Leçon 236. Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Dans cette leçon on considèrera des fonctions à variables dans I un sous espace d'un $\mathbb{R}$-ev A et à valeurs dans E un autre $\mathbb{R}$-ev.

1. Méthodes pour des fonction à une variable réelle

Dans cette partie, $A = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$ si cela est précisé).

1.1. Méthodes élémentaires

1. Théorème. Théorème fondamental de l'analyse.
Soit $f : I \to E$ Lebesgue-intégrable et F une primitive de f, alors $\forall a, b \in I$,

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\lambda = F(b) - F(a)$$

2. Exemple. $\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$
3. Exemple. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\tan^2(x)}{\tan(x)} \,\mathrm{d}x = [\ln(\tan(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\ln(3)}{2}$
4. Proposition. Décomposition en éléments simples.
Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ sous forme irréductible, avec $T_1, \ldots, T_n \in \mathbb{R}_2[X]$ la décomposition en facteurs irréductibles de Q, alors $\exists R_1, \ldots, \mathbb{R}_n \in R[X]$ tq

$$F = \frac{R_1}{T_1} + \cdots + \frac{R_n}{T_n}$$

5. Exemple. Pour $a,b \neq 0$, $\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{ab(a+b)}$
6. Exemple. Soit $f(x) = \frac{1}{ax^2+bx+c}$
- Si $\Delta > 0$: $\int f = \frac{a}{\sqrt{\Delta}} \ln(\frac{x+b-\sqrt{\Delta}}{x+b+\sqrt{\Delta}})$
- Si $\Delta = 0$: $\int f = -\frac{2}{2ax+ab}$
- Si $\Delta < 0$: $\int f = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \arctan(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}})$

7. Proposition. Linéarisation des fonctions trigonométriques
Soit $n,m \in \mathbb{N}$, $\cos^n(x)\sin^m(x)$ s'écrit comme combinaison linéaire de $(cos(kx))_{k \leqslant n+m}$ si m est pair, $(sin(kx))_{k \leqslant n+m}$ sinon.
8. Exemple. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} cos^3(x)sin^3(x) \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\sin(2x)-\sin(6x)}{32} \,\mathrm{d}x = \frac{9}{128}$
9. Exemple. Intégrales de Wallis (1) : $W_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p(x) \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p(x) \,\mathrm{d}x$

$W_{2p} = \frac{1}{2^{2p}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \binom{2p}{p} \,\mathrm{d}x + \sum\limits_{k=0}^{p-1} 2\binom{2p}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2(p-k)x) \,\mathrm{d}x \right) = \frac{\pi}{2} \frac{2p!}{(2^p\, p!)^2}$

$W_{2p+1} = \frac{1}{2^p} \sum\limits_{k=0}^{p} \binom{2p}{p-k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2k+1)x) \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2^p} \sum\limits_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{2p}{p-k} = \frac{(2^p\, p!)^2}{2p+1!}$

1.2. Méthodes plus avancées

10. Proposition. Intégration par parties.
Soit $I = (a,b)$ un intervalle réel, $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables telles que deux des trois quantités suivantes soient finies : $\int\limits_I u'v \,\mathrm{d}\lambda$, $\int\limits_I uv' \,\mathrm{d}\lambda$ et $[uv]_a^b$. Alors

$$\int\limits_I u'v \,\mathrm{d}\lambda + \int\limits_I uv' \,\mathrm{d}\lambda = [uv]_a^b$$

11. Exemple. Intégrales de Wallis (2)
$W_{p+2} = \frac{p+1}{p+2} W_p$ et $(W_0,W_1) = (\frac{\pi}{2},1)$, donc $W_{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{2p!}{(2^p\, p!)^2}$ et $W_{2p+1} = \frac{(2^p\, p!)^2}{2p+1!}$
12. Exemple. Fonction Gamma : $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1} \,\mathrm{d}t$
$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ donc $\Gamma(n+1) = n!$, et $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
13. Corollaire. Théorème de Riemann-Lebesgue.
Soit f intégrable sur I un intervalle de $\mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{s\to\infty} \int\limits_I f(t)e^{its} \,\mathrm{d}t = 0$
14. Exemple. Intégrale de Dirichlet
$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t}{\sin t} \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$
15. Théorème. Changement de variable
Soit $\varphi : I = (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}_1$, $f : J \longrightarrow E$ mesurable tels que $\varphi(I) \subset J$, alors

$$\int_a^b \varphi' \cdot f \circ \varphi \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f \,\mathrm{d}\lambda$$

16. Exemple. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(sin(t)) \,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$
Cette intégrale est parfois appelée intégrale de Dirichlet également.
17. Exemple. $\int_0^\pi \frac{1}{1+\cos^2(x)} \,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
18. Règles de Bioche.
Pour calculer une intégrale de la forme $\int\limits_I F(\cos(s), \sin(s)) \,\mathrm{d}s$ avec $F \in \mathbb{R}(X,Y)$, si $F(\cos, \sin)$ reste inchangée avec le changement de variable :
- $\pi - s$, on opère par le changement de variable $t = \sin(s)$
- $-s$, on opère par le changement de variable $t = \cos(s)$
- $\pi + s$, on opère par le changement de variable $t = \tan(s)$

Sinon on pose $t = \tan(\frac{s}{2})$, avec $\sin(s) = \frac{2t}{1+t^2}$ et $\cos(s) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.
19. Exemple. $\int \frac{\sin^3}{1+\cos^2} = x - 2\arctan(x)$
20. Méthode par série de Fourier.
Si l'on reconnait les coefficients de fourier d'une certaine fonction périodique, on peut facilement les calculer à l'aide du DSE de cette fonction
21. Exemple. $I_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx)}{\mathrm{ch}(a)-\sin(x)} \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ impair} \\ 2 \cdot \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} e^{-na}}{\mathrm{sh}(a)} \text{ sinon} \end{cases}$
22. Théorème. Inversion de Fourier. (DVP 1)
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $f, \hat{f} \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R})$, alors $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx}\hat{f}(t) \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\hat{\hat{f}}(-x)$
23. Exemple. Transformée de Fourier d'une gaussienne par EDO et inversion de Fourier (DVP 1).

1.3. Méthodes itératives

24. Proposition. Positivité de l'intégrale
Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est mesurable, alors $\int_I f \, \mathrm{d}\lambda \geqslant 0$

25. Corollaire. Encadrement
Soit $f \leqslant g \leqslant h$ mesurables, alors $\int_I f \, \mathrm{d}\lambda \leqslant \int_I h \, \mathrm{d}\lambda \leqslant \int_I g \, \mathrm{d}\lambda$

26. Exemple. $\frac{\pi^2}{6} - 1 \leqslant \int_1^\infty \frac{1}{t^2} \, \mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi^2}{6}$

27. Exemple. Calcul de l'intégrale de Gauss (1)
Par les accroissements finis $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \leqslant e^u \leqslant \left(1 - \frac{u}{n}\right)^{-n}$ donc
$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x} \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x$, cela donne
$\sqrt{n} W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x} \, \mathrm{d}x \leqslant \sqrt{n} W_{2n-2}$ d'où $\int_0^\infty e^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

28. Méthode des Rectangles.
Soit f continue par morceaux sur (a,b), alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{k(b-a)}{n}) = \int_a^b f \, \mathrm{d}\lambda = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + \frac{k(b-a)}{n})$$

et la vitesse de convergence de ces suites (R_n^- et R_n^+) est en $\frac{1}{n}$.

29. Exemple. pour $r \notin \{-1,1\}$, $I(r) = \int_0^\pi \ln(1 - 2r\cos\theta + r^2) \, \mathrm{d}\theta = \begin{cases} 2\pi \ln|r| \text{ si } |r| > 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

30. Corollaire. Méthode des Trapèzes
Soit f continue par morceaux sur (a,b), alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{k(b-a)}{n}) + f(a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}) = \int_a^b f \, \mathrm{d}\lambda$$

et la vitesse de convergence de cette suite ($T_n = \frac{R_n^- + R_n^+}{2}$) est en $\frac{1}{n^2}$.

L'utilité de cette méthode est plus numérique que calculatoire au sens exact, la plum-part du temps on utilisera les sommes de Riemann.

31. Méthode de Monte-Carlo. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite variables aléatoires réelles iid suivant la loi uniforme sur (a,b) et f intégrable sur (a,b), alors $\int_a^b f \, \mathrm{d}\lambda = \mathbb{E}[f(X_0)]$ et $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(X_k)$ converge presque sûrement vers cette quantité.

Cette méthode ci est également numérique et a l'avantage de bien marcher en dimension supérieure pour calculer des volumes.

32. Exemple. $\int_0^1 \cdots \int_0^1 \cos(\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}) \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \cos(\frac{1}{e})$

33. Méthode ergodique. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (a,b)^{\mathbb{N}}$ une suite équirépartie et f intégrable sur (a,b), alors

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(x_n)$$

34. Exemple. Espérance d'une suite de polynômes trigonométriques aléatoires.
Soit (a_n) une suite de va iid réelles centrées réduites, on considère $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(2k\pi x)$ et X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. On note $\mathbb{E}$ l'espérance associée aux a_n et $\mathbb{E}_X$ l'espérance associée à X.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f_n(X)^2] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_X[f_n(X)^2] = \frac{1}{2}$$

35. Méthode pour intégrales sur un intervalle non fini..
Soit f intégrable sur $\mathbb{R}_+$, alors $\int_0^\infty f \, \mathrm{d}\lambda = \lim_{h\to 0} h \sum_{n\in\mathbb{N}} f(nh)$

36. Exemple. $\int_1^\infty \frac{1}{t^2} \, \mathrm{d}t = 1$

1.4. Méthodes d'interversion

37. Proposition. Convergence monotone
Soit (f_n) une suite de fonctions sur I croissante, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n \, \mathrm{d}\lambda = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\lambda$$

38. Proposition. Convergence dominée
Soit (f_n) une suite de fonctions sur I, telle qu'il existe $\varphi \geqslant 0$ intégrable sur I vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leqslant \varphi$, λ-pp alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n \, \mathrm{d}\lambda = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\lambda$$

Ces deux théorèmes sont très utiles dans la théorie des chaînes de Markov, pour calculer des temps d'arrêt.

39. Proposition. Continuité et dérivation sous l'intégrale
Soit $f(x,t)$ de $I \times J$ dans $\mathbb{R}$ telle pour tout t, $x \mapsto f(x,t)$ soit mesurable, presque pour tout x, $t \mapsto f(x,t)$ soit de classe $\mathcal{C}^n$ et qu'il existe φ positive intégrable telle que pour tout t et presque pour tout x, $|f(x,t)| \leqslant \varphi$, alors
$F : t \mapsto \int_I f(x,t) \, \mathrm{d}x$ est $\mathcal{C}^n$ et $F^{(n)}(t) = \int_I f^n(x,t) \, \mathrm{d}x$

40. Exemple. Calcul de l'intégrale de Gauss (2).

2. Méthodes de calcul d'intégrales en dimension supérieure

2.1. Méthodes pour des fonctions à variable complexe

41. Proposition. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ simplement connexe, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et γ un chemin fermé de Ω, alors

$$\int_\gamma f = 0$$

42. Exemple. Tranformée de Fourier de la Gaussienne (2) par méthode des rectangles.

43. Théorème. Formule des résidus.
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus S)$, avec S sans point d'accumulation dans Ω, alors pour $K \subset \Omega$ à bord régulier, $\partial K \cap S = \varnothing$, $\sharp K \cap S < \infty$ et

$$\int_{\partial K} f = 2i\pi \sum_{a\in S\cap K} \mathrm{Res}(f,a)$$

44. Exemple. Calcul de la transformée de Fourier d'une gaussienne (3) par la méthode des résidus DVP 2

45. Calcul de l'intégrale d'une fonction DSE. Soit $f = \sum a_n z^n$ DSE avec R son rayon de convergence, pour tout chemin γ du disque ouvert de rayon R,

$$\int_\gamma f = \sum a_n \int_\gamma z^n \,\mathrm{d}z$$

46. Exemple. Intégrale de Poisson
$I_P(r) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2-2r\cos\theta+1}\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi 1-r^2}{}$

2.2. Méthodes de calcul pour le cas multidimensionnel

47. Théorème. Fubini
Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ intégrable et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}x_{\sigma(1)}\dots\mathrm{d}x_{\sigma(n)}$$

et f est intégrable $\iff \int_{\mathbb{R}}\dots\int_{\mathbb{R}} |f(x_1,\dots,x_n)|\,\mathrm{d}x_{\sigma(1)}\dots\mathrm{d}x_{\sigma(n)}$

48. Exemple. $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ n'est pas intégrable sur $[0,1]^2$ car
$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4} = -\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

49. Théorème. Changement de variables (version multi-dim)
Soit U,V deux ouverts et φ un $\mathcal{C}_1$ difféomorphisme de U à V, soit $f : V \longrightarrow \mathbb{C}$ mesurable, alors f est intégrable *ssi* $|\det J_\varphi| \cdot f\circ\varphi$ est intégrable et

$$\int_V f\,\mathrm{d}\lambda = \int_U |\det J_\varphi|\cdot f\circ\varphi\,\mathrm{d}\lambda$$

50. Proposition. Coordonnées polaires
Soit f intégrable sur $\mathbb{R}^2$, alors

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}_+}\int_{-\pi}^{\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

51. Exemple. Aire du disque unité

52. Exemple. Calcul de l'intégrale de Gauss (3)

53. Proposition. Coordonnées cylindriques
Soit f intégrable sur $\mathbb{R}^3$, alors

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}_+}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

54. Exemple. Calcul du volume d'un cylindre de révolution.

55. Proposition. Coordonnées sphériques
Soit f intégrable sur $\mathbb{R}^3$, alors

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}_+}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\pi}^{\pi} f(r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta)r^2\sin(\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

56. Exemple. Calcul du volume de la boule en dimension 3.

57. Exemple. calcul du volume V compris entre les deux quadriques $x^2+y^2=z^2$ et $x^2+y^2+z^2=2Rz$

58. Coordonnées hypersphériques.
Cette méthode se généralise en dimension n et permet la simplification ce certains calculs d'intégrales.

59. Exemple. Calcul du volume de $\mathscr{B}_n(0,r)$

2.3. Méthodes issues de la géométrie différentielle

60. Théorème. Formule de Stokes
Soit M une variété différentielle orientée de dimension n, et ω une $(n-1)$-forme différentielle à support compact sur M de classe $\mathcal{C}^1$, alors

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \oint_{\partial M} i^*\omega$$

où d désigne la dérivée extérieure, ∂M le bord muni de l'orientation sortante et i^* l'injection canonique de ∂M dans M.

61. Exemple. Calcul du volume de $\mathbb{S}^n$

62. Corollaire. Formule de Greene-Ostrogradski Pour V une variété différentielle compacte de $\mathbb{R}^3$, $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, on a

$$\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{f}\mathrm{d}V = \oiint_{\partial V} \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

Ce théorème est extrêmement utile en électromag. (Calcul de charge d'un condensateur)

63. Exemple. Calcul de la surface de $\mathbb{S}^2$

3. Développements

- Transformée de FOURIER d'une gaussienne (par EDO) et inversion de FOURIER
  Lemme 1 : Pour $\delta > 0$, la transformée de FOURIER de $\varphi_\delta : x \mapsto e^{-\pi\delta^2x^2} \in L^1(\mathbb{R})$ est $\hat{\varphi}_\delta : \xi \mapsto \frac{1}{\delta}e^{-\pi\frac{\xi^2}{\delta^2}}$
  Théorème 2 : Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors presque pour tout $x \in \mathbb{R}$
  $$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\xi x}\hat{f}(\xi)\cdot\xi$$
- Transformée de FOURIER d'une gaussienne (par prolongement analytique) et de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$
  Application 1 : La fonction $\varphi : x \mapsto e^{-\pi x^2} \in L^1(\mathbb{R})$ est sa propre transformée de FOURIER.

Application 2 : La transformée de FOURIER de $\psi : x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \in L^1(\mathbb{R})$ est $\hat{\psi} : \xi \mapsto \pi e^{-2\pi|\xi|}$.