Leçon 159: Formes linéaires et dualité en dimension finie.

Jules Besson sous la tutelle de Matthieu Romagny

28 juin 2022

Résumé

Des distributions, en passant par les équations différentielles, l'analyse fonctionnelle et la résolution informatique de systèmes linéaires, jusqu'aux principes les plus généraux de l'algèbre linéaire, les formes linéaires et leurs propriétés jouent toujours un rôle essentiel à la fois dans leur utilisation, mais aussi dans la généralité de leur mécanique. Les utiliser pour la première fois c'est se rendre compte de la nécessité de changer sa façon de regarder les objets mathématiques afin de mieux les comprendre.

Dans quelle cadre, et de quelle façon sont elles introduites ? Quelle utilité ont-elles dans les différents domaines mathématiques ? Ce mémoire tentera de donner une ébauche de réponse à ces questions.

Dans tout le document, on considèrera E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque, sauf mention du contraire, E sera de dimension finie valant n.

Table des matières

1 Généralités sur la dualité

1.1 Formes linéaires sur un espace vectoriel

Définition (*forme linéaire, espace dual*):
Une forme linéaire est un morphisme linéaire $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$.

L'espace vectoriel dual, aussi appelé dual, de E est l'ensemble de morphismes $E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Remarque: En dimension infinie, il n'est pas rare de rencontrer l'espace dual topologique E'. Ce n'est cependant pas l'espace dual algébrique que l'on aurait noté différemment, mais bien l'espace vectoriel des formes linéaires continues pour une certaine norme de E.

Exemple:

- Pour $Y \in \mathbb{K}^n$, $Y \in \mathbb{K}^n \mapsto X^T Y$ est une forme linéaire sur l'espace des vecteurs à n coordonnées.
- L'application $\operatorname{Tr} : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathbb{K}$ qui à un endomorphisme associe sa trace est une forme linéaire.
- Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ lisse, avec E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, la différentielle en un point $a \in E$ de f est une forme linéaire.

Définition-Proposition (*bases duale et antéduale*):
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots e_n)$ une base de E.

- La base duale de E^* associée est la base $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \dots e_n^*)$ avec

$$\forall i, j \leqslant n, \quad e_i^*(e_j) = \delta_i^j$$

- La base antéduale de E^{**} associée est $\mathscr{B}^{**} = (l_1, \dots, l_n)$ avec

$$\forall i \leqslant n, \quad l_i(\varphi) = \varphi(e_i)$$

De plus, on a $\dim E = \dim E^* = \dim E^{**}$.

Remarque: Pour la base duale, le morphisme n'est en général pas canonique, car il nécessite de faire un choix de base. Le seul cas où l'on pourrait le qualifier de canonique est quand l'espace considéré est $\mathbb{K}^n$, dans ce cas on dispose de la base canonique $(X_1, \dots, X_n)$, dont base duale est $(X_1^T, \dots, X_n^T)$, et le morphisme est simplement le morphisme de transposition au sens matriciel.

Preuve: Pour la base duale, la liberté de la famille est directe, par évaluation sur chaque élément de la base $\mathscr{B}$. Soit $\varphi \in E^*$, on pose $\forall i \leqslant n$, $\lambda_i = \varphi(e_i)$, par évaluation sur chaque élément de la base, on trouve que $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*$. □

Corollaire:
En dimension finie, on a un isomorphisme canonique $\mathscr{J}$ de E vers E^{**} défini par

$$\mathscr{J} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^{**} \\ x & \longmapsto & \varphi \mapsto \varphi(x) \end{array}$$

Remarque: On notera que ces résultats ne sont pas valables en dimension infinie. Les seuls résultats disponibles sont la liberté de la famille duale associée à une base de E, et l'injectivité de $\mathscr{J}$, c'est ce qui crée toute la richesse topologique de E. Si l'on veut avoir cet isomorphisme, il faut un espace réflexif, comme un Hilbert par exemple. Plus généralement, le théorème de Millman-Pettis nous dit que tout Banach uniformément convexe est réflexif, ceci ne rentre cependant pas dans le cadre de cette leçon.

Exemple:

- Un contre-exemple très connu pour la dimension nous vient de l'espace vectoriel des polynômes dont le dual est isomorphe à $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, or les cardinaux de ces deux ensembles sont radicalement différents, car le premier ensemble est dénombrable et le deuxième de même cardinal que $\mathbb{R}$, donc il n'y a pas d'isomorphisme entre ces deux espaces vectoriels, en revanche il y a une inclusion canonique via les suites presque nulles.
- On peut également observer que dans les espaces de matrice, la double transposition matricielle n'est autre que l'identité.

Preuve: L'application envoie une base de E sur sa base antéduale qui est évidemment une base de E^{**}. □

COROLLAIRE:
Soit $\mathscr{B}'$ une base de E^*, il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathscr{B}^* = \mathscr{B}'$

Preuve: Il suffit de considérer $\mathscr{B}'^*$ la base duale de $\mathscr{B}'$ qui est également une base antiduale de E^{**} d'une unique base $\mathscr{B}$ de E. Il est direct que cette base convient. □

Heureusement, le passage d'un espace à son dual peut être canonique, on a le résultat pour $\mathbb{K}^n$ certes, mais aussi pour $\mathcal{L}(E)$:

PROPRIÉTÉ:
L'application

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E)^* \\ & u & \longmapsto & \phi_u : v \mapsto \mathrm{Tr}(u \circ v) \end{array}$$

est un isomorphisme canonique entre $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{L}(E)^*$.

1.2 Hyperplans

DÉFINITION:
On appelle hyperplan sur E le noyau d'une forme linéaire non identiquement nulle sur E.

PROPRIÉTÉ:
Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E supplémentaire d'une droite. Ainsi en dimension finie, la dimension d'un hyperplan vaut $n-1$.

Preuve: Un simple théorème du rang sur φ nous donne l'inclusion aller, pour l'inclusion retour, si $E = H \oplus \mathbb{K}a$, on considère la projection sur $\mathbb{K}a$ parallèlement à H, et on a directement une forme linéaire qui convient. □

Exemple: Cette propriété nous permet de calculer beaucoup de cardinaux dans le cas où $\mathbb{K}$ est un corps fini. On a en effet pour la méthode de Wiedemann (non détaillée ici) une probabilité de trouver une forme linéaire inadéquate pour résoudre un système de linéaire via la méthode de Berlekamp-Massey inférieure à $\frac{n}{\#K}$.

Corollaire:
Si deux formes linéaires ont le même noyau, alors elles sont liées.

Lemme:
Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(E,G)$,

$$\ker u \subset \ker v \quad \Longleftrightarrow \quad \exists w \in \mathcal{L}(F,G) \,|\, v = w \circ u.$$

Preuve: Il suffit d'observer les uniques morphismes induits par u et v sur l'espace quotient ${E}/{\ker u}$, on les nomme $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$. $\tilde{u}$ est un isomorphisme sur son image, donc on définit $w_{|\operatorname{Im} u} = \tilde{v} \circ \tilde{u}^{-1}$. On complète w par une fonction nulle sur un supplémentaire de $\operatorname{Im} u$ dans F, et on a le résultat aller. Le sens retour est évident. □

Théorème:
Soit φ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ des formes linéaires sur E telles que $\bigcap\limits_{i=1}^{p} \ker \varphi_i \subset \ker \varphi$, alors $\varphi \in \operatorname{Vect}_{\mathbb{K}}(\varphi_1 \ldots, \varphi_p)$.

Preuve: Considérons $u = (\varphi_1, \ldots \varphi_p) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}^p)$, $\ker u = \bigcap\limits_{i=1}^{p} \ker \varphi_i$, donc d'après le lemme précédent, $\exists w \in \mathbb{K}^{p*}$ tq $\varphi = w \circ u \in \operatorname{Vect}_{\mathbb{K}}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$. □

1.3 Orthogonalité

Définition:
Soit $\varphi \in E^*$, $ax \in E$, on dit que φ et x sont orthogonaux si $\varphi(x) = 0$.

- L'orthogonal dans E^* d'une partie X de E est l'espace vectoriel

$$X^\perp = \{\varphi \in E^* \,|\, \forall x \in X,\, \varphi(x) = 0\} = \bigcap_{x \in X} \ker \mathscr{J}(x)$$

- L'orthogonal dans E d'une partie Y de E^* est l'espace vectoriel

$$Y^\circ = \{x \in E \,|\, \forall \varphi \in Y,\, \varphi(x) = 0\} = \bigcap_{\varphi \in Y} \ker \varphi$$

Remarque: Dans un espace euclidien, on retrouve la même notion d'orthogonalité grâce au théorème de représentation de Riesz, en effet une forme linéaire φ est toujours associée de manière unique à un vecteur a qui verifie $\varphi = \langle a | \bullet \rangle$, l'orthogonalité de φ et x s'écrit alors $\langle a | x \rangle = 0$.

Il est en plus important de remarquer que si on note $Y^{\perp^*}$ l'othogonal dans E^{**} d'une partie Y de E^*, on a $Y^{\perp^*} = \mathscr{J}(Y^\circ)$, donc toutes les preuves relatives à $\bullet^\circ$ reviennent à des preuves relatives à $\bullet^\perp$.

Propriété:
Soit $A \subset B$ des parties non-vides de E et $U \subset V$ des parties non-vides de E^*, alors

(1) $B^\perp \subset A^\perp$ (3) $A \subset \left(A^\perp\right)^\circ$ (5) $A^\perp = (\operatorname{Vect} A)^\perp$
(2) $V^\circ \subset U^\circ$ (4) $U \subset (A^\circ)^\perp$ (6) $U^\circ = (\operatorname{Vect} U)^\circ$
(7) $\{0\}^\perp = E^*, \quad E^\perp = \{0\}, \quad \{0\}^\circ = E, \quad (E^*)^\circ = \{0\}$

Preuve: Prouvons d'abord les égalités mentionnées dans la définition précédente. Soit $\varnothing \subsetneq X \subset E$, $\varnothing \subsetneq Y \subset E^*$,

$$\begin{aligned} X^\perp &= \{\varphi \in E^* \,|\, \forall x \in X,\, \varphi(x) = 0\} \\ &= \bigcap_{x \in X} \{\varphi \in E^* \,|\, \varphi(x) = 0\} \\ &= \bigcap_{x \in X} \{\varphi \in E^* \,|\, \mathscr{J}(x)(\varphi) = 0\} \\ &= \bigcap_{x \in X} \ker \mathscr{J}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y^\circ &= \{x \in E \,|\, \forall \varphi \in Y,\, \varphi(x) = 0\} \\ &= \bigcap_{\varphi \in Y} \{x \in E \,|\, \varphi(x) = 0\} \\ &= \bigcap_{\varphi \in Y} \ker \varphi \end{aligned}$$

(1) Comme $A \subset B$, on a $\bigcap\limits_{b \in B} \ker \mathscr{J}(b) \subset \bigcap\limits_{a \in A} \ker \mathscr{J}(a)$, donc $B^\perp \subset A^\perp$.
(2) La preuve est la même.
(3) Soit $x \in A$, $\varphi \in A^\perp$, $\varphi(x) = 0$ donc $x \in (A^\perp)^\circ$, donc $A \subset (A^\perp)^\circ$.
(4) idem
(5) Notons que $(\operatorname{Vect} A)^\perp \subset A^\perp$ par décroissance, or si $\varphi \in E^*$ vérifie $\forall x \in A$, $\varphi(A) = 0$, par linéarité de ϕ, $\forall x \in \operatorname{Vect} A$, $\varphi(x) = 0$, donc $A^\perp \subset (\operatorname{Vect} A)^\perp$.
(6) idem
(7) D'abord, 0 est dans le noyau de toute les formes linéaires, donc $\{0\}^\perp = E^*$, de même on a $\{0\}^\perp = E$.
Maintenant si une forme linéaire est nulle sur tous les éléments de E, c'est par définition la forme linéaire nulle, donc $E^\perp = \{0\}$, de même avec l'isomorphisme $\mathscr{J}$, on a $E^\perp = \{0\}$. $\square$

Exemple: Si on note C la classe de similitude des matrices ayant la diagonale nulle, on a $C^\perp = \mathbb{K} \cdot \operatorname{Tr}$ (c'est une étape de la preuve du noyau des matrices de trace nulle).

Théorème:
Soit E de dimension n.

(1) Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E$$

(2) Pour tout sous-espace vectoriel G de E^*, on a

$$\dim G + \dim G^\circ = \dim E$$

(3) Pour tout sous-espaces vectoriels F de E et G de E^*, on a

$$F = (F^\perp)^\circ \quad \text{et} \quad G = (G^\circ)^\perp$$

(4) Pour toutes parties X de E et Y de E^*, on a

$$(X^\perp)^\circ = \mathrm{Vect}(X) \quad et \quad (Y^\circ)^\perp = \mathrm{Vect}(Y)$$

(5) Pour tous sous-espaces vectoriels F_1, F_2 de E et G_1, G_2 de E^*, on a

$$(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp \quad et (F_1 \cap F_2)^\perp = F_1^\perp + F_2^\perp$$

$$(G_1 + G_2)^\circ = G_1^\circ \cap G_2^\circ \quad et (G_1 \cap G_2)^\circ = G_1^\circ + G_2^\circ$$

Preuve: Montrons ces points un à un.

(1) On prouve d'abord l'égalité suivante, puis ce résultat en sera une conséquence par dualité.

(2) Soit $\mathscr{B}$ une base de G, on pose l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E^*, \mathbb{K}^p)$ donnant la décomposition des éléments de G dans cette base. On remarque que $\ker u = G^\circ$, et que u est injective. Le théorème du rang nous donne alors $\dim G + \dim G^\circ = \mathrm{rg}(u) + \dim \ker u = \dim E^* = \dim E$

(3) On a une inclusion démontrée précédemment $F \subset (F^\perp)^\circ$, mais en plus ici nous avons une égalité utile : $\dim F + \dim F^\perp = \dim E = \dim F^\perp + \dim (F^\perp)^\circ$, donc $\dim F = \dim (F^\perp)^\circ$, donc $F = (F^\perp)^\circ$.
On conclut sur la deuxième égalité par dualité.

(4) Avec le résultat précédent, on a $(X^\perp)^\circ = (\mathrm{Vect}(X)^\perp)^\circ = \mathrm{Vect}(X)$.
Le deuxième résultat est donné par dualité.

(5) On peut remarquer que $\mathrm{Vect}(F_1 \cup F_2) = F_1 + F_2$. On a alors $F_1^\perp \cap F_2^\perp = (\bigcap_{x \in F_1} \ker \mathscr{J}(x)) \cap (\bigcap_{x \in F_2} \ker \mathscr{J}(x)) = \bigcap_{x \in F_1 \cup F_2} \ker \mathscr{J}(x) = (F_1 \cup F_2)^\perp = (F_1 + F_2)^\perp$, d'où la première égalité.
Par dualité on a également $(G_1 + G_2)^\circ = G_1^\circ \cap G_2^\circ$, donc en posant $G_i = F_i^\perp$, on obtient $(F_1^\perp + F_2^\perp)^\circ = (F_1^\perp)^\circ \cap (F_2^\perp)^\circ$, donc $F_1^\perp \cap F_2^\perp = F_1^\perp + F_2^\perp$.
On déduit la dernière égalité par dualité. □

THÉORÈME:
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

- Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ une famille de formes linéaires de rang r, alors le sous-espace vectoriel de E, $F = \bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_i$ est de dimension $n - r$.
- Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension m, il existe $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ une famille libre de formes linéaires avec $r = n - m$ telle que $F = \bigcap_{i=1}^{r} \ker \varphi_i$.

Preuve: Commençons par le premier point. On pose $G = \mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi^p)$ de dimension r. On a alors $G^\circ = \{\varphi, \ldots, \varphi_p\}^\circ = F$. Grâce au théorème précédent, on obtient $\dim F + \dim G = \dim E$ soit $\dim F = n - r$.

Le deuxième point n'est autre que le résultat dual du premier, nous allons tout de même écrire la preuve.
On pose $G = F^{\perp}$. G est de dimension $r = n - m$ d'après le théorème précédent. On se trouve une base $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ de G. On a alors $F = (F^{\perp})^{\circ} = G^{\circ} = \{\varphi_1, \dots, \varphi_r\}^{\circ} = \bigcap_{i=1}^{r} \ker \varphi_i$. □

1.4 Application transposée

Définition (*Application transposée*)**:**
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, l'application transposée associée à u est $\ {}^t\!u : \varphi \longrightarrow \varphi \circ u\ $. Elle induit un isomorphisme canonique

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(F^*,E^*) \\ u & \longmapsto & {}^t\!u \end{array}$$

Remarque: Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'image par l'application transposée d'une matrice dans la base duale canonique n'est autre que cette même matrice transposée, d'où la dénomination identique des deux procédés.

Nous sommes dans le cas de la dimension finie donc $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim \mathcal{L}(E^*,F^*)$ ce qui conclut pour l'inversibilité.

Preuve: L'aspect morphisme de la transposition est évident. Montrons donc son inversibilité. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, si ${}^t\!u = 0$, alors $\forall \varphi \in F^*$, $\varphi \circ u = 0$, donc $\forall x \in E$, $\forall \varphi \in \mathbb{F}^*$, $\in \varphi(u(x)) = 0$. Cela veut donc dire que $\forall x \in E$, $u(x) \in (F^*)^{\circ} = \{0\}$. On a donc $u = 0$, donc $\ker {}^t\bullet = \{0\}$. □

Cherchons alors quelques propriétés de la transposition.

Propriété:
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $\quad v \in \mathcal{L}(F,G)$,

(1) ${}^t(v \circ u) = {}^t\!u \circ {}^t\!v$;
(2) ${}^t\mathrm{id}_E = \mathrm{id}_{E^*}$;
(3) Si $F = E$ et que $u \in \mathrm{GL}(E)$ alors ${}^t \in \mathrm{GL}(E^*)$ et la transposition et l'inversion permutent ;
(4) $\ker {}^t\!u = (\operatorname{Im} u)^{\top}$;
(5) u est surjective si et seulement si ${}^t\!u$ est injective ;
(6) $\operatorname{Im} {}^t\!u = (\ker u)^{\top}$;
(7) u est injective si et seulement si ${}^t\!u$ est surjective ;
(8) Si E et F sont de dimension finie, alors u et ${}^t\!u$ sont de même rang.

Preuve: Montrons les résultats un à un.

(1) Soit $\varphi \in G^*$, $x \in E$, ${}^t(v \circ u)(\varphi)(x) = \varphi \circ v \circ u(x) = {}^t\!u(\varphi \circ v)(x) = {}^t\!u \circ {}^t\!v(\varphi)(x)$.
(2) Grâce à l'égalité précédente, $\forall u, v \in \mathcal{L}(E)$, ${}^t\!v \circ {}^t\mathrm{id}_E \circ {}^t\!u = {}^t(u \circ \mathrm{id}_E \circ v) = {}^t(u \circ v) = {}^t\!v \circ {}^t\!u$, donc ${}^t\mathrm{id}_E$ est le neutre de $\mathcal{L}(F,E)$, donc ${}^t\mathrm{id}_E = \mathrm{id}_{E^*}$.
(3) Grâce aux deux égalités précédentes, on trouve
   - ${}^t(u^{-1}) \circ {}^t\!u = {}^t(u \circ u^{-1}) = {}^t\mathrm{id}_F = \mathrm{id}_F^*$

- ${}^t u \circ {}^t(u^{-1}) = {}^t(u^{-1} \circ u) = {}^t\mathrm{id}_E = \mathrm{id}_{E^*}$

  Donc ${}^t u$ est inversible et $({}^t u)^{-1} = {}^t(u^{-1})$.

(4) $\varphi \in \ker {}^t u \Leftrightarrow \varphi \circ u = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E,\, \varphi(u(x)) = 0 \Leftrightarrow \forall y \in \operatorname{Im} u,\, \varphi(y) = 0 \Leftrightarrow \varphi \in (\operatorname{Im} u)^\perp$. Donc $\ker {}^t u = (\operatorname{Im} u)^\perp$.

(5) u est surjective $\Leftrightarrow \operatorname{Im} u = F \Leftrightarrow (\operatorname{Im} u)^\perp = \mathbb{F}^\perp \Leftrightarrow \ker {}^t u = \{0\} \Leftrightarrow {}^t u$ est injective.

(6) On rappelle que l'orthogonal d'une partie de E^* considéré comme espace vectoriel est noté $\perp^*$, on a alors d'après les résultats précédents $\ker {}^{tt}u = (\operatorname{Im} {}^t u)^{\perp^*} = \mathscr{J}((\operatorname{Im} {}^t u)^\circ)$ donc $\ker u = (\operatorname{Im} {}^t u)^\circ$ donc $\operatorname{Im} {}^t u = (\ker u)^\perp$.

(7) Le résultat est soit une conclusion du résultat précédent, soit la forme duale de celui d'avant.

(8) Dans ce cas, $\operatorname{rg}({}^t u) = \dim \operatorname{Im} {}^t u = \dim(\ker u)^\perp = n - \dim \ker u = \operatorname{rg}(u)$. □

Exemple: Dans le cas des matrices, ces propriétés nous permettent de vérifier que $A \cdot \operatorname{comat}^T(A) = \det(A)$, ceci donne une formule explicite de l'inverse d'une matrice dans le cas où $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Remarque: Si l'on considère la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, toutes ces propriétés font de la transposition un foncteur contravariant et fidèle de cette catégorie vers elle même. Si on prend la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, ce foncteur est alors pleinement fidèle.

On peut également étendre la définition de $\mathscr{J}$ aux morphismes (c'est ce qui a été fait dans la preuve) en posant $\mathscr{J}(u) = \varphi \mapsto {}^t u(\varphi)(x)$, avec cette construction, on a bien à la fois un foncteur covariant mais aussi ${}^{tt}u = \mathscr{J}(u)$.

2 Multilinéarité

La linéarité est une propriété qui présente de nombreuses propriétés de structure, cependant, nous aimerions étendre légèrement cette dernière, c'est là qu'arrive la multilinéarité, qui est en réalité un cas particulier de la linéarité sur certains espaces vectoriels.

2.1 Formes multilinéaires

Nous restons tout de même dans le cadre des formes pour définir uniquement les formes multilinéaires.

Définition (*forme multilinéaire*)**:**
Soit $\varphi \in \mathcal{F}(E^k, \mathbb{K})$, φ est une forme k-linéaire sur E si elle est linéaire en chaque variable.
Pour toute forme linéaire, il existe des caractérisations supplémentaires :

- φ est symétrique si $\forall i < j \leqslant k$, $\forall (x_1, \ldots, x_k) \in E^k$

$$\varphi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_k) = \varphi(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_k)$$

- φ est alternée si $\forall i < j \leqslant k$, $\forall (x_1, \ldots, x_k) \in E^k$

$$x_i = x_j \quad \Longrightarrow \quad \varphi(x_1, \ldots, x_k) = 0$$

L'espace des formes k-linéaires sur E est noté $\mathcal{L}_k(E)$, le sous-espace vectoriel des formes symétriques est noté $\mathfrak{S}_n(E)$ et celui des formes alternées $\mathfrak{A}_k(E)$.

Exemple: Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique. Plus généralement si on a une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(X, Y) \mapsto X^T AY$ est une forme bilinéaire. Avec une base fixée, c'est même une caractérisation unique des formes bilinéaires.

On a vu précédemment que la différentielle d'une fonction linéaire à n variables en un point était une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$, ce résultat se généralise en considérant la différentielle k-ième qui est une forme k-linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

Essentiel également est le déterminant qui est une forme n-linéaire alternée bien connue et ses propriétés de forme multilinéaire alternées sont très souvent utilisées.

Théorème (*Propriétés universelles des produits tensoriel et alterné*)**:**
Soit $\varphi \in \mathcal{L}_k(E)$, alors il existe une unique forme linéaire $\overline{\varphi} \in (E^{\otimes k})^*$ telle que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} E^k \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{K} \\ E^{\otimes k} \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Si en plus φ est alternée, il existe une unique forme linéaire $\tilde{\varphi} \in \bigwedge^k(E)^*$ telle que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} E^{\otimes k} \arrow[r, "\overline{\varphi}"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{K} \\ \bigwedge^k(E) \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Corollaire:
Toute forme n-linéaire sur un espace E de dimension n est liée au déterminant.

Preuve: Grâce au théorème précédent, on a $\mathfrak{A}_n(E) \simeq \bigwedge^n(E)^*$, or $\dim \bigwedge^n(E) = \binom{n}{n} = 1$, donc $\dim \mathfrak{A}_n(E) = 1$, donc comme $\det \in \mathfrak{A}_n(E) \setminus \{0\}$, on a

$$\mathfrak{A}_n(E) = \mathbb{K} \cdot \det$$

Exemple: Grâce à ce théorème, on peut calculer la différentielle d'une forme n-linéaire alternée quelconque. En effet la différentielle du déterminant en A est $H \mapsto \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{comat}\, AH)$, donc la différentielle d'une forme n-linéaire alternée f est $H \mapsto f(I_n) \cdot \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{comat}\, AH)$.

2.2 Algèbres de Lie

Définition (*crochet de Lie, algèbre de Lie*)**:**
Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$, le crochet de Lie de u et v est l'endomorphisme $[u, v] := u \circ v - v \circ u$.
Une algèbre de Lie est un sous-espace vectoriel $\mathfrak{F}$ de $\mathcal{L}(E)$ tel que $F \times \mathbb{F}$ soit stable par le crochet de Lie.

Exemple:

- $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall B \in \mathbb{K}[A], [A,B] = 0$
- $\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Remarque: Le crochet de Lie est une application bilinéaire alternée sur $\mathcal{L}(E)$. Il est parfois appelé commutant, et, s'il est nul les deux endomorphismes commutent. Il sert à reformuler plus efficacement la commutativité.
On a également équivalence entre la co-diagonalisation d'une partie X de $\mathcal{L}(E)$ et que $\forall u, v \in X$, $[u,v] = 0$.

Théorème:
Si $\operatorname{car} \mathbb{K} > n$, un endomorphisme est de trace nulle si et seulement si il s'écrit comme crochet de Lie de deux endomorphismes.

Remarque: Dans le cas où $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{R}$-ev, comme la différentielle du déterminant en id_E est Tr, on a l'espace tangent à $\mathrm{SL}(E)$ en id_E qui est exactement l'algèbre dérivée de $\mathcal{L}(E)$, soit l'ensemble des endomorphismes s'écrivant comme crochet de Lie d'autres endomorphismes.

Pour ce théorème, le sens retour est évident, car la trace est invariante par commutation. Cependant il est plus ardu de montrer le sens aller, commençons par un lemme intermédiaire.

Lemme:
Tout endomorphisme de trace nulle admet une représentation matricielle dont la diagonale est nulle.

Preuve: La preuve se fait par récurrence sur la dimension de l'espace vectoriel.

$\forall n < \#\mathbb{K}$, on pose $\mathcal{P}_n$: "Pour tout espace vectoriel de dimension n, $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{Tr}(u) = 0 \Rightarrow u$ admet une écriture matricielle de diagonale nulle".

(I) Le cas de la dimension nulle est trivial, celui de la dimension 1 également.

(H) On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie pour $0 < n < \#\mathbb{K} - 1$, soit E un espace vectoriel de dimension n, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\mathrm{Tr}(a) = 0$, observons deux cas.

1. Si u est une homotétie, $\mathrm{Tr}(u) = \lambda(n+1) = 0$ donc $\lambda = 0$, donc u est de diagonale nulle.
2. Si u n'est pas une homotétie, alors il existe un vecteur $x \in E$ tel que $(x, u(x))$ est libre. En complétant cette famille, on obtient une base dans laquelle u s'écrit comme la matrice A suivante

$$A = \left(\begin{array}{c|ccccc} 0 & * & * & * & * & * \\ \hline 1 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & A' & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{array}\right)$$

On a alors $\mathrm{Tr}(A') = \mathrm{Tr}(A') + 0 = \mathrm{Tr}(A)$ donc par hypothèse de récurrence, A' est conjuguée à une matrice de diagonale nulle B'. En d'autres termes $\exists Q' \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tq $A' = Q'^{-1}BQ'$. En posant

$$Q = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & Q' & \\ 0 & & & \end{array}\right) \quad \text{on a} \quad QAQ^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccccc} 0 & * & * & * & * & * \\ \hline 1 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & B' & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{array}\right)$$

Donc dans une certaine base, u est une matrice de diagonale nulle. □

La combinaison de ces deux résultats prouve $\mathcal{P}_{n+1}$.

On a donc bien montré le résultat attendu par récurrence. □

Maintenant que nous avons ce résultat fort utile, montrons un autre lemme un peu plus facile.

Lemme:
Toute matrice de diagonale nulle s'écrit comme crochet de Lie de la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(1, \ldots, n)$ et d'une autre matrice.

Preuve: Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$DB = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ n \cdot b_{n,1} & \cdots & n \cdot b_{n,n} \end{pmatrix} \qquad BD = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & n \cdot b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & n \cdot b_{n,n} \end{pmatrix}$$

Donc on a $[D, B] = ((i-j)b_{i,j})_{i,j \leqslant n}$. Si on se prend $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de diagonale nulle, il suffit de poser B de diagonale nulle telle que si $i \neq j$, $b_{i,j} = \frac{1}{i-j} a_{i,j}$, et on a $A = [D, B]$ (et c'est la seule matrice convenant). □

Il ne nous reste qu'à conclure. Comme le changement de base ou la conjugaison sont des morphismes d'algèbres, ce sont des morphismes de Lie. Soit $u \in \ker \mathrm{Tr}$, en combinant les deux résultats, on trouve que u est conjugué à un crochet de Lie de la forme $[d, v]$, donc il existe $w \in \mathrm{GL}(E)$ tq $u = w^{-1} \circ [d, v] \circ w = [w^{-1} \circ d \circ w, w^{-1} \circ v \circ w]$, donc $u \in D(\mathcal{L}(E))$.

On conclut alors que $\ker \mathrm{Tr} = D(\mathcal{L}(E))$.

Définition-Proposition (*morphisme de Lie, idéal d'une algèbre de Lie*)**:**
Soit $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ deux $\mathbb{K}$-algèbres de Lie, un morphisme de Lie Φ de source $\mathfrak{F}$ et d'arrivée $\mathfrak{G}$ est une morphisme linéaire préservant la structure d'algèbre de Lie, i.e. $\forall u,\ v \in \mathfrak{F}, \Phi([u, v]) = [\Phi(u), \Phi(v)]$.
Soit $\mathfrak{F}$ une algèbre de Lie, un idéal $\mathfrak{I}$ de $\mathfrak{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{F}$ tel que $\forall u \in \mathfrak{I},\ v \in \mathfrak{F},\ [u, v] \in \mathfrak{I}$.
Le noyau d'un morphisme de Lie de source $\mathfrak{F}$ est un idéal.

Preuve: Soit Φ un morphisme de Lie de source $\mathfrak{F}$, $\forall u \in \ker \Phi$, $v \in \mathfrak{F}$, $\Phi([u, v]) = [\Phi(u), \Phi(v)] = [0, \Phi(v)] = 0$ car le crochet de Lie est une forme bilinéaire alternée, donc $[u, v] \in \ker \Phi$, c'est donc bien un idéal. □

Théorème (*Propriété universelle des algèbres de Lie*)**:**
Soit $\mathbb{F}$, $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{I}$ un idéal de $\mathfrak{F}$ et $\Phi : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$ un morphisme de Lie. Si $\mathfrak{I} \subset \ker \Phi$, il existe un unique morphisme de Lie $\overline{\Phi} : \mathfrak{F}/\mathfrak{I} \longrightarrow \mathfrak{G}$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathfrak{G} \\
\mathfrak{F}/\mathfrak{I} \arrow[ur, "\overline{\Phi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Preuve: L'unicité et l'existence de la factorisation est donnée par la propriété universelle des espaces vectoriels. Il reste à montrer que $\overline{\Phi}$ est un morphisme de Lie. Soit $u+\mathfrak{I}$, $v+\mathfrak{I} \in \mathfrak{F}/\mathfrak{I}$, $[u+\mathfrak{I}, v+\mathfrak{I}] = [u,v]+[\mathfrak{I},v]+[u,\mathfrak{I}]+[\mathfrak{I},\mathfrak{I}] = [u,v]+\mathfrak{I}$. Donc $\overline{\Phi}([u+\mathfrak{I}, v+\mathfrak{I}]) = \overline{\Phi}([u,v]+\mathfrak{I}) = \Phi([u,v]) = [\Phi(u),\Phi(v)] = [\overline{\Phi}(u+\mathfrak{I}), \overline{\Phi}(v+\mathfrak{I})]$. $\square$

Définition (*représentation adjointe*)**:**
Soit $\mathfrak{F}$ une algèbre de Lie, on définit le morphisme adjoint par

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ad} : & \mathfrak{F} & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathfrak{F}) \\ & u & \longmapsto & v \mapsto [u,v] \end{array}$$

Remarque: Ce morphisme est une représentation de l'algèbre $\mathfrak{F}$, et est construit sur le même mécanisme que l'application transposée. Pour le calcul différentiel, on se ramène très souvent à l'élément neutre, l'utilisation de la représentation adjointe permet de schunter cette étape de raisonnement.

On peut également remarquer que ad est un morphisme d'algèbres.

Définition (*algèbre dérivée,résolubilité*)**:**
Soit $\mathfrak{F}$ une algèbre de Lie, on appelle algèbre dérivée de $\mathfrak{F}$ l'algèbre de Lie $D(\mathfrak{F}) \coloneqq [\mathfrak{F}, \mathfrak{F}]$.

$\mathfrak{F}$ est résoluble si la suite des algèbres dérivées itérées de $\mathfrak{F}$, $(D^n(\mathfrak{F}))_{n\in\mathbb{N}}$ est presque nulle.

Remarque: La façon de présenter cette définition n'est pas anodine, elle fait écho à celle des groupes résolubles, et si on relie l'algèbre de Lie à son groupe de Lie $\mathfrak{G}$, on a équivalence entre la résolubilité de $\mathfrak{G}$ et celle de $\mathfrak{F}$.

À partir de maintenant, on supposera $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle et algébriquement clos. L'objectif de la fin de cette section est de montrer le théorème de Lie.

Théorème (*théorème de Lie*)**:**
Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle et algébriquement clos, toute sous-algèbre de Lie de $\mathcal{L}(E)$ est résoluble si et seulement si elle est co-trigonalisable.

Commençons par un premier lemme de stabilité.

Lemme:
Soit $\mathfrak{F}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{I}$ un idéal de cette algèbre, et $l \in \mathfrak{I}^*$. On pose $V = \{x \in E \,|\, \forall v \in \mathfrak{I}, u(x) = l(u)x\}$. alors V est stable par $\mathfrak{F}$.

Preuve: La preuve se fait en quatre étapes successives.

1. Soit $x \in V$, $u \in \mathfrak{F}$, posons la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k = u^k(x)$. Montrons la propriété de récurrence suivante :
   $\mathcal{P}_k$: "$\forall v \in \mathfrak{I}$, $v(x_k) - l(v)x_k \in \mathrm{Vect}(x_0, \dots, x_{k-1})$"
   (I) Soit $v \in \mathfrak{I}^*$, $v(x_0) - l(v)x_0 = v(x) - l(x) = 0 \in \mathrm{Vect}(\varnothing)$
   (H) Si $\mathcal{P}_k$ est vraie, alors pour $v \in \mathfrak{I}$,
   $$\begin{aligned} v(x_{x+1}) - l(v)x_{k_1} &= v \circ u(x_k) - l(v)u(x_k) \\ &= u \circ v(x_k) - [u, v](x_k) - u(l(v)x_k) \\ &= u(v(x_k) - l(v)x_k) - [u, v](x_k) \\ &\in u(\mathrm{Vect}(x_0, \dots, x_{k-1})) + \mathrm{Vect}(x_0, \dots, x_{k-1}) \\ &\in \mathrm{Vect}(x_0, \dots, x_k) \end{aligned}$$
   Donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

   Donc par récurrence, on a montré que
   $$\forall k \in \mathbb{N}, \forall v \in \mathfrak{I}, v(x_k) - l(v)x_k \in \mathrm{Vect}(x_0, \dots, x_{k-1})$$
2. On note maintenant $U = \mathrm{Vect}((x_k)_{k\in\mathbb{N}})$ montrons que U est stable par $\mathfrak{I}$ et u.
   - Pour u c'est évident au vu de la définition même de U.
   - Soit $v \in \mathfrak{I}$, $k \in \mathbb{N}$, $v(x_k) = (v(x_k) - l(v)x_k) + l(v)x_k \in \mathrm{Vect}(x_0, \dots, x_k) \subset U$. Par linéarité, on conclut donc que U est stable par $\mathfrak{I}$.
3. Pour chaque endomorphisme v de $\mathfrak{I} \cup \{u\}$, on notera alors $\tilde{v} \in \mathcal{L}(U)$ l'application induite par V. Calculons alors la trace d'un v quelconque dans $\mathfrak{I}$. Comme U est inclus dans E, on trouve $U = \mathbb{K}x_0 \oplus \cdots \oplus x_{d-1}$ avec $d \leqslant n$ la dimension de U. On note p_i la projection sur la i-ème coordonnée de cette base. On a alors
   $$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\tilde{v}) &= \sum_{i<d} p_i(\tilde{v}(x_i)) = \sum_{i<d} p_i(v(x_i) - l(v)x_i + l(v)x_i) \\ &= \sum_{i<d} p_i(v(x_i) - l(v)x_i) + l(v)p_i(x_i) = 0 + l(v)\sum_{i<d} 1 \\ &= d \cdot l(v) \end{aligned}$$
4. Il ne nous reste plus qu'à montrer que $u(x) \in V$. Soit $v \in \mathfrak{I}$,
   $$\begin{aligned} v \circ u(x) - l(v)u(x) &= u \circ v(x) - [u, v](x) - u(l(v)x) \\ &= u(v(x) - l(v)x) - [u, v](x) = -[u, v](x) \\ &= -l([u, v])(x) = -d\,\mathrm{Tr}(\widetilde{[u, v]}) = -d\,\mathrm{Tr}([\tilde{u}, \tilde{v}]) \\ &= 0 \end{aligned}$$
   On conclut donc que $u(x) \in V$, donc V est stable par u, donc V est stable par u.

On a donc $\forall x \in V$, $\forall u \in \mathfrak{F}$, $u(x) \in V$ donc V est stable par tous les éléments de $\mathfrak{F}$. $\square$

Il nous faut montrer un autre résultat intermédiaire avant de montrer l'existence d'un vecteur propre commun essentiel à la co-trigonalisation.

> **Lemme:**
> Soit $\mathfrak{F}$ une algèbre de Lie résoluble de dimension $k+1$, il existe alors un idéal $\mathfrak{I}$ de $\mathfrak{F}$ de dimension k et résoluble.

Preuve: Soit $\mathfrak{F}$ une telle algèbre, on considère l'idéal $D(\mathfrak{F})$ que l'on complète afin d'avoir un plus gros espace vectoriel $\mathfrak{I}$ de dimension k, alors on montre facilement que $\mathfrak{I}$ est un idéal, car $\forall u \in \mathfrak{I}$, $v \in \mathfrak{F}$, $[u, v] \in D(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{I}$, de plus il est résoluble, car $D(\mathfrak{F})$ est un idéal de $\mathfrak{I}$ et est résoluble. $\square$

On peut ainsi entamer la preuve du Lemme central nécessaire pour prouver le théorème de Lie.

> **Lemme:**
> Si $\mathfrak{F}$ est résoluble, alors il existe un vecteur propre commun à tous les éléments de $\mathfrak{F}$.

Preuve: Le raisonnement de cette preuve se fait par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{F}$. $\forall k \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}_n$: "Pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{F}$ résoluble de dimension k, il existe un vecteur propre commun à tous les éléments de $\mathfrak{F}$ ".

(I) Pour une algèbre de dimension nulle, le résultat est trivial.

(H) On suppose $\mathcal{P}_k$ vraie. Soit $\mathfrak{F}$ une algèbre de Lie résoluble de dimension $k+1$, il existe un idéal résoluble, $\mathfrak{I}$, de cette algèbre de dimension k.

Par la propriété de récurrence, il existe un vecteur propre $x \in E \setminus 0$ tel que $\forall v \in \mathfrak{I}$, $v(x) = l(v)x$. Il est rapide de vérifier que l est une forme linéaire sur $\mathfrak{I}$.

On considère maintenant un endomorphisme $u \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{I}$, on a $\mathfrak{F} = \mathfrak{I} \oplus \mathbb{K}u$. On pose V de la même façon que dans le premier lemme, on a alors V stable par u. On considère alors l'application induite par u, $\tilde{u} \in \mathcal{L}(V)$, comme $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, on a l'existence d'un vecteur propre $y \in V$ de $\tilde{u}$. C'est donc également un vecteur propre de u, mais aussi un vecteur propre pour tous les éléments de $\mathfrak{I}$, car $y \in V$, par linéarité, y est un vecteur propre commun à tous les éléments de $\mathfrak{F}$.

Donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vérifiée.

Par récurrence on a la preuve directe que pour toute algèbre de Lie résoluble, il existe un vecteur propre commun à tous ses éléments. $\square$

Il ne reste qu'à conclure par récurrence sur la dimension de l'espace E, avec une mécanique bien connue en réduction.
$\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}_n$: "Pour tout espace vectoriel E de dimension n, toute algèbre de Lie résoluble est co-trigonalisable".

(I) En dimension nulle, le résultat est évident.

(H) On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie, on considère alors E un espace vectoriel de dimension $n+1$, et $\mathfrak{F}$ une algèbre de Lie sur E.

D'après le lemme précédent, il existe un vecteur propre $x \in E \setminus \{0\}$ commun à $\mathfrak{F}$. On se prend un supplémentaire H de $\mathbb{K}x$ dans E, et on pose p_x la projection sur la droite $\mathbb{K}x$ parallèlement à H et p_H la projection sur H parallèlement à $\mathbb{K}x$.

On pose $\mathfrak{F}' = \{p_H \circ u \circ p_H,\, u \in \mathfrak{F}\}$. $\mathfrak{F}'$ est une algèbre de Lie réduite sur H. Montrons ce résultat en vérifiant les deux hypothèses.

- C'est évidemment un espace vectoriel inclus dans $\mathcal{L}(H)$.
- $\forall u \in \mathfrak{F}$, par stabilité de $\mathbb{K}x$, $p_H \circ u \circ p_x = 0$ donc $p_H \circ u = p_H \circ u \circ p_H$. On peut donc observer le résultat suivant pour u et v dans $\mathfrak{F}$:

$$p_H \circ u \circ p_H \circ p_H \circ v \circ p_H = p_H \circ u \circ p_H \circ v = p_H \circ u \circ v \circ p_H$$

  Donc $p_H \circ \star \circ p_H$ est un morphisme d'algèbres, donc un morphisme de Lie, donc $\mathfrak{F}'$ est une algèbre de Lie.
- Grâce au résultat précédent, on déduit que $D(\mathfrak{F}') = D(\mathfrak{F}')$ et donc que $(D^k(\mathfrak{F}'))_{k \in \mathbb{N}}$ est presque nulle, donc $\mathfrak{F}'$ est résoluble.

Ainsi par la propriété de récurrence, $\mathfrak{F}'$ est co-trigonalisable. On note $(H_1, \ldots, H_n) = H$ le drapeau associé à une co-trigonalisation, alors $(\mathbb{K}x, \mathbb{K}x \oplus H_1, \ldots, \mathbb{K}x \oplus H_n)$ est un drapeau associé à une co-trigonalisation de $\mathfrak{F}$.

Ainsi, nous avons montré que toute algèbre de Lie résoluble est co-trigonalisable.

Pour le sens retour, il suffit de montrer cette petite propriété

Propriété:
Soit $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires positives de taille n est résoluble.

Preuve: La suite des algèbres dérivées de l'algèbre des matrices triangulaires supérieures de taille n est la suite des algèbres des injections canoniques des matrices triangulaires supérieures de taille $n-k$ dans les matrices de taille n. Cette suite est presque nulle, car au rang n, elle ne contient que la matrice nulle. On en conclut donc la résolubilité de $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$. □

Le changement de base étant un morphisme d'algèbre, on conclut que si $\mathfrak{F}$ est co-trigonalisable, elle est résoluble.

Exemple: L'algèbre des matrices cruciformes engendrée par les matrices diagonales et antidiagonales n'est pas co-trigonalisable. Selon la parité de n, cela donne des matrices de la forme suivante.

$$\begin{pmatrix}
* & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & * \\
0 & * & \ddots & & & \iddots & * & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\
\vdots & & 0 & * & * & 0 & & \vdots \\
\vdots & & 0 & * & * & 0 & & \vdots \\
\vdots & \iddots & \iddots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & * & \iddots & & & \ddots & * & 0 \\
* & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & *
\end{pmatrix}
\qquad
\begin{pmatrix}
* & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & * \\
0 & * & \ddots & & \iddots & * & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\
\vdots & & 0 & * & 0 & & \vdots \\
\vdots & \iddots & \iddots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & * & \iddots & & \ddots & * & 0 \\
* & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & *
\end{pmatrix}$$

Corollaire:
Toute partie de $\mathcal{L}(E)$ dont l'algèbre de Lie engendrée est de dimension strictement supérieure à $\frac{n(n+1)}{2}$ n'est pas co-trigonalisable.

Références

[1] Jacques Lafontaine. *Introductions aux variétés différentielles.* Grenoble Sciences, 2015.

[2] Jean Étienne Rombaldi. *Mathématiques pour l'agrégation :* Algèbre et géométrie. DE BOECK SUP, 2021.

[3] Nicolas Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie, chapitre 1.* Springer, 2006.