Jules Besson.

Catégories enrichies

Bib: E. Riehl, "Categorical Homotopy theory".

Motivation : Benjamin a semé quelques cailloux en chemin durant son premier exposé sur les dg-catégories, notamment la phrase "Une dg-catégorie est une catégorie enrichie sur les complexes de modules."

Une mission nous incombe alors ; définir la notion de catégorie enrichie, obtenir quelques résultats dessus, et constater la véracité de la phrase de Benjamin.

Plan :

Introduction

La plupart des catégories étudiées sont localement petites. Pourquoi? Premièrement, travailler avec la théorie des ensembles est bien moins risqué, e.g. le tiers exclu est présent. Deuxièmement, on sait se "représenter" des ensembles dans notre imagination (ou du moins la plupart du temps). Et surtout (troisièmement), on peut utiliser le lemme de Yoneda.

Un bon exemple de ce constat est la construction des catégories de modèle. Je ne sais pas si c'est la raison historique (probablement pas), mais les catégories de modèle ont le bon goût de nous éviter le cauchemar suivant:

$$\mathcal{C}[W^{-1}] \text{ n'est pas localement petite, même avec } W \text{ non petite.}$$

On se rend bien compte qu'avoir une localisation localement petite est un soulagement. Cependant, nous nous sommes réjouit trop vite: à trop vouloir que $\mathrm{Hom}(x,y)$ soit un ensemble, nous avons oublié que ce dernier avait peut être quelque-chose en plus: une structure!

Prenons un exemple élémentaire: On étudie Vect_k la catégorie des k-espaces vectoriels, pour k un corps. Pour deux k-ev V et W, $\mathrm{Hom}_k(V,W)$ est certes un ensemble, mais $\mathcal{L}_k(V,W)$, qui a le même espace sous-jacent est un k-espace vectoriel, et, important qui plus est. Que s'est-il passé? Ne regarde-t-on les catégories qu'à travers le prisme d'un foncteur oubli? Il faut remédier à cela!

Si cela ne vous a pas pleinement convaincu, il reste un deuxième argument défendant la cause des catégories enrichies: les (co)limites homotopiques. Partons d'un cadre classique: une catégorie $\mathcal{C}$ complète, et une famille $(c_\alpha)_\alpha$ d'objets de $\mathcal{C}$. On note $c = \prod_\alpha c_\alpha$ le produit de ces objets. En tant que produit, c satisfait la propriété universelle suivante:

$$\forall \quad x \longrightarrow c_\alpha \in \mathrm{Hom}\,\mathcal{C}, \ \exists!\ x \longrightarrow c \quad \text{tq}$$

$$\forall \alpha \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, shift left=3ex, "\circlearrowleft"] & \\ c \arrow[r] & c_\alpha \end{tikzcd} .$$

Avec l'aide de Yoneda, cela se traduit par $\mathrm{Hom}(-,c) \cong \prod_\alpha \mathrm{Hom}(-,c_\alpha)$!

On peut alors remarquer que cette propriété est plutôt forte et restrictive ; parfois avoir une notion semblable, mais plus faible suffit pour résoudre nos éventuels problèmes dans cette catégorie.
On peut par exemple avoir besoin de l'existence uniquement et d'une "commutativité faible".
Un bon cadre pour cela serait d'avoir $\forall x, y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}(x,y)$ est un espace topologique.
Afin de marquer cette particularité, on note $\underline{\mathrm{Hom}}(x,y) \in \mathrm{Top}$. On peut alors définir
↳ parfois un trait suffit à faire la différence !

un produit homotopique $c' = \mathrm{ho}\prod_\alpha c_\alpha$. Défini par la factorisation suivante

$$\forall \alpha : \quad \begin{tikzcd} x \arrow[d, dashed, "\exists"'] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, shift left=3ex, "\overset{\sim}{\swarrow} h_\alpha"] & \\ c' \arrow[r] & c_\alpha \end{tikzcd}$$

où h est une transformation naturelle et $\forall \alpha$, h_α est une homotopie de $x \longrightarrow c_\alpha$ vers la composition $x \longrightarrow c' \longrightarrow c_\alpha$.

Rq : cette motivation a des airs ∞-catégoriques.

On remarque alors qu'on a une équivalence faible naturelle $\prod_\alpha \underline{\mathrm{Hom}}(-, c_\alpha) \overset{\sim}{\underset{h}{\Longrightarrow}} \underline{\mathrm{Hom}}(-, c')$.
Ce genre de définition est impossible en considérant uniquement la structure ensembliste.

Rq : Cette limite homotopique est un exemple bien choisi car "élémentaire", mais mal choisi car particulier : C'est un produit dans la catégorie enrichie $h\mathcal{C}$ appelée catégorie homotopique de $\mathcal{C}$.
⚠ C'est une notion différente de la localisation par les équivalences faibles.

On définit $h\mathcal{C}$ comme la catégorie dont les objets sont ceux de $\mathcal{C}$ et les morphismes sont les $\pi_0(\underline{\mathrm{Hom}}(x,y))$

$$\text{où} \quad \pi_0 : \mathrm{Top} \longrightarrow \mathrm{Set}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & \longmapsto & C_X \arrow[d, "{[f]}"] \\ Y & & C_Y \end{tikzcd}$$

→ Espace des composantes connexes par arc.

→ classe d'homotopie de f
$f \sim g \Leftrightarrow \exists h : I \times X \longrightarrow Y$ tq $\begin{cases} h(0,-) = f \\ h(1,-) = g. \end{cases}$

Comme π_0 préserve les produits et est homotopique (envoie les équivalences faibles sur des isomorphismes) (f eq faible $\Leftrightarrow \exists g$ tq $\begin{matrix} fg \sim \mathrm{id} \\ gf \sim \mathrm{id} \end{matrix}$), on a bien

$$\mathrm{Hom}_{h\mathcal{C}}(-, c') \cong \prod_\alpha \mathrm{Hom}_{h\mathcal{C}}(-, c_\alpha).$$

Commençons alors notre périple à travers les catégories enrichies.

I Définitions et exemples.

① Un exemple introductif

Considérons un anneau R (pas forcément commutatif), et la catégorie Mod-R des R-modules à droite. Pour une paire de modules M et N, $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ peut être muni d'une structure de groupe abélien (ou de $\mathbb{Z}$-module) $\longrightarrow$ On le notera $\underline{\mathrm{Hom}}$ pour marquer la différence.

Rq : Si R était commutatif, on aurait pu le munir d'une structure de R-module à droite, mais en général, pour $r \in R$ pas dans son centre, la multiplication par r n'est pas R-linéaire ....

De plus, comme Mod-R est une catégorie additive, la composition est $\mathbb{Z}$-bilinéaire, elle induit donc un morphisme de groupes abélien :

$$\begin{array}{rccc} \circ : & \underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N) \otimes_{\mathbb{Z}} \underline{\mathrm{Hom}}_R(L,M) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_R(L,N) \\ & g \otimes_{\mathbb{Z}} f & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

Notons à présents quelques propriétés remarquables de $\mathbb{Z}$ dans $Ab \cong \mathbb{Z}$-Mod.

- $\forall A \in Ab$, $\mathbb{Z} \otimes A \underset{nat}{\cong} A \underset{nat}{\cong} A \otimes \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z}$ représente le foncteur d'oubli ; en effet on a un isomorphisme naturel $\forall A \in Ab$:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, A) & \xrightarrow{\sim} & A \\ f & \longmapsto & f(1) \end{array}$$

en tant qu'ensemble

En particulier, $\mathrm{id}_M \in \underline{\mathrm{Hom}}_R(M,M)$, et on peut la représenter par une flèche

$\in R$-Mod.

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id}_M : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_R(M,M) \in \mathrm{Hom}_{Ab}(\mathbb{Z}, \underline{\mathrm{Hom}}_R(M,M)) \\ & 1 & \longmapsto & \mathrm{id}_M \end{array}$$

Gardons cet exemple et les points soulignés en tête pour les deux prochains paragraphe (et peut être même pour le reste de votre vie).

② Les catégories monoïdales symétriques.

par Bernhard Keller donc

Bernard Arnault, Bernard Tapie et tous les Bernards qui souhaitent faire fortune vous le diront : s'enrichir c'est bien, on veut le faire, mais il faut bien une "base" pour commencer ! C'est à cette grande question, que le monde entier ne cesse de se poser, que les mathématiciens répondent par trois mots : catégorie monoïdale symétrique. Comme quoi, il n'y a pas besoin d'aller chercher midi à quatorze heures.

Définition : Une catégorie enrichie $(\mathcal{V}, \underline{\times}, *)$ est la donnée de :

↳ pour le différencier du produit cartésien (sera peut être abandonné par la suite)

- Une catégorie $\mathcal{V}$.
- Un bifoncteur $\underline{\times} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$
- Une unité $* \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{V}$.
- Des isomorphismes naturels :

$$v \underline{\times} w \underset{s_{v,w}}{\overset{\sim}{\Longrightarrow}} w \underline{\times} v \qquad (u \underline{\times} v) \underline{\times} w \underset{a_{u,v,w}}{\overset{\sim}{\Longrightarrow}} u \underline{\times} (v \underline{\times} w) \qquad * \underline{\times} v \underset{\lambda_v}{\overset{\sim}{\Longrightarrow}} v \underset{\rho_v}{\overset{\sim}{\Longleftarrow}} v \underline{\times} * .$$

symétrie   associativité   neutralité / unité.

Vérifiant des axiomes de cohérence qui font se comporter une telle catégorie comme un monoïde commutatif unitaire sans ambiguïté : $\forall\, t, u, v, w,$

$$\begin{tikzcd}
* \underline{\times} v \arrow[rr, "s_{*,v}"] \arrow[dr, "\lambda_v"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & v \underline{\times} * \arrow[dl, "\rho_v"] \\
& v &
\end{tikzcd}
,\quad
\begin{tikzcd}
(v \underline{\times} *) \underline{\times} w \arrow[rr, "a_{v,*,w}"] \arrow[dr, "\lambda_v \underline{\times} 1"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & v \underline{\times} (* \underline{\times} w) \arrow[dl, "1 \underline{\times} \rho_w"] \\
& v \underline{\times} w &
\end{tikzcd}
,$$

$$\begin{tikzcd}
& (t \underline{\times} (u \underline{\times} v)) \underline{\times} w \arrow[dr, "a_{t,u\underline{\times}v,w}"] & \\
((t \underline{\times} u) \underline{\times} v) \underline{\times} w \arrow[ur, "a \times 1"] \arrow[d, "a_{t\underline{\times}u,v,w}"'] & \circlearrowright & t \underline{\times} ((u \underline{\times} v) \times w) \arrow[d, "1 \times a"] \\
(t \underline{\times} u) \underline{\times} (v \underline{\times} w) \arrow[rr, "a_{t,u,v\underline{\times}w}"'] & & t \underline{\times} (u \underline{\times} (v \underline{\times} w))
\end{tikzcd}$$

ainsi qu'un diagramme nous permettant de confondre tous ces parenthésages :
$u(vw), u(wv), v(uw), v(wu), w(uv), w(vu), (uv)w, (uw)v, (vu)w, (vw)u, (wu)v, (wv)u$.

Rq : On aurait tout aussi bien pu dire "tels que tout se passe comme on en a envie". La moralité est que l'on peut abandonner le parenthésage et l'ordre d'écriture. Nous essaierons néanmoins de les garder autant que possible.

Exemples :

- Toute catégorie $\mathcal{C}$ avec des produits finis et un élément terminal $*$ nous donne une catégorie monoïdale symétrique $(\mathcal{C}, \times, *)$. C'est le cas de Set, Top, Cat, Gpd.
En oubliant les éventuels pb de petitesse.

- sSet muni de son produit usuel $\times$ et de son élément terminal Δ^0 comme unité.
↳ calculé point par point.

- Mod R, pour R un anneau commutatif et $\underset{R}{\otimes}$ comme produit monoïdal et R comme unité.
En particulier, Ab et $Vect_k$ pour k un corps sont des exemples importants.

- Toujours avec R un anneau commutatif, $Ch(R)$, $Ch_{\geq 0}(R)$ et $Ch_{\leq 0}(R)$ les complexes de chaînes de R-modules à droite, munis du produit tensoriel $\underset{R}{\otimes}$ de complexes et de l'unité
→ concentré en degré ≥0 → en degré ≤0.

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow R \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

↳ convention cohomologique. ↳ degré 0

- Les catégories homotopiques des S-modules, de spectra symétrique, spectra orthogonal (qui sont toutes équivalentes à la catégorie homotopique stable.

- $(Set_*, \wedge, S^0)$, dont la mécanique sera étudiée dans la section (4).

Rq: Dans ces exemples, les catégories sont complètes et cocomplètes. Cela sera souvent (voire toujours) le cas dans nos exemple. L'existence de (co)limites permet de faire des constructions efficaces.

(3) Catégories enrichies.

Il est temps de rentrer dans le vif du sujet, maintenant que les fondations ont été coulées.

Définition: Soit $(\mathcal{V}, \underline{\times}, *)$ une catégorie monoïdale symétrique. Une $\mathcal{V}$-catégorie, ou catégorie enrichie sur $\mathcal{V}$, $\underline{\mathcal{C}}$ est la donnée de:

- Une collection d'objets $Ob\,\underline{\mathcal{C}}$.
- Pour toute paire d'objets a, b de $\underline{\mathcal{C}}$, un objet morphisme ou hom-objet $\underline{Hom}_{\mathcal{C}}(a,b)$ ou $\underline{\mathcal{C}}(a,b) \in \mathcal{V}$.
→ nous privilégierons cette notation dans le cas général.
- Pour tout objet c de $\underline{\mathcal{C}}$, un morphisme $id_c : * \longrightarrow \underline{Hom}(c,c) \in Hom\,\mathcal{V}$
↳ celle ci sera utilisée pour les hom-internes.
- Pour tout triplet d'objets a, b, c de $\underline{\mathcal{C}}$, un morphisme

$$\circ_{x,y,z} : \underline{Hom}(b,c) \underline{\times} \underline{Hom}(a,b) \longrightarrow \underline{Hom}(a,c) \in Hom\,\mathcal{V}.$$

souvent implicite → x,y,z

vérifiant les axiomes de compatibilité suivants : $\forall a,b,c,d \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
(\underline{\mathrm{Hom}}(c,d) \underline{\times} \underline{\mathrm{Hom}}(b,c)) \underline{\times} \underline{\mathrm{Hom}}(a,b) \arrow[rr, "\sim", "a"'] \arrow[d, "\circ \underline{\times} 1"'] & & \underline{\mathrm{Hom}}(c,d) \underline{\times} (\underline{\mathrm{Hom}}(b,c) \underline{\times} \underline{\mathrm{Hom}}(a,b)) \arrow[d, "1 \underline{\times} \circ"] \\
\underline{\mathrm{Hom}}(b,d) \underline{\times} \underline{\mathrm{Hom}}(a,b) \arrow[dr, "\circ"'] & \circlearrowright & \underline{\mathrm{Hom}}(c,d) \underline{\times} \underline{\mathrm{Hom}}(a,c) \arrow[dl, "\circ"] \\
& \underline{\mathrm{Hom}}(a,d) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& * \underline{\times} \underline{\mathrm{Hom}}(x,y) \arrow[r, "id_y \times 1"] \arrow[dl, "\sim", "\lambda"'] & \underline{\mathrm{Hom}}(y,y) \underline{\times} \underline{\mathrm{Hom}}(x,y) \arrow[dr, "\circ"] & \\
\underline{\mathrm{Hom}}(x,y) \arrow[rrr, equal] & \circlearrowright & \circlearrowright & \underline{\mathrm{Hom}}(x,y) \\
& \underline{\mathrm{Hom}}(x,y) \underline{\times} * \arrow[r, "1 \times id_x"] \arrow[ul, "\sim", "\rho"'] & \underline{\mathrm{Hom}}(x,y) \underline{\times} \underline{\mathrm{Hom}}(x,x) \arrow[ur, "\circ"'] &
\end{tikzcd}$$

Exemples : • On considère une catégorie enrichie à un objet $*$ sur Ab. Il est assez rapide de remarquer que c'est un anneau : Posons $R := \underline{\mathrm{Hom}}(*,*)$, il est évident qu'il a une addition car $\underline{\mathrm{Hom}}(*,*) \in Ab$.
On définit ainsi la multiplication : pour $r,s \in R$, $rs = r \circ s \in R$. Elle est évidemment associative grâce au premier axiome de cohérence. L'identité est donnée par $1_R = id_*(1)$ (On rappelle que $id_* : \mathbb{Z} \to R$).
Et grâce au deuxième axiome de cohérence, c'est un neutre à droite et à gauche pour la multiplication.
Il ne reste plus que la distributivité à vérifier. Cela découle uniquement du fait que la composition est un morphisme de groupe.
En effet : $(r+s)(t+u) = \circ((r+s, t+u)) = \circ((r,t)+(r,u)+(s,t)+(s,u))$
$= \circ((r,t)) + \circ((r,u)) + \circ((s,t)) + \circ((s,u)) = rt + ru + st + su.$

• On peut enrichir (sans modifier les espaces de morphismes sous-jacents) la catégorie Top des espaces topologiques sur la catégorie Gpd des groupoïdes (le produit monoïdal et l'unité sont ceux de Cat).
On définit alors pour X,Y deux espaces topologiques, le groupoïde $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)$ dont :
- les objets sont les fonctions continues de X vers Y.
- les morphismes $\mathrm{mor}(f,g)$ sont les éléments de l'espace des homotopies de f vers g quotienté par la relation d'équivalence d'homotopie entre homotopies.

Nous allons expliciter un peu cela.

Soit f, g deux fonctions continues de X vers Y. Une homotopie de f vers g est une fonction continue $h : I \times X \longrightarrow Y$ telle que $h(0,-) = f$ et $h(1,-) = g$. ⇝ sorte de déformation continue de f vers g.
Une homotopies entre deux homotopies h et h' de f vers g est une fonction continue $k : I^2 \times X \longrightarrow Y$ telle que $\begin{cases} k(0,-,-) = h \\ k(1,-,-) = h' \end{cases}$ et $\forall t \in I$, $\begin{cases} k(t,0,-) = f \\ k(t,1,-) = g \end{cases}$.

Dessin d'une homotopie de f vers g dans le cas où $X = I$ et $Y = \mathbb{R}^2$ (avec quelques lignes de niveau).

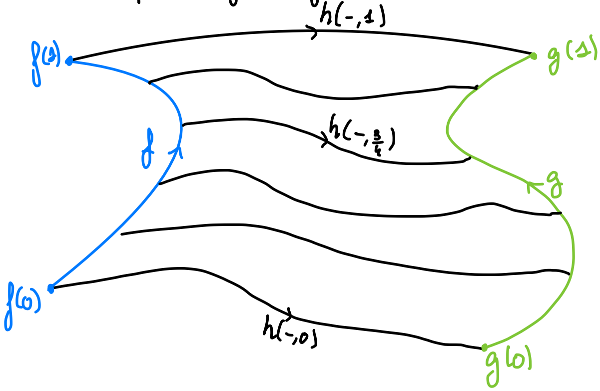
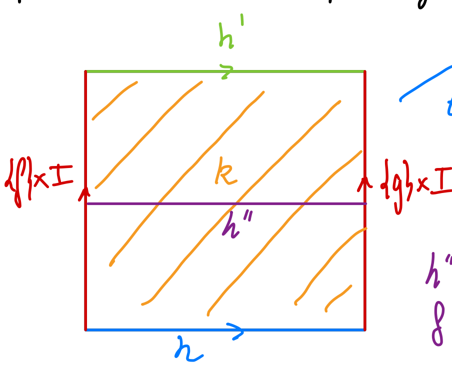


Schéma d'une homotopie k de h vers h', homotopies de f vers g.



Ici k se doit d'être de $I \times (I \times X) \to Y$, tout en préservant le point de départ et d'arrivée, car elle "vit" dans le monde des homotopies de f à g.

$h'' = k(\frac{1}{2},-,-)$ est aussi une homotopie de f vers g.

Il est assez facile de vérifier que la composition est bien définie à homotopie d'homotopies près, et que l'inverse de $[h]$ est donnée par $[h(1-?,?)]$. Cela forme donc bien un groupoïde.

Rq: Une catégorie enrichie sur Set n'est rien d'autre qu'une catégorie ordinaire

En résumé, si Saunders Mac Lane a dit "the notion of Kan extensions subsumes all the other fundamental concepts of Category theory", il aurait pu (et a peut être) glissé quelques mots sur les enrichissements au vu de leur apparente centralité ! Peut être est-ce anachronique ...

4) Construction de catégories enrichies

Les catégories librement enrichies

On retrouve une notion omniprésente, caractérisée par les groupes abéliens libres, les espaces vectoriels libres les modules libres, qui sont donnés par des adjoints à gauche du foncteur d'oubli. La même construction devrait être envisageable pour les enrichissements.

Soit $\mathcal{V}$ une catégorie monoïdale symétrique suffisamment cocomplète telle que les copuissances de l'unité sont préservées par le produit monoïdal en chaque variable, i.e. $\forall v,\ v \underline{\times} \left(\coprod_\alpha *\right) \cong \coprod_\alpha (v \underline{\times} *)$.
Pour une catégorie $\mathcal{C}$, et $a,b \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, on définit

$$\underline{\mathrm{Hom}}(a,b) := \coprod_{\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(a,b)} * .$$

→ à chaque flèche est associée une copie de l'unité (donc la structure "minimale") de $\mathcal{V}$.

Par exemple pour $\mathcal{V} = \mathrm{Vect}_k$ et $\mathcal{C} = \mathrm{Top}$, on retrouve la linéarisation des espaces de fonctions utilisée pour définir l'Homologie simpliciale d'un espace topologique. $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y) = k^{\oplus \mathrm{Hom}(X,Y)}$, que l'on peut voir comme les combinaisons linéaires formelles presque nulles de fonctions continues, ou les fonctions à support fini de source $\mathrm{Hom}(X,Y)$ et de but k.

On observe que $\underline{\mathrm{Hom}}(b,c) \underline{\times} \underline{\mathrm{Hom}}(a,b) = \left(\coprod_{\mathrm{Hom}(b,c)} *\right) \underline{\times} \left(\coprod_{\mathrm{Hom}(a,b)} *\right) \cong \coprod_{\mathrm{Hom}(b,c)} \left(* \underline{\times} \coprod_{\mathrm{Hom}(a,b)} *\right)$

$$\cong \coprod_{\mathrm{Hom}(b,c)} \coprod_{\mathrm{Hom}(a,b)} (* \underline{\times} *) \cong \coprod_{\mathrm{Hom}(b,c) \times \mathrm{Hom}(a,b)} * .$$

Cet isomorphisme nous permet donc de définir la composition $\underline{\circ}$ (pour la différencier de l'usuelle.) comme la composée

$$\underline{\circ} : \underline{\mathrm{Hom}}(b,c) \underline{\times} \underline{\mathrm{Hom}}(a,b) \xrightarrow{\sim} \coprod_{\mathrm{Hom}(b,c)\times\mathrm{Hom}(a,b)} \xrightarrow{\quad c \quad} \underline{\mathrm{Hom}}(a,c)$$

Où c est défini universellement comme $c_{(g,f)} = i_{g\circ f} : * \longrightarrow \coprod_{\mathrm{Hom}(a,c)} *$. En clair, on envoie la copie indexée par (g,f) sur celle indexée par $g \circ f$.

Dans le cas de notre exemple précédent, $\left(\sum_g \lambda g \right) \circ \left(\sum_f \mu f\right) = \sum_h \left(\sum_{g\circ f = h} \lambda_g \mu_f\right)$.

L'identité est simplement donnée par $\underline{id}_c = i_{id_c} : * \longrightarrow \coprod_{\mathrm{Hom}(c,c)} = \underline{\mathrm{Hom}}(c,c)$.

Exercice: Vérifier les axiomes de compatibilité. C'est purement technique.