Exercice récurrence

$U_n = n^5 - 3n^3$

Démontrons par recurrence " $\forall n \geqslant 2 \quad U_n \geqslant n^3$ "

- Initialisation :

pour $n = 2 \quad U_2 = 2^5 - 3 \times 2^3 = 8$ et $2^3 = 8$, on a bien $\geqslant 8$

donc la propriété est vraie au rang $n = 2$

- Hérédité :

Supposons que pour un entier k qcq fixé $k \geqslant 2$, on ait :

$U_k \geqslant k^3$, càd $k^5 - 3k^3 \geqslant k^3 \iff \cancel{k^3}(k^2 - 3) \geqslant \cancel{k^3}$

$\iff k^2 - 3 \geqslant 1$ (car $k > 0$) $\iff k^2 \geqslant 4$

Montrons qu'alors l'inégalité est vraie au rang suivant, càd : $U_{k+1} \geqslant (k+1)^3 \iff (k+1)^5 - 3(k+1)^3 \geqslant (k+1)^3$

$\iff \cancel{(k+1)^3}\left[(k+1)^2 - 3\right] \geqslant \cancel{(k+1)^3} \iff (k+1)^2 - 3 \geqslant 1$

(car $k+1 > 0$) $\iff (k+1)^2 \geqslant 4$

$\iff k^2 + 2k + 1 \geqslant 4$

D'après notre hypothèse de recurrence on a :

$k^2 \geqslant 4$, comme $2k + 1 > 0$ alors $k^2 + 2k + 1 \geqslant k^2 \geqslant 4$

d'où $(k+1)^2 \geqslant 4$ et donc l'inégalité est vraie au rang $(k+1)$.

- Conclusion :

La proposition est vraie pour $n = 2$ et elle est héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \geqslant 2$.