11. Gegeben sind drei Punkte P_1, P_2 und P_3 auf einer Kugel. Überprüfen Sie rechnerisch, ob die Punkte auf einem Großkreis liegen und diskutieren Sie die numerische Wertigkeit Ihrer Berechnung.

	φ	λ
P_1	$2°28'$	$-30°12'$
P_2	$1°38'$	$-30°30'$
P_3	$-2°45'$	$-32°05'$

12. Ein Flugzeug überfliegt bei seiner Erdumrundung entlang eines Großkreises den Punkt P_1 und nimmt Kurs auf den Punkt P_2, um in weiterer Folge wieder zum Ausgangspunkt zurückzukehren. Welche nach Norden orientierte Richtung mit Bezug auf P_1 schlägt das Flugzeug ein, falls es zunächst den längeren (Achtung: $\Delta\lambda > 180°$!) der beiden Abschnitte des Fluges in Angriff nimmt?

	φ	λ
P_1	$2°30'$	$-125°12'$
P_2	$-1°38'$	$65°30'$

13. Ein Schiff verlässt um 4:00 Uhr den Hafen von Colombo auf Ceylon ($\varphi_1 = 6.55^o$, $\lambda_1 = 79.52^o$) in Richtung Malediven und befährt den Indischen Ozean auf einer Orthodrome mit konstanter Geschwindigkeit. Um 15:30 passiert es das Haddummoti Atoll ($\varphi_2 = 1.55^o$, $\lambda_2 = 73.25^o$). Wann überquert es den Äquator?

14. Ein Schiff verlässt um 6:00 Uhr den Hafen von Colombo auf Ceylon ($\varphi_1 = 6.55^o$, $\lambda_1 = 79.52^o$) in Richtung Südwesten und befährt den Indischen Ozean auf einer Orthodrome mit einer konstanten Geschwindigkeit von 40 Knoten (1 Knoten = 1 Seemeile/Stunde, 1 Seemeile = 1.852 km). Wann passiert es die Inselgruppe der Malediven ($\lambda_2 = 73.25^o$)? Der Berechnung ist ein Radius von R = 6379 km zugrunde zu legen.

15. Auf der Kugel kennt man die Koordinaten von zwei Punkten P_1 und P_2. Weiters kennt man die Azimute von diesen beiden Punkten zu einem Punkt P_3.

    Man berechne die Koordinaten φ_3, λ_3 des Punktes P_3 und gebe den Exzeß des sphärischen Dreiecks $P_1 - P_2 - P_3$ an.

$$\begin{array}{llcl@{\qquad}llcr} P_1: & \varphi_1 & = & 17^o34'09.14'' & P_2: & \varphi_2 & = & 18^o04'15.42'' \\ & \lambda_1 & = & 52^o18'37.11'' & & \lambda_2 & = & 52^o27'13.41'' \\ & \alpha_{13} & = & 57^o05'02.80'' & & \alpha_{23} & = & 120^o46'21.76'' \end{array}$$

16. Auf der Kugel kennt man geographische Koordinaten der Punkte P_1 und P_2:

$$\begin{array}{llcl@{\qquad}llcl} P_1: & \varphi_1 & = & 47^o16'12.48'' & P_2: & \varphi_2 & = & 48^o31'52.91'' \\ & \lambda_1 & = & 15^o04'37.21'' & & \lambda_2 & = & 17^o20'11.68'' \quad ; \end{array}$$

Auf dem Meridian durch den Punkt P_1 liegt nun der Punkt P_3, wobei $\varphi_3 = -\varphi_1$ gilt. Zur Bestimmung eines weiteren Punktes P_N, dessen geographische Koordinaten gesucht sind, liegen in den Punkten P_1 und P_3 unorientierte Richtungssätze vor, die sich auf Teilstücke von Großkreisen als Verbindungslinien zwischen den Punkten beziehen.

von	nach	unorientierte Richtung
P_1	P_2	$112^o14'40.10''$
	P_N	$146^o08'00.18''$
P_3	P_1	$359^o00'58.47''$
	P_N	$45^o32'03.08''$

17. Auf einer Kugel mit dem Radius $R = 6379\ km$ sind zwei Punkte P_1 und P_2 durch ihre geographischen Koordinaten gegeben und bilden mit dem Punkt P_3 ein sphärisches Dreieck (P_1, P_2 und P_3 folgen im Uhrzeigersinn aufeinander), in welchem die Winkel β_1 (in P_1) und β_2 (in P_2) gemessen wurden. Man berechne die Koordinaten von P_3 und die Fläche des Dreiecks $P_1 - P_2 - P_3$.

$$\begin{array}{llcr@{\qquad}llcr} P_1: & \varphi_1 & = & 44^o12'32'' & P_2: & \varphi_2 & = & 42^o26'08'' \\ & \lambda_1 & = & 11^o30'41'' & & \lambda_2 & = & 14^o01'56'' \\ & \beta_1 & = & 45.2068^o & & \beta_2 & = & 109.5344^o \end{array}$$

18. Auf einer Kugel mit dem Radius R sind die Koordinaten von Punkten zweier Punktpaare (P_1, P_2) und (P_3, P_4) bekannt. Man berechne die Koordinaten von Schnittpunkten der durch (P_1, P_2) bzw. (P_3, P_4) vorgegebenen Großkreise mittels sphärischer Geometrie und kontrolliere das Ergebnis durch einen räumlichen Ansatz.

$$\begin{array}{llcr@{\qquad}llcr} P_1: & \varphi_1 & = & -7^o15'46'' & P_2: & \varphi_2 & = & 15^o38'35'' \\ & \lambda_1 & = & -30^o26'04'' & & \lambda_2 & = & 155^o38'56'' \\ P_3: & \varphi_3 & = & -20^o30'27'' & P_4: & \varphi_4 & = & 47^o38'35'' \\ & \lambda_3 & = & 15^o38'04'' & & \lambda_4 & = & 15^o26'56'' \end{array}$$

19. Auf der Kugel sind die Punkte P_1 und P_2 durch ihre geographischen Breiten und Längen gegeben. Zu einem Neupunkt P_N (P_1, P_2 und P_N folgen im Uhrzeigersinn aufeinander) wurden sphärische Distanzen gemessen. Man berechne die geographischen Koordinaten des Neupunktes sowie das Azimut von P_N nach P_2.

$$\begin{array}{llcr@{\qquad}llcr} P_1: & \varphi_1 & = & 40^o10'30'' & P_2: & \varphi_2 & = & 36^o41'17'' \\ & \lambda_1 & = & 1^o08'42'' & & \lambda_2 & = & 8^o52'18'' \\ & s_{1N} & = & 13^o27'09'' & & s_{2N} & = & 9^o53'12'' \end{array}$$

20. Ein Schiff fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 20 Knoten (Knoten ... Seemeilen pro Stunde, 1 Seemeile ... 1.852 km) von Miami ($\varphi = 26^o12'43''$, $\lambda = -79^o30'19''$) ungefähr in Richtung Nordosten. Nach einer Fahrtzeit von 10 Stunden wird die Entfernung zu einem Funkschiff ($\varphi = 25^o50'21''$, $\lambda = -73^o42'30''$) gemessen: $s = 439844\ m$.

Wo befindet sich das Schiff nach weiteren 10 Stunden, unter der Annahme, daß es sich entlang eines Großkreises bewegt, wobei den Berechnungen ein Erdradius von 6371221 m zugrunde liegen soll?

21. Auf einer Kugel sind die Punkte P_1 und P_2 durch ihre geographischen Breiten und Längen gegeben. Zu einem Neupunkt P_N wurden sphärische Distanzen gemessen.

$$
\begin{array}{llcrlllcr}
P_1: & \varphi_1 & = & 80^o10'30'' & \qquad & P_2: & \varphi_2 & = & 76^o41'17'' \\
 & \lambda_1 & = & 1^o08'42'' & & & \lambda_2 & = & 8^o52'18'' \\
 & s_{1N} & = & 13^o27'09'' & & & s_{2N} & = & 9^o53'12''
\end{array}
$$

Kann es einen Neupunkt geben, gibt es genau einen, gibt es mehr als einen? Bestimmen Sie die Koordinaten möglicher Neupunkte.

22. Ein sphärisches Dreieck ist durch die Seite $a = 54°$, den gegenüberliegenden Winkel $\alpha = 61°$ und eine zweite Seite $b = 65°$ gegeben.

    Kann in einem solchen Dreieck der Winkel β, welcher der Seite b gegenüber liegt, größer als 90° sein? Begründen sie bitte ihre Antwort (ja/nein) durch schlüssige Rechnung.

23. Ein sphärisches Dreieck auf einer Kugel mit dem Radius $R = 6366.2\,km$ ist durch die zwei Winkel $\alpha = 54.5°$ und $\beta = 64.5°$ und die dem Winkel α gegenüberliegende Seite $a = 6731\,km$ gegeben.

    Kann in einem solchen Dreieck die Seite b, welche dem Winkel β gegenüber liegt, größer als $10000\,km$ sein? Begründen sie bitte ihre Antwort (ja/nein) durch schlüssige Rechnung.

24. Auf einer Kugel mit dem Radius $R = 6370km$ sind die geographischen Koordinaten der Punkte P_1 und P_2 gegeben. Zu einem Neupunkt P_3 kennt man die sphärische Distanz $s_{13} = 10500km$ und das Azimut $\alpha_{23} = 31^o24'12''$. Man diskutiere die Anzahl der möglichen Lösungen und berechne für gültige Neupunkte die geographischen Koordinaten und weiters die Fläche des sphärischen Dreieckes $P_1 - P_2 - P_3$.

P_1:	φ_1	$=$	$-48^o32'03''$	P_2:	φ_2	$=$	$-7^o15'46''$
	λ_1	$=$	$15^o43'48''$		λ_2	$=$	$-30^o26'04''$

25. Auf einer Kugel mit dem Radius R=6370km sind die geographischen Koordinaten der Punkte P_1, P_2 und P_3 gegeben. Das sphärische Dreieck $P_1 - P_2 - P_3$ wird durch seine „Höhe" h_3 (= Großkreisstück durch P_3 und orthogonal auf die Seite $P_1 - P_2$ des Dreiecks) in zwei Teildreiecke zerlegt, deren Flächen in $[km^2]$ anzugeben sind.
Außerdem beantworte man anhand dieses Beispiels rechnerisch die Frage, ob sich auch beim sphärischen Dreieck die drei „Höhen" in einem Höhenschnittpunkt schneiden.

P_1:	φ_1	$=$	$10^o32'03''$	P_2:	φ_2	$=$	$25^o15'46''$
	λ_1	$=$	$15^o43'48''$		λ_2	$=$	$89^o26'04''$
P_3:	φ_3	$=$	$61^o32'03''$				
	λ_3	$=$	$43^o43'48''$				

26. Auf einer Kugel kennt man geogr. Koordinaten der Punkte P_1 und P_2:

P_1:	φ_1	$=$	$-10^o14'12.48''$	P_2:	φ_2	$=$	$23^o16'52.91''$
	λ_1	$=$	$15^o04'37.21''$		λ_2	$=$	$51^o20'11.68''$;

zur Bestimmung eines Neupunktes P_N wurden folgende Azimute gemessen: $\alpha_{2N} = 304^o25'16.3''$, $\alpha_{N1} = 150^o32'25.8''$, $\alpha_{N2} = 95^o40'47.5''$.

Gibt es einen Neupunkt, gibt es mehr als einen? Bestimmen Sie die Koordinaten aller möglichen Neupunkte.

27. Auszugehen ist von einem sphärischen Dreieck auf der Kugel mit dem Radius $R = 6370km$. Das Dreieck ABC (im Uhrzeigersinn!) besitzt eine Fläche von $70821km^2$, einen Winkel $\alpha = 25.5^o$ in A und einen Winkel $\beta = 68.3^o$ in B.

    (a) Man berechne die Koordinaten der Eckpunkte, wobei davon auszugehen ist, daß $\varphi_A = \lambda_A = 0^o$ gilt und daß B auf dem Äquator liegt.

    (b) Ist es möglich, das Dreieck zu einem „sphärischen Rechteck" ABCD (ebenfalls im Uhrzeigersinn!) zu ergänzen, wenn $\delta = 70.5^o$ (Winkel in D) gilt, und die Länge der sphärischen Rechtecksseite s_{AD} $650km$ beträgt? Wenn ja, gebe man die Koordinaten von D an (eventuelle Mehrfachlösungen sind zu berücksichtigen).

(c) Man bestimme den Schnittpunkt der „Diagonalen“ aller möglichen Rechtecke. Hat b) keine Lösung, beschreibe man den Rechenvorgang formell.

28. Ausgehend von der Basis P_1-P_2 sind die nachfolgenden „Schnittaufgaben“ a)-d) zur Bestimmung von P_N auf ihre Lösungsvielfalt hin zu untersuchen. Es ist anzugeben, wieviel gültige Neupunkte (keiner, einer, zwei oder mehr) sich aus den angegebenen Bestimmungsgrößen berechnen lassen. Im folgenden werden mit s_{ij} Strecken, mit t_{ij} Azimute und mit r_{ij} unorientierte Richtungen zwischen P_i und P_j als Meßgrößen angegeben. Die Antworten sind rechnerisch zu begründen, wobei den Berechnungen ein Erdradius mit R=6370 km zugrunde zu legen ist.

$$\begin{array}{llcrlllcr} P_1: & \varphi_1 & = & -7^o30'00'' & \qquad & P_2: & \varphi_2 & = & 15^o38'35'' \\ & \lambda_1 & = & 5^o26'04'' & & & \lambda_2 & = & -9^o08'56'' \end{array}$$

(a) $s_{1N} = 1\,510\,234$ m, $s_{2N} = 1\,340\,549$ m;

(b) $t_{1N} = 275^o34'56''$, $s_{2N} = 2\,543\,221$ m;

(c) $s_{1N} = 1\,987\,052$ m, $r_{n1} = 320^o17'51''$, $r_{n2} = 64^o17'15''$;

(d) $t_{2N} = 330^o05'24''$, $r_{n1} = 20^o26'11''$, $r_{n2} = 132^o45'03''$.

29. Ein Schiff ist im Atlantik zwischen den Inseln A (φ_A=2°28′, λ_A=−30°12′) und B (φ_B=−3°46′, λ_B=−32°27′) entlang einer Orthodrome unterwegs. Es überquert in P_1 den Längenkreis mit λ_1=−30°30′ und in P_2 den Breitenkreis mit $\varphi_2 = -2°45'$. Man berechne die sphärische Distanz zwischen P_1 und P_2 in $[m]$ auf Basis einer Kugel mit R=6370 km.

30. Auf einer Kugel startet man ausgehend vom Punkt P_1 mit φ_1=−19°15′23″ und λ_1=4°45′30″ unter einem Azimut α_{12}=347°14′19″ und schreitet entlang eines Großkreises solange voran, bis in einem Punkt P_2 das Azimut um 4°45′ kleiner geworden ist. Man hinterfrage die Lösungsmannigfaltigkeit (keine, eine, zwei Lösungen) für den Punkt P_2 und berechne gegebenenfalls alle Lösungen von dessen Koodinaten φ_2 und λ_2.

31. Ausgehend vom Hafen von Primošten ($\varphi = 43^o41'01''$, $\lambda = 15^o56'58''$) südlich von Šibenik ist eine Adriaüberquerung zur Marina ($\varphi = 43^o41'01''$, $\lambda = 13^o30'5''$) nördlich von Ancona geplant. Bei der Routenvorbereitung stehen zwei Varianten zur Auswahl:

    (a) entlang der Orthodrome (geodätische Linie als kürzeste Verbindung);
    (b) entlang der Loxodrome (Kurve konstanten Azimuts).

    Für ein Kugelmodell mit dem Radius $R = 6379\ km$ berechne man:

    (a) die Differenz zwischen Orthodrome (Großkreis) und Loxodrome (Parallel);
    (b) das Azimut zu Beginn der Fahrt entlang der Orthodrome;
    (c) den maximalen Unterschied in Breite zwischen Orthodrome und Loxodrome.

32. Gegeben sind die folgenden Punkte auf einer Kugel mit Radius R=6370 km:

	φ	λ
A	$0°00'$	$-10°03'$
B	$15°42'$	$-10°03'$
C	$0°00'$	$22°54'$
D	$-30°15'$	$22°54'$
E	$-30°15'$	$-10°03'$

    Man betrachte auf der Kugeloberfläche die kürzesten Verbindungen zwischen den Punkten in allen Kombinationen. Welche dieser Verbindungen stellen gleichzeitig eine Loxodrome dar? Man gebe für diese Fälle die kürzeste Verbindung in [km] an.

33. Ein Abenteurer überquert mit einem Schiff den Südatlantik entlang des achten Breitenkreises zwischen der Brasilianischen Küste in der Nähe von Pernambuco (λ = 34.5 W) und der Küste Angolas nördlich von Luanda (λ = 13.1 E). Theoretisch angenommen, die Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt 10 Knoten (1 Knoten = 1 Seemeile/Stunde, 1 Seemeile = 1.852 km); wie lange dauert seine Reise insgesamt und bei welcher geographischen Länge (bitte auch W od. E angeben) sichtet er die Insel Ascension, wenn er nach 5 Tagen daran vorbeifährt?

    Bemerkung: W u. E bei einer Längenangabe bedeutet westliche bzw. östliche Länge. Man belege die Antwort durch Rechnung (sphärische Approximation mit Kugelradius R = 6370 km).

34. Auf einer Kugel mit dem Radius $R = 6379\,km$ kennt man die geographischen Koordinaten (φ, λ) von Punkten A, B, C.

Für die Verbindung von A nach B einerseits und für jene von A nach C andererseits berechne man jeweils die kürzeste Entfernung auf der Kugeloberfläche, die entsprechende Entfernung entlang einer Loxodrome der Kugel und die direkte räumliche Distanz.

Sämtliche Entfernungsangaben sind in der Dimension [m] zu machen.

	φ	λ
A	$-5^o30'$	$4^o15'$
B	$-5^o30'$	$353^o36'$
C	$3^o12'$	$4^o15'$

35. Herr Gerald M. ankert mit seiner Yacht in einer Bucht ($\varphi = 43°19'$, $\lambda = 15°57'$), CocaCola in der linken Hand, Cappuccino in der rechten Hand. Um 16:00 beschließt Herr M., zu einer Marina aufzubrechen, und zwar entlang einer Loxodrome und mit einer Geschwindigkeit von 5 Knoten (1 Knoten = 1 Seemeile/Stunde, 1 Seemeile = 1.852 km). Ein möglicher Yachthafen liegt exakt nördlich der Bucht ($\varphi = 43°41'$), ein anderer liegt exakt östlich ($\lambda = 16°22'$).

Welche Marina (keine, die nördliche, die östliche, od. beide) kann Herr M. vor Einbruch der Dunkelheit (20:00) erreichen? Ändert sich etwas an der Situation (ja/nein), wenn sich Herr M. entschließt, eine Orthodrome als Kurslinie zu wählen. Man belege die Antworten durch Rechnung (sphärische Approximation mit Kugelradius R = 6379 km).

36. Die Neffen von Donald Duck, Tick, Trick und Track, starten bei einer Speedbootregatta an der Küste Ecuadors, fahren exakten Westkurs entlang der gesamten Trajektorie, wenden vor den Galapagos Inseln und kehren auf exaktem Ostkurs (wiederum entlang der gesamten Trajektorie) zum Ausgangsort zurück. Alle drei sind mit der gleichen Durchschnittsgeschwindigkeit unterwegs, starten zur gleichen Zeit am gleichen Meridian ($\lambda_E = 81°$ W), wobei Tick am Äquator startet, Trick bei einer Breite $\varphi = 1°$ N und Track bei einer Breite $\varphi = 2°$ S, und alle drei wenden auch am gleichen Meridian ($\lambda_G = 89°$ W).

Überqueren die drei Neffen zur gleichen Zeit den Zielmeridian? Wenn nein, wer ist am schnellsten und bei welcher Länge (auf Sekunden genau!) müssten die anderen beiden wenden, um die schnellste Zeit zu erreichen! Man belege die Antworten bitte durch Rechnung auf Basis einer sphärischen Approximation der Erde.

Bemerkung: W bei einer Längenangabe bedeutet westliche Länge; N u. S bei einer Breitenangabe bedeuten nördliche bzw. südliche Breite.

37. Die Koala-Brüder Frank und Basta machen ein Flugzeugrennen über Australien und Neuseeland. Frank fliegt in einer Höhe von 20000 ft mit einer konstanten Geschwindigkeit von 850 km/h und Basta ist in einer Höhe von 18000 ft mit einer konstanten Geschwindigkeit von 820 km/h unterwegs. Beide überfliegen zum selben Zeitpunkt Sydney ($\varphi_{SY} = 33°55'\,S, \lambda_{SY} = 151°10'\,E$) und steuern Auckland an ($\varphi_{AL} = 36°55'\,S, \lambda_{AL} = 174°47'\,E$). Frank fliegt im ersten Teil seiner Trajektorie exakten Südkurs und im zweiten Teil exakten Ostkurs. Basta fliegt genau umgekehrt zunächst exakten Ostkurs und dann exakten Südkurs.

    Wer von beiden überfliegt zuerst Auckland und wieviel Zeit verstreicht zum Überflug des Zweitplatzierten der Brüder? Man belege die Antworten auf Basis einer sphärischen Approximation der Erde mit einem Erdradius von $R = 6370\,km$.

    Bemerkung: $1\,ft = 0.3048\,m$; S bei einer Breitenangabe bedeutet südliche Breite; E bei einer Längenangabe bedeutet östliche Länge.

38. Die zwei Freunde Chip und Chap planen mit ihren Motoryachten ein Rennen auf offener See und zwar auf einem Breitenkreis ($\varphi = 43°38'$). Chip startet von einer Bucht ($\lambda = 15°58'$) und fährt mit 5.4 Knoten, und Chap startet gleichzeitig $23''$ östlicher und fährt mit nur 5.1 Knoten. Beide fahren exakten Ostkurs (ein Knoten entspricht 1.852 km/h).
    Man beantworte bitte folgende Fragen (Rechnung basierend auf sphärischer Approximation mit Kugelradius R = 6370 km):

    (a) Bei welcher Länge und nach welcher Zeit überholt der Chip den Chap?
    (b) Welche Geschwindigkeit in Knoten muß Chap wählen, damit er gleichzeitig mit Chip im Punkt P_1 mit der Länge $\lambda_1 = 16°3'$ ankommt?

39. Zwischen den Punkten P_1 und P_2 der Kugel mit dem Radius R=6371km ist ein Kurs als Orthodrome, Loxodrome sowie als geodätische Linie mit 4 äquidistanten Zwischenpunkten angenähert durch Loxodromenstückchen geplant. Man gebe für alle drei Varianten die Länge des zurückzulegenden Weges in [km] an.

$$P_1: \quad \varphi_1 = 36^o \qquad P_2: \quad \varphi_2 = 22^o$$
$$\lambda_1 = 36^o \qquad \lambda_2 = 92^o$$

Länge einer Loxodrome zwischen zwei Punkten P_i u. P_j:

$$s_{ij} = R\frac{\Delta\varphi_{ij}}{\cos\alpha} \qquad mit \quad \alpha \quad aus \quad \tan\alpha = \frac{\Delta\lambda_{ij}}{\ln\left(\frac{\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_j}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_i}{2})}\right)} \quad .$$