

Théorie de l'Homologie

Cours de Baptiste ROGNERUD
Notes de Jules BESSON

Septembre et octobre 2022

Résumé

Si l'on considère un objet X , par exemple un espace topologique, un groupe ou encore une algèbre, il est possible de lui associer une suite d'objets algébriques H_0, H_1, \dots qui peuvent être des groupes abéliens des modules sur des anneaux \dots , qui "encodent" les propriétés de X .

L'objet de ce cours est de construire un cadre général à cette théorie.

Table des matières

1	Introduction au langage des catégories	1
I	Catégories et foncteurs	1
2	Propriétés universelles	7
I	Objets initial et terminal	7
II	Foncteurs représentables	8
III	Foncteurs adjoints	10
IV	Limites	12
3	Produits tensoriels	17
I	Création du produit tensoriel	17
4	Catégories additives	21
I	Catégories pré-additives et additives	21
II	Complexes de chaînes dans les catégories additives	23
III	Homotopie	27
5	Catégories abéliennes	31
I	Définitions et propriétés	31
II	Complexes de chaînes dans les catégories abéliennes	35
III	Objets projectifs et injectif	38
IV	Résolutions et foncteurs dérivés	41
6	Les foncteurs Ext et Tor	47
I	Bifoncteurs dérivants	47
II	Le foncteur Ext	48
III	Le foncteur Tor	49
IV	Le théorème des coefficients universels	50
7	Homologie singulière	53
I	Complétion de l'homologie simpliciale	53
II	Homologie relative	53
A	Liens entre un anneau et sa catégorie des modules	55
I	Groupe de Picard	55
B	Dimensions dans les catégories abéliennes.	57
I	Dimension projective	57
II	Dimension globale	57
III	Différents résultats	57

Chapitre 1

Introduction au langage des catégories

La théorie des catégories a été introduite pour la première fois par HEILENBERG et MAC LANE en 1945. Son but initial est de donner un cadre à la notion d'isomorphisme naturel : Si l'on considère un espace vectoriel V , on sait exhiber un isomorphisme naturel entre V et V^{**} , or ce n'est pas le cas entre V et V^* .

I Catégories et foncteurs

DÉFINITION (Catégorie):

Une *catégorie* \mathcal{C} est la donnée d'une classe d'objets notée $\text{Ob } \mathcal{C}$ et d'une classe de morphismes ou flèches $\text{Hom } \mathcal{C}$, munies des opérations suivantes :

- dom (dite *domaine* ou *source*) et cod (dite *codomaine* ou *extrémité*) associant à tout morphisme f $\text{dom } f \in \text{Ob } \mathcal{C}$ et $\text{cod } f \in \text{Ob } \mathcal{C}$. Si $a = \text{dom } f$ et $b = \text{cod } f$, cela induit les notations $f : a \longrightarrow b$ et $a \xrightarrow{f} b$. On notera $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b)$ la classe de ces flèches.
- \circ (dite *composition*) sur les morphismes compatibles. C'est à dire qui à tous morphismes $a \xrightarrow{f} b$ et $b \xrightarrow{g} c$, associe un morphisme

$$a \xrightarrow{f \circ g} c$$

- id (dite *identité*) qui à tout objet a associe un morphisme

$$a \xrightarrow{\text{id}_a} a$$

Ces opérations doivent de surcroît vérifier ces deux propriétés :

- (associativité) pour tous morphismes $a \xrightarrow{f} b$, $b \xrightarrow{g} c$, $c \xrightarrow{h} d$,

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

- pour tout morphisme $a \xrightarrow{f} b$,

$$f \circ \text{id}_a = f = \text{id}_b \circ f$$

Exemple (Catégories concrètes):

- La catégorie **Set** où les objets sont les ensembles et les morphismes les applications.
- La catégorie **Top** où les objets sont les espaces topologiques et les morphismes les applications continues.
- La catégorie **Grp** où les objets sont les groupes et les morphismes les morphismes de groupes.
- La catégorie **Ring** où les objets sont les anneaux et les morphismes les morphismes d'anneaux.
- Pour un corps \mathbb{K} fixé, la catégorie **Vect** $_{\mathbb{K}}$ où les objets sont les \mathbb{K} -espaces vectoriels et les morphismes les applications linéaires.

Remarque: Le choix de classe se justifie par la limite de la théorie des ensemble qui vient assez rapidement, par exemple, il n'existe pas d'ensemble des ensembles, on ne pourrait donc pas créer la catégorie qui semble la plus naturelle. Ceci motive également la définition suivante.

DÉFINITION (*Catégorie petite, localement petite, finie*):

Une *petite catégorie* est une catégorie \mathcal{C} dont les classes $\text{Ob } \mathcal{C}$ et $\text{Hom } \mathcal{C}$ sont petites, c'est à dire ce sont des ensembles.

Une catégorie est *localement petite* si pour tous objets a et b de \mathcal{C} , la classe $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b)$ est petite.

Une catégorie est *finie* si $\text{Ob } \mathcal{C}$ et $\text{Hom } \mathcal{C}$ sont des ensembles finis.

Exemple (Catégories abstraites):

- Pour \mathbb{K} un corps fixé, la catégorie $\mathbf{Mat}_{\mathbb{K}}$ où $\text{Ob } \mathbf{Mat}_{\mathbb{K}} = \mathbb{N}$ et pour $n, m \in \mathbb{N}$, $\text{Hom}(n, m) = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
- Pour G un groupe, la catégorie \mathbf{BG} aussi notée \bullet_G où $\text{Ob } \mathbf{BG} = G$, et ses flèches les translations gauche G .
- À P un ensemble ordonné, on associe la catégorie \hat{P} dont les objets sont les éléments de P et l'éventuelle flèche de $x \in P$ vers $y \in P$ existe si $x \preceq y$.
- La catégorie \mathbf{Htpy} dont les objets sont les espaces topologiques et les flèches les applications continues quotientées par la relation d'homotopie.

Pour finir voici quelques constructions qui permettent de créer de nouvelles catégories aisément.

DÉFINITION (*Catégorie opposée*):

Soit \mathcal{C} une catégorie, sa catégorie *opposée*, ou *duale*, notée \mathcal{C}^{op} est la catégorie telle que $\text{Ob } \mathcal{C}^{\text{op}} = \text{Ob } \mathcal{C}$ et pour tous objets a, b de \mathcal{C} , $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(a, b) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(b, a)$, avec la composition induite.

Remarque: Très souvent \mathcal{C}^{op} est totalement différente de \mathcal{C} , sauf pour \mathbf{Grp} , \mathbf{Vect} et les ensembles ordonnés. Par exemple $\mathbf{Set}^{\text{op}} = ?$

DÉFINITION (*Produit de catégories*):

Soit \mathcal{C}, \mathcal{D} deux catégories, on pose la *catégorie produit* $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ comme la catégorie dont

- les objets sont les couples (c, d) avec $c \in \text{Ob } \mathcal{C}$ et $d \in \text{Ob } \mathcal{D}$.
- les morphismes sont les couples (f, g) avec $f \in \text{Hom } \mathcal{C}$ et $g \in \text{Hom } \mathcal{D}$, de domaines $(\text{dom } f, \text{dom } g)$ et de codomaines $(\text{cod } f, \text{cod } g)$.

DÉFINITION:

Un morphisme $a \xrightarrow{f} b$ est *injectif* s'il existe $b \xrightarrow{g} a$ telle que $g \circ f = \text{id}_a$, il est *surjectif* s'il vérifie le dual de cette propriété. Un *isomorphisme* est un morphisme à la fois injectif et surjectif.

Un *monomorphisme* est un morphisme $a \xrightarrow{f} b$ tel que pour tout g, h compatibles, $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$, on note cela $f : a \rightarrow b$

Un *épimorphisme* est un monomorphisme pour la catégorie duale. On le notera $f : a \rightarrow b$.

Remarque: Dans la catégorie \mathbf{Set} , les monomorphismes et les morphismes injectifs sont les mêmes, de même pour les épimorphismes et morphismes surjectifs. Cependant dans la catégorie \mathbf{Ring} , en considérant l'injection $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$, cela n'est plus vrai. En particulier $\text{mono} \neq \text{epi} = \text{iso}$.

DÉFINITION (*Foncteur*):

Un *foncteur covariant* F entre deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} est une flèche de $\text{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

Un *foncteur contravariant* F entre deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} est une flèche de $\text{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathcal{D})$.

On notera $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ ou $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ les foncteurs de \mathcal{C} vers \mathcal{D} .

En d'autres termes un foncteur est la donnée

- pour chaque objet c de \mathcal{C} , d'un objet $F(c)$ de \mathcal{D}
- pour chaque flèche $a \xrightarrow{f} b$ de \mathcal{C} , d'une flèche $F(a) \xrightarrow{F[f]} F(b)$ de \mathcal{D} .

tel que

- pour toutes flèches $a \xrightarrow{f} b$, $b \xrightarrow{g} c$ de \mathcal{C} ,

$$F[f \circ g] = F[f] \circ F[g]$$

- pour tout objet a de \mathcal{C} ,

$$F[\text{id}_a] = \text{id}_{F(a)}$$

Cela nous donne le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f \circ g & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 a & \xrightarrow{f} & b & \xrightarrow{g} & c \\
 F \downarrow & & F \downarrow & & F \downarrow \\
 F(a) & \xrightarrow{F[f]} & F(b) & \xrightarrow{F[g]} & F(c) \\
 & \nwarrow & & \nearrow & \\
 & & F[f \circ g] & &
 \end{array}$$

Remarque: Bien entendu, les foncteurs sont munis d'une composition, si on a deux foncteurs $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$, pour a un objet de \mathcal{C} et f une flèche de \mathcal{C} ,

$$G \circ F(a) = G(F(a)) \quad \text{et} \quad G \circ F[f] = G[F[f]]$$

Le neutre de cette composition est bien évidemment $\text{id}_{\mathcal{C}}$ opérant trivialement sur les éléments de \mathcal{C} . Comme dit précédemment, **Cat** est bien une catégorie.

Exemple:

- Les *foncteurs d'oubli* par exemple les injection **Grp** \hookrightarrow **Set**, **Top** \hookrightarrow **Set**, **Ring** \hookrightarrow **Ab**. On a même un diagramme commutatif de ces foncteurs ci dessous.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{Ring} & \longrightarrow & \mathbf{Ab} & \longrightarrow & \mathbf{Grp} \\
 & & & \searrow & \downarrow \\
 & & & & \mathbf{Set}
 \end{array}$$

Mais également des foncteurs d'oubli moins brutaux, comme la passage des algèbres associatives aux algèbres de Lie, **Ass** \hookrightarrow **Lie** avec pour crochet de Lie, le commutateur.

- Le *foncteur libre* $F : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ qui à un ensemble, associe son groupe abélien libre.

$$X \longmapsto \mathbb{Z}^{(X)}$$
- Si \mathcal{C} est localement petite, il y a pour chaque objet C le *foncteur de Yoneda* associé

$$\begin{array}{rcl}
 \mathbf{y}_C = \text{Hom}(_, C) : & \mathcal{C}^{\text{op}} & \longrightarrow \mathbf{Set} \\
 d & \longmapsto & \text{Hom}(d, C) \\
 f & \longmapsto & [g \mapsto g \circ f]
 \end{array}$$

Il joue un rôle central en théorie des catégories et sera étudié plus en détail.

DÉFINITION:

Soit $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un foncteur entre deux catégories.

- (i) F est *fidèle* si pour toute paire d'objets a, b de \mathcal{C} , l'application

$$F : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(a), F(b)) \quad \text{est injective.}$$

$$f \longmapsto F[f]$$
- (ii) F est *plein* si ces mêmes applications sont surjectives.
- (iii) F est *pleinement fidèle* s'il est plein et fidèle.
- (iv) F est *essentiellement surjectif* si pour tout objet d de \mathcal{D} , il existe un objet c de \mathcal{C} et un isomorphisme entre $F(c)$ et d dans \mathcal{D} .

Remarque: La théorie des catégories cherche à généraliser, et l'on voit ici qu'il faut adapter les définitions à isomorphisme près, pour éviter d'avoir des structures trop rigides.

DÉFINITION (Sous-catégories):

Une *sous-catégorie* de \mathcal{C} est la donnée d'une catégorie et d'un foncteur $\mathcal{C} \xrightarrow{J} \mathcal{D}$ fidèle.

Si ce foncteur est pleinement fidèle, on dit que \mathcal{D} est une sous-catégorie pleine de \mathcal{C} . Dans ce cas, \mathcal{D} est complètement caractérisée par \mathcal{C} .

Exemple: Les foncteurs d'oubli définissent toujours une sous-catégorie.

DÉFINITION (Transformation naturelle):

Une *transformation naturelle* α d'un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ vers un foncteur $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est la donnée d'une famille $\{\alpha_a \in \text{Hom} \mathcal{D}, a \in \text{Ob } \mathcal{C}\}$ telle que pour toute flèche $a \xrightarrow{f} b$ de \mathcal{C} , le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} F(a) & \xrightarrow{F[f]} & F(b) \\ \alpha_a \downarrow & & \downarrow \alpha_b \\ G(a) & \xrightarrow{G[f]} & G(b) \end{array}$$

On la note $F \xRightarrow{\alpha} G$ ou $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \alpha \Downarrow \\ \xrightarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$.

Les notions de monomorphisme, d'épimorphisme ou d'isomorphisme naturels sont vérifiées si elles sont valables sur chaque morphisme θ_a .

Exemple: $V \longrightarrow V^{**}$ avec les morphismes d'évaluation est une transformation naturelle $\text{id}_{\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}} \xRightarrow{(\epsilon_\star)^2}$, par contre il n'y a pas de transformation naturelle de $\text{id}_{\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}}$ vers ϵ_\star .

PROPRIÉTÉ:

Étant donné deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} , $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ forme une catégorie en posant les transformations naturelles comme morphismes.

Notation: Étant donné

- une transformation naturelle $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{G} \\ \alpha \Downarrow \\ \xrightarrow{H} \end{array} \mathcal{D}$

- des foncteurs $F : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ et $K : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$, on définit les transformations naturelles suivantes

$$\mathcal{B} \begin{array}{c} \xrightarrow{GF} \\ \alpha F \Downarrow \\ \xrightarrow{HF} \end{array} \mathcal{D} \qquad \mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{KG} \\ K \alpha \Downarrow \\ \xrightarrow{KH} \end{array} \mathcal{E}$$

DÉFINITION (Équivalence de catégories):

Soit \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories, une *équivalence* de \mathcal{C} vers \mathcal{D} est la donnée de :

- deux foncteurs $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{D}$.
- Deux isomorphismes naturels $\left\{ \begin{array}{l} \text{id}_{\mathcal{C}} \xRightarrow{\eta} G \circ F \\ F \circ G \xRightarrow{\epsilon} \text{id}_{\mathcal{D}} \end{array} \right.$.

Remarque: Il a fallu rajouter une subtilité à la notion d'isomorphisme au vu de la complexité à définir un Foncteur réciproque.

PROPRIÉTÉ:

Soit $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un Foncteur, alors

- si F est une équivalence, il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.
- en admettant l'axiome du choix sur $\text{Ob } \mathcal{C}$, si F est pleinement fidèle et essentiellement surjectif, c'est une équivalence.

Exemple:

- $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \simeq \mathbf{Mat}_{\mathbb{K}}$.
- **Set** est équivalent à une petite catégorie.

Preuve: Faisons le sens aller, puis le sens retour.

\Rightarrow Si F est une équivalence, on garde les mêmes notations que dans la définition.

- Soit $d \in \text{Ob } \mathcal{D}$, on a $FG(b)$ isomorphe à b , car $FG(b) \xrightarrow{\epsilon_b} \text{id}_{\mathcal{D}}(b) = b$. Donc F est essentiellement surjectif.

- On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b) & \xrightarrow{F} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(a), F(b)) & \xrightarrow{G} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GF(a), GF(b)) & \xrightarrow{\eta_b^{-1} \circ \star \circ \eta_a} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b) \\ & & & & \underbrace{\hspace{10em}} & & \uparrow \\ & & & & H & & \end{array}$$

Ainsi, $HF|_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a,b)} = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a,b)}$, donc F est fidèle. Par symétrie du raisonnement, G l'est également.

- Soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(a), F(b))$, on a le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} F(a) & \xrightarrow{G} & GF(a) & \xrightarrow{\eta_a^{-1}} & a \\ f \downarrow & & G[f] \downarrow GF[\alpha] & & \downarrow \alpha \\ F(b) & \xrightarrow{G} & GF(b) & \xrightarrow{\eta_b^{-1}} & b \end{array}$$

ainsi, $GF[\alpha] = G[f]$, comme G est fidèle, $F[\alpha] = f$, donc F est plein.

\Leftarrow Si F est pleinement fidèle et essentiellement surjectif, on suppose qu'on a l'axiome du choix sur $\mathrm{Ob} \mathcal{C}$. Il faut construire G , puis les isomorphismes naturels η et ϵ .

Soit $d \in \mathrm{Ob} \mathcal{D}$, $\exists c \in \mathrm{Ob} \mathcal{C}$, et $F(c) \xrightarrow{\epsilon_d} d$ un isomorphisme. On en choisit une paire, et on pose $G(d) = c$. Nos ϵ_d sont déjà posés, il faut montrer grâce aux propriétés de F qu'il existe \square

Chapitre 2

Propriétés universelles

Motivation : On cherche à généraliser les prolongements par unicité des diagrammes de ce type.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & X \\ p \downarrow & \nearrow \exists! \bar{f} & \\ E/\mathcal{R} & & \end{array}$$

où f est compatible avec la relation d'équivalence \mathcal{R} .

I Objets initial et terminal

DÉFINITION-PROPOSITION (*Objet initial, terminal*):

Soit \mathcal{C} une catégorie,

- un objet i de \mathcal{C} est *initial*, si pour tout objet a de \mathcal{C} , il existe une unique flèche de i vers a .
- un objet t est dit *terminal* ou *final* s'il est initial pour la catégorie opposée de \mathcal{C} .

Deux objets initiaux (resp. finaux) d'une même catégorie sont isomorphes.

Preuve: Il suffit de le montrer pour deux objets initiaux i et j .

On note $i \xrightarrow{f} j$ et $j \xrightarrow{g} i$ les uniques flèches entre les deux ensembles. Or $g \circ f$ est une flèche de i vers i , et id_i aussi. Par unicité, $g \circ f = \text{id}_i$, de même $f \circ g = \text{id}_j$, donc i et j sont isomorphes. \square

Exemple: Voici des objets initiaux et terminaux pour des catégories usuelles

- Dans **Set**, l'objet initial est l'ensemble vide et les objet finaux les singletons.
- Dans la catégorie des anneaux unitaires, l'objet initial est \mathbb{Z} , et l'anneau nul est l'objet final est l'anneau nul.
- Le groupe trivial, l'anneau nul, l'espace vectoriel nul qui sont d'un point de vue ensembliste les mêmes objets, sont les objets finaux des catégories des groupes, des pseudo-anneaux et des \mathbb{K} -espaces vectoriels.
- La catégorie des corps n'admet no objet initial, ni objet final à cause de la caractéristique.
- Dans une catégorie abélienne, pour $a \xrightarrow{f} b$, un noyau $k \in \text{Hom}(\cdot, a)$ est un objet terminal de la catégorie des morphismes de but a nuls par la composition par f , et de façon duale, son conoyau est un objet initial de la catégorie des morphismes de source b nuls lorsqu'ils composent f .

DÉFINITION (*Construction de Grothendieck*):

Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ un foncteur, on construit la catégorie $\int F$ de la manière suivante :

- $(c, x) \in \text{Ob } \int F$ si $c \in \text{Ob } \mathcal{C}$ et $x \in F(c)$.
- $(c, x) \xrightarrow{f} (d, y) \in \text{Hom } \int F$ si $\begin{cases} f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d) \\ F[f](x) = y \end{cases}$

On note alors $\pi : \int F \rightarrow \mathcal{C}$ le foncteur d'oubli.

Exemple (Objet universel I): Soit E un ensemble et \mathcal{R} une relation d'équivalence sur E , on pose

$$E_{\mathcal{R}}^X = \{ f : E \rightarrow X \text{ compatibles avec } \mathcal{R} \}$$

et

$$F : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

$$\begin{array}{ccc} X & & E_{\mathcal{R}}^X \\ \alpha \downarrow & \longmapsto & \downarrow \alpha \circ \star \\ Y & & E_{\mathcal{R}}^Y \end{array}$$

Sa construction de GROTHENDIECK est la catégorie dont les objets sont les fonction de E/\mathcal{R} dans X et les morphismes de (X, f) vers (Y, g) sont les fonctions α de X vers Y qui factorisent g par f .

$(E/\mathcal{R}, \pi)$ est un objet initial pour cette catégorie. Cela transcrit la notion de propriété universelle.

II Foncteurs représentables

DÉFINITION (*Foncteur représentable, représentation*):

Soit \mathcal{C} une catégorie localement petite et $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$ un foncteur.

- (i) F est *représentable* s'il existe $c \in \text{Ob } \mathcal{C}$ et un isomorphisme naturel $F \xrightarrow{\eta} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, \star)$.
- (ii) Une *représentation* de F est la donnée de ces deux éléments.

Exemple:

- Le foncteur d'oubli $U : \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Set}$ est représenté par le groupe $(\mathbb{Z}, +)$ via

$$\begin{array}{ccc} U(G) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z}, G) \\ g & \longmapsto & (1 \mapsto g) \end{array}$$

- Le foncteur d'oubli $U : \mathbf{Ring} \longrightarrow \mathbf{Set}$ est représenté par $(\mathbb{Z}[X], +, \times)$.

Une question se pose alors naturellement, comment caractériser les transformations naturelles suivantes ?

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, \star) & \\ \mathcal{C} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \parallel \\ \downarrow \alpha \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} & \mathbf{Set} \\ & F & \end{array}$$

LEMME (*Yoneda*):

Soit $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$ un foncteur, avec \mathcal{C} localement petite et $c \in \text{Ob } \mathcal{C}$. Alors

$$\begin{array}{ccc} \text{Nat}(\text{Hom}(c, \star), F) & \longleftrightarrow & F(c) \\ \alpha & \longmapsto & \alpha_c(\text{id}_c) \end{array}$$

De plus, cet isomorphisme est naturel en c et en F .

Preuve:

- Soit $\text{Hom}(c, \star) \xrightarrow{\alpha} F$, alors pour $x \in \text{Ob } \mathcal{C}$, on a

$$\begin{array}{ccc} \alpha_x : \text{Hom}(c, x) & \longrightarrow & F(x) \\ f & \longmapsto & \alpha_x(f) \end{array}$$

Ainsi $f : c \longrightarrow x$ induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(c, c) & \xrightarrow{\alpha_c} & F(c) \\ f \circ \star \downarrow & & \downarrow F[f] \\ \text{Hom}(c, x) & \xrightarrow{\alpha_x} & F(x) \end{array}$$

En évaluant en id_c , on obtient $\alpha_x \circ f = F[f] \circ \alpha_c(\text{id}_c)$. Ainsi, α est entièrement déterminé par $\alpha_c(\text{id}_c)$. Donc $\alpha \mapsto \alpha_c(\text{id}_c)$ est injective.

- Soit $e \in F(c)$, on définit $\text{Hom}(c, \star) \xrightarrow{\alpha} F$ par

$$\begin{array}{ccc} \alpha_x : \text{Hom}(c, x) & \longrightarrow & F(x) \\ f & \longmapsto & F[f](e) \end{array}$$

On a facilement $\alpha_c(\text{id}_c) = F[\text{id}_c](e) = \text{id}_{F(c)}(e) = e$. Et pour $\text{Hom}(c, x) \xrightarrow{\varphi \circ \star} \text{Hom}(c, Y)$,

$$\alpha_Y((\varphi \circ \star))(f) = \alpha_Y(\varphi \circ f) = F[\varphi \circ f](e) = F[\varphi] \circ F[f](e) = F[\varphi] \circ \alpha_x(f)$$

. Ce qui prouve la surjectivité. \square

Remarque: Tous les énoncés précédents sont valables pour les foncteurs contravariants et $\text{Hom}(\star, c)$, en choisissant \mathcal{C}^{op} à la place de \mathcal{C} .

COROLLAIRE (Plongement de Yoneda):

Les foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{y}_* : \mathcal{C} & \longrightarrow & \text{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}) \\ \begin{array}{ccc} c & & \text{Hom}(\star, c) \\ f \downarrow & \longmapsto & \downarrow f_* := f \circ \star \\ d & & \text{Hom}(\star, d) \end{array} & \text{et} & \begin{array}{ccc} \mathbf{y}^* : \mathcal{C}^{\text{op}} & \longrightarrow & \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathbf{Set}) \\ \begin{array}{ccc} c & & \text{Hom}(c, \star) \\ f \downarrow & \longmapsto & \uparrow f^* := \star \circ f \\ d & & \text{Hom}(d, \star) \end{array} \end{array} \end{array}$$

sont des plongements pleinement fidèles.

Preuve: Il suffit de montrer la preuve pour \mathbf{y} uniquement.

- Il est direct que f_* est une transformation et que \mathbf{y} est un foncteur.
- On a

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(c, d) & \longrightarrow & \text{Hom}(\mathbf{y}_c, \mathbf{y}_d) \xleftarrow{\text{YONEDA}} \text{Hom}(c, d) \\ f & \longmapsto & f_* \longmapsto f_*(\text{id}_c) = f \end{array}$$

- Si $\mathbf{y}_c \simeq \mathbf{y}_d$, alors il existe $\mathbf{y}_c \xrightarrow{\alpha} \mathbf{y}_d$ et $\mathbf{y}_d \xrightarrow{\beta} \mathbf{y}_c$ tq $\alpha \circ \beta = \text{id}_{\mathbf{y}_c}$ et $\beta \circ \alpha = \text{id}_{\mathbf{y}_d}$. On réapplique YONEDA et on a $c \simeq d$. \square

COROLLAIRE:

Deux objets représentent le même foncteur si et seulement si ils sont isomorphes.

Exemple (Objet universel II): On reprend l'exemple précédent du foncteur $F : X \mapsto E_{\mathcal{R}}^X$, alors $\pi \in F(E/\mathcal{R})$ induit une transformation naturelle $\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(E/\mathcal{R}, \star) \simeq F$ via le lemme de YONEDA. Ceci transcrit une nouvelle fois la notion de propriété universelle.

DÉFINITION (Problème universel):

Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ et $x \in \text{Ob } \mathcal{D}$ avec \mathcal{C} et \mathcal{D} localement petites.

On appelle *problème universel* posé par x relativement à F , la question

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(x, F(\star)) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set} \text{ est-il représentable?}$$

Si cela est vrai, une solution est la donnée de $c_x \in \text{Ob } \mathcal{C}$ et de $\iota_x \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(x, F(c_x))$ qui induisent un isomorphisme

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c_x, \star) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(x, F(\star))$$

via le lemme de YONEDA.

L'énoncé dual est tout aussi valable, si G est contravariant, le problème est alors

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(G(\star), x) : \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Set} \text{ est-il représentable?}$$

Dans le cas positif, une solution est alors un objet c_x de \mathcal{C} et un morphisme $\pi_x \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(G(c_x), x)$ pour avoir un isomorphisme

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\star, c_x) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(G(\star), x)$$

Une explication plus visuelle est donnée par les diagrammes suivants.

- Dans le cas covariant, pour $z \in \mathcal{C}$ et $x \xrightarrow{f} F(z)$, il existe une unique flèche $x \xrightarrow{\alpha} F(c_x)$ tq le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & F(z) \\ \downarrow \iota_x & \nearrow F[\alpha] & \\ F(c_x) & & \end{array}$$

- Dans le cas contravariant, pour $z \in \mathcal{C}$ et $G(z) \xrightarrow{g} x$, il existe une unique flèche $G(c_x) \xrightarrow{\beta} x$ tq le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} G(z) & & \\ \downarrow G[\beta] & \searrow g & \\ G(c_x) & \xrightarrow{\pi_x} & x \end{array}$$

III Foncteurs adjoints

Leur définition est due à Daniel KAN en 1958

DÉFINITION (Foncteurs adjoints):

Une *adjonction* est la donnée

- (i) d'une paire de foncteurs $(G, D) \left\{ \begin{array}{l} G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D} \\ D : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C} \end{array} \right.$
- (ii) d'un isomorphisme $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(G(c), d) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, D(d))$ pour toute paire d'objets $c \in \mathcal{C}$, $d \in \mathcal{D}$.

Notation: Pour (G, D) une paire de foncteur adjoints, il y a les notations suivantes

- $G \dashv D$ et $D \vdash G$
- $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{G} \\ \perp \\ \xleftarrow{D} \end{array} \mathcal{D} \quad \mathcal{C} \begin{array}{c} \xleftarrow{D} \\ \top \\ \xrightarrow{G} \end{array} \mathcal{D} \quad \mathcal{D} \begin{array}{c} \xleftarrow{G} \\ \perp \\ \xrightarrow{D} \end{array} \mathcal{C} \quad \mathcal{D} \begin{array}{c} \xrightarrow{D} \\ \top \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{C}$

Le tout est de bien orienter le symbole \dashv .

Une adjonction nous donne un isomorphisme bi-naturel entre les morphismes de deux catégories, on note alors les morphismes correspondants de la manière suivante :

$$G(c) \xrightarrow{f^\#} d \quad \rightsquigarrow \quad c \xrightarrow{f^\flat} D(d)$$

On dit qu'ils sont *adjoints* ou *transposés* l'un de l'autre.

LEMME:

Considérons une paire de foncteurs $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \perp \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$ munie d'isomorphismes $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c), d) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, G(d))$ pour tous objets $c \in \text{Ob } \mathcal{C}$ et $d \in \mathcal{D}$. Alors pour tous les morphismes compatibles, on a un isomorphisme de diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} F(c) & \xrightarrow{f^\#} & d \\ F[h] \downarrow & & \downarrow k \\ F(c') & \xrightarrow{g^\#} & d' \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{f^\flat} & G(d) \\ h \downarrow & & \downarrow G[k] \\ c & \xrightarrow{g^\flat} & G(d') \end{array}$$

Remarque: Lorsque \mathcal{C} et \mathcal{D} sont localement petites, cela revient au diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(\star), \star) & \\ \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D} & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \updownarrow \\ \curvearrowleft \end{array} & \mathbf{Set} \\ & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\star, G(\star)) & \end{array}$$

En fixant $c \in \text{Ob } \mathcal{C}$, on a $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(G(c), \star) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, D(\star))$, donc $G(c)$ représente le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, D(\star))$. Grâce au lemme de YONEDA, l'isomorphisme naturel est donné par la flèche $c \xrightarrow{\eta_c} DG(c)$ qui correspond à $\text{id}_{G(c)}$.

De la même manière, en fixant $d \in \text{Ob } \mathcal{D}$, on a $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\star, D(d)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}}(G(\star), d)$, donc $D(d)$ représente le foncteur contravariant $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\star, D(d))$. L'isomorphisme naturel est donné par la flèche $GD(d) \xrightarrow{\epsilon_d} d$ qui correspond à $\text{id}_{D(d)}$.

DÉFINITION-PROPOSITION (*Unité, counité*):

Soit $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[\mathcal{D}]{\mathcal{G}}$ une adjonction. Alors

- $\text{id}_{\mathcal{C}} \xRightarrow{\eta} DG$ est une transformation naturelle appelée *unité*.
- $GD \xRightarrow{\epsilon} \text{id}_{\mathcal{D}}$ est une transformation naturelle appelée *counité*.

PROPRIÉTÉ:

Soit $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[\mathcal{D}]{\mathcal{F}}$, alors les assertions suivantes sont équivalentes

- (i) $F \dashv G$
- (ii) Il existe deux transformation naturelles $\text{id}_{\mathcal{C}} \xRightarrow{\eta} GF$ et $FG \xRightarrow{\epsilon} \text{id}_{\mathcal{D}}$ telles que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{F\eta} & FGF \\ \text{id}_F \searrow & & \downarrow \epsilon_F \\ & & F \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\eta G} & GFG \\ \text{id}_G \searrow & & \downarrow G\epsilon \\ & & G \end{array}$$

Preuve: Procédons par un aller-retour.

\Rightarrow L'existence des deux transformations naturelles a déjà été établie, il reste à montrer la commutativité des diagrammes triangulaires.

L'adjonction nous donne une transposition entre les diagrammes commutatifs suivants.

$$\begin{array}{ccc} F(c) & \xrightarrow{F\eta_c} & FGF(c) \\ \text{id}_{F(c)} \downarrow & & \downarrow \epsilon_{F(c)} \\ F(c) & \xrightarrow{\text{id}_{F(c)}} & F(c) \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{\eta_c} & GF(c) \\ \eta_c \downarrow & & \downarrow \text{id}_{GF(c)} \\ GF(c) & \xrightarrow{\text{id}_{GF(c)}} & GF(c) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} FG(d) & \xrightarrow{\text{id}_{FG(d)}} & FG(d) \\ \text{id}_{FG(d)} \downarrow & & \downarrow \epsilon_d \\ FG(d) & \xrightarrow{\epsilon_d} & d \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccc} G(d) & \xrightarrow{\eta_{G(d)}} & GFG(d) \\ \text{id}_{G(d)} \downarrow & & \downarrow G\epsilon_d \\ G(d) & \xrightarrow{\text{id}_{G(d)}} & G(d) \end{array}$$

Cela permet de conclure quant à la commutativité des diagrammes en triangle.

\Leftarrow En fixant $c \in \mathcal{C}$ et $d \in \mathcal{D}$, l'unité et la counité peuvent nous donner une bijection $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c), d) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, G(d))$.

En considérant $F(c) \xrightarrow{f^\sharp} d$ et $c \xrightarrow{g^\flat} G(d)$, leurs transposés sont définis par les compositions

$$\underbrace{c \xrightarrow{\eta_c} GF(c) \xrightarrow{G[f^\sharp]} G(d)}_{f^\flat} \quad \text{et} \quad \underbrace{F(c) \xrightarrow{F[g^\flat]} FG(d) \xrightarrow{\eta_d} d}_{g^\sharp}$$

Ainsi la transposée de la transposée de f^\sharp est la composée

$$\begin{array}{ccccc} F(c) & \xrightarrow{F\eta_c} & FGF(c) & \xrightarrow{FG[f^\sharp]} & FG(d) & \xrightarrow{\epsilon_d} & d \\ & \searrow & \downarrow \epsilon_{F(c)} & & \nearrow & & \\ & & F(c) & & & & \end{array}$$

$\text{id}_{F(c)}$ (sur la flèche $F(c) \rightarrow FGF(c)$) et f^\sharp (sur la flèche $FG(d) \rightarrow d$)

On montre la même chose concernant g^b , ce qui nous donne l'isomorphisme attendu, ainsi l'adjonction est montrée. \square

Exemple: Les foncteurs d'oubli ont généralement un adjoint à gauche du type libre \dashv oubli.

- $\mathbf{Set} \xrightleftharpoons[U]{L} \mathbf{Ab}$ où L st le foncteur qui à un ensemble associe son groupe libre.
- $\mathbf{Grp} \xrightleftharpoons[U]{A} \mathbf{Ab}$ où A est le foncteur qui à un groupe G associe son abélianisé $G/D(G)$.
- $\mathbf{Set} \xrightleftharpoons[T]{D} \mathbf{Top}$ où D est le foncteur qui à un ensemble associe ce même ensemble muni de la topologie discrète et T le foncteur qui associe à un ensemble, ce même ensemble muni de la topologie triviale.

THÉORÈME:

Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur avec \mathcal{C} une catégorie localement petite. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) F admet un adjoint à gauche.
- (ii) $\forall x \in \text{Ob } \mathcal{D}$, le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, F(\star))$ est représentable.
- (iii) $\forall x \in \text{Ob } \mathcal{D}$, il existe (d_x, ι_x) une solution au problème universel posé par x relativement à F .

Remarque: Le même théorème s'énonce de façon duale pour les adjoints à droite.

Ainsi, un problème universel n'est autre que la recherche d'un adjoint pour un certain foncteur.

IV Limites

DÉFINITION (Diagramme):

Soit \mathcal{J} et \mathcal{C} deux catégories, un *diagramme* de type \mathcal{J} dans \mathcal{C} est un foncteur $D : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$.
On dira que le diagramme est petit / localement petit / fini si \mathcal{J} l'est.

Exemple:

- Pour être plus visuel, un carré commutatif dans une catégorie \mathcal{C} est un diagramme de type

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{array}$$

- Pour un objet c de \mathcal{C} , le *diagramme constant* est le Foncteur

$$\Delta_{\mathcal{J}}(c) : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}$$

$$\begin{array}{ccc} i & & c \\ \alpha \downarrow & \longrightarrow & \downarrow \text{id}_c \\ j & & c \end{array}$$

On remarque que ces relations sont naturelles en c , on peut donc définir le *plongement diagonal*.

$$\Delta_{\mathcal{J}} : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Fun}(\mathcal{J}, \mathcal{C})$$

$$\begin{array}{ccc} c & & \Delta(c) \\ f \downarrow & \longrightarrow & \downarrow (f)_{j \in \text{Ob } \mathcal{J}} \\ d & & \Delta(d) \end{array}$$

DÉFINITION (Cône):

Un *cône* sur un diagramme D de sommet c est une transformation naturelle

$$\begin{array}{ccc} & \Delta_{\mathcal{J}}(c) & \\ \mathcal{J} & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \lambda \\ \curvearrowleft \end{array} & \mathcal{C} \\ & D & \end{array}$$

on le notera aussi $c \xRightarrow{\lambda} D$.

Un *co-cône* est la version duale d'un cône, i.e. une transformation naturelle $c \xRightarrow{\mu} D$.

En d'autres termes, un cône de sommet c sur un diagramme D est une famille de flèches $(\lambda_{ii})_{i \in \mathcal{J}}$, appelées *pattes*, telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & c & \\ \lambda_i \swarrow & & \searrow \lambda_j \\ D(i) & \xrightarrow{D[u]} & D(j) \end{array}$$

commute pour toute flèche $i \xrightarrow{u} j$ de \mathcal{J} .

Remarque: Les cônes de \mathcal{C} sur un diagramme A ont des morphismes entre eux induits par les flèches de \mathcal{C} .

Une flèche $c \xrightarrow{f} c'$ de \mathcal{C} est un morphisme entre deux cônes λ et λ' sur D si les diagrammes suivants commutent.

$$\begin{array}{ccc} & c & \\ \lambda_i \swarrow & \downarrow f & \searrow \lambda_j \\ & c' & \\ \lambda'_i \swarrow & & \searrow \lambda'_j \\ D(i) & \xrightarrow{D[u]} & D(j) \end{array}$$

On peut alors définir de manière formelle la catégorie des cônes de \mathcal{C} sur D un diagramme fixé.

DÉFINITION-PROPOSITION:

Un cône $l \xRightarrow{\pi} D$ est *universel* si c'est un objet terminal de la catégorie des cônes de \mathcal{C} sur D .

La *limite* du diagramme D est définie à isomorphisme près et est la donnée des cônes universels sur D , on la note $\lim_{\mathcal{J}} D$.

En considérant \mathcal{C}^{op} , on retrouve tous les équivalents de type dual de ces propriétés, on obtient alors les *co-cône universels* et la *colimite*, notée $\text{colim}_{\mathcal{J}} D$.

Dans le cas des limites ou colimites, on dira qu'elles sont petites / localement petites / finies si le diagramme l'est.

Remarque: La limite n'existe pas forcément. On a d'ailleurs une définition équivalente de limite dans le cas d'une catégorie localement petite, en effet, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\star, \lim D) \simeq \text{Fun}(\Delta_{\mathcal{J}}(\star), D)$. Donc la limite existe ssi $\text{Fun}(\Delta_{\mathcal{J}}(\star), D)$ est représentable.

COROLLAIRE 1:

Si toutes les limites de type \mathcal{J} existent dans \mathcal{C} , $\lim_{\mathcal{J}}$ est un foncteur adjoint à droite du foncteur diagonal.

De même si toutes les colimites existent, $\text{colim}_{\mathcal{J}}$ est un adjoint à gauche du foncteur diagonal.

Ainsi si limites et colimites existent, on a $\text{colim}_{\mathcal{J}} \dashv \Delta_{\mathcal{J}} \dashv \lim_{\mathcal{J}}$.

La propriété de limite pour un diagramme D est donc un cône $\pi \xRightarrow{\alpha} l$ Dtel que pout tout autre cône $c \xRightarrow{\lambda} D$, il existe un unique morphisme $c \xrightarrow{\alpha} l$ tel que les diagrammes suivants commutent.

$$\begin{array}{ccc} & c & \\ & \downarrow \exists! \alpha & \\ \lambda_i \swarrow & l & \searrow \lambda_j \\ \pi_i \swarrow & & \searrow \pi_j \\ D(i) & \xrightarrow{D[u]} & D(j) \end{array}$$

Construisons de nouveaux objets maintenant grâce à ces limites.

Exemple (Constructions classiques pour les catégories): De nombreuses construction classiques de limites sont à connaître, en voici une liste presque exhaustive.

- Un égaliseur dans une catégorie \mathcal{C} est la limite d'un diagramme de type $\bullet \rightrightarrows \bullet$. Étant donné deux flèches $f \rightrightarrows_d g$, l'égaliseur de f et g est donc une flèche $a \xrightarrow{e} c$ telle que

$$\begin{array}{ccccc} & b & & & \\ & \downarrow \exists! & \searrow & & \\ a & \xrightarrow{e} & c & \xrightarrow[f]{g} & d \end{array}$$

- Un *produit* indexé par une classe I sur une catégorie \mathcal{C} est la limite d'un diagramme de type I , où I est vue comme une catégorie avec pour objets I et pour seules flèches les identités, sur \mathcal{C} , il est noté $\prod_{i \in I} D(i)$. Soit deux objets de \mathcal{C} a et b , leur produit $a \times b$ est un objet de \mathcal{C} muni de deux flèches π_a et π_b telles que :

$$\begin{array}{ccc} c & & \\ \downarrow \exists! & \searrow & \\ a \times b & \xrightarrow{\pi_b} & b \\ \downarrow \pi_a & & \\ a & & \end{array}$$

- Un *coproduit* ou *somme* est le dual d'un produit, ou la colimite du même type de diagramme, il est noté $\coprod_{i \in I} D(i)$. Pour deux objets, cela donne

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ & \downarrow & \\ a & \hookrightarrow & a \amalg b \\ & \searrow \exists! & \\ & & c \end{array}$$

- Le produit fibré d'une catégorie \mathcal{C} est la limite d'un diagramme où \mathcal{J} est une catégorie munie d'un objet terminal et où les flèches mis à part les identités ont toutes pour but le terminal. On l'appelle aussi produit fibré de la famille de flèches $\mathcal{F} := D[\text{Hom}_{\mathcal{J}}(\cdot, t)]$. Si la famille de flèches est implicite, on la note $\prod_{D(t)} D(\text{Ob } \mathcal{J})$ sinon $\prod_{D(t)} \mathcal{F}$.

Le produit fibré de deux flèches $a \xrightarrow{f} d$ et $b \xrightarrow{g} d$ correspond à

$$\begin{array}{ccccc} c & & & & \\ \downarrow \exists! & \searrow & & & \\ a \times_d b & \xrightarrow{\pi_b} & b & & \\ \downarrow \pi_a & & \downarrow g & & \\ a & \xrightarrow{f} & d & & \end{array}$$

On dit qu'une catégorie a la propriété de fibration si tous les produits fibrés à deux flèches existent.

- De manière duale, la somme amalgamée d'une catégorie \mathcal{C} est la limite d'un diagramme où \mathcal{J} est une catégorie munie d'un objet initial et où les flèches mis à part les identités ont toutes pour source l'objet initial. On l'appelle aussi somme amalgamée de la famille de flèches $\mathcal{F} := D[\text{Hom}_{\mathcal{J}}(i, \cdot)]$. Si la famille de flèches est implicite, on la note $\coprod_{D(i)} D(\text{Ob } \mathcal{J})$ sinon $\coprod_{D(i)} \mathcal{F}$. Pour deux flèches, cela donne

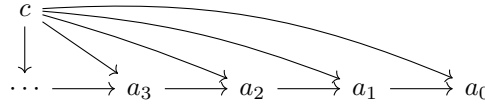
$$\begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{g} & b \\ \downarrow f & & \downarrow \\ a & \hookrightarrow & a \amalg_c b \\ & \searrow \exists! & \\ & & d \end{array}$$

Une catégorie \mathcal{C} a la propriété d'amalgramation si toutes les sommes amalgamées de deux flèches existent.

On considérant le premier ordinal ω comme une catégorie, il est possible de construire des limites qui ressemblent aux constructions du lemme de Zorn. Un diagramme de type ω^{op} est une suite de flèches

$$\cdots \longrightarrow a_3 \longrightarrow a_2 \longrightarrow a_1 \longrightarrow a_0$$

On remarquera qu'un cône n'est autre qu'un diagramme de type $\omega + 1^{\text{op}}$ avec le sommet vu comme un objet "tout à gauche".



De même, on peut construire des diagrammes de type ω

$$b_0 \longrightarrow b_1 \longrightarrow b_2 \longrightarrow b_3 \longrightarrow \cdots$$

DÉFINITION (Limites projective et inductive):

Une *limite projective* dans une catégorie \mathcal{C} est la limite d'un diagramme de type ω^{op} . On la note $\lim_{\leftarrow} a_n$ en gardant les notations.

Une *limite inductive* est la colimite d'un diagramme de type ω . On la note $\text{colim}_{\rightarrow} b_n$

Remarque: Dans ce cas, on utilise la catégorie duale pour une limite et la catégorie de base pour la colimite. Ce choix peut paraître étrange, mais si l'on inverse les rôles, les limites sont triviales et sont respectivement a_0 et b_0 .

On peut également étendre ces définitions en prenant un ensemble ordonné filtrant croissant à la place de ω , par exemple $(\mathbb{Z}^*, |)$, ou même une sous-catégorie des ouverts d'un espace topologique munie de l'inclusion comme flèche. On peut même redéfinir la limite en un point x d'une fonction f comme la limite inductive des $f|_U$ avec U ouvert contenant x (dans ce cas les flèches sont renversées car le faisceau des fonctions est un foncteur contravariant).

Exemple: Voici deux cas connus de limites projectives et inductives.

- Les p -adiques peuvent être vus comme la limite projective de $n \mapsto \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. De façon analogue, \mathbb{N}_0 est la limite projective du diagramme des entiers munis de l'inclusion dans la catégorie des ensembles.

$$\mathbb{Z}_p \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p^4\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

- La clôture algébrique de \mathbb{F}_p . Il suffit de remarquer que c'est la limite d'un diagramme de \mathbb{N}^* avec comme ordre la division vers la catégorie des corps qui à n associe \mathbb{F}_{p^n} , où alors une limite inductive avec $n \mapsto \mathbb{F}_{p^n}$. Ici on se fixe les morphismes de corps, mais on pourrait considérer le squelette de la catégorie des corps. On a l'exemple parfait de la limite inductive.

$$\mathbb{F}_p \hookrightarrow \mathbb{F}_{p^2} \hookrightarrow \mathbb{F}_{p^6} \hookrightarrow \mathbb{F}_{p^{24}} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}_p}$$

Il est temps de s'intéresser à l'existence des limites, de manière générale ou dans des catégories usuelles...

DÉFINITION (Complétude):

Une catégorie est dite *complète* (resp. *co-complète*) si elle admet toutes les petites limites (resp. colimites).

THÉORÈME:

Une catégorie est complète (resp. co-complète) si et seulement si elle admet tous les produits (resp. sommes) et égaliseurs (resp. co-égaliseurs).

Preuve: Le sens aller est trivial, montrons donc seulement l'implication retour.

Soit $\mathcal{J} \xrightarrow{D} \mathcal{C}$ un \mathcal{J} diagramme avec \mathcal{J} petite. On pose $p := \prod_{i \in \text{Ob } \mathcal{J}} D(i)$ muni des projections canoniques p_i . On pose ensuite $q := \prod_{\alpha \in \text{Hom } \mathcal{J}} D(\text{cod } \alpha)$ muni des q_α .

On a d'après la propriété de limite

$$\begin{array}{ccc} p & \xrightarrow{p_i} & D(i) \\ \downarrow \exists! g & & \downarrow D[\alpha] \\ q & \xrightarrow{p_\alpha} & D(j) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} p & & \\ \downarrow \exists! h & \searrow p_j & \\ q & \xrightarrow{p_\alpha} & D(j) \end{array}$$

On pose $l = \text{eq} \left(p \begin{smallmatrix} \xrightarrow{g} \\ \xleftarrow{h} \end{smallmatrix} q \right)$, en combinant les deux diagrammes ci dessus, on remarque que les propriétés de l'égaliseur nous donnent exactement celles de la limite,. En effet, les pattes d'un cône se factorisent par p et q grâce aux propriétés du produit, et ces factorisation commutent grâce à leur naturalité. Cela nous donne donc à chaque fois un morphisme unique du cône vers l . \square

COROLLAIRE:

Les catégories **Set** et **Top** sont complètes et co-complètes.

THÉORÈME:

Les foncteurs adjoints à droite préservent les limites, et les adjoints à gauche, les colimites.

Preuve: On a $\mathcal{C} \begin{smallmatrix} \xrightarrow{F} \\ \perp \\ \xleftarrow{G} \end{smallmatrix} \mathcal{D}$, et D un \mathcal{J} -diagramme sur \mathcal{D} . On se fixe $c \in \mathcal{C}$.

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, G(\lim_{\mathcal{J}} D)) &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c), \lim_{\mathcal{J}} D) \\ &\simeq \text{Fun}(\Delta_{\mathcal{J}} F(c), D) \\ &\simeq \text{Fun}(\Delta_{\mathcal{J}}(c), GD) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, \lim_{\mathcal{J}} GD) \end{aligned}$$

Comme la propriété de limite se déduit uniquement des morphismes qui arrivent sur elle, on a $G(\lim_{\mathcal{J}} D) = \lim_{\mathcal{J}} GD$. \square

Chapitre 3

Produits tensoriels

On rappelle quelques définitions pour éviter toute ambiguïté :

- **Ring** est la catégorie des anneaux unitaires.
- **$A\text{-Mod}$** la catégorie des A -modules unitaires à gauche, i.e. $1 \cdot v = v$
- **$A\text{-}B\text{-Bimod}$** La catégorie des modules qui sont à la fois des A -modules à gauche et des B -modules à droite avec bi-associativité (de façon à ce que la notation ne soit pas ambiguë).

I Création du produit tensoriel

Le but de cette section sera d'associer à $\left\{ \begin{array}{l} M_A \text{ un } A\text{-module à droite} \\ {}_A N \text{ un } A\text{-module à gauche} \end{array} \right.$, un groupe abélien $M \otimes_A N$ qui vérifiera une propriété universelle similaire à celle des produits tensoriels d'espaces vectoriels.

DÉFINITION (*Bilinéarité*):

Soit M_A et ${}_A N$ deux A -modules à droite et à gauche, et G un groupe abélien. Une application A -bilinéaire ou A -équilibrée est une application $f : M \times N \longrightarrow G$ telle que

- f soit additive sur la première et deuxième variable.
- $\forall a \in A, m \in M, n \in N, \quad f(m \cdot a, n) = f(m, a \cdot n)$

DÉFINITION-PROPOSITION (*Produit tensoriel*):

Soit M et N deux A -modules à droite et à gauche, il existe un groupe abélien $M \otimes_A N$ muni d'une application A -bilinéaire $t : M \times N \longrightarrow M \otimes_A N$ vérifiant la propriété universelle suivante :

Pour tout groupe abélien G et toute application A -bilinéaire $f : M \times N \longrightarrow G$, il existe un unique morphisme de groupes abéliens $\bar{f} : M \otimes_A N \longrightarrow G$ faisant commuter le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{f} & G \\ t \downarrow & \searrow \exists! \bar{f} & \uparrow \\ M \otimes_A N & & \end{array}$$

Il est appelé *produit tensoriel* de M et N .

Preuve: La preuve est similaire à la construction pour les espaces vectoriels.

Posons

- $L := \mathbb{Z}[M \times N]$ le groupe abélien libre engendré par $M \times N$.
- $I := \langle (m + m', n) - (m, n) - (m', n), (m, n + n') - (m, n) - (m, n'), (m \cdot a, n) - (m, a \cdot n) \rangle$ le sous-groupe (évidemment distingué) de L .

On pose alors naturellement $M \otimes_A N := L/I$, et $t = \pi \circ \iota$. Il suit alors directement des propriétés de groupe libre engendré et groupe quotient, que le diagramme suivant se factorise deux fois consécutivement et de manière

unique.

$$\begin{array}{ccc}
 M \times N & \xrightarrow{f} & G \\
 \downarrow & \searrow \exists! \bar{f} & \uparrow \\
 L & & \\
 \downarrow \pi & \searrow \exists! \bar{f} & \\
 M \otimes_A N & &
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c} t \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array}$$

Il est direct que $M \otimes_A N$ est abélien, que t est A -bilinéaire et que le morphisme factorisé \bar{f} en est un. \square

Remarque: On pourrait le définir comme une colimite dans la catégorie des groupes abéliens, ainsi le produit tensoriel est unique à isomorphisme de groupe près.

On note en général $m \otimes n$ ou $m \otimes n$ la classe de (m, n) dans $M \otimes_A N$. Ils engendrent le produit tensoriel en tant que groupe abélien, mais la décomposition n'est pas unique.

L'idée maintenant est d'avoir un bi-foncteur

$$\begin{aligned}
 \star \otimes_A \star : \mathbf{Mod}\text{-}A \times A\text{-}\mathbf{Mod} &\longrightarrow \mathbf{Ab} \\
 M \times N &\longmapsto M \otimes_A N
 \end{aligned}$$

On remarque alors que pour $f : M \longrightarrow M'$ et $g : N \longrightarrow N'$ morphismes de modules, on a $t' \circ f \times g$ qui est bilinéaire, donc elle se factorise de manière unique ainsi

$$\begin{array}{ccc}
 M \times N & \xrightarrow{t} & M \otimes_A N \\
 \downarrow f \times g & & \downarrow \exists! f \otimes_A g \\
 M' \times N' & \xrightarrow{t'} & M' \otimes_A N'
 \end{array}$$

On a donc de quoi compléter la définition du foncteur.

LEMME:

$\star \otimes_A \star$ est un bi-foncteur de $\mathbf{Mod}\text{-}A \times A\text{-}\mathbf{Mod}$ vers \mathbf{Ab} .

COROLLAIRE:

- Si M est un B - A -bimodule, alors $M \otimes_A N$ est un B -module à gauche.
- Si N est un A - C -bimodule, alors $M \otimes_A N$ est un C -module à droite.
- Si M est un B - A -bimodule et N un A - C -bimodule, alors $M \otimes_A N$ est un B - C -bimodule.

Exemple:

- En prenant N un A -module à gauche, on retrouve le produit tensoriel trivial $A \otimes_A N \simeq N$. On peut considérer le même exemple à droite.
- Si A est commutatif (par exemple un corps), alors tout A -module est un A - A -bimodule, ainsi $M \otimes_A N$ est toujours un A -module. Un cas particulier avec les corps est la propriété universelle des applications bilinéaires.
- Si on prend L un A -module à droite, M un A - B -bimodule et N un B -module à gauche, alors les constructions $(L \otimes_A M) \otimes_B N$ et $L \otimes_A (M \otimes_B N)$ sont isomorphes, on a donc une associativité, et on notera l'objet $L \otimes_A M \otimes_B N$.
- Pour $m, n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ en posant $d := m \wedge n$.

En effet, on a $d = mu + nv$, et $d \cdot (1 \otimes 1) = mu \otimes 1 + 1 \otimes nv = 0$. On a donc le produit tensoriel constitué des d éléments $0 \otimes 1, \dots, (d-1) \otimes 1$ ce qui donne le résultat. En particulier si m et n sont premiers entre eux, le produit tensoriel est le groupe trivial.

LEMME (Schapiro):

Soit M un A - B -bimodule, alors le foncteur $M \otimes_B \star : B\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow A\text{-}\mathbf{Mod}$ est adjoint à gauche du foncteur $\mathrm{Hom}_A(M, \star) : A\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow B\text{-}\mathbf{Mod}$.

Remarque: La structure de B -module sur $\mathrm{Hom}_A(M, L)$ est donnée par $a \cdot \phi(m) = \phi(a \cdot m)$.

Preuve: Il nous suffit de donner l'unité et la co-unité de cette adjonction. On se fixe N un B -module à gauche et L un A -module à gauche.

$$\begin{array}{ccc} \eta_N : N & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M, M \otimes_A N) \\ n & \longmapsto & (m \mapsto m \otimes_A n) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \epsilon_L : M \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M, L) & \longrightarrow & L \\ m \otimes_A \phi & \longmapsto & \phi(m) \end{array}$$

La preuve de la commutativité des diagrammes en triangle est évidente. □

Remarque: En général, $M \otimes_A \star$ n'a pas d'adjoint à gauche, sauf dans le cas où A est un corps \mathbb{K} , et M un espace vectoriel V de dimension finie, dans ce cas, $\mathcal{L}(V, \star)$ est un adjoint à droite et à gauche de $V \otimes \star$. Il suffit de passer par l'espace dual pour le remarquer.

Chapitre 4

Catégories additives

I Catégories pré-additives et additives

DÉFINITION (Objet nul):

Un *objet nul* dans une catégorie \mathcal{C} est un objet à la fois initial et terminal.

Exemple: $\{0\}$ est un objet nul dans **Grp**, **Ring**, **Vect**.

DÉFINITION (k -catégorie, préadditivité):

Soit k un anneau commutatif, une k -catégorie est une catégorie \mathcal{C} telle que

(i) $\forall x, y \in \text{Ob } \mathcal{C}, \quad \text{Hom}(x, y) \in \text{Ob } k\text{-Mod}$.

(ii) $\star \circ \star$ est une application k -bilinéaire.

Si $k = \mathbb{Z}$, on dit que \mathcal{C} est *pré-additive*.

Remarque: On parle également de catégorie enrichies sur $k\text{-Mod}$.

LEMME:

Soit \mathcal{A} une k -catégorie, pour $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{A}$, on a

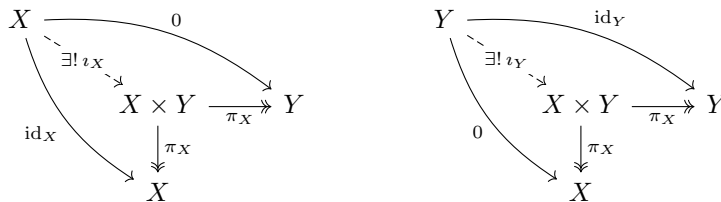
(i) $X \times Y$ existe ssi $X \amalg Y$ existe.

(ii) Si c'est le cas, ils sont isomorphes.

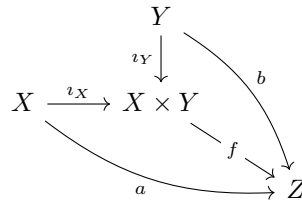
Remarque: Dans le cas des espaces vectoriels, on a bien $E \times F \simeq E \oplus F$ par construction. Il faut bien retenir que l'algèbre linéaire a inspiré toute cette section.

Preuve: On remarque déjà que si \mathcal{A} est une k -catégorie, \mathcal{A}^{op} en est une également, ainsi il suffit de montrer le sens aller.

La clef est l'existence des morphismes nuls, en effet la propriété de produit nous donne l'existence unique des morphismes suivants.



Montrons alors que $X \times Y$ muni de ι_X et ι_Y est une somme. Si on a un objet Z muni de deux morphismes a et b en provenance de X et Y , il suffit de poser $f = a \circ \pi_X + b \circ \pi_Y$, et on a



On a ainsi trouvé une factorisation, il faut maintenant vérifier qu'elle est unique. Pour cela, on suppose qu'il existe une autre factorisation g .

On remarque que $\iota_X \circ \pi_X + \iota_Y \circ \pi_Y = \text{id}_{X \times Y}$ car $\text{Hom}(X \times Y) = \text{id}_{X \times Y}$.

On a alors $g = g \circ \text{id}_{X \times Y} = g \circ \iota_X \circ \pi_X + g \circ \iota_Y \circ \pi_Y = a \circ \pi_X + b \circ \pi_Y = f$.

L'unicité est ainsi montrée. \square

On remarquera que l'élégance des preuves en théorie des catégories dépasse l'entendement de n'importe quel gentleman, aussi raffiné soit-il. N'est-ce pas pour cela que les mathématiques sont si belles et ont été pensées ?

DÉFINITION (Bi-produit):

Soit X, Y deux objets d'une k -catégorie, un bi-produit est la donnée d'un objet $X \oplus Y$ muni de morphismes de projection et d'injection

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{\iota_X} \\ \xleftarrow{\pi_X} \end{array} X \oplus Y \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_Y} \\ \xleftarrow{\iota_Y} \end{array} Y$$

tels que

$$\iota_X \circ \pi_X + \iota_Y \circ \pi_Y = \text{id}_{X \oplus Y}$$

Remarque: Pour se convaincre de la nature de produit et de somme de $X \oplus Y$, il suffit de se replonger dans la preuve précédente.

DÉFINITION (Catégorie k -additive):

Soit k un anneau commutatif, une catégorie k -additive est une k -catégorie qui admet les produits et sommes finies.

Remarque: Il faut et suffit d'avoir tous les produits, ainsi qu'un objet nul pour que les conditions soient remplies, de plus on peut récupérer la structure d'une k -catégorie grâce aux constructions $X \oplus Y$ (voir preuve de la propriété sur les foncteurs additifs). Dans le cas particulier où $k = \mathbb{Z}$, on parle de *catégorie additive*.

Exemple: En plus des espaces vectoriels, qui sont le modèle de cette théorie, il y a des exemples connus.

- Pour A un anneau, $A\text{-Mod}$ et $\text{Mod-}A$ sont des catégories additives.
- Si \mathcal{A} est k -additive, alors \mathcal{A}^{op} l'est également.
- Si \mathcal{A} est k -additive, de façon analogue aux espaces de fonctions, $\text{Fun}(\mathcal{I}, A)$ est k -additive pour n'importe quelle catégorie \mathcal{I} .
- Pour A un anneau, $\mathbf{B}A$ est pré-additive mais pas additive.

Cette notion nous donne envie d'associer des propriétés additives usuellement propres aux morphismes aux morphismes des catégories : les foncteurs.

DÉFINITION (Foncteur additif):

Soit $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur entre deux catégories additives. On dit que F est *additif* si pour tous objets X, Y de \mathcal{A} , l'application

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X), F(Y)) \\ f & \longmapsto & F[f] \end{array}$$

est un morphisme de groupes.

PROPRIÉTÉ:

$F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est additif ssi $F(0_{\mathcal{A}}) \simeq 0_{\mathcal{B}}$ et $\forall X, Y \in \text{Ob } \mathcal{A}, F(X \oplus Y) \simeq F(X) \oplus F(Y)$.

Preuve: Le sens aller est direct, concentrons nous plutôt sur l'implication retour. Encore une fois, il s'agit d'élégance.

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & & Y \\ & \nearrow f_1 & \nwarrow \pi_1 & \nwarrow i_1 & \searrow \text{id}_Y \\ X & \cdots \cdots \cdots \exists! \alpha \cdots \cdots \cdots & Y \oplus Y & \cdots \cdots \cdots \exists! \pi_1 + \pi_2 \cdots \cdots \cdots & Y \\ & \searrow f_2 & \nearrow \pi_2 & \nearrow i_2 & \nwarrow \text{id}_Y \\ & & Y & & Y \end{array}$$

On remarque alors en composant par des π et ι aux bons endroits et aux bons moments, et par unicité de la construction que $f_1 + f_2 = (\pi_1 + \pi_2) \circ \alpha$. Grâce à la commutativité de ce diagramme, il suffit d'appliquer F à ce dernier pour avoir la propriété de morphisme. La propriété du 0 est essentielle pour la construction des propriétés du bi-produit, elle n'est pas futile! \square

Une version plus compréhensible de l'addition via le bi-produit est donnée par le diagramme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{id}_X & & & & \\
 & & \curvearrowright & & & & \\
 & & X & \xrightarrow{f_1} & Y & & \\
 & & \swarrow \pi_1^X & & \searrow \iota_1^Y & & \\
 X & \xrightarrow{\exists! d} & X \oplus X & \xrightarrow{\exists! f_1 \oplus f_2} & Y \oplus Y & \xrightarrow{\exists! s} & Y \\
 & & \searrow \pi_2^X & & \swarrow \iota_1^Y & & \\
 & & X & \xrightarrow{f_2} & Y & & \\
 & & \curvearrowleft & & & & \\
 & & \text{id}_X & & & &
 \end{array}$$

On a alors $f_1 + f_2 = s \circ f_1 \oplus f_2 \circ d$. On peut aussi vérifier que $f_1 \oplus f_2 = \iota_1^Y \circ f_1 \circ \pi_1^X + \iota_2^Y \circ f_2 \circ \pi_2^X$.

II Complexes de chaînes dans les catégories additives

Dans cette section, toutes les catégories seront additives. On pose même les deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} qui serviront pour les définitions, propriétés et théorèmes.

DÉFINITION:

- (i) Un *complexe de chaînes* dans \mathcal{C} est une suite d'objets $c_\bullet := (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ munie de flèches $c_{n-1} \xleftarrow{\partial_n} c_n$ appelées *application aux bords*, telles que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$. On écrira $\boxed{\partial^2 = 0}$
- (ii) Un *complexe de co-chaînes* dans \mathcal{C} est un complexe de chaîne dans la catégorie opposée, soit une suite d'objets $c^\bullet := (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ munie de morphismes $c_n \xrightarrow{\partial_n} c_{n+1}$ telles que $\partial_{n+1} \circ \partial_n = 0$.

Remarque: Un complexe de chaînes peut aussi être vu comme un complexe de co-chaînes en considérant les c_{-n} et ∂_{-n} et inversement. Ce sont donc les mêmes objets d'un point de vue mathématique, cependant ils représentent des concepts différents, ainsi nous les différencierons.

On pourrait également définir un complexe de chaînes comme un foncteur contravariant de (\mathbb{Z}, \leq) vers \mathcal{C} qui vérifie $F[n-2 \leq n] = 0$. Pour les complexes de co-chaînes, le foncteur serait covariant.

Qui dit nouvel objet dit nouveaux morphismes, on ne perd pas le nord !

DÉFINITION (Morphismes de complexes de chaînes):

Soit c_\bullet et d_\bullet deux complexes de chaînes dans \mathcal{C} . Un *morphisme de complexes de chaînes* est la donnée d'une famille de flèches $c_n \xrightarrow{f_n} d_n$, $n \in \mathbb{Z}$ telle que pour tout entier relatif n , le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc}
 c_{n-1} & \xleftarrow{\partial_n^c} & c_n \\
 f_{n-1} \downarrow & & \downarrow f_n \\
 d_{n-1} & \xleftarrow{\partial_n^d} & d_n
 \end{array}
 \quad \boxed{\partial f = f \partial}$$

Remarque: La définition de morphismes de complexes coïncide bien avec celle des transformations naturelles sur les foncteurs associés aux complexes.

DÉFINITION:

Soit \mathcal{C} une catégorie additive, on pose la *catégorie des complexes de chaîne* $\mathbf{Ch}_\bullet(\mathcal{C})$ comme la catégorie munie des complexes de chaînes pour objets et de leurs morphismes pour flèches.

De manière analogue, on a $\mathbf{Ch}^\bullet(\mathcal{C})$ la catégorie des complexes de cochaînes.

Remarque:

- Cette catégorie contient des sous-catégories très utiles, en effet, il est facile de tronquer un complexe de chaîne, par exemple en gardant le même objet à partir d'un certain rang et d'utiliser les morphismes nuls, e.g.
 - $\mathbf{Ch}_b(\mathcal{C})$ la catégorie des complexes de chaînes bornés.
 - $\mathbf{Ch}_+(\mathcal{C})$ celle des complexes de chaînes positifs.
 - $\mathbf{Ch}_-(\mathcal{C})$ celle des négatifs.

- On peut aussi parler des complexes de chaînes doubles.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \cdots & \longleftarrow & X_{i-1,j-1} & \xleftarrow{\partial_{i-1,j}^h} & X_{i-1,j} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow \partial_{i,j-1}^v & & \uparrow \partial_{i,j}^v & & \\
 \cdots & \longleftarrow & X_{i,j-1} & \xleftarrow{\partial_{i,j}^h} & X_{i,j} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & &
 \end{array}$$

Avec les règles $\partial^{h^2} = 0$ $\partial^{v^2} = 0$ $\partial^h \circ \partial^v = \partial^v \circ \partial^h$.

Au niveau de la définition fonctorielle, on peut remplacer \mathbb{Z} par \mathbb{Z}^2 avec l'ordre produit (qui n'est plus total). Ceci permet une généralisation à l'ordre n et en alternant complexe de chaînes et de co-chaînes.

- $\mathbf{Ch}_\bullet(\mathcal{C})$ est une catégorie additive, car si X_\bullet et Y_\bullet sont des complexes de chaînes, alors $X_\bullet \oplus Y_\bullet := (X_n \oplus Y_n)_n$ muni de $\partial^X \oplus \partial^Y := \partial_n^X \oplus \partial_n^Y$ est un complexe de chaînes.

Méthodes simpliciales

On pose Δ la catégorie dont les objets sont les ordres totaux et les morphismes les applications croissantes.

En prenant l'exemple de \mathbb{R} où les applications continues présentent un ensemble de points de discontinuité dénombrable, cette catégorie est équivalente à la sous-catégorie des ordres totaux discrets. De plus, grâce aux propriétés de limites projectives et inductives, il est aisé de vérifier les résultats sur la sous-catégorie des ordres totaux finis qui seront représentés par les $[n] := \llbracket 0, n \rrbracket$.

DÉFINITION (Objet simplicial):

- Soit \mathcal{C} une catégorie, un *objet simplicial* est un foncteur contravariant de Δ vers \mathcal{C} .
- Un *ensemble simplicial* est un objet simplicial de \mathbf{Set} .

Notation: Pour $X : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$, on note $X_n = X([n])$. Lorsque $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ on les appelle les *n-simplexes* de X .

Pour $i \in [n]$, on pose $[n-1] \xrightarrow{d^i} [n]$ telle que pour $j < i$, $d^i(j) = j$ et pour $j \geq i$, $d^i(j) = j+1$. La flèche opère juste un décalage au rang i .

On note $d_i := X_n \xrightarrow{X[d^i]} X_{n-1}$ l'application induite. On l'appelle "face".

DÉFINITION-PROPOSITION (Complexe de Morse):

Soit M un groupe abélien simplicial ($M : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$), alors on peut définir un complexe de chaînes (M_\bullet, ∂) appelé *complexe de Morse* de la façon suivante :

- (i) $M_n = M[n]$
- (ii) $\partial_n : M_n \rightarrow M_{n-1}$

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i d_i(x)$$

De plus, $M \mapsto M_\bullet$ est un foncteur de $\mathbf{Sub-Ab}$ vers $\mathbf{Ch}_\bullet(\mathbf{Ab})$.

Preuve: Montrons consécutivement les deux résultats.

- (1) On se fixe $n \in \mathbb{N}$ et $i < j \in [n+1]$.

Déjà on peut remarquer que $d_n^j \circ d_{n-1}^i = \partial_n^i \circ \partial_{n-1}^{j-1}$. En effet, cette application envoie

- $k < i$ sur k .
- $i \leq k < j-1$ sur $k+1$.
- $l \geq j-1$ sur $k+2$.

On a alors pour $x \in M_{n+1}$, $d_i \circ d_j(x) = M[d_n^j \circ d_{n-1}^i](x) = M[d_n^i \circ d_{n-1}^{j-1}](x) = d_{j-1} \circ d_i(x)$.

Ainsi, si $i < j$, $d_i \circ d_j = d_{j-1} \circ d_i$.

Montrons maintenant que $\partial^2 = 0$.

$$\begin{aligned}
 \partial_n \circ \partial_{n+1} &= \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i \circ \partial_{n+1} \\
 &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{i+j} d_i \circ d_j \\
 &= \sum_{0 \leq j \leq i \leq n} (-1)^{i+j} d_i \circ d_j + \sum_{0 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} d_i \circ d_j \\
 &= \sum_{0 \leq j \leq i \leq n} (-1)^{i+j} d_i \circ d_j + \sum_{0 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} d_{j-1} \circ d_i \\
 &= \sum_{0 \leq j \leq i \leq n} (-1)^{i+j} d_i \circ d_j - \sum_{0 \leq i \leq k \leq n} (-1)^{i+k} d_k \circ d_i \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Ce qui prouve le résultat.

(2) Si l'on considère une transformation naturelle $M \xrightarrow{\alpha} N$, alors le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc}
 M_n & \xrightarrow{M[d^{n-1}]} & M_{n-1} \\
 \alpha_n \downarrow & & \downarrow \alpha_{n-1} \\
 N_n & \xrightarrow{N[d^{n-1}]} & N_{n-1}
 \end{array}$$

Il suffit ensuite de conclure par additivité. □

Application : complexe de chaînes régulières

L'idée est d'associer à tout espace topologique un complexe de chaînes via une suite "naturelle" de foncteurs.

$$\mathbf{Top} \xrightarrow{S} \mathbf{Sub-Set} \xrightarrow{\mathbf{Sub-L}} \mathbf{Sub-Ab} \xrightarrow{Morse} \mathbf{Ch}_+(\mathbb{Z})$$

Sub-Set et **Sub-Ab** peuvent être vus comme les catégories $\text{Fun}(\Delta^{\text{op}}, (\mathbf{Set}, \subset))$ et $\text{Fun}(\Delta^{\text{op}}, (\mathbf{Ab}, \leq))$ à isomorphisme près, même si une définition plus rigoureuse utilisant les sous-objets existe. Via cette définition, est évident que le foncteur libre $L : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Ab}$ induit un foncteur $\mathbf{Sub-L} : \mathbf{Sub-Set} \rightarrow \mathbf{Sub-Ab}$.

Morse est le foncteur précédent qui à un groupe abélien simplicial associe son complexe de MORSE.

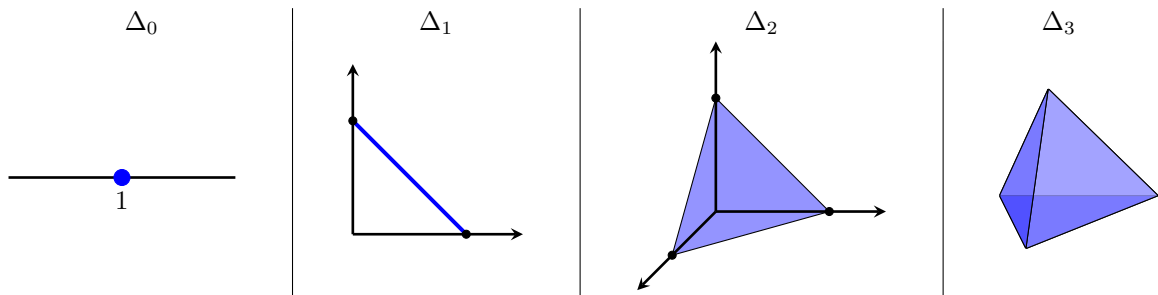
Création du foncteur S

S est un foncteur "représentable", mais avant tout, construisons un autre foncteur.

On pose $\Delta : \Delta \rightarrow \mathbf{Top}$.
 $[n] \mapsto \Delta_n$

Avec Δ_n le n^e simplexe standard topologique : $\Delta_n := \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \mid \sum x_i = 1\} = \text{Conv}(e_0, \dots, e_n)$

Exemple:

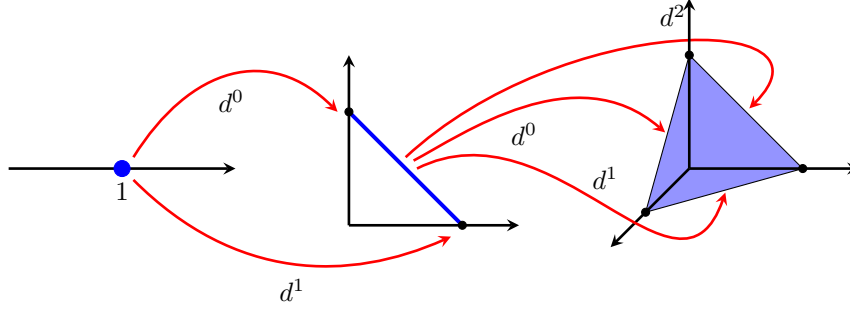


On veut rendre cette application fonctorielle, pour cela, on définit les $\Delta[d_i]$, ce qui est suffisant, car le foncteur de MORSE ne nécessite que ces morphismes.

On pose alors $\Delta[d^i] :$

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{n-1} & \longrightarrow & \Delta_n \\ (x_0, \dots, x_{n-1}) & \longmapsto & (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) \end{array} .$$

En soi, $\Delta[d^i]$ envoie Δ_{n-1} sur la i^e face de Δ_n (c'est la face opposée à e_i).



Remarque: Δ n'est pas vraiment fonctoriel, car les d^i n'engendrent que les applications strictement croissantes, voici deux manières de le rendre fonctoriel.

- (1) Considérer Δ_{inj} au lieu de Δ qui est la catégorie des ordres stricts munis des applications strictement croissantes.
- (2) Considérer l'action de Δ sur une deuxième famille s^i appelés co-dégénérescences, qui avec les d^i , engendrent Δ .

Si $j \leq i$, on a $s^i(j) = j$ et si $j > i$, on a $s^i(j) = j - 1$.

Remarque: Via les s^i , on peut se trouver un complexe de co-chaînes via la même construction que MORSE, en effet, si $i \leq j$, $s^j \circ s^i = s^i \circ s^{j+1}$.

Il est alors facile de définir $\Delta[s^i] :$

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{n+1} & \longrightarrow & \Delta_n \\ (x_0, \dots, x_{n+1}) & \longmapsto & (x_0, \dots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+1}) \end{array} .$$

Géométriquement, s^i opère l'opération inverse de d^i car $s^i \circ d^i = \text{id}$, elle envoie donc la i^e face sur le simplexe précédent, par une projection orthogonale sur le plan bissecteur de e_i et e_{i+1} .

Les simplexes standards topologiques sont évidemment des espaces topologiques, grâce à la métrique usuelle dans \mathbb{R}^{n+1} . On peut donc étudier les ensembles $\mathcal{C}(\Delta_n, X)$ pour X un espace topologique. Cela nous donne bien un foncteur contravariant de Δ vers **Set** :

$$\begin{array}{ccc} S(X) : & \Delta^{\text{op}} & \longrightarrow \text{Set} \\ & [n] & \mathcal{C}(\Delta_n, X) \\ & \phi \downarrow & \longmapsto \downarrow \Delta[\phi]^* \\ & [m] & \mathcal{C}(\Delta_m, X) \end{array}$$

On peut alors définir le foncteur représentable

$$\begin{array}{ccc} S : & \mathbf{Top} & \longrightarrow \mathbf{Sub-Set} \\ & X & S(X) \\ & f \downarrow & \longmapsto \downarrow f_* \\ & Y & S(Y) \end{array}$$

Pour récapituler la construction du foncteur, on a dans l'ordre

- (1) Créé Δ un foncteur qui va de Δ vers **Top**.
- (2) Créé pour X un espace topologique, via une construction Yonédèsque, un foncteur contravariant de Δ vers **Set**, donc un élément de **Sub-Set**, en réalité, $S(X) = \mathbf{y}_*(X)\Delta$.
- (3) Enfin, créé le foncteur S via une deuxième construction Yonédèsque, cette fois-ci duale on a alors $S = \mathbf{y}_* \star \Delta$.

Avec toutes ces constructions, on a bien la suite de foncteurs qu'on voulait.

$$\mathbf{Top} \xrightarrow{S} \mathbf{Sub-Set} \xrightarrow{\mathbf{Sub-L}} \mathbf{Sub-Ab} \xrightarrow{\text{Morse}} \mathbf{Ch}_+(\mathbb{Z})$$

Route vers d'autres complexes

Tout ce travail n'est pas vain, car si on a maintenant un foncteur $F : \Delta \longrightarrow \mathcal{C}$ avec \mathcal{C} localement petite, on a directement un foncteur de notre catégorie vers celle des complexes de chaînes positif via :

$$\mathcal{C} \xrightarrow{y_* \star F} \mathbf{Sub-Set} \xrightarrow{\mathbf{Sub-L}} \mathbf{Sub-Ab} \xrightarrow{Morse} \mathbf{Ch}_+(\mathbb{Z})$$

Et cette construction est naturelle en F . On peut appeler ce foncteur de foncteurs $\mathbf{ch}_+ : \mathbf{Sub-}\mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Ch}_+(\mathbb{Z})$.

Ainsi le principe de base de l'homologie n'est autre que de trouver un bon foncteur contravariant de la catégorie Δ vers la catégorie étudiée.

Avec le foncteur \mathbf{ch}_+ issu de la méthode simpliciale, on va définir de nouveaux complexes de chaînes.

Résolution en barres, complexe standard

À remplir

Complexe de Koszul

À remplir

Complexe de Hochschild

À remplir

Retour sur l'homologie simpliciale

Notation: On note $\mathcal{C}_\bullet^{\mathbf{Ring}}$ ou \mathcal{C}_\bullet^R le foncteur $\mathbf{ch}_+(\Delta)$, pour $n \in \mathbb{N}$, on notera $\mathcal{C}_n^R(X)$ le groupe abélien associé à l'espace topologique X , de même pour les fonctions, on notera $\mathcal{C}_n^R[f]$.

- $\mathcal{C}_0^R(X)$ est isomorphe au groupe abélien libre $\mathbb{Z}[X]$, travailler dessus équivaut à travailler sur les points de X .
- $\mathcal{C}_1^R(X)$ est isomorphe au groupe abélien libre des chemins dans X .
- En général, $\mathcal{C}_i^R(X)$ est un groupe abélien très grand et très compliqué.

Si on regarde de plus près l'action des d^i sur $\mathcal{C}(\Delta_n, X)$, on remarque que ce n'est rien d'autre qu'une restriction (on a un faisceau) des fonctions à la i^e face. Réciproquement, les s_i induisent un prolongement à la manière d'un fibré trivial.

Maintenant pour ∂ , l'histoire est plus compliquée, elle fait une restriction au bord du simplexe, sauf qu'on ajoute pour ce faire les restrictions à chaque face avec un signe qui alterne selon l'orientation de la face. Par exemple

- pour $\sigma : \Delta_1 \longrightarrow X$, $\partial_1(\sigma) = \sigma((e_1) - (e_0))$
- pour $\sigma : \Delta_2 \longrightarrow X$, $\partial_2(\sigma) \circ [e_0, e_1] = \sigma([e_1, e_2] - [e_0, e_1] + [e_0, e_2])$, avec $[a, b](t) = (1 - t)a + tb$.

III Homotopie

DÉFINITION (Homotopie):

Soit \mathcal{C} une catégorie additive et $f, g \in \mathbf{Hom}_{\mathbf{Ch}_\bullet(\mathcal{C})}(X, Y)$, alors

- (i) Une *homotopie* de f vers g est la donnée d'une famille de flèches $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X_n, Y_{n+1})$ telle que

$$f_n - g_n = \partial_{n+1}^Y \circ s_n + s_{n-1} \circ \partial_n^X$$

$$\begin{array}{ccccc} X_{n-1} & \xleftarrow{\partial_n^X} & X_n & \xleftarrow{\partial_{n+1}^X} & X_{n+1} \\ \downarrow (f-g)_{n-1} & \searrow s_{n-1} & \downarrow (f-g)_n & \searrow s_n & \downarrow (f-g)_{n+1} \\ Y_{n-1} & \xleftarrow{\partial_n^Y} & Y_n & \xleftarrow{\partial_{n+1}^Y} & Y_{n+1} \end{array} \quad \boxed{f - g = \partial s + s \partial}$$

On dit alors que f est homotope à g , et on note $f \sim g$.

- (ii) Soit $X_\bullet \xrightarrow{f, g} Y_\bullet$ sont des équivalences homotopiques inverses l'une de l'autre si $fg \sim \text{id}_{Y_\bullet}$ et $gf \sim \text{id}_{X_\bullet}$.

Remarque: La motivation vient des bases de la topologie algébrique. Si on a $f, g : X \rightarrow Y$ continues, on a $f \sim g$ s'il existe $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ continue telle que $\begin{cases} h(\star, 0) = f \\ h(\star, 1) = g \end{cases}$ Soit une déformation continue de fonctions continues. En reprenant l'homologie simpliciale, cela colle avec la définition précédente.

THÉORÈME:

Soit X, Y deux espaces topologiques et $f, g : X \rightarrow Y$ deux fonctions continues, alors f et g sont homotopes au sens de la topologie algébrique si et seulement si $\mathcal{C}_\bullet^R[f]$ et $\mathcal{C}_\bullet^R[g]$ le sont.

La preuve est technique, mais intéressante dans la construction, elle permet de savoir si on maîtrise l'homologie simpliciale de base.

Preuve: Procédons par implication retour, puis aller.

\Leftarrow D'abord, essayons de trouver s_0 , on veut que le diagramme suivant avec l'additivité demandée.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \xleftarrow{0} & \mathcal{C}_0^R(X) & \xleftarrow{\partial_1^X} & \mathcal{C}_1^R(X) \\ & \searrow 0 & \downarrow \mathcal{C}_0^R[g-f] & \swarrow s_0 & \downarrow \mathcal{C}_1^R[g-f] \\ 0 & \xleftarrow{0} & \mathcal{C}_0^R(Y) & \xleftarrow{\partial_1^Y} & \mathcal{C}_1^R(Y) \end{array}$$

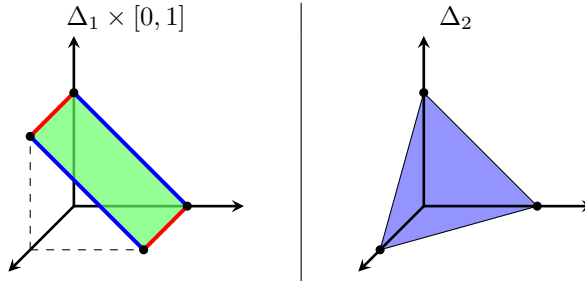
On a, d'après l'hypothèse, on a $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ continue tq $h(\star, 0) = f$ et $h(\star, 1) = g$. Cela donne envie de poser $s_0(\sigma)((1-t)e_0 + te_1) = h(\sigma(e_0), t)$. On va donc construire une application $s_0(\sigma) : \Delta_1 \rightarrow X$ bien choisie à partir de σ . On pose $\alpha = \Delta_0 \times [e_0, e_1]^{-1}$ qui envoie Δ_1 sur $\Delta_0 \times [0, 1]$, puis on lui applique $\sigma \times \text{id}_{[0,1]}$, pour arriver dans $X \times [0, 1]$, et on a le résultat voulu en appliquant encore une fois h .

$$s_0(\sigma) : \Delta_1 \xrightarrow{\alpha} \Delta_0 \times [0, 1] \xrightarrow{\sigma \times \text{id}_{[0,1]}} X \times [0, 1] \xrightarrow{h} Y$$

Cette construction est bien un élément de $\mathcal{C}_1^R(Y)$, et

$$\begin{aligned} \partial_1^Y \circ s_0(\sigma) + 0 &= d_0^Y \circ s_0(\sigma) - d_1^Y \circ s_0(\sigma) \\ &= s_0(\sigma)(e_1) - s_0(\sigma)(e_0) \\ &= h(\sigma(e_0), 1) - h(\sigma(e_0), 0) \\ &= g \circ \sigma - f \circ \sigma \\ &= \mathcal{C}_0^R[g - f] \end{aligned}$$

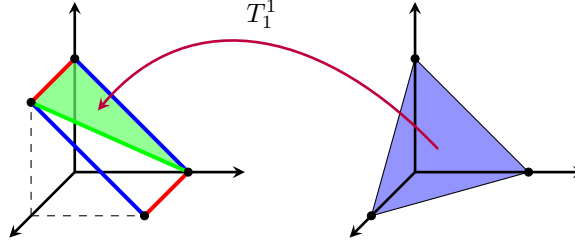
Observons maintenant le problème dans les dimensions supérieures :



Il n'y a plus l'isomorphisme si utile que dans le cas $n = 0$. On ne rajoute qu'un sommet, on ne double pas leur nombre. La question se pose alors quels sommets du quadrilatère choisir ? Le théorème de CARTHEODORY nous intuite qu'il en faut 3, et si on les a, on pourra transférer les données de Δ_2 sur le triangle défini par ces 3 sommets sur $h(\sigma, \{0, 1\})$. Sauf que les constructions algébriques veulent de la cononicité, pas un choix, alors il faut trouver un moyen de combiner tous les triplets de sommets ou au moins une partie indépendante de leur ordre. Pour ça, on va s'inspirer de la construction de MORSE.

Dans $\Delta_1 \times [0, 1]$, on pose $v_i = (e_i, 0)$ et $w_i = (e_i, 1)$. On a d'ailleurs une application $2\Delta_2$ de $[2 \cdot 1 + 1] = [4]$ vers $\Delta_1 \times [0, 1]$ qui est $[v_0, v_1, w_0, w_1]$. Pour $i \geq 1$, on étudie l'action de d^i combinée aux deux foncteurs que l'on a à disposition. On pose alors T_i^1 qui vaut l'application induite par $t_i^1 = 2\Delta_1 \circ d^i$ sur Δ_2 , qui

envoie Δ_2 sur l'enveloppe convexe de $\Delta_1 \times 0, 1$ auquel on enlève le $(i+1)^e$ membre de $[v_0, v_1, w_0, w_1]$. Par exemple, T_1^1 envoie $[e_0, e_1, e_2]$ sur $[v_0, v_1, w_1]$.



Il faut trouver un moyen de les combiner, pour ça on fait une construction similaire à celle de MORSE, car si on observe c'est ce qui a été réalisé pour $n = 0$. On pose donc $\alpha_1 = T_0^1 - T_1^1$. Nous ne vérifierons pas le résultat, au lieu de ça, cherchons une formule pour n quelconque.

Cependant cette construction nécessite une petite subtilité pour être généralisée. On voudrait T_i^n qui envoie $[e_0, \dots, e_{n+1}]$ sur $[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$, pour cela il suffit de poser $t^i = d^{n+i} \circ \dots \circ d^{i+1} = (d^{i+1})^n$, qui vaut $[0, \dots, i, n+i+1, \dots, 2n+1]$, et qui va de $[n+1]$ vers $[2n+1]$.

On pose alors $t_i^n = 2\Delta_n \circ t^i$ qui induit T_i de manière affine de Δ_{n+1} vers $\Delta_n \times [0, 1]$ qui envoie le n -simplexe standard sur le n -simplexe de sommets $[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$.

Il nous reste à poser enfin $\alpha_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i T_i^n$. Le reste vient tout seul, en posant $s_n(\sigma) = h \circ \sigma \times \text{id}_{[0,1]} \circ \alpha_n$.

Vérifions maintenant la propriété d'homologie au rang n .

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{C}_{n-1}^R(X) & \xleftarrow{0} & \mathcal{C}_n^R(X) & \xleftarrow{\partial_1^X} & \mathcal{C}_{n+1}^R(X) \\
 \downarrow \mathcal{C}_0^R[g-f] & \searrow s_{n-1} & \downarrow \mathcal{C}_n^R[g-f] & \searrow s_n & \downarrow \mathcal{C}_{n+1}^R[g-f] \\
 \mathcal{C}_{n-1}^R(Y) & \xleftarrow{\partial_n^Y} & \mathcal{C}_n^R(Y) & \xleftarrow{\partial_{n+1}^Y} & \mathcal{C}_{n+1}^R(Y)
 \end{array}$$

On pose $[a_0, \dots, a_n](t_0, \dots, t_n) = \sum t_i a_i$.

$$\begin{aligned}
 & (\partial_{n+1} \circ s_n(\sigma) + s_{n-1} \circ \partial_n(\sigma)) \circ [e_0, \dots, e_{n+1}] \\
 = & \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^n (-1)^{i+j} d_i^Y \circ h \circ \sigma \times \text{id}_{[0,1]} \circ T_j \circ [e_0, \dots, e_{n+1}] \\
 + & \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^n (-1)^{i+j} h \circ \sigma \times \text{id}_{[0,1]} \circ T_i \circ d_j^X \circ [e_0, \dots, e_{n+1}] \\
 = & \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^n (-1)^{i+j} d_i^Y \circ h \circ \sigma \times \text{id}_{[0,1]} \circ [v_0, \dots, v_j, w_j, \dots, w_n] \\
 + & \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^n (-1)^{i+j} h \circ \sigma \times \text{id}_{[0,1]} \circ T_i \circ [e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_n] \\
 = & \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} (-1)^{i+j} h \circ \sigma \times \text{id}_{[0,1]} \circ [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_j, w_j, \dots, w_n] \\
 + & \sum_{0 \leq j < i \leq n+1} (-1)^{i+j} h \circ \sigma \times \text{id}_{[0,1]} \circ [v_0, \dots, v_j, w_j, \dots, \hat{w}_{i-1}, \dots, w_n] \\
 + & \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} h \circ \sigma \times \text{id}_{[0,1]} \circ [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n] \\
 + & \sum_{0 \leq j \leq i \leq n-1} (-1)^{i+j} h \circ \sigma \times \text{id}_{[0,1]} \circ [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_{i+1}, w_{i+1}, \dots, w_n]
 \end{aligned}$$

1. Découpage des sommes en 2 via une disjonction de cas.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{0 \leq i \leq j \leq n}^2 (-1)^{i+j} h \circ \sigma \times \text{id}_{[0,1]} \circ [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_j, w_j, \dots, w_n] \\
&\quad - \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} h \circ \sigma \times \text{id}_{[0,1]} \circ [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_j, w_j, \dots, w_n] \\
&\quad - \sum_{0 \leq j \leq i \leq n} (-1)^{i+j} h \circ \sigma \times \text{id}_{[0,1]} \circ [v_0, \dots, v_j, w_j, \dots, \hat{w}_i, \dots, w_n] \\
&\quad + \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} h \circ \sigma \times \text{id}_{[0,1]} \circ [v_0, \dots, v_j, w_j, \dots, \hat{w}_i, \dots, w_n] \\
&= \sum_{i=0}^n h \circ \sigma \times \text{id}_{[0,1]} \circ [v_0, \dots, v_{i-1}, w_i, \dots, w_n] \\
&\quad - \sum_{i=0}^n h \circ \sigma \times \text{id}_{[0,1]} \circ [v_0, \dots, v_i, w_{i+1}, \dots, w_n] \\
&= h \circ \sigma \times \text{id}_{[0,1]} \circ [v_0, \dots, v_n] - h \circ \sigma \times \text{id}_{[0,1]} \circ [w_0, \dots, w_n] \\
&\quad + \sum_{i=1}^n h \circ \sigma \times \text{id}_{[0,1]} \circ [v_0, \dots, v_{i-1}, w_i, \dots, w_n] \\
&\quad - \sum_{i=0}^{n-1} h \circ \sigma \times \text{id}_{[0,1]} \circ [v_0, \dots, v_i, w_{i+1}, \dots, w_n] \\
&= (\mathcal{C}_n^R[g] - \mathcal{C}_n^R[f])(\sigma) \circ [e_0, \dots, e_n]
\end{aligned}$$

Un calcul fastidieux, mais qui fonctionne ! On a donc le sens retour de prouvé.

\Rightarrow Il suffit de poser $\sigma_x : e_0 \mapsto x$ et de prendre $h(x, t) = s_0(\sigma_x) \circ \alpha_0^{-1}(e_0, t)$, la continuité est évidente, car $(x, t) \mapsto (\sigma_x, t)$ est continue. \square

LEMME:

Soit f un morphisme de complexes de chaînes homotope au morphisme nul, alors pour tous morphismes de complexes de chaînes g et h choisis de manière cohérente, $g \circ f$ et $f \circ h$ sont homotopes au morphisme nul.

Preuve: Comte tenu du caractère dual de ce lemme, on ne fera la preuve que pour g . On choisit alors deux morphismes $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ et $g : Y_\bullet \rightarrow Z_\bullet$. On a $f = \partial \circ s + s \circ \partial$.

$$\begin{array}{ccccc}
X_{n-1} & \xleftarrow{\partial_n^X} & X_n & \xleftarrow{\partial_{n+1}^X} & X_{n+1} \\
\downarrow f_{n-1} & \searrow s_{n-1} & \downarrow f_n & \searrow s_n & \downarrow f_{n+1} \\
Y_{n-1} & \xleftarrow{\partial_n^Y} & Y_n & \xleftarrow{\partial_{n+1}^Y} & Y_{n+1} \\
\downarrow g_{n-1} & & \downarrow g_n & & \downarrow g_{n+1} \\
Z_{n-1} & \xleftarrow{\partial_n^Z} & Z_n & \xleftarrow{\partial_{n+1}^Z} & Z_{n+1}
\end{array}$$

Il suffit alors de poser $r = g \circ s$, et on a bien

$$\partial \circ r + r \circ \partial = \partial \circ s \circ g + s \circ g \circ \partial = \partial \circ s \circ g + s \circ \partial \circ g = (\partial \circ s + s \circ \partial) \circ g = f \circ g$$

\square

DÉFINITION (Catégorie des homotopies):

Soit \mathcal{C} une catégorie additive, sa *catégorie des homotopies* est la catégorie $\mathcal{K}_\bullet(\mathcal{C})$, qui admet

- (i) $\text{Ob } \mathbf{Ch}_\bullet(\mathcal{C})$ pour objets.
- (ii) $\text{Hom}_{\mathbf{Ch}_\bullet(\mathcal{C})}(X_\bullet, Y_\bullet) / \sim$ pour morphismes de source X_\bullet et d'arrivée Y_\bullet .

Remarque:

- Pour vérifier q'il s'agit bien d'une catégorie, on utilise l'additivité de $\mathbf{Ch}_\bullet(\mathcal{C})$ et le lemme précédent.
- On peut étendre la définition de \mathcal{K}_\bullet à \mathcal{K}_b , \mathcal{K}_+ et \mathcal{K}_- en faisant une restriction.
- $\mathcal{K}_\bullet(\mathcal{C})$ est une structure compliquée, c'est une *catégorie triangulée*.

2. Intersion des indices des deux dernières sommes puis changement d'indice dans la deuxième et la dernière somme.
3. Calcul des quantités deux par deux.

Chapitre 5

Catégories abéliennes

I Définitions et propriétés

Soit \mathcal{C} une catégorie additive dans laquelle chaque morphisme admet un *noyau* ($\ker f = \text{eq}(f, 0)$) et un *co-noyau* ($\text{coker } f = \text{coeq}(f, 0)$).

Chaque morphisme admet donc une factorisation *canonique* :

$$\begin{array}{ccccccc} \ker f & \xrightarrow{\iota} & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\pi} & \text{coker } f \\ & & \downarrow p & & \uparrow j & & \\ & & \text{coIm } f & \xrightarrow{\exists! \bar{f}} & \text{Im } f & & \end{array}$$

Où $\text{coIm } f = \text{coker}(\iota)$ et $\text{Im } f = \ker \pi$.

Exemple: Avec $\mathcal{C} = A\text{-Mod}$.

$$\begin{array}{ccccccc} \ker f & \hookrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \twoheadrightarrow & \text{coker } f \\ & & \downarrow & & \uparrow & & \\ & & X/\ker f & \xrightarrow{\exists! \bar{f}} & \text{Im } f & & \end{array}$$

Et \bar{f} est un isomorphisme.

Cela motive l'introduction de cette définition.

DÉFINITION (Catégorie abélienne):

Soit \mathcal{C} une catégorie additive. Alors \mathcal{C} est *abélienne* si

- (i) Tout morphisme admet un noyau et un conoyau.
- (ii) Pour tout morphisme f , le morphisme \bar{f} induit est un isomorphisme.

Exemple:

- Pour A un anneau, $A\text{-Mod}$ est abélienne. Si A est noethérien, la catégorie des A -modules de type fini est également abélienne.
- Il y a des catégories qui vérifient (i) mais pas (ii), par exemple la catégorie des groupes abéliens topologiques séparés, voir [1, p 279].
- Si \mathcal{C} est abélienne, alors \mathcal{C}^{op} l'est également.

PROPRIÉTÉ:

Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne, alors

- (i) Pour I une petite catégorie, $\text{Fun}(I, \mathcal{C})$ est abélienne.
- (ii) $\text{Ch}_\bullet(\mathcal{C})$ et $\text{Ch}^\bullet(\mathcal{C})$ sont abéliennes.

Remarque: De manière plus générale, les petits diagrammes de type \mathcal{J} d'une catégorie abélienne forment une catégorie abélienne, ainsi la catégorie des cônes et celle des co-cônes sont abéliennes, donc admettent un objet nul. On conclut donc que *les catégories abéliennes sont complètes et co-complètes*.

Preuve: La deuxième assertion est une conséquence directe de la première.

- (i) Tout d'abord, il a déjà été établi que si \mathcal{C} est additive, alors $\text{Fun}(I, \mathcal{C})$ l'est également. Il faut donc établir l'existence de noyaux et co-noyaux pour les transformations naturelles. On ne fera que les noyaux, car il suffit de prendre la catégorie opposée pour avoir le résultat.

Soit $I \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \eta \Downarrow \\ \xrightarrow{G} \end{array} \mathcal{C}$ une transformation naturelle. Considérons deux objets i, j de \mathcal{I} , ainsi qu'une flèche $i \xrightarrow{\alpha} j$. On a le diagramme commutatif suivant qui se factorise de manière unique.

$$\begin{array}{ccccc} \ker \eta_i & \xrightarrow{\iota} & F(i) & \xrightarrow{\eta_i} & G(i) \\ \downarrow \exists! \bar{\alpha} & & \downarrow F[\alpha] & & \downarrow G[\alpha] \\ \ker \eta_j & \xrightarrow{j} & F(j) & \xrightarrow{\eta_j} & G(j) \end{array}$$

Car $\eta_j \circ F[\alpha] \circ \iota = G[\alpha] \circ \eta_i \circ \iota = 0$. $\ker \eta$ est bien un foncteur, car le diagramme ci dessus est commutatif.

Vérifions que le foncteur $\ker \eta$ muni de la transformation naturelle $I \begin{array}{c} \xrightarrow{\ker \eta} \\ \iota \Downarrow \\ \xrightarrow{F} \end{array} \mathcal{C}$ est bien un noyau de η .

Nous avons déjà le résultat $\eta \iota = 0$, grâce au résultat sur chaque morphisme. Soit ϵ une transformation naturelle $I \begin{array}{c} \xrightarrow{H} \\ \epsilon \Downarrow \\ \xrightarrow{F} \end{array} \mathcal{C}$ telle que $\eta \epsilon = 0$, alors pour chaque morphisme $i \xrightarrow{\alpha} j$, on a le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} & & \epsilon_i & & & & \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ H(i) & \xrightarrow{\theta_i} & \ker \eta_i & \xrightarrow{\iota} & F(i) & \xrightarrow{\eta_i} & G(i) \\ \downarrow H[\alpha] & & \downarrow \bar{\alpha} & & \downarrow F[\alpha] & & \downarrow G[\alpha] \\ H(j) & \xrightarrow{\theta_j} & \ker \eta_j & \xrightarrow{j} & F(j) & \xrightarrow{\eta_j} & G(j) \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ & & \epsilon_j & & & & \end{array}$$

Par la propriété de noyau de $\ker \eta_i$, la factorisation via θ_i est unique, et elle commute, car

$$\eta_j \circ j \circ \theta_j \circ H[\alpha] = 0 = \eta_j \circ j \circ \bar{\alpha} \circ \theta_i$$

Donc d'après l'unicité de la propriété universelle de $\ker \eta_j$, on a $\bar{\alpha} \circ \theta_i = \theta_j \circ H[\alpha]$.

Donc θ est bien une transformation naturelle, unique par unicité respective des θ_i , qui vérifie bien

$$I \begin{array}{c} \xrightarrow{H} \\ \theta \Downarrow \\ \xrightarrow{F} \\ \iota \Downarrow \\ \xrightarrow{G} \end{array} \mathcal{C}$$

Maintenant qu'on a un noyau et un co-noyau, comme pour chaque élément i , $\text{coIm } \eta_i$ et $\text{Im } \eta_i$ sont isomorphe (et de manière naturelle), on a clairement un isomorphisme naturel entre $\text{coIm } \eta$ et $\text{Im } \eta$ qui sont des foncteurs bien définis.

- (ii) Grâce à la preuve précédente, comme un complexe de chaînes est un foncteur contravariant de (\mathbb{Z}, \leq) vers \mathcal{C} avec certaines propriétés, il nous suffit donc de vérifier que son noyau est bien un complexe de chaînes également. On a le diagramme suivant qui se factorise de manière unique comme tel.

$$\begin{array}{ccccc} \ker X_{n-1} & \xleftarrow{\bar{\partial}_{n-1}} & \ker X_n & \xleftarrow{\bar{\partial}_{n+1}} & \ker X_{n+1} \\ \downarrow \iota_{n-1} & & \downarrow \iota_n & & \downarrow \iota_{n+1} \\ X_{n-1} & \xleftarrow{\partial_n} & X_n & \xleftarrow{\partial_{n+1}} & X_{n+1} \end{array}$$

Pour la factorisation, il suffit de remarquer que $\partial \circ \partial \circ \iota = 0$, donc $\partial \circ \iota$ se factorise de manière unique en $\iota \circ \bar{\partial}$.

Maintenant, il est clair que $\partial^2 = 0$, car $\partial \circ \iota \circ \partial^2 = \partial \circ \partial^2 \circ \iota = 0 = \partial \circ \iota \circ 0$, la conclusion se fait par unicité. \square

DÉFINITION (Complexe exact):

- (i) Un complexe $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ est dit *exact* si le morphisme canonique $\text{Im } f \rightarrow \ker g$ est un isomorphisme.
- (ii) De manière général, un complexe est dit *exact* si $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\ker \partial_n$ est isomorphe à $\text{Im } \partial_{n+1}$.
- (iii) Une *suite exacte courte* est un complexe exact de la forme

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

THÉORÈME (Freyd-Mitchell):

Toute petite catégorie abélienne se plonge de manière exacte et pleine dans une sous-catégorie de la catégorie $A\text{-Mod}$ pour un certain anneau A .

Remarque: Ce théorème est très difficile à prouver, mais son résultat peut être très utile pour se simplifier la vie lors du calcul de certains éléments dans une catégorie abélienne. Cependant il faut faire attention à ces deux détails :

- Les limites projectives et inductives ne sont pas forcément les mêmes que dans un $A\text{-Mod}$, de manière générale, on se limitera à des limites finies du type somme directe ou noyau...
- Systématiquement se poser dans un A -module peut avoir des conséquences néfastes : on peut aller chercher trop compliqué, car la structure de A -module est très voire trop riche, donc attention à ne pas se détourner de son but initial.

DÉFINITION-PROPOSITION (Suite exacte scindée):

Soit $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ une suite exacte courte dans une catégorie abélienne, alors les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) Il existe une flèche s appelée *section* de g telle que $g \circ s = \text{id}_Z$.
- (ii) Il existe une flèche r appelée *rétraction* de f telle que $r \circ f = \text{id}_X$.
- (iii) Il existe $Y \xrightarrow{h} X \oplus Z$ qui induit l'isomorphisme de complexes exacts ci dessous.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X \oplus Z & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

- (iv) Le morphisme de complexes ci dessus est homotope au morphisme nul.

Dans le cas où une des conditions est remplie, on dit que la suite exacte courte est *scindée*

Preuve: Une idée à garder tout au long de la preuve est de décomposer Y en une somme directe, et ce grâce au noyau et à l'image d'un endomorphisme de Y bien choisi...

Faisons donc un cycle d'implications.

- (i) \Rightarrow (ii) L'objectif est en soi d'avoir $Y \simeq \ker sg \oplus \text{Im } sg$. On ne le montrera pas mais on fera quasiment pareil. La motivation suit de ceci :

$\ker f \simeq 0$ donc $X \simeq \text{coIm } f \simeq \text{Im } f \simeq \ker g$. Montrons donc que $\ker g \simeq \ker sg$. On a $sg \circ \iota_g = s \circ g \iota_g = 0$, donc on a une flèche de $\ker g$ vers $\ker sg$. De plus, $g \circ \iota_{sg} = gs \circ g \circ \iota_{sg} = g \circ sg \iota_{sg} = 0$, donc on a une flèche de $\ker sg$ vers $\ker g$. Par unicité des endomorphismes de $\ker g$ et $\ker sg$ ces flèches sont réciproques l'une de l'autre, on a donc un isomorphisme $\ker g \simeq \ker sg$.

Maintenant, nous cherchons à obtenir la projection de Y vers $\ker sg$. En s'inspirant du cas des espaces vectoriels, on va travailler avec $\text{id}_Y - sg$. On vérifie : $sg \circ (\text{id}_Y - sg) = sg - sg \circ sg = sg - sg \circ g \circ s \circ g = sg - sg = 0$, donc $\text{id}_Y - sg$ se factorise de manière unique par $\ker sg$.

On a donc pour résumer le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow \tilde{f} & \uparrow \iota \\ & & \ker sg \end{array} \quad \begin{array}{c} \swarrow \pi \\ \downarrow \end{array}$$

On pose donc naturellement $r = \tilde{f}^{-1} \circ \pi$.

On a $r \circ f = \tilde{f}^{-1} \circ \pi \circ f = \tilde{f}^{-1} \circ \pi \circ \iota \circ \tilde{f} = \tilde{f}^{-1} \circ \tilde{f} = \text{id}_X$.

(ii) \Rightarrow (iii) L'idée est la même, mais avec fr .

Déjà, similairement à précédemment, $\text{Im } f \simeq \text{Im } fr$ (refaire les étapes pour le noyau de manière duale), et $\text{Im } f \simeq X$, cela ne change pas.

À cela, rajoutons le fait que $rf \circ g = r \circ fg = 0$, donc on a une flèche unique de $\text{Im } g$ jusqu'à $\ker rf$, et une flèche unique de $\text{Im } g$ jusqu'à $\ker rf$, et par unicité, ces flèches sont réciproques l'une de l'autre, donc $\ker rf \simeq \text{Im } f \simeq Z$.

On a donc

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \ker g & \\
 & & \nearrow \iota_g & \updownarrow & \\
 \ker rf & \xrightarrow{\iota_k} & Y & \xrightarrow{\pi_i} & \text{Im } rf \\
 & \nwarrow & \downarrow \text{id}_Y - rf & & \\
 & & Y & &
 \end{array}$$

Ce qui nous donne des morphismes ι_k, π_k et ι_i, π_i , qui vérifient $\iota_k \pi_k + \iota_i \pi_i = \text{id}_Y$, donc $Y \simeq \text{Im } rf \oplus \ker rf \simeq X \oplus Z$.

On a donc bien $Y \xrightarrow{h} X \oplus Z$ qui induit un isomorphisme de complexes exacts.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \updownarrow & & \downarrow h & & \updownarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X \oplus Z & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

(iii) \Rightarrow (iv) Il suffit de poser $s_Y = \pi_X \circ h$ et $s_Z = \iota_Z$, on a alors $s_Y f = \pi_X \circ h \circ f = \text{id}_X$, $\iota_X \circ s_Y + s_Z \circ g = (\iota_X \pi_X + \iota_Z \pi_Z) \circ h = h$ et $\pi_Z s_Z = \text{id}_Z$ ce qui prouve le résultat.

(iv) \Rightarrow (i) On pose tout simplement $s = h^{-1} \circ s_Z$, on a alors $g \circ s = gh^{-1} \circ s_Z = \pi_Z \circ s_Z = \text{id}_Z$, ce qui est le résultat attendu. \square

Exemple: Dans $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$, toutes les suites exactes courtes sont scindées.

DÉFINITION (Foncteur exact):

Soit $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un foncteur entre deux catégories abéliennes, alors

- F est *exact à gauche* s'il commute avec les limites finies.
- F est *exact à droite* s'il commute avec les petites colimites.
- F est *exact* s'il est à la fois exact à droite et à gauche.

LEMME:

Soit $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un foncteur additif entre deux catégories, alors les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) F est exact à gauche (resp. à droite).
- (ii) F commute avec les noyaux (resp. co-noyaux).
- (iii) Pour toute suite exacte

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$$

la suite suivante est exacte.

$$0 \longrightarrow F(X) \longrightarrow F(Y) \longrightarrow F(Z)$$

(resp. la version duale de cet énoncé).

Preuve: Faisons (i) \Leftrightarrow (ii), puis (ii) \Leftrightarrow (iii)

(i) \Rightarrow (ii) C'est direct car le noyau d'un morphisme est une limite finie.

(ii) \Rightarrow (i) F est additif et préserve les \oplus , donc les produits finis. De plus F préserve les noyaux, et $\text{eq}(f, g) = \ker(f - g)$ donc F préserve les égaliseurs finis. On conclut avec le théorème du début sur la caractérisation des catégories complètes.

(ii) \Rightarrow (iii) Déjà on a $\ker F[f] \simeq F(\ker f)$ et $F(0) = 0$ donc $\ker F[f] \simeq \operatorname{Im} 0 = 0$. Ensuite $\ker F[g] \simeq F(\ker g)$, et par propriété universelle de l'image comme noyau du conoyau, on a un unique morphisme

$$F(\operatorname{Im} f) \longrightarrow \operatorname{Im} F[f]$$

le souci est que ce n'est pas forcément un isomorphisme.

Le cas présent est particulier, car f est un monomorphisme, ainsi que $F[f]$, on a donc $X \simeq \operatorname{Im} f$ donc $F(X) \simeq F(\operatorname{Im} f)$ et $F[X] \simeq \operatorname{Im} F[X]$, donc $F(\operatorname{Im} f) \simeq \operatorname{Im} F[f]$, ce qui conclut. On a alors α surjective, ce qui suffit pour conclure que $\operatorname{Im} F[f] \simeq \ker F[g]$. Ainsi on a bien l'exactitude demandée.

(iii) \Rightarrow (ii) Soit $X \xrightarrow{f} Y$ une flèche de \mathcal{C} , on pose la suite exacte

$$0 \longrightarrow \ker f \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y$$

On a alors

$$0 \longrightarrow F(\ker f) \xrightarrow{F[i]} F(X) \xrightarrow{F[f]} F(Y)$$

Ce qui donne $F(\ker f) \simeq \operatorname{Im} F[i] \simeq \ker F[f]$ et nous donne la conclusion. \square

COROLLAIRE:

F est exact si et seulement si il préserve les suites exactes courtes.

PROPRIÉTÉ:

- Pour \mathcal{C} une catégorie abélienne, le foncteur $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\star, \star) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ est exact à gauche pour chaque variable.
- $\star \otimes_A \star : \mathbf{Mod}\text{-}A \times A\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ est exact à droite pour les deux variables.
- Si $F \dashv G$, alors F est exact à gauche et G est exact à droite.

Preuve: Le troisième point est trivial, le deuxième découle du troisième et enfin le dernier point est laissé en exercice, il n'est pas très ardu. \square

Remarque: On aurait pu réécrire toutes les définitions et propriétés quand F des contravariant.

II Complexes de chaînes dans les catégories abéliennes

DÉFINITION:

Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne et $(X_{\bullet}, \partial) \in \mathbf{Ch}_{\bullet}(\mathcal{C})$, alors pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$\begin{aligned} Z_n(X) &:= \ker \partial_n && \text{les cycles.} \\ B_n(X) &:= \operatorname{Im} \partial_{n+1} && \text{les bords.} \\ H_n(X) &:= Z_n(X) / B_n(X) && \text{la } n^{\text{e}} \text{ homologie de } X. \end{aligned}$$

Pour les co-chaînes, on parle de *co-cycles*, *co-bords* et *cohomologies*.

Remarque: Le quotient peut à la fois être vu comme un quotient en tant que R -module, mais aussi comme le conoyau du morphisme de B_n vers Z_n .

Ce quotient témoigne du "défaut d'exactitude" du complexe.

Si $X_{\bullet} \xrightarrow{f} Y_{\bullet}$ est un morphisme de complexes, comme $\operatorname{Im} \partial_{n+1}$ est un sous-objet de $\ker \partial_n$ (comme $\partial_n \partial_{n+1} = 0$), par propriété universelle du quotient (ou du conoyau), f_n induit un morphisme exact $H_n[f]$ du complexe exact $H_n(X)$ vers le complexe exact $H_n(Y)$.

On a donc une transformation naturelle (soit un foncteur de complexes de chaînes)

$$H : \mathbf{Ch}_{\bullet}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Ch}_{\bullet}(\mathcal{C})$$

De plus $H(X \oplus Y) \simeq H(X) \oplus H(Y)$, donc c'est un foncteur de complexes additif.

DÉFINITION (Quasi-isomorphisme):

Un morphisme $X_{\bullet} \xrightarrow{f} Y_{\bullet}$ est un *quasi-isomorphisme* (qis) si $H[f]$ est un isomorphisme.

PROPRIÉTÉ:

Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne et $f, g \in \text{Hom}_{\text{Ch}_\bullet(\mathcal{C})}(X_\bullet, Y_\bullet)$.

- (i) Si f et g sont homotopes, alors $H[f] = H[g]$.
- (ii) Si deux complexes de chaînes sont homotopes, alors ils sont quasi-isomorphes.

Preuve: Montrons les deux assertions.

- (i) Soit $f \sim g$, alors on a s tq $(f - g)_n = \partial_{n+1}^Y s_n + s_{n-1} \partial_n^X$.
Cela donne $H_n[f - g] = H_n[\partial_{n+1}^Y s_n] + H_n[s_{n-1} \partial_n^X] = 0 + 0 = 0$, soit $H[f - g] = 0$ donc $H[f] = H[g]$.
- (ii) C'est une conséquence directe du point précédent : si on a $X_\bullet \xrightarrow{f} Y_\bullet$ et $X_\bullet \xrightarrow{g} Y_\bullet$ qui forment une équivalence homotopique, alors $gf \sim \text{id}_{X_\bullet}$ et $fg \sim \text{id}_{Y_\bullet}$, donc $\text{id}_{H(X)} = H[gf] = H[g]H[f]$ et $\text{id}_{H(Y)} = H[f]H[g] = H[f]H[g]$, donc $H[f]$ est un isomorphisme, ainsi X_\bullet et Y_\bullet sont quasi-isomorphes. \square

DÉFINITION (Contractilité):

- (i) C_\bullet est *contractile* si $\text{id}_{C_\bullet} \sim 0$.
- (ii) C_\bullet est *acyclique* si $H(C_\bullet) = 0$.

Remarque: On a directement le résultat contractile \Rightarrow acyclique, mais la réciproque est fausse, par exemple avec le complexe de chaînes constant $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ muni de la multiplication par 2 comme application aux bords.

La contractilité dans le cadre de l'homologie simpliciale colle directement avec la définition topologique.

Retournons du côté des suites exactes, on sait qu'une suite exacte courte de complexes

$$0 \longrightarrow C'_\bullet \xrightarrow{\alpha} C_\bullet \xrightarrow{\beta} C''_\bullet \longrightarrow 0$$

est la donnée d'une suite exacte de cette forme

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{\alpha_{n+1}} & C_{n+1} & \xrightarrow{\beta_{n+1}} & C''_{n+1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial'_{n+1} & & \downarrow \partial_{n+1} & & \downarrow \partial''_{n+1} \\ 0 & \longrightarrow & C'_n & \xrightarrow{\alpha_n} & C_n & \xrightarrow{\beta_{n+1}} & C''_n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial'_n & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial''_n \\ 0 & \longrightarrow & C'_{n-1} & \xrightarrow{\alpha_{n-1}} & C_{n-1} & \xrightarrow{\beta_{n-1}} & C''_{n-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

On introduit alors un lemme assez intéressant concernant les catégories abéliennes.

LEMME DU SERPENT:

Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne, on considère le diagramme suivant, dont les lignes sont exactes.

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

Alors il induit une suite exacte

$$\begin{array}{ccccc} \ker \alpha & \longrightarrow & \ker \beta & \longrightarrow & \ker \gamma \\ & & & \searrow \delta & \\ & & & & \text{coker } \alpha \longrightarrow \text{coker } \beta \longrightarrow \text{coker } \gamma \end{array}$$

Preuve: Retraçons le diagramme commutatif avec quelques précisions (les lignes restent exactes, et les colonnes le deviennent).

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \ker \alpha & \xrightarrow{\bar{f}} & \ker \beta & \xrightarrow{\bar{g}} & \ker \gamma & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \iota_\alpha & & \downarrow \iota_\beta & & \downarrow \iota_\gamma & \\
 & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & \\
 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \\
 & \downarrow \pi_\alpha & & \downarrow \pi_\beta & & \downarrow \pi_\gamma & \\
 0 & \longrightarrow & \text{coker } \alpha & \xrightarrow{\tilde{f}} & \text{coker } \beta & \xrightarrow{\tilde{g}} & \text{coker } \gamma \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

D'après FREYD-MITCHELL, ce diagramme (fini) est équivalent à une catégorie finie de R -modules. On suppose donc que ce sont des R -modules.

Remontons le chemin coloré.

Soit $x \in \ker \gamma$, il existe $y \in B$ tel que $g(y) = x$. On a ensuite $g' \circ \beta \circ y = \gamma \circ g(y) = \gamma(x) = 0$, donc par exactitude, on a $\beta(y) \in \ker g' = \text{Im } f$. Il existe donc $z \in A'$ tq $f(z) = \beta(y)$.

On pose ensuite $[z]$ la classe d'équivalence de z dans $\text{coker } \alpha$. On a alors pour un autre "chemin" y', z' , alors $y - y' \in \ker g = \text{Im } f$, donc on a un antécédent $f(s) = y - y'$, et $f' \circ \alpha(s) = \beta \circ f(s) = \beta(y - y') = f'(z - z')$, donc $z - z' \in \text{Im } \alpha$, donc $[z - z'] = [0]$ ainsi le choix ne dépend pas des antécédents choisis. On a donc une application $\delta : \ker \gamma \longrightarrow \text{coker } \alpha$.

Il est évident que δ est un morphisme de R -modules car il a été déterminé à partir d'opération algébriques utilisant des morphismes de modules.

Montrons maintenant que $\ker \delta = \text{Im } \bar{g}$.

⊂ : Soit $x \in \ker \delta$, on retrouve le s comme antécédent d'un z d'avant par α , on a alors $\beta \circ f(s) = 0$, donc $f(s) \in \ker \beta$, donc $g \circ f(s) = x \in \text{Im } \bar{g}$.

⊃ : Soit $x \in \text{Im } \bar{g}$, alors $\beta(y) = 0$, donc $z = 0$, donc $\delta(x) = [z] = 0$.

Puis $\text{Im } \delta = \ker \tilde{f}$

⊂ : Soit $[z] \in \text{Im } \delta$, alors $\tilde{f}([z]) = [f'(z)] = [\beta(y)] = [0]$.

⊃ : Soit $[z] \in \ker \tilde{f}$, alors $f'(z) \in \text{Im } \beta$, donc il existe y tq $\beta(y) = f'(z)$. On pose alors $x = g(y)$, et on a bien par construction $\delta(x) = [z]$.

On a donc montré l'existence de cette suite exacte. □

On peut alors énoncer un théorème assez surprenant.

THÉORÈME (Suite exacte longue):

Une suite exacte courte de complexes

$$0 \longrightarrow C'_\bullet \xrightarrow{\alpha} C_\bullet \xrightarrow{\beta} C''_\bullet \longrightarrow 0$$

donne lieu à une suite exacte longue

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & H_{n+1}(C') & \longrightarrow & H_{n+1}(C) & \longrightarrow & H_{n+1}(C'') \\
 & & & & & \searrow \delta_{n+1} & \\
 & & \hookrightarrow & H_n(C') & \longrightarrow & H_n(C) & \longrightarrow H_n(C'') \\
 & & & & & \searrow \delta_n & \\
 & & \hookrightarrow & H_{n-1}(C') & \longrightarrow & H_{n-1}(C) & \longrightarrow H_{n-1}(C'') \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

Preuve: Le foncteur \ker est exact à droite et le foncteur coker est exact à gauche, donc l'exactitude des lignes du premier diagramme induit celle des lignes du deuxième.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & C'_n & \xrightarrow{\alpha_n} & C_n & \xrightarrow{\beta_{n+1}} & C''_n \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial'_n & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial''_n \\
 0 & \longrightarrow & C'_{n-1} & \xrightarrow{\alpha_{n-1}} & C_{n-1} & \xrightarrow{\beta_{n-1}} & C''_{n-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 & & C'_n / \operatorname{Im} \partial'_{n+1} & \xrightarrow{\bar{\alpha}_n} & C_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1} & \xrightarrow{\bar{\beta}_n} & C''_n / \operatorname{Im} \partial''_{n+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \bar{\partial}'_n & & \downarrow \bar{\partial}_n & & \downarrow \bar{\partial}''_n \\
 0 & \longrightarrow & \ker \partial'_{n-1} & \xrightarrow{\bar{\alpha}_{n-1}} & \ker \partial_{n-1} & \xrightarrow{\bar{\beta}_{n-1}} & \ker \partial''_{n-1}
 \end{array}$$

Cela est justifié par l'existence d'un unique morphisme de $\operatorname{Im} \partial_{i+1}$ vers $\ker \partial_i$.

On applique ainsi le lemme du serpent au deuxième diagramme.

$$\text{On a } \begin{cases} \ker \bar{\partial}_n = \ker \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1} = H_n(C) \\ \operatorname{coker} \bar{\partial}_n = \ker \partial_{n-1} / \operatorname{Im} \partial_n = H_{n-1}(C) \end{cases}$$

Cela donne donc une suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_n(C') & \longrightarrow & H_n(C) & \longrightarrow & H_n(C'') & & \\
 & & & & \delta_n & \searrow & \\
 & & & & & & H_{n-1}(C'') \longrightarrow H_{n-1}(C) \longrightarrow H_{n-1}(C'')
 \end{array}$$

Il est évident qu'à deux étapes différentes, les flèches entre les $H_n(C)$ restent les mêmes, cela suffit donc pour conclure.

On ajoutera l'information $\boxed{\alpha_{n-1} \circ \delta_n \circ \beta_n = \partial_n}$

□

Remarque: δ est naturel en la suite exacte courte, cela suit de la dernière identité écrite dans la preuve.

III Objets projectifs et injectif

DÉFINITION:

Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne.

- (i) $I \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ est *injectif* si $\operatorname{Hom}(\star, I) : \mathcal{C}^{\operatorname{op}} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ est exact.
- (ii) $P \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ est *projectif* si $\operatorname{Hom}(P, \star) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ est exact.
- (iii) \mathcal{C} a assez d'objets injectifs si pour tout objet X , il existe I un objet projectif et un épimorphisme $X \xrightarrow{f} I$.
- (iv) \mathcal{C} a assez d'objets projectifs si pour tout objet Y , il existe P un objet projectif et un épimorphisme $P \xrightarrow{g} Y$.

PROPRIÉTÉ:

Nous avons les deux équivalences suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 \text{(i) } I \text{ est injectif} & \iff & \begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \alpha \downarrow & \\ & I & \end{array} \implies \begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \alpha \downarrow & \swarrow \exists \bar{\alpha} \\ & I & \end{array} \\
 \text{(ii) } P \text{ est projectif} & \iff & \begin{array}{ccc} & P & \\ & \downarrow \beta & \\ X & \xrightarrow{g} Y & \longrightarrow 0 \end{array} \implies \begin{array}{ccc} & P & \\ & \downarrow \beta & \\ X & \xrightarrow{g} Y & \longrightarrow 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \swarrow \exists \bar{\beta} \\ \end{array}
 \end{array}$$

Remarque: Ces propriétés mettent en exergue la factorisation des limites projectives et inductives par les objets projectifs et injectifs.

Preuve: Montrons seulement le point (ii), car le point (i) est sa version duale.

$$\begin{array}{lcl}
P \text{ est projectif} & \iff & \text{Hom}(P, \star) \text{ est exact.} \\
& \iff & \text{Hom}(P, \star) \text{ est exact à droite} \\
& & X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \longrightarrow 0 \quad \text{exacte.} \\
& \iff & \Downarrow \\
& & \text{Hom}(P, X) \xrightarrow{\alpha_*} \text{Hom}(P, Y) \xrightarrow{\beta_*} \text{Hom}(P, Z) \longrightarrow 0 \quad \text{exacte.} \\
& \iff & \begin{array}{ccc} P & & P \\ \downarrow \beta & \Rightarrow & \downarrow \beta \\ X \xrightarrow{g} Y \longrightarrow 0 & & X \xrightarrow{g} Y \longrightarrow 0 \end{array}
\end{array}$$

On a donc l'équivalence recherchée. \square

THÉORÈME:

Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne.

- (i) Soit $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'objets de \mathcal{C} , alors $\prod_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ est injectif ssi $\forall \lambda \in \Lambda$, I_λ est injectif.
- (ii) Soit $(P_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'objets de \mathcal{C} , alors $\coprod_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda$ est projectif ssi $\forall \lambda \in \Lambda$, P_λ est projectif.
- (iii) $I \in \mathcal{C}$ est injectif ssi tout monomorphisme de source I admet une rétraction.
- (iv) $P \in \mathcal{C}$ est projectif ssi tout épimorphisme d'arrivée P admet une section.

Preuve: Montrons uniquement (ii) et (iv).

(ii) En utilisant la propriété précédente, en prenant la donnée de diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
& P_\lambda & \\
\swarrow \exists \bar{\beta}_\lambda & \downarrow \beta_\lambda & \\
X_\lambda & \xrightarrow{g_\lambda} Y_\lambda & \longrightarrow 0
\end{array}$$

on a directement l'équivalence.

(iv) Faisons un aller retour

\Rightarrow Soit $X \xrightarrow{g} P$ un épimorphisme. On considère la factorisation

$$\begin{array}{ccc}
& P & \\
\swarrow \exists s & \downarrow \text{id}_P & \\
X & \xrightarrow{g} P & \longrightarrow 0
\end{array}$$

\Leftarrow On pourrait s'en sortir en invoquant le lemme de YONEDA, mais faisons une construction utilisant des propriétés plus élémentaires des catégories abéliennes, comme sa complétude par exemple.

Soit

$$\begin{array}{ccc}
& P & \\
& \downarrow \beta & \\
X & \xrightarrow{g} Y & \longrightarrow 0
\end{array}$$

On a avec les propriétés du produit fibré

$$\begin{array}{ccc}
X \times_Y P & \xrightarrow{\bar{g}} & P \\
\bar{\beta} \downarrow & & \downarrow \beta \\
X & \xrightarrow{g} & Y \longrightarrow 0
\end{array}$$

Or on a par les propriétés d'image de Y

$$\begin{array}{ccccc}
X \times_Y P & \xrightarrow{\bar{g}} & \text{Im } \bar{g} & \longrightarrow & P \\
\bar{\beta} \downarrow & & \searrow & & \downarrow \beta \\
X & \xrightarrow{g} & Y & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Les propriétés du produit fibré nous donnent donc $\text{Im } \bar{g} \simeq P$, donc on a

$$\begin{array}{ccccc} X \times_Y P & \xrightarrow{\bar{g}} & P & \longrightarrow & 0 \\ \bar{\beta} \downarrow & & \downarrow \beta & & \\ X & \xrightarrow{g} & Y & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

\bar{g} admet donc une section s , on a qu'à poser $\bar{\beta}' := \bar{\beta} \circ s$. \square

LEMME (Critère de Baer):

Soit A un anneau unitaire, et M un R -module, alors

$$M \text{ est injectif} \iff \text{Tout morphisme d'un idéal de } A \text{ vers } M \text{ se prolonge à } A.$$

Preuve: Le sens aller est évident, montrons donc le sens retour. Soit M vérifiant la propriété énoncée dans le lemme, et $N \xhookrightarrow{\iota} M$. On indentifie N à $\text{Im } \alpha$, donc à un sous-module de M pour plus de facilité.

Le but est donc de prolonger un morphisme $h : N \rightarrow L$ à M tout entier. On applique pour cela le lemme de ZORN à l'ensemble ordonné des extensions f de h dans M , muni de la relation d'ordre $f' : M' \rightarrow L \preceq f'' : M'' \rightarrow L$ si $M' \subset M''$ et $f'|_{M'} = f'$. L'inductivité de cet ensemble est évidente, on exhibe alors un élément maximal $f' : M' \rightarrow L$.

Montrons alors que $M' = M$. Pour ce faire, on va supposer le contraire, en choisissant un élément $m \in M \setminus M'$. Montrons alors que f' se prolonge à $M'' := \langle m \rangle + M'$ pour exhiber une contradiction.

L'ensemble $I := \{a \cdot m \in M' \mid a \in A\}$ est évidemment un idéal de A , on pose alors naturellement $g : i \in I \mapsto f'(i \cdot m)$ qui se prolonge à A tout entier en une fonction g , donc on pose $f'' : M'' \rightarrow L$ par $f''|_{M'} = f'$ et $f''(a \cdot m) = g(a)$, ce qui définit bien un morphisme de modules.

f' n'est donc pas un élément maximal, donc $M' = M$, on a bien prolongé h à M . \square

COROLLAIRE:

- (i) Soit A un anneau noethérien, une somme directe quelconque d'objets injectifs est injective.
- (ii) Soit A un anneau principal,

$$M \text{ est injectif} \iff M \text{ est divisible}$$

i.e. pour tout $a \in A$, la multiplication par a est surjective.

Preuve: Montrons les deux points.

- (i) Soit $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$, où les M_λ sont injectifs. Soit I un idéal et $f : I \rightarrow Q$ un morphisme.

Comme A est noethérien, $I = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ et pour chaque i , $\pi_\lambda \circ f(x_i)$ est nul sauf sur un nombre fini de λ . On pose Λ' la réunion de ces λ pour chaque i . L'information de f est contenue uniquement dans les $\pi_\lambda \circ f$ pour $\lambda \in \Lambda'$, donc f se factorise à travers $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda'} M_\lambda$, qui est injectif par les propriétés de produit fini, en f' . On prolonge f' à A en g' puis on prolonge g' à $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ de manière naturelle en g , on a donc bien g

qui prolonge f sur A , donc M est injectif.

Contrairement à ce qu'on pourrait penser, le résultat n'est pas trivial, car \bigoplus est un module libre engendré : on ne prend que les combinaisons linéaires finies, il n'est donc isomorphe au produit que dans le cas fini.

- (ii) Procédons par aller retour.

\Rightarrow Si M est injectif, pour $a \in A \setminus \{0\}$, et $m \in M$, on pose $f : \langle a \rangle \rightarrow M$ par $f(b \cdot a) = b \cdot m$. Comme M est injectif, f se prolonge à A , on note $n = \tilde{f}(1)$, on a bien $a \cdot n = a \cdot \tilde{f}(1) = \tilde{f}(a) = m$, donc $a \cdot \star$ est bien surjective, donc M est divisible.

\Leftarrow Si M est divisible, alors pour tout idéal non trivial $I = \langle a \rangle$ de A , et tout morphisme $f : I \rightarrow M$ donné par $f(a) = m$, on pose n un antécédent de m par $a \cdot \star$, on peut alors prolonger f en posant $\tilde{f}(1) = n$, donc M est injectif. Si I est trivial, il suffit de considérer le morphisme nul. \square

THÉORÈME:

Soit A un anneau unitaire, alors $\mathbf{Mod}\text{-}A$ et $A\text{-}\mathbf{Mod}$ ont assez d'objets injectifs et projectifs.

Preuve: On ne fera la preuve que pour les A -modules à droite, l'autre étant la version contravariante de celle ci. Il faut toutefois remarquer que $\mathbf{Mod}\text{-}A^{\text{op}} \simeq \mathbf{Mod}\text{-}B$, avec B non nécessairement égal à A , il faut donc montrer l'existence d'assez d'objets injectifs (I) et projectifs (P).

(P) Tout module est le quotient d'un module libre : pour $m \in M$, on pose $f_m : A \longrightarrow M$, et on a $A \xrightarrow{1} m$, et on a A projectif, car $\text{Hom}(A, \star) \simeq \text{id}_{\mathbf{Mod}-A}$ est exact.

On a alors $\coprod_{m \in M} A \xrightarrow{(f_m)_m} M$ un morphisme dont la source est un objet projectif.

(I) Procédons en trois étapes.

(1) Montrons que \mathbb{Q}/\mathbb{Z} est un groupe abélien injectif. Pour cela, il suffit de le voir comme un \mathbb{Z} -module. Comme \mathbb{Z} est principal car euclidien et \mathbb{Q} à division, donc \mathbb{Q}/\mathbb{Z} aussi, on peut appliquer le corollaire du critère de BAER, qui nous donne instantanément la solution.

(2) On pose alors $D : \mathbf{Mod}-A \longrightarrow A\text{-}\mathbf{Mod}$, qui est exact car \mathbb{Q}/\mathbb{Z} est injectif.

$$M \longmapsto \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

Et $M \xrightarrow{m \mapsto \mathbf{ev}_n} D^2(M)$ est injective.

En effet, pour $m \in M$

- si $o(m) = n \neq 0$, on pose $\phi_m : \langle m \rangle \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ qui est bien définie.

$$m \longmapsto \left[\frac{1}{n} \right]$$

- si $o(m) = \infty$, on pose $\phi_m : \langle m \rangle \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ qui est bien définie.

$$m \longmapsto \left[\frac{1}{2} \right]$$

Donc on a pour $m \neq 0$ un morphisme $\phi_m : \langle m \rangle \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. On le prolonge à M grâce à l'injectivité de \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . On a alors $\mathbf{ev}_m(\tilde{\phi}_m) \neq 0$. Ce qui nous donne $\ker \mathbf{ev} = \{0\}$.

(3) On a donc $D(M) \in A\text{-}\mathbf{Mod}$ qui a assez d'objets projectifs (i), donc il existe P projectif dans $A\text{-}\mathbf{Mod}$ et un épimorphisme (donc surjectif) $P \twoheadrightarrow D(M) \longrightarrow 0$. L'exactitude du foncteur contravariant D nous donne $0 \longrightarrow D(D(M)) \hookrightarrow D(P)$, ainsi on a un monomorphisme

$$M \xhookrightarrow{\mathbf{ev}} D(D(M)) \hookrightarrow D(P)$$

Et $D(P)$ est injectif, en effet, on a

$$\begin{array}{ccc} D(L) & \xrightarrow{g^*} & D(N) \\ \beta^* \downarrow & \swarrow \tilde{\beta}^* & \\ D(P) & & \end{array}$$

Ce qui conclut cette preuve. □

Remarque: Cette preuve nous indique même qu'on peut considérer ces objets projectifs comme des A -modules à droite et à gauche (grâce à la section qui nous ramène dans un module libre). On avait déjà l'exactitude du foncteur $A \otimes \star$ (car c'est le foncteur identité), mais ici, les foncteurs $P \otimes \star$ et $\star \otimes P$ sont exacts. On peut le vérifier tout simplement avec le lemme de SCHAPIRO pour l'exactitude à gauche, et pour l'exactitude à droite, en se ramenant au module libre.

Un nouvel objectif se dessine alors : caractériser les A -modules M tels que $M \otimes \star$ soit exact.

DÉFINITION (Module plat):

Soit A un anneau unitaire, un A module à droite (resp. à gauche) M est *plat* si le foncteur $M \otimes \star$ (resp. $\star \otimes M$) est exact.

Remarque: On a directement projectif \implies plat

IV Résolutions et foncteurs dérivés

DÉFINITION (Résolution):

Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne et $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$.

- (i) Une *résolution projective* de X est la donnée d'un complexe $P_\bullet \in \mathbf{Ch}_+(\mathcal{C})$ et d'un morphisme $P_0 \xrightarrow{\pi} X$ tels que le complexe suivant soit exact.

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\partial_2} P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\pi} X \longrightarrow 0$$

- (ii) Une *(co)résolution injective* de X est la donnée d'un complexe $I^\bullet \in \mathbf{Ch}^+(\mathcal{C})$ et d'un morphisme $X \xrightarrow{i} I_0$ tels que le complexe suivant soit exact.

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{i} I_0 \xrightarrow{\partial^0} I^1 \xrightarrow{\partial^1} I^2 \longrightarrow \cdots$$

PROPRIÉTÉ:

Si \mathcal{C} admet assez d'objets projectifs (resp. injectifs), alors tout objet admet une résolution projective (resp. injective).

Preuve: On ne montre que le cas projectif en construisant la suite P_n par récurrence. Soit $X \in \mathcal{C}$.

(I) On pose $P_0 \xrightarrow{\pi} X$ avec P_0 projectif qui existe car \mathcal{C} a assez d'objets projectifs.

(H) Pour $n \in \mathbb{N}$, avec la convention $\partial_0 = \pi$, on a $\ker \partial_n \xrightarrow{i_n} P_n$. Il existe $P_{n+1} \xrightarrow{\pi_{n+1}} \ker \partial_n$ un épimorphisme. Il se rétracte sur P_n tout entier en un morphisme ∂_{n+1} , et on a bien $\ker \partial_n \simeq \text{Im } \partial_{n+1}$.

Avec cette construction, on a le complexe de chaînes positif désiré. \square

THÉORÈME:

Soit \mathcal{C} une catégorie avec assez d'objets projectifs, $X, X' \in \text{Ob } \mathcal{C}$, $X \xrightarrow{f} X'$.

Soit $\begin{cases} P_\bullet \text{ une résolution projective de } X \\ Q_\bullet \text{ une résolution projective de } X' \end{cases}$, alors

(i) f peut se rétracter en un morphisme $P_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} Q_\bullet$.

(ii) Deux rétractions d'une même flèche sont homotopes.

Preuve: Montrons successivement les deux points.

(i) On reprend les hypothèses de l'énoncé, et on construit f_\bullet par récurrence.

(I) On a le diagramme suivant qu'on peut relever.

$$\begin{array}{ccc} P_0 & \xrightarrow{\pi} & X \\ \exists f_0 \downarrow & \searrow f \circ \pi & \downarrow f \\ Q_0 & \xrightarrow{\pi'} & X' \end{array}$$

(H) On considère que $\partial_0 = \pi$ encore une fois pour plus de simplicité. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que l'on a déjà défini f_n . Le diagramme suivant se relève ainsi.

$$\begin{array}{ccccc} P_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & P_n & \xrightarrow{\partial_n} & P_{n-1} \\ \exists f_{n+1} \downarrow & \searrow \exists! \tilde{f}_n & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ Q_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & \text{Im } \partial'_{n+1} & \longrightarrow & Q_n \xrightarrow{\partial'_n} Q_{n-1} \end{array}$$

En effet, $\partial'_n \circ f_n \circ \partial_{n+1} = f_{n-1} \circ \partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$, donc $f_n \circ \partial_{n+1}$ se factorise de manière unique par $\ker \partial'_n \simeq \text{Im } \partial'_{n+1}$.

On a donc bien défini f_{n+1} à partir de f_n .

On a plus qu'à directement poser $f_\bullet = (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(ii) On suppose qu'on a deux extensions f_\bullet et f'_\bullet de f . Le cas $n = -1$ est déjà clair, il suffit de prendre $s_{-1} = 0$. Construisons le reste de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence.

(I) On a le diagramme suivant qu'on peut relever.

$$\begin{array}{ccccc} & & P_0 & \xrightarrow{\pi} & X \\ & \swarrow \exists s_0 & \downarrow f_0 & \downarrow f'_0 & \downarrow f \\ Q_1 & \xrightarrow{\partial'_1} & \text{Im } \partial'_1 & \longrightarrow & Q_0 \xrightarrow{\pi'} X' \end{array}$$

En effet, $\pi' \circ f = f \circ \pi = \pi' \circ f'_0$ donc $f_0 - f'_0$ se factorise par $\ker \pi' \simeq \text{Im } \partial'_1$ en g .

On a alors $f_0 - f'_0 = \partial'_1 \circ s_0$.

(H) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que s_{n-1} a été définie correctement. Le diagramme suivant se relève ainsi.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P_n & \xrightarrow{\partial_n} & P_{n-1} \\
 & \swarrow \text{!} s_{n+1} & \downarrow f_n & \downarrow f'_n & \downarrow f_{n-1} \\
 & & Q_0 & \xrightarrow{\partial'_n} & X' \\
 Q_{n+1} & \xrightarrow{\tilde{\partial}'_{n+1}} & \text{Im } \partial'_{n+1} & \xrightarrow{\quad} & Q_0
 \end{array}$$

(Note: The diagram also includes a dashed red arrow from P_n to Q_{n+1} labeled $\exists! g_n$ and a dashed red arrow from $\text{Im } \partial'_{n+1}$ to Q_0 labeled $\exists! g_n$.)

En effet, $\partial'_n \circ (f_n - f'_n - s_{n-1} \partial_n) = \partial_n \circ (f_{n-1} - f'_{n-1} - \partial'_n s_{n-1}) = \partial_n \circ \partial_{n-1} s_{n-1} = 0$, donc cette flèche se factorise à travers $\ker \partial'_n \simeq \text{Im } \partial'_{n+1}$ en g_n .

On a alors $\partial'_{n+1} s_n + s_{n-1} \partial_n = f_n - f'_n - s_{n-1} \partial_n + s_{n-1} \partial_n = f_n - f'_n$. Ce qui est la propriété requise.

On a ainsi prouvé la seconde propriété par récurrence. \square

Remarque:

- On a seulement utilisé la propriété d'objet projectif pour P_\bullet et d'exactitude pour Q_\bullet , on pourrait ainsi généraliser le résultat avec ces seules hypothèses moins fortes. Pour cela, il faut voir les *modèles acycliques*. L'utilisation de H n'est alors plus triviale.
- Le même résultat est valable en version duale pour les objets injectifs.

DÉFINITION-PROPOSITION:

Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne dotée d'assez d'objets projectifs, il existe alors un foncteur

$$P_R : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{K}_+(\text{Proj}(\mathcal{C}))$$

envoyant tout objet sur une de ses résolutions projectives. De plus

- (i) $(H \circ P_R)_0 = \text{id}_{\mathcal{C}}$.
- (ii) si $i > 0$, $(H \circ P_R)_i = 0$.

Preuve: Pour l'existence du foncteur, il suffit de montrer que le complexe homotopique choisi ne dépend pas de la résolution, pour éviter d'avoir à invoquer l'axiome du choix.

On suppose donc qu'on a P_\bullet et Q_\bullet deux résolutions projectives de X , alors id_X se rétracte en deux morphismes de complexes f et g comme dans le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc}
 P_\bullet & \longrightarrow & X \\
 \downarrow f & & \downarrow \text{id}_X \\
 Q_\bullet & \longrightarrow & X \\
 \downarrow g & & \downarrow \text{id}_X \\
 P_\bullet & \longrightarrow & X
 \end{array}$$

(Note: A curved arrow labeled id_{P_\bullet} connects the first P_\bullet to the last P_\bullet .)

On a donc d'après le théorème précédent $g_\bullet f_\bullet \sim \text{id}_{P_\bullet}$, donc leur image dans la catégorie des complexes homotopiques sera la même.

Les points (i) et (ii) découlent directement de l'exactitude des résolutions projectives de X . \square

Remarque:

- Encore une fois on peut avoir la version duale du théorème avec un foncteur

$$I_R : \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{K}^+(\text{Inj}(\mathcal{C}))$$

Il vérifiera alors les mêmes identité de composition avec H .

- Il est facile de remarquer que le complexe trivial X est quasi-isomorphe à P_X le complexe d'une représentation projective, cependant il ne sont certainement pas homotopes !

Il est donc justifié de vouloir travailler dans une catégorie où quasi-isomorphe est équivalent à isomorphe : c'est le cas des *catégories dérivées*.

$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un foncteur additif entre deux catégories abéliennes, induit deux autres foncteurs

$$\begin{cases} F_\bullet : \mathbf{Ch}_\bullet(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Ch}_\bullet(\mathcal{D}) \\ \bar{F} : \mathcal{K}_\bullet(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{K}_\bullet(\mathcal{D}) \end{cases}$$

DÉFINITION (*Foncteur dérivé*):

Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur additif entre deux catégories abéliennes.

- (i) Si \mathcal{C} admet assez d'objets projectifs, le n^e foncteur dérivé à gauche $L_n F$ de F est la composée

$$\mathcal{C} \xrightarrow{P_R} \mathcal{K}_+(\text{Proj}(\mathcal{C})) \xrightarrow{\bar{F}} \mathcal{K}_+(\mathcal{D}) \xrightarrow{H_n} \mathcal{D}$$

- (ii) Si \mathcal{C} admet assez d'objets injectifs, le n^e foncteur dérivé à droite $R^n F$ de F est la composée

$$\mathcal{C} \xrightarrow{I_R} \mathcal{K}^+(\text{Inj}(\mathcal{C})) \xrightarrow{\bar{F}} \mathcal{K}^+(\mathcal{D}) \xrightarrow{H^n} \mathcal{D}$$

Concrètement, $L_n F(X) = H_n \bar{F}(P_X)$ avec P_X une représentation projective de X et $R^n F(X) = H^n \bar{F}(I_X)$ avec I_X une représentation injective de X .

THÉORÈME:

Soit \mathcal{C} avec assez d'objets projectifs.

- (i) $L_n F$ est additif pour $n \in \mathbb{N}$.
(ii) Si F est exact à droite, alors $L_0 F \simeq F$.
(iii) Si $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ est une suite exacte courte dans \mathcal{C} , on a une suite exacte longue

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & L_{n+1}F(A) & \longrightarrow & L_{n+1}F(B) & \longrightarrow & L_{n+1}F(C) \\ & & & & \searrow \delta_{n+1} & & \\ & & L_nF(A) & \longrightarrow & L_nF(B) & \longrightarrow & L_nF(C) \\ & & & & \searrow \dots & & \\ & & L_1F(A) & \longrightarrow & L_1F(B) & \longrightarrow & L_1F(C) \\ & & & & \searrow \delta_0 & & \\ & & L_0F(A) & \longrightarrow & L_0F(B) & \longrightarrow & L_0F(C) \longrightarrow 0 \end{array}$$

De plus δ est naturel en la suite exacte courte.

- (iv) Si $n > 0$ et P projectif, alors $L_n F(P) = 0$.

Preuve: C'est un théorème riche, tâchons de montrer chacun de ses points.

- (i) Il suffit de montrer que P_R est additif. Cela est presque direct : en considérant X et Y deux objets de \mathcal{C} , on a le diagramme suivant qui se rétracte.

$$\begin{array}{ccccc} P_X & \xleftarrow[\iota_X^\bullet]{\pi_X^\bullet} & P_{X \oplus Y} & \xleftarrow[\iota_Y^\bullet]{\pi_Y^\bullet} & P_Y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \xleftarrow[\iota_X]{\pi_X} & X \oplus Y & \xleftarrow[\iota_Y]{\pi_Y} & Y \end{array}$$

On a alors $\iota_X^\bullet \pi_X^\bullet + \iota_Y^\bullet \pi_Y^\bullet \sim \text{id}_{X \oplus Y} = \text{id}_{P_X \oplus P_Y}$. donc $P_R(X \oplus Y) \simeq P_R(X) \oplus P_R(Y)$.

- (ii) Si F est exact à droite, on a $X = \text{coker } \partial_1$, donc $F(X) = F(\text{coker } \partial_1) \simeq \text{coker } F(\partial_1) = H_0 F(P_R(X)) = L_0 F(X)$.
(iii) On pourrait penser pour cette étape que l'on a besoin de l'exactitude de F , mais ce n'est pas le cas car les suites exactes courtes d'objets projectifs sont scindées au vu de l'existence d'une section pour l'épimorphisme.

- (1) La suite exacte se rétracte en une suite exacte comme il suit

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P_A & \xrightarrow{f^\bullet} & P_B & \xrightarrow{g^\bullet} & P_C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

(2) On y applique F et comme les lignes sont scindées, on a

$$0 \longrightarrow F(P_A) \xrightarrow{f_\bullet} F(P_B) \xrightarrow{g_\bullet} F(P_C) \longrightarrow 0$$

(3) On y applique le lemme du serpent, et on a

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & L_{n+1}F(A) & \longrightarrow & L_{n+1}F(B) & \longrightarrow & L_{n+1}F(C) \\ & & & & \searrow \delta_{n+1} & & \\ & \hookrightarrow & L_nF(A) & \longrightarrow & L_nF(B) & \longrightarrow & L_nF(C) \\ & & & & \searrow \delta_n & & \\ & \hookrightarrow & L_{n-1}F(A) & \longrightarrow & L_{n-1}F(B) & \longrightarrow & L_{n-1}F(C) \\ & & & & \searrow \delta_{n-1} & & \\ & \hookrightarrow & L_{n-2}F(A) & \longrightarrow & L_{n-2}F(B) & \longrightarrow & L_{n-2}F(C) \\ & & & & \searrow \delta_{n-2} & & \\ & \hookrightarrow & L_1F(A) & \longrightarrow & L_1F(B) & \longrightarrow & L_1F(C) \\ & & & & \searrow \delta_1 & & \\ & \hookrightarrow & L_0F(A) & \longrightarrow & L_0F(B) & \longrightarrow & L_0F(C) \longrightarrow 0 \end{array}$$

□

THÉORÈME:

Soit \mathcal{C} avec assez d'objets injectifs.

- (i) $R^n F$ est additif pour $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) Si F est exact à gauche, alors $R^0 F \simeq F$.
- (iii) Si $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ est une suite exacte courte dans \mathcal{C} , on a une suite exacte longue

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & R^0 F(A) & \longrightarrow & R^0 F(B) & \longrightarrow & R^0 F(C) \\ & & & & \searrow \delta_0 & & \\ & \hookrightarrow & R^1 F(A) & \longrightarrow & R^1 F(B) & \longrightarrow & R^1 F(C) \\ & & & & \searrow \delta_1 & & \\ & \hookrightarrow & R^2 F(A) & \longrightarrow & R^2 F(B) & \longrightarrow & R^2 F(C) \\ & & & & \searrow \delta_2 & & \\ & \hookrightarrow & R^n F(A) & \longrightarrow & R^n F(B) & \longrightarrow & R^n F(C) \\ & & & & \searrow \delta_n & & \\ & \hookrightarrow & R^{n+1} F(A) & \longrightarrow & R^{n+1} F(B) & \longrightarrow & R^{n+1} F(C) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

De plus δ est naturel en la suite exacte courte.

- (iv) Si $n > 0$ et I injectif, alors $R^n F(P) = 0$.

Il faut faire attention aux foncteurs contravariants, en les considérant comme foncteurs de \mathcal{C}^{op} l'exactitude à droite devient celle à gauche, et la projectivité devient l'injectivité et vis-versa, on a ainsi la définition suivante.

DÉFINITION-PROPOSITION (Dérivation d'un foncteur contravariant):

Soit $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{D}$ un foncteur contravariant.

- $R^n F = H^n \bar{F} P_R$
- $L_n F = H_n \bar{F} I_R$

Les résultats du théorèmes précédents sont encore valables en prenant garde au côté de l'exactitude.

Les foncteurs Ext et Tor

47

On peut donc envoyer de manière unique $\ker \partial_v^{i,0}$ sur $\ker \partial_h^{0,i}$, en effet on vérifie que $\partial_h^{0,i}(z^{0,1}) = 0$ grâce à l'exactitude du début de la colonne $i + 1$. On a donc un isomorphisme entre les deux noyaux.

On va maintenant appliquer F au complexe. Il faudra vérifier que si $\text{Im } F[\partial_h^{0,i-1}] \simeq \text{Im } F[\partial_v^{i-1,0}]$, on aura bien $F(z^{0,i}) \in \text{Im } F[\partial_v^{i-1,0}]$, puis comme F préserve les morphismes injectifs, par symétrie on aura un isomorphisme entre $HF(Z)^{\star,0}$ et $HF(Z)^{0,\star}$ qui ne sont autres que $R^j F(\star, Y)(X)$ et $R^j(X, \star)(Y)$.

Pour cela, comme $F \circ \ker = \ker \circ F$, on relève le diagramme suivant ainsi

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Im } F[\partial_h^{0,i-1}] & \longrightarrow \ker F[\partial_h^{0,i}] \\
 & \nwarrow & \nearrow \\
 \text{Im } F[\partial_h^{0,i-1}] & & \\
 \downarrow & & \nearrow \\
 \ker F[\partial_h^{0,i}] & &
 \end{array}$$

Ce qui nous donne exactement ce qu'on veut, on a donc $R^j F(X, \star)(Y) \simeq R^j F(\star, Y)(X)$. \square

Remarque: Cela nous permet de dériver sans ambiguïté un bifoncteur. La version duale de ce théorème est également valable. On peut sans risque définir $R^i F$.

II Le foncteur Ext

DÉFINITION-PROPOSITION (Foncteur extérieur):

Le foncteur extérieur Ext se définit des façons suivantes

- (i) Si \mathcal{C} a assez d'objets injectifs, on pose $\text{Ext}^i(X, Y) = R^i \text{Hom}(X, \star)(Y)$.
- (ii) Si \mathcal{C} a assez d'objets projectifs, on pose $\text{Ext}^i(X, Y) = R^i \text{Hom}(\star, Y)(X)$.
- (iii) Si \mathcal{C} a assez d'injectifs et projectifs, $\text{Ext}^i = R^i \text{Hom}(\star, \star)$.

Et ces définitions ne sont pas ambiguës.

Preuve: On a $\text{Hom}(\star, \star) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$ exact à gauche sur les deux variables, ce qui suffit avec les théorème précédent pour conclure. \square

Remarque: L'exemple phare est avec $\mathcal{C} = \mathbf{Mod}\text{-}A$, comme la catégorie admet assez d'injectifs et de projectifs.

Exemple: Dans la catégorie abélienne des groupes abéliens, on considère G un *groupe de torsion* (i.e. dont tous les éléments sont d'ordre fini, e.g. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ou \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). Pour calculer $\text{Ext}^i(G, \mathbb{Z})$, on peut

- trouver une résolution projective de G .
- trouver une résolution injective de \mathbb{Z} .

Pour la deuxième, on a $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \twoheadrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$

On sait que $\text{Hom}_{\mathbf{Ab}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) = 0$ et que \mathbb{Q}/\mathbb{Z} est injectif, donc $\text{Ext}^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$, ce qui nous donne une suite exacte longue.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(G, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\
 & & & & & \searrow \delta & \\
 & & & & & \text{Ext}^1(G, \mathbb{Z}) & \longrightarrow 0 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

L'exactitude nous donne $\text{Ext}^1(G, \mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ et $\text{Ext}^i(G, \mathbb{Z}) = 0$ pour $i > 1$.

THÉORÈME:

Soit $P \in \text{Ob } \mathcal{C}$, les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) P est projectif.
- (ii) $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, \star)$ est exact.
- (iii) $\forall i > 0, Y \in \mathcal{C}, \text{Ext}^i(P, Y) = 0$.
- (iv) $\forall Y \in \mathcal{C}, \text{Ext}^1(P, Y) = 0$.

L'énoncé dual est également valable.

Preuve: Les deux premiers points sont évidemment équivalents, leur séparation est seulement un rappel.

- (ii) \Rightarrow (iii) C'est direct, l'exactitude du foncteur nous donne un complexe acyclique (sauf en 0) lorsqu'on l'applique à une résolution projective.
- (iii) \Rightarrow (iv) C'est évidemment trivial.
- (iv) \Rightarrow (ii) Une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow X \hookrightarrow Y \twoheadrightarrow Z \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte longue

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(P, X) & \longrightarrow & \text{Hom}(P, Y) & \longrightarrow & \text{Hom}(P, Z) \\ & & & & & \searrow \delta & \\ & & & & & \text{Ext}^1(P, X) & \longrightarrow & \text{Ext}^1(P, X) & \longrightarrow & \text{Ext}^1(P, X) \end{array}$$

On a donc bien

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(P, X) \hookrightarrow \text{Hom}(P, Y) \twoheadrightarrow \text{Hom}(P, Y) \longrightarrow 0$$

On a donc montré l'exactitude. \square

Exemple: On considère $m \in \mathbb{N}^*$ et $k, l \in \mathbb{N}^*$ tq $kl = n$, et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -module G (groupe abélien d'indice n).

On pose ${}_rG = \{g \in G \mid r \cdot g = 0\}$, on a alors

- $\text{Ext}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}^0(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, G) \simeq {}_kG$.
- $\text{Ext}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}^{2i+1}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, G) \simeq {}_kG/l \cdot G$.
- $\text{Ext}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}^{2i}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, G) \simeq {}_lG/k \cdot G$.

En effet, on remarque rapidement l'exactitude de la suite

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \xrightarrow{d} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \xrightarrow{\bar{\cdot}} \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

On applique le lemme du serpent version foncteur dérivé, on a alors une suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, G) & \longrightarrow & G & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, G) \\ & & & & & \searrow \delta_0 & \\ & & & & & \text{Ext}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, G) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}, G) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

On a donc $\text{Ext}^0(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, G) \simeq {}_kG$, et $\text{Ext}^1(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, G) \simeq {}_kG/l \cdot G$. Le résultat est aussi valable en changeant k en l . En continuant cette suite exacte, on observe que $\text{Ext}^i(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}, G) \simeq \text{Ext}^{i+1}(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}, G)$. Ce qui nous permet de conclure.

III Le foncteur Tor

DÉFINITION-PROPOSITION (*Foncteur de torsion*):

Soit A un anneau, on pose le i -ème *foncteur de torsion* Tor_i^A , le i -ème foncteur dérivé à gauche de $\star \otimes_A \star$, qui est

$$\text{Tor}_i^A(M, N) \simeq L_i(\star \otimes_A N)(M) \simeq L_i(M \otimes_A \star)(N)$$

Preuve: La définition n'est pas ambiguë grâce au lemme de SHAPIRO qui nous donne l'exactitude à droite de $\star \otimes_A \star$. \square

Exemple: Pour G un groupe abélien, on va calculer $\text{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, G)$ avec p premier. On a une résolution projective de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{p \cdot} \mathbb{Z} \xrightarrow{\bar{\cdot}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Cela nous donne la suite exacte longue

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{p^*} & 0 & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, G) \\ & & & & & \searrow & \delta_0 \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & G \xrightarrow{p^*} G \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} G \longrightarrow 0 \end{array}$$

On a donc $\mathrm{Tor}_0(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, G) \simeq G/(p \cdot G)$, $\mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, G) \simeq {}_pG$ et pour $i > 1$, $\mathrm{Tor}_i(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, G) = 0$.

PROPRIÉTÉ:

Soit B un A -module à gauche, alors les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) B est plat.
- (ii) $\star \otimes_A B$ est exact.
- (iii) $\forall i > 0, M \in \mathbf{Mod}\text{-}A, \quad \mathrm{Tor}_i^A(M, B) = 0$.
- (iv) $\forall M \in \mathbf{Mod}\text{-}A, \quad \mathrm{Tor}_1^A(M, B) = 0$.

Preuve: La preuve est identique à la propriété équivalente pour Ext. □

IV Le théorème des coefficients universels

Pour $(C_{\bullet}, \partial^C)$ et $(D_{\bullet}, \partial^D)$ deux complexes de chaînes, de $\mathbf{Mod}\text{-}A$ et $A\text{-}\mathbf{Mod}$, on peut construire le (presque car non commutatif) double complexe

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \dots & \longleftarrow & C_{i-1} \otimes_A D_{j-1} & \xleftarrow{(-1)^{i-1} \otimes \partial_j^D} & C_{i-1} \otimes_A D_j & \xleftarrow{(-1)^{i-1} \otimes \partial_{j+1}^D} & C_{i-1} \otimes_A D_{j+1} \longrightarrow \dots \\ & & \uparrow \partial_i^C \otimes 1 & & \uparrow \partial_i^C \otimes 1 & & \uparrow \partial_i^C \otimes 1 \\ \dots & \longleftarrow & C_i \otimes_A D_{j-1} & \xleftarrow{(-1)^i \otimes \partial_j^D} & C_i \otimes_A D_j & \xleftarrow{(-1)^i \otimes \partial_{j+1}^D} & C_{i+1} \otimes_A D_{j+1} \longrightarrow \dots \\ & & \uparrow \partial_{i+1}^C \otimes 1 & & \uparrow \partial_{i+1}^C \otimes 1 & & \uparrow \partial_{i+1}^C \otimes 1 \\ \dots & \longleftarrow & C_{i+1} \otimes_A D_{j-1} & \xleftarrow{(-1)^{i+1} \otimes \partial_j^D} & C_{i+1} \otimes_A D_j & \xleftarrow{(-1)^{i+1} \otimes \partial_{j+1}^D} & C_{i+1} \otimes_A D_{j+1} \longrightarrow \dots \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

On définit alors le *complexe total* : $\left(C \otimes_A D \right)_n := \bigoplus_{i+j=n} C_i \otimes D_j$

Avec l'application aux bords $\partial_n(x_i \otimes y_j) := \partial_i^C(x_i) \otimes y_j + (-1)^i x_i \otimes \partial_j^D(y_j)$.

Le choix du signe est donné par la convention de KOSZUL qui est détaillée dans le cours de topologie algébrique.

On a deux cas spéciaux quand C ou D sont concentrés en degrés 0.

PROPRIÉTÉ:

Le complexe total est un complexe de chaînes de groupes abéliens, de plus on a un morphisme

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i+j=n} H_i(C) \otimes H_j(D) & \longrightarrow & H_n \left(C \otimes_A D \right) \\ [x_i] \otimes [y_j] & \longmapsto & [x_i \otimes y_j] \end{array}$$

Preuve: Pour montrer que c'est un complexe, il suffit de calculer ∂^2 .

On a $\partial_n \partial_{n+1}(x_i \otimes y_j) = \partial_n(\partial_i^C(x_i) \otimes y_j) + (-1)^i \partial_n(x_i \otimes \partial_j^D(y_j)) = \partial_{i-1}^C \partial_i^C(x_i) \otimes y_j + (-1)^{i-1} \partial_i^C(x_j) \otimes \partial_j^D(y_j) + (-1)^i \partial_i^C(x_j) \otimes \partial_j^D(y_j) + x_i \otimes \partial_{j-1}^D \partial_j^D(y_j) = 0$

La deuxième assertion découle de la bilinéarité de $(x, y) \mapsto [x \otimes y]$. \square

THÉORÈME (Formule de Künneth):

Si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $Z_n(C)$ et $B_n(C)$ qui sont plats, il y a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H_i(C) \otimes H_j(D) \hookrightarrow H_n\left(C \otimes_A D\right) \twoheadrightarrow \bigoplus_{i+j=n-1} \text{Tor}_1^A(H_i(C), H_j(D)) \longrightarrow 0$$

De plus, si pour chaque $n \in \mathbb{N}$, C_n est projectif, cette suite est scindée.

Remarque: Les groupes abéliens libres sont projectifs, cela sera la principale application de ce théorème.

COROLLAIRE:

(i) Soit C un complexe de chaînes tel que $Z_n(C)$ et $B_n(C)$ soient plats pour tout n et M un A -module à gauche, alors

$$0 \longrightarrow H_n(C) \otimes M \longrightarrow H_n(C \otimes M) \longrightarrow \text{Tor}_1^A(H_{n-1}(C), M) \longrightarrow 0$$

(ii) Si C est un complexe d'objets projectifs, on a un isomorphisme non canonique

$$H_n(C \otimes M) \simeq H_n(C) \otimes M \oplus \text{Tor}_1^A(H_n(C), M)$$

Preuve: Montrons uniquement le corollaire, le théorème est beaucoup plus technique mais l'idée est la même.

(i) Le premier résultat à prendre en compte est $H_n(Z_n(C) \otimes M) = Z_n(C) \otimes M$ et $H_n(B_n(C) \otimes M) = B_n(C) \otimes M$ car leurs différentielles sont nulles. Grâce à SHAPIRO, on a $\star \otimes M$ exact à droite, donc la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow Z_n(C) \hookrightarrow C_n \twoheadrightarrow B_{n-1} \longrightarrow 0$$

induit grâce au lemme du serpent version Tor :

$$\text{Tor}_1(B_{n-1}, M) \longrightarrow Z_n(C) \otimes M \hookrightarrow C_n \otimes M \twoheadrightarrow B_{n-1} \otimes M \longrightarrow 0$$

et comme $B_{n-1}(C)$ est plat, $\text{Tor}_1(B_{n-1}, M) = 0$, on a donc une suite exacte :

$$0 \longrightarrow Z_n(C) \otimes M \hookrightarrow C_n \otimes M \twoheadrightarrow B_{n-1} \otimes M \longrightarrow 0$$

On a donc une suite exacte courte de complexes :

$$0 \longrightarrow Z_\bullet(C) \otimes M \hookrightarrow C_\bullet \otimes M \twoheadrightarrow B_\bullet(C)[-1] \otimes M \longrightarrow 0$$

cela nous donne ainsi une suite exacte longue grâce au lemme du serpent version H :

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(Z(C) \otimes M) & \longrightarrow & H_n(C \otimes M) & \longrightarrow & H_n(B(C)[-1] \otimes M) & & \\ & & & & \delta_{n-1} & \longleftarrow & \\ & \longleftarrow & H_{n-1}(Z(C) \otimes M) & \longrightarrow & H_{n-1}(C \otimes M) & \longrightarrow & H_{n-1}(B(C)[-1] \otimes M) \end{array}$$

soit

$$B_n(C) \otimes M \xrightarrow{\delta_{n+1}} Z_n(C) \otimes M \longrightarrow H_n(C \otimes M) \longrightarrow B_{n-1}(C) \otimes M \xrightarrow{\delta_n} Z_{n-1}(C) \otimes M$$

On vérifie facilement que $\delta_n = \iota_n \circ \text{id}_M$. Cela nous donne

$$0 \longrightarrow \text{coker } \delta_{n+1} \longrightarrow H_n(C \otimes M) \longrightarrow \ker \delta_n \longrightarrow 0$$

Étudions enfin la suite exacte

$$0 \longrightarrow B_n(C) \longrightarrow Z_n(C) \longrightarrow H_n(C) \longrightarrow 0$$

On applique le lemme du serpent version Tor

$$\mathrm{Tor}_1(Z_n(C), M) \rightarrow \mathrm{Tor}_1(H_n(C), M) \rightarrow B_n(C) \otimes M \rightarrow Z_n(C) \otimes M \rightarrow H_n(C) \otimes M \rightarrow 0$$

soit

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(H_n(C), M) \longrightarrow B_n(C) \otimes M \longrightarrow Z_n(C) \otimes M \longrightarrow H_n(C) \otimes M \longrightarrow 0$$

Cela nous permet de conclure tout naturellement

$$0 \longrightarrow H_n(C) \otimes M \longrightarrow H_n(C \otimes M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(H_{n-1}(C), M) \longrightarrow 0$$

(ii) On peut aisément reprendre la preuve point par point avec moins de contraintes, car la condition nous donne une scission de la suite

$$0 \longrightarrow Z_n(C) \hookrightarrow C_n \twoheadrightarrow B_{n-1} \longrightarrow 0$$

L'additivité des foncteurs fait le reste. □

THÉORÈME (*Théorème des coefficients universels pour la cohomologie*):

Soit C_\bullet un complexe de chaînes de A -modules à droite, M un A -module à gauche.

Si $\forall n \in \mathbb{Z}$, $Z_n(C)$ et $B_n(C)$ sont projectifs, il y a une suite exacte courte scindée

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(H_{n-1}(C), M) \hookrightarrow H^n(\mathrm{Hom}_A(C, M)) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_A(H_n(C), M) \longrightarrow 0$$

Preuve: Ce théorème est la version duale du corollaire précédent. □

DÉFINITION (*Groupe homologique à coefficients*):

Pour C_\bullet un complexe de chaînes de A -modules à droite, et M un A -module à gauche, on appelle

- $H_\bullet(C; M) := H_\bullet(C \otimes M)$ le *groupe homologique* de C_\bullet à coefficients dans M .
- $H^\bullet(C; M) := H^\bullet(\mathrm{Hom}_A(C, M))$ le *groupe cohomologique* de C_\bullet à coefficients dans M .

Chapitre 7

Homologie singulière

I Complétion de l'homologie simpliciale

On rappelle que X est un espace topologique, et Δ_n le n^e simplexe standard. On se choisit un anneau A unitaire.

On pose $\mathcal{C}_n^R(X; A) := A \otimes_{\mathbb{Z}} C_n^R(X) = A [\text{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, X)]$

DÉFINITION (*Homologie singulière*):

L'homologie singulière de X à coefficients dans A est

$$H_{\bullet}(X; A) = H_{\bullet}(C_{\bullet}^R(X; A))$$

Remarque: Grâce à la formule de KÜNNETH, si R est plat, on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow H_n(X; \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^n(X; A) \twoheadrightarrow \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X; \mathbb{Z}), R) \longrightarrow 0$$

II Homologie relative

DÉFINITION:

On pose \mathbf{Top}^2 la catégorie dont les objets sont les paires (X, E) où X est un espace topologique, $E \subset X$ et les flèches de (X, E) vers (Y, F) sont les applications continues $f : X \rightarrow Y$ telles que $f(E) \subset F$.

DÉFINITION (*Homotopie*):

Soit $(X, E) \xrightarrow{f, g} (Y, F) \in \text{Hom } \mathbf{Top}^2$, une *homotopie* de f à g est un morphisme

$$(X \times I, E \times I) \xrightarrow{H} (Y, F)$$

tel que

- $H(\star, 0) = f$.
- $H(\star, 1) = g$.

Remarque: Cela ressemble à la définition de base, seulement, il y a plus de contraintes. Il y a également une notion d'homotopie relativement à E , mais ce n'est pas la même.

LEMME:

Soit $E \subset X$, alors $C_{\bullet}^R(E; A) \subset C_{\bullet}^R(X; A)$

DÉFINITION (*Homologie singulière*):

On pose $\mathcal{C}_{\bullet}^R((X, E)) := C_{\bullet}^R(X) / \mathcal{C}_{\bullet}^R(E)$

Annexe A

Liens entre un anneau et sa catégorie des modules

Dans toute cette section, A et B désigneront des anneaux unitaires. L'objectif est de pouvoir établir des équivalences (ou non) entre $A\text{-}\mathbf{Mod}$ et A .

I Groupe de Picard

DÉFINITION (*Bimodule inversible*):

Soit X un A - A -bimodule, on dit que M est *inversible* s'il existe $Y \in A\text{-}A\text{-}\mathbf{Bimod}$ tel que

$$X \otimes_A Y \simeq A \simeq Y \otimes_A X$$

À remplir

Annexe B

Dimensions dans les catégories abéliennes.

À remplir

I Dimension projective

II Dimension globale

III Différents résultats

Bibliographie

- [1] Ibrahim ASSEM. *Introduction au langage catégorique*. Calvage & Mounet, 2021.
- [2] Emily RIEHL. *Category Theory in Context*. Aurora, 2016.
- [3] Charles A. WEIBEL. *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge University Press, 1994.