

Théorie de l'Homologie

Cours de Julien MARCHÉ
Notes de Jules BESSON

Novembre et décembre 2022

Introduction

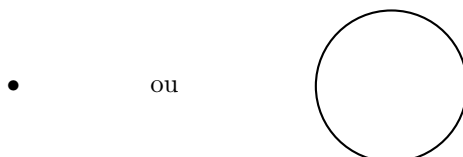
L'algèbre homologique nous dote de nombreux outils très sophistiqués et pointus, mais aussi très théoriques. Ce cours se concentrera sur l'étude de variétés bien souvent (mais pas toujours) de dimension inférieure à 3, de façon à avoir une bonne représentation mentale de ces objets.

Les variétés étudiées seront pour la grande majorité différentiables compactes, connexes et orientables, bien que ce dernier point soit plus optionnel.

Dimension 1

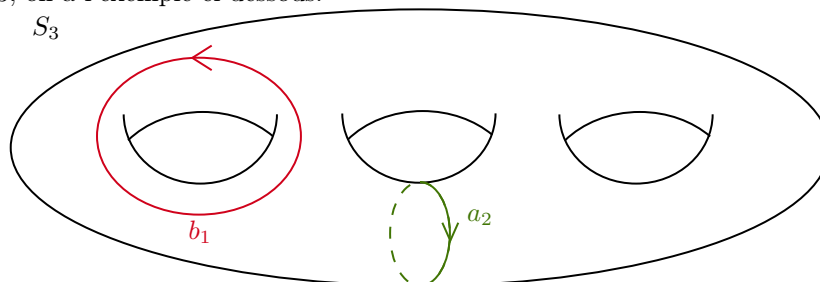
En dimension 1, il y a deux homologies singulières possibles :

- L'homologie du point $\{*\}$ donnée par $H_0(\{*\}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ et pour $n > 0$, $H_n(\{*\}; \mathbb{Z}) = 0$. C'est l'homologie des espaces contractiles ou simplement connexes.
- L'homologie du cercle \mathbb{S}^1 donnée par $H_0(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) = H_1(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ et pour $n > 1$, $H_n(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) = 0$.



Dimension 2

Toute variété de dimension 2 compacte, orientable et connexe est diffeomorphe à S_g ou $g \geq 0$ est appelé "genre". Pour $g = 3$, on a l'exemple ci dessous.



On a alors

- $H_0(S_g; \mathbb{Z}) = H_2(S_g; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.
- $H_1(S_g; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g} = \mathbb{Z}a_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}a_g \oplus \mathbb{Z}b_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}b_g$.
- Pour $n > 2$, $H_n(S_g; \mathbb{Z}) = 0$.

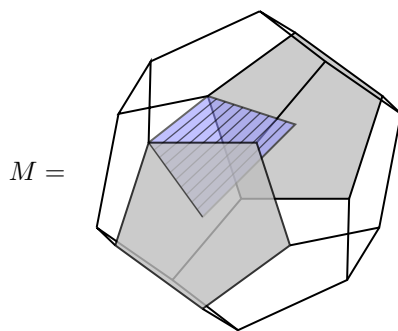
Remarque: $H_1(S_g; \mathbb{Z})$ est muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée.

Géométriquement, elle traduit l'intersection :
$$\begin{cases} a_i \cdot b_j = \delta_j^i \\ a_i \cdot a_j = 0 \\ b_i \cdot b_j = 0 \end{cases}$$

Dimension 3

La classification est nettement plus compliquée, on a par exemple la variété de Seifert-Weber, construite à partir du dodécaèdre régulier (plein) ; on pose pour $x \in \partial D$, $x \sim x'$ où x' est le point en face de x après un dixième de tour.

On pose alors $M = D/\sim$.



On a alors

- $H_0(M; \mathbb{Z}) = H_3(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.
- $H_1(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{b_1(M)} \oplus F$, avec
 - $b_1(M)$ le premier nombre de BETTI.
 - F la torsion de H_1 , groupe abélien fini.
- $H_2(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{b_2(M)}$.
- Pour $k > 3$, $H_k(M; \mathbb{Z}) = 0$.

La forme d'intersection est plus subtile, on l'appelle "forme d'enlacement". Les cycles peuvent à la fois être interprétés de la manière classique, mais dans ce cas ils sont triviaux. On remarque que les traits tracés dans la surface bleue sont des cycles également.

Dimension 4

Ce cas sera peu étudié, mais dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, on pose $M = \{[X_0, X_1, X_2, X_3] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \mid X_0^4 + X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 = 0\}$, appelée surface $K3$. M est compacte orientée et connexe.

On a alors

- $H_0(M; \mathbb{Z}) = H_4(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.
- $H_1(M; \mathbb{Z}) = H_3(M; \mathbb{Z}) = 0$.
- $H_2(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{22}$ est muni d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée qui correspond intuitivement à l'intersection algébrique.

Table des matières

1	Rappels d'homologie singulière	1
I	Résultats d'homologie singulière	1
II	Invariance par homotopie	3

Chapitre 1

Rappels d'homologie singulière

Pour les définitions relatives à l'homologie et l'homologie singulière en particulier, consulter [1].

On notera que pour $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ la décomposition en composante connexes par arcs de X , on a

$$C_{\bullet}(X; M) \simeq \bigoplus_{i \in I} C_{\bullet}(X_i; M)$$

Cela nous donne

$$H_{\bullet}(X; M) \simeq \bigoplus_{i \in I} H_{\bullet}(X_i; M)$$

Il est donc naturel d'étudier des espaces connexes par arcs, c'est suffisant pour qualifier tous les espaces topologiques.

I Résultats d'homologie singulière

Le singleton

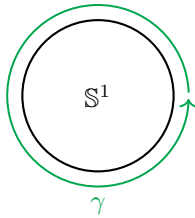
Pour $X = \{*\}$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\partial_n = (n+1)[2] \cdot *$, donc

- $C_n(\{*\}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ si n est pair.
- $C_n(\{*\}; \mathbb{Z}) = 0$ si n est impair.

Ainsi, on a le résultat suivant :

- $H_0(\{*\}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.
- Pour $n > 0$, $H_n(\{*\}; \mathbb{Z}) = 0$.

Le cercle



On pose ici $X = \mathbb{S}^1$. On a rapidement que $H_0(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, avec comme générateur [1] par exemple.

$C_1(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z})$ est le groupe abélien libre engendré par les segents du cercle, $Z_1(X; \mathbb{Z})$ est le groupe abélien des lacets de \mathbb{S}^1 . On remarque cependant qu'on a un isomorphisme homotopique entre $\pi_1(\mathbb{S}^1, z)$ et $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ pour tout z dans le cercle, et que à un bord près, $\alpha * \beta = \alpha + \beta$ pour $\alpha, \beta \in \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$.

On conclut donc que $H_1(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) \simeq \text{Ab}(\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)) = \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) = \langle \gamma \rangle \simeq \mathbb{Z}$.

De manière générale, si X est connexe par arcs, le théorème de HUREWICZ nous donne un isomorphisme de groupes $\text{Ab}(\pi_1(X, *)) \simeq H_1(X; \mathbb{Z})$.

Par ailleurs, choisir un générateur de \mathbb{S}^1 c'est l'orienter, et de manière générale, choisir un générateur de $H_n(X; \mathbb{Z})$ pour X compacte connexe de dimension n , c'est l'orienter.

Homologie relative

On a une suite exacte courte de complexes

$$0 \longrightarrow C_\bullet(A; M) \longrightarrow C_\bullet(X; M) \longrightarrow C_\bullet(X, A; M) \longrightarrow 0$$

qui induit une suite exacte longue

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(A; M) & \longrightarrow & H_n(X; M) & \longrightarrow & H_n(X, A; M) & & \\ & & & & \searrow \delta_n & & \\ & \hookrightarrow & H_{n-1}(A; M) & \longrightarrow & H_{n-1}(X; M) & \longrightarrow & H_{n-1}(X, A; M) \end{array}$$

Homologie du disque relative au cercle

En appliquant cela à la paire $(\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1)$, comme \mathbb{D}^2 est contractile, $H_0(\mathbb{D}^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ et $H_n(\mathbb{D}^2; \mathbb{Z}) = 0$ pour $n > 0$. Cela nous donne donc pour $n > 1$ la suite exacte

$$0 \longrightarrow H_n(\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-1}(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

Soit $H_n(\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) \simeq H_{n-1}(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z})$. On a également la suite exacte

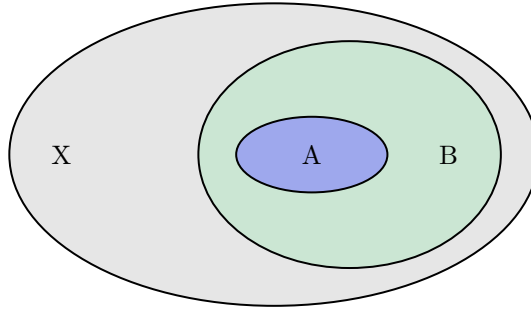
$$0 \longrightarrow H_1(\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_0(\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

On en déduit $H_0(\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) = 0$ et $H_1(\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) = 0$. Cela nous donne :

- $H_2(\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$
- $H_n(\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) = 0$ si $n \neq 2$.

Embranchements d'homologies relatives

Soit $A \subset B \subset X$, on a 3 paires d'espaces (B, A) , (X, A) et (X, B) .



Cela nous donne une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow C_\bullet(B, A; M) \longrightarrow C_\bullet(X, A; M) \longrightarrow C_\bullet(X, B; M) \longrightarrow 0$$

qui induit une suite exacte longue

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(B, A; M) & \longrightarrow & H_n(X, A; M) & \longrightarrow & H_n(X, B; M) & & \\ & & & & \searrow \delta_n & & \\ & \hookrightarrow & H_{n-1}(B, A; M) & \longrightarrow & H_{n-1}(X, A; M) & \longrightarrow & H_{n-1}(X, B; M) \end{array}$$

Homologie réduite

Le complexe réduit $\tilde{H}_\bullet(X; M)$ obtenue à partir de complexe $C_\bullet(X; M)$ augmenté en -1 via

$$\begin{array}{ccc} \epsilon : C_0(X; M) & \longrightarrow & M \\ x & \longmapsto & 1 \end{array}$$

est quasiment isomorphe au complexe réduit $C_\bullet(X, \{*\}; M)$.

En effet, pour $n > 0$, on a $\tilde{H}_n(X; M) = H_n(X; M)$, et la suite exacte longue pour l'homologie résuite nous donne pour $n > 1$

$$0 \longrightarrow H_n(X; M) \longrightarrow H_n(X, \{*\}; M) \longrightarrow 0$$

Le résultat est donc valable dans ce cas.

Un peu plus bas, on a

$$0 \longrightarrow H_1(X; M) \longrightarrow H_1(X, \{*\}; M) \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\bar{i}_*} H_0(X; M) \longrightarrow H_0(X, \{*\}; M) \longrightarrow 0$$

et \bar{i}_* est injective, donc $H_1(X, \{*\}; M) \simeq H_1(X; M) \simeq \tilde{H}_1(X; M)$.

Pour l'isomorphisme en 0, on a une application surjective

$$\begin{array}{ccc} C_0(X; M) & \longrightarrow & \ker \epsilon \\ x & \longmapsto & x - * \end{array}$$

dont le noyau est $C_0(*; M)$, donc elle induit un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} C_0(X, \{*\}; M) & \longrightarrow & \ker \epsilon \\ [x] & \longmapsto & x - * \end{array}$$

En quotientant des deux côtés par $B_0(X; M)$, on obtient $H_0(X, \{*\}; M) \simeq \tilde{H}_0(X; M)$

II Invariance par homotopie

On va reprouver le théorème d'équivalence des définitions d'homotopie, en ayant une vision plus globale de la technique utilisée. Cette méthode nous donne également une explication à la convention de KOSZUL.

Première méthode

Tâchons de trouver une façon de passer de $\Delta_m \times \Delta_n$ à Δ_{m+n} en découpant le polyèdre $\Delta_m \times \Delta_n$ en sommes formelles de $m + n$ -simplexes.

Pour choisir les sommets à sélectionner, revenons sur le découpage opéré pour montrer l'équivalence entre les deux définitions d'homotopie.

Cette fois nous avons un découpage qui nous ammenait de $\Delta_m \times [0, 1] \simeq \Delta_m \times \Delta_1$ à Δ_{m+1} .

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & (e_i, 1) & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow (e_n, 1) \\ & & & & \uparrow & & \\ (e_0, 0) & \longrightarrow & (e_1, 0) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & (e_i, 0) \end{array}$$

DÉFINITION (*Chemin bicroissant*):

Un *chemin bicroissant* de $[l]$ vers $[m] \times [n]$ est la donnée d'une application $\gamma : [m+n] \longrightarrow [m] \times [n]$ telle que $\forall k \leq l$,

$$\pi_1 \circ \gamma(k+1) \geq \pi_1 \circ \gamma(k) \quad \text{et} \quad \pi_2 \circ \gamma(k+1) \geq \pi_2 \circ \gamma(k)$$

On dit qu'il est *strictement bicroissant* s'il est bicroissant et injectif.

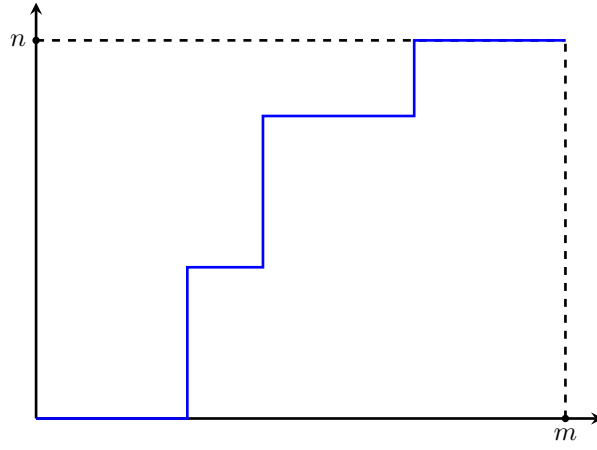
DÉFINITION-PROPOSITION (*Chemin complet*):

Soit $\gamma : [m+n] \longrightarrow [m] \times [n]$ un chemin bicroissant, alors γ est strictement bicroissant ssi $\gamma(k)$ et $\gamma(k+1)$ sont de distance au plus 1 pour la norme 1 et

- $\gamma(0) = (0, 0)$
- $\gamma(m+n) = (m, n)$

Dans ce cas, on dira que c'est un *chemin complet* de paramètres (m, n) , on note $\Gamma(m, n)$ l'ensemble de ces chemins.

Voici un exemple de chemin complet de paramètres $(5, 7)$.



DÉFINITION (*Longueur d'un chemin complet*):

Soit γ un chemin complet de paramètres (m, n) , On appelle *virage à droite* de γ , tout point $k \in [m+n]$ tel que $\gamma(k+1) - \gamma(k) = (1, 0)$ et $\gamma(k) - \gamma(k-1) = (0, 1)$ avec pour convention $\gamma(-1) = (0, -1)$ et $\gamma(m+n+1) = (m+1, n)$. On note $V^d(\gamma) = (v_0^d < \dots < v_r^d)$ l'ensemble ordonné de ses virages à droite.

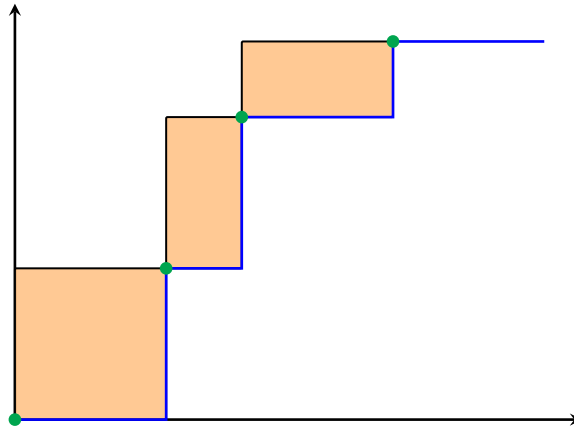
Pour $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, on pose $a(x, y) := xy$. On définit alors la *longueur* du chemin γ par

$$|\gamma| := \sum_{i=1}^r a(v_i^d - v_{i-1}^d)$$

Remarque: Nous aurions pu choisir de façon analogue les virages à gauche, cela revient d'ailleurs à considérer les virages à droite en inversant les rôles de m et n . Attention les deux conventions ne donnent pas les mêmes longueurs

On remarquera également que les virages à droite (ou à gauche) qualifient de façon minimaliste un chemin complet, la longueur traduit donc bien les mic-macs que peut faire le chemin ; plus le chemin est court plus le chemin part en diagonale, à l'inverse plus il est long, plus il va être carré (à exception près du chemin qui commencent par monter). On peut se convaincre que c'est une caractérisation utile et pas trop triviale des chemins, sans être d'une complexité monstrueuse.

Enfin, ci-dessous gît une explication géométrique de la longueur d'un chemin comme la somme des aires des rectangles au dessus de la courbe.



On a bien une généralisation de la méthode utilisée pour l'équivalence des définitions d'homotopie, car les chemins complets de paramètres $(n, 1)$ sont exactement les $\gamma_i = [(0, 0), \dots, (i, 0), (i, 1), \dots, (n, 1)]$. Ils étaient alors sommés avec le signe $(-1)^i$, or $i = |\gamma_i|$.

On peut alors généraliser ce résultat. Soit M un A -module à droite et N un A -module à gauche, on considère les complexes de chaînes $C_n(X, M)$ et $C_m(Y, N)$ (qui sont de toute évidence, par leur nature de module libre, des A -modules).

On peut alors poser

$$\begin{aligned} C_m(X; M) \times C_n(Y; N) &\longrightarrow C_{m+n}(X \times Y; M \otimes_A N) \\ (\sigma, \tau) &\longmapsto \sum_{\gamma \in \Gamma} (-1)^{|\gamma|} (\sigma, \tau) \circ \Delta[\gamma] \end{aligned}$$

Cette application est bilinéaire et induit ainsi

$$\phi_{m,n} : C_m(X; M) \otimes_A C_n(Y; N) \longrightarrow C_{m+n}(X \times Y; M \otimes_A N)$$

LEMME:

Soit A un anneau, X et Y deux espaces topologiques et n et m deux entiers, on a alors

$$\partial \circ \phi_{m,n}(\sigma \otimes \tau) = \phi_{m-1,n}(\partial\sigma \otimes \tau) + (-1)^m \phi_{n,m-1}(\sigma \otimes \partial\tau)$$

On comprend alors pourquoi la convention de KOSZUL est celle-ci. Cela nous donne un morphisme bien utile de complexes.

$$\Phi : C_\bullet(X; M) \otimes_A C_\bullet(Y; N) \longrightarrow C_\bullet(X \times Y; M \otimes_A N)$$

On peut montrer que c'est un quasi-isomorphisme. La formule de KÜNNETH nous donne alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{m+n=k} H_m(X; M) \otimes_A H_n(Y; N) \longrightarrow H_k(X \times Y; M \otimes_A N) \longrightarrow \bigoplus_{m+n=k-1} \text{Tor}^A(H_m(X; M), H_n(Y; N)) \longrightarrow 0$$

Cependant c'est une façon très compliquée de construire l'équivalence, une vision plus simple est donnée ci-dessous.

Construction du produit simplicial

Le travail reste de toute évidence sur un lien entre $\Delta_m \times \Delta_n$ et Δ_{m+n} . On remarque de façon assez évidente que Δ_k est contractile au sens topologique (et donc $\Delta_m \times \Delta_n$ aussi), il suffit de considérer une rétraction sur e_0 . On a en réserve le théorème suivant (assez important).

THÉORÈME:

Si X est un espace topologique contractile, alors son complexe réduit est contractile.

COROLLAIRE:

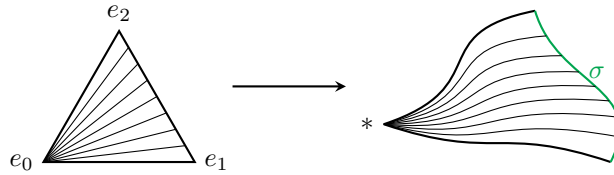
Si X est un espace topologique contractile, $\forall n > 0$, $H_n(X; M) = 0$ et $H_0(X; M) = M$

Preuve: Soit $F : X \times I \longrightarrow X$ continue qui vérifie $F(\star, 0) = \text{id}_X$ et $F(\star, 1) = \star$. On va maintenant construire à partir de $\sigma : \Delta_{n-1} \longrightarrow X$ une application $D\sigma : \Delta_n \longrightarrow X$ qui va se dériver "correctement", l'objectif est d'avoir $\text{id} = \partial D + D\partial$

On pose alors en 0, $D(1) = \star$ et pour $n \geq 0$, $D\sigma = F(\sigma d_0, p_0)$, soit

$$D\sigma \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i e_i \right) = F \left(\sigma \left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} e_i \right), \lambda_0 \right)$$

avec $\lambda_0 + \lambda = 1$. On l'appelle la *construction en cône*.



D s'étend de manière unique en un morphisme $D : \tilde{C}_{n-1}(X; M) \longrightarrow \tilde{C}_n(X; M)$. Il est rapide de calculer que

- $\epsilon D = \text{id}_M$.
- $d_0 D\sigma = \sigma$.
- Pour $i > 0$, $d_i D\sigma = Dd_{i-1}\sigma$.

Cela nous donne alors pour $n > 0$, $x \in C_{n-1}(X; M)$,

$$\partial(Dx) = d_0(Dx) + \sum_{i=1}^n (-1)^i d_i(Dx) = D(d_0x) - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j D(d_jx) = x - D(\partial x)$$

ainsi, $\text{id} = \partial D + D\partial$, ce qui conclut la preuve. □

On va maintenant pouvoir se construire une application bilinéaire

$$\otimes : C_m(X; M) \times C_n(Y; N) \longrightarrow C_{m+n}(X \times Y; M \otimes N)$$

ce *produit simplicial* sera en réalité le même que l'application $\phi_{m,n}$ définie plus tôt, mais afin de prouver le lemme sur la différentielle, il convient de le définir autrement.

DÉFINITION-PROPOSITION (*Produit simplicial*):

Il existe une application bilinéaire

$$\otimes : C_m(X; M) \times C_n(Y; N) \longrightarrow C_{m+n}(X \times Y; M \otimes N)$$

telle que :

- (i) Pour $x \in X, y \in Y, \sigma : \Delta_m \longrightarrow X, \tau : \Delta_n \longrightarrow Y$,
 - $\sigma \otimes y(v) = (\sigma(v), y)$.
 - $x \otimes \tau(w) = (x, \tau(w))$.
- (ii) (naturalité) Pour $f : X \longrightarrow X'$ et $g : Y \longrightarrow Y'$ continues, on a

$$(f \times g)_*(a \otimes b) = f_*(a) \otimes g_*(b)$$

- (iii) (formule au bords) $\partial(a \otimes b) = \partial a \otimes b + (-1)^{\deg a} a \otimes \partial b$.

Et deux telles applications seront égales à un bord près.

Preuve: Pour commencer, voici une affirmation : toute forme bilinéaire satisfaisant (ii) est définie par son action sur les application identité $\text{id}_k : \Delta_k \longrightarrow \Delta_k$.

En effet, il faut et suffit, pour σ et τ des applications continues de degrés m et n , de remarquer que $\sigma = \sigma_*(\text{id}_m)$ et $\tau = \tau_*(\text{id}_n)$. On a alors

$$\sigma \otimes \tau = \sigma_*(\text{id}_m) \otimes \tau_*(\text{id}_n) = (\sigma \times \tau)_*(\text{id}_m \otimes \text{id}_n)$$

La preuve est donc simplifiée à vérifier l'existence et l'unicité à un bord près d'une application vérifiant les points (i) et (iii) pour l'identité.

Pour ce faire, on va la construire par récurrence en utilisant la propriété (iii), cela nous assurera qu'une telle construction existe et est unique à un bord près.

- Au rang 0 c'est le produit cartésien (il suffit de calculer le bord (i) avec un chemin constant à gauche).
- Pour $m + n = 1$, la définition est donnée par (i).
- Si la construction a déjà été faite pour $m + n - 1$, on va reconstruire $\text{id}_m \otimes \text{id}_n$ grâce à son bord.
 $c := \partial \text{id}_m \otimes \text{id}_n + (-1)^m \text{id}_m \otimes \partial \text{id}_n \in C_{m+n-1}(\Delta_m \times \Delta_n; \mathbb{Z})$ est bien définie, on calcule alors son bord.

$$\partial c = \partial^2 \text{id}_m \otimes \text{id}_n + (-1)^{m-1} \partial \text{id}_m \otimes \partial \text{id}_n + (-1)^m \partial \text{id}_m \otimes \partial \text{id}_n + (-1)^m \text{id}_m \otimes \partial^2 \text{id}_n = 0$$

La chaîne c est donc un cycle, or $\Delta_m \times \Delta_n$ est contractile, donc son homologie est nulle pour $i > 0$, ce qui est notre cas.

Il existe donc $t \in C_{m+n}(\Delta_m \times \Delta_n; \mathbb{Z})$ tel que $\partial t = c$. On n'a qu'à poser alors $\text{id}_m \otimes \text{id}_n := t$ (unique à un bord près car les cycles sont les bords). \square

Les résultats de la sections sont toujours valables bien entendu.

Équivalence des définitions d'homotopie

On a maintenant assez d'outils pour prouver sans trop de peine l'équivalence, on rappelle le théorème.

THÉORÈME (*Équivalence topologique et homologique de l'homotopie*):

Soit (X, A) et (Y, B) deux paires d'espaces topologiques, munie de deux applications continue f et g entre eux et M et N deux groupes abéliens. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) f_* et g_* homotopes en tant que morphismes du complexe $C_\bullet(X, A; M)$ au complexe $C_\bullet(Y, B; N)$.
- (ii) f et g sont relativement homotopes, i.e. il existe $H : X \times I \longrightarrow Y$ continue avec
 - $H(\star, 0) = f$.
 - $H(\star, 1) = g$.
 - $H(A, \star) \subset B$.

Notation: Pour (X, A) et (Y, B) deux paires topologiques, on pose

$$(X, A) \times (Y, B) := (X \times Y, (A \times Y) \cup (X \times B))$$

LEMME:

Le produit simplicial $\otimes : C_m(X; M) \otimes C_n(Y; N) \longrightarrow C_{n+m}(X \times Y; M \otimes N)$ induit un autre produit simplicial $\otimes : C_m(X, A; M) \otimes C_n(Y, B; N) \longrightarrow C_{n+m}((X, A) \times (Y, B); M \otimes N)$ de manière naturelle.

Preuve: Déjà, pour $a \in C_m(X; M)$ et $b \in C_n(Y; N)$ tels que $\partial a \in C_{m-1}(A; M)$ et $\partial b \in C_{n-1}(B; N)$, on a

$$\partial(a \otimes b) = \partial a \otimes b + (-1)^m a \otimes \partial b \in C_{n+m}((X, A) \times (Y, B); M \otimes N)$$

donc le produit des cycles de (X, A) et de (Y, B) s'envoie bien sur les cycles de $(X, A) \times (Y, B)$. Il s'agit maintenant de vérifier que la classe d'équivalence de l'image ne change pas à un bord près de chaque côté.

$$(a + \partial a') \otimes (b + \partial b') = a \otimes b + \partial a' \otimes b + a \otimes \partial b' + \partial a' \otimes \partial b' = a \otimes b + \partial(a' \otimes b) \pm \partial(a \otimes b') + \partial(a' \otimes b') + c$$

où $c \in C_{n+m}((X, A) \times (Y, B); M \otimes N)$. □

Bibliographie

- [1] Jules BESSON. Théorie de l'homologie. Lien pdf, 2022.
- [2] Raoul BOTT and Loring W. TU. *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1982.
- [3] Glen E. BREDON. *Topology and Geometry*. Springer-Verlag, 1993.
- [4] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001.