



SORBONNE UNIVERSITÉ

Master AI2D

Rapport : Projet IAR

A simple model for learning in volatile environments

Camélia BOUALI - Jules MAZLUM

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Kalman Filter	3
1.1.1	Le Modèle Génératif (La réalité)	3
1.1.2	La règle de mise à jour (L'apprentissage)	3
1.1.3	Le Gain de Kalman (La confiance relative)	3
1.1.4	Mise à jour de l'incertitude	4
1.2	Volatile Kalman Filter	4
1.2.1	Mise à jour de la valeur (Premier ordre)	4
1.2.2	Mise à jour de la volatilité (Second ordre)	4
1.2.3	Gestion de l'incertitude et de l'autocovariance	5
2	Analyse de la Figure 2 : Comportement du modèle en environnement changeant	6
2.1	Description de l'expérience	6
2.1.1	Analyse des signaux à travers les équations	6
2.1.2	Synthèse de la figure	7
2.2	Analyse de la sensibilité aux paramètres du VKF	7
2.2.1	Définition des paramètres clés	7
2.2.2	Influence de λ : La réactivité au changement	8
2.2.3	Influence de v_0 : L'importance de l'état initial	9
2.2.4	Influence de σ : Le filtre du bruit d'observation	10
2.3	Influence de l'amplitude du signal sur la détection de la volatilité	10
2.3.1	Observations	11
2.3.2	Analyse	12
2.4	Influence de la fréquence des changements sur l'estimation de la volatilité	12
2.4.1	Observations	12
2.4.2	Analyse	13
2.5	Influence de l'irrégularité temporelle des changements (Jitter)	14
2.5.1	Observations	14
2.5.2	Analyse	15
2.6	Généralisation à des niveaux de changement aléatoires	15
2.6.1	Observations	16
2.6.2	Analyse	16
2.7	Étude des limites : Confusion entre bruit et volatilité (Noise Burst)	17
2.7.1	Observations	17
2.7.2	Analyse	17
2.8	Comportement face aux données manquantes (Missing Data)	18
2.8.1	Observations	18
2.8.2	Analyse	19
2.9	Analyse des cas extrêmes et limites du modèle	19
2.9.1	Scénario 1 : Le "Black Swan" (Outlier isolé)	19
2.9.2	Scénario 2 : "The Ramp" (Dérive linéaire)	20
2.9.3	Scénario 3 : "Noise Trap" (Signal noyé dans le chaos)	21

3 Analyse de la Figure 3 : Comparaison des modèles binaires (VKF vs HGF)	23
3.1 Description de l'expérience	23
3.1.1 Analyse des signaux internes	23
3.1.2 Synthèse de la figure	23
3.2 Le paradoxe de l'incertitude maximale ($p = 0.5$)	24
3.2.1 Observations	24
3.2.2 Analyse	24
3.3 Le choc de l'ancrage (Saturation du Sigmoïde)	25
3.3.1 Observations	25
3.3.2 Analyse	25
4 Conclusion	26

1 Introduction

L'apprentissage au sein d'environnements incertains repose sur un équilibre fondamental : la capacité d'un agent à distinguer les fluctuations aléatoires (le bruit) des changements structurels de son environnement. Dans le cadre de ce projet IAR, nous étudions le modèle Volatile Kalman Filter (VKF). Ce modèle vise à reproduire la flexibilité de l'apprentissage humain face à la volatilité, c'est-à-dire lorsque la vitesse de changement du monde évolue elle-même au cours du temps.

Pour comprendre l'architecture du VKF et la manière dont il optimise cette prise de décision, il est essentiel de revenir aux fondements de l'inférence statistique. Nous détaillons ci-après le fonctionnement du filtre de Kalman standard, qui constitue la brique de base sur laquelle repose notre étude, avant d'introduire les mécanismes spécifiques à la gestion de la volatilité.

1.1 Kalman Filter

Le Filtre de Kalman est un algorithme récursif qui permet d'estimer l'état d'un système dynamique à partir de mesures bruitées. Il repose sur un cycle permanent en deux étapes : la **prédition** et la **correction**.

1.1.1 Le Modèle Génératif (La réalité)

On suppose que l'état réel du monde évolue selon une marche aléatoire gaussienne.

$$x_t = x_{t-1} + e_t \quad (\text{Eq 1})$$

- x_t : La **valeur réelle** (cachée) de la variable à l'instant t .
- x_{t-1} : La valeur réelle à l'instant précédent.
- e_t : Le **bruit de processus**, distribué selon une loi normale $\mathcal{N}(0, v)$, où v est la variance du processus.

Ce modèle admet que la réalité n'est pas figée : elle fluctue naturellement avec le temps.

1.1.2 La règle de mise à jour (L'apprentissage)

L'agent ne connaît pas x_t , il en possède une estimation m_t . Lorsqu'il reçoit une observation o_t , il met à jour sa croyance.

$$m_t = m_{t-1} + k_t(o_t - m_{t-1}) \quad (\text{Eq 2})$$

- m_t : L'**estimation actuelle**.
- m_{t-1} : L'estimation précédente.
- o_t : L'**observation** concrète.
- $(o_t - m_{t-1})$: L'**Erreur de Prédition**. C'est l'écart entre ce qui est observé et ce qui était attendu.
- k_t : Le **Gain de Kalman**. C'est le taux d'apprentissage, compris entre 0 et 1.
 - Si $k_t \rightarrow 1$: L'agent accorde une confiance totale à l'observation. Il change d'avis très vite.
 - Si $k_t \rightarrow 0$: L'agent ignore la surprise et reste sur son ancienne estimation.

1.1.3 Le Gain de Kalman (La confiance relative)

Le gain de Kalman n'est pas fixe, il est calculé de manière optimale à chaque étape en fonction de trois sources d'incertitude.

$$k_t = \frac{w_{t-1} + v}{w_{t-1} + v + \sigma^2} \quad (\text{Eq 3})$$

- w_{t-1} : L'**incertitude actuelle**, la variance de l'estimation précédente.
- v : La **volatilité** du monde, variance du bruit de processus.
- σ^2 : Le **bruit d'observation**, imprécision des capteurs ou de l'environnement.

Fonctionnement :

- Si le monde est instable (v grand) ou si l'agent doute de lui-même (w grand) : le numérateur augmente, k_t grimpe. On apprend vite car l'ancienne information est jugée périmée.
- Si les mesures sont parasitées (σ^2 grand) : le dénominateur augmente, k_t baisse. On apprend lentement car l'erreur est probablement due au hasard ("bruit") plutôt qu'à un vrai changement du système.

1.1.4 Mise à jour de l'incertitude

Après avoir intégré la nouvelle observation, le filtre réduit son niveau de doute pour le prochain tour.

$$w_t = (1 - k_t)(w_{t-1} + v) \quad (\text{Eq 4})$$

- w_t : La **nouvelle incertitude**, variance *a posteriori*.
- $(w_{t-1} + v)$: Représente l'incertitude *a priori*, le doute précédent augmenté par la volatilité du monde.

Plus le gain k_t est élevé, car l'observation était jugée fiable, plus l'incertitude w_t diminue drastiquement. L'agent devient plus "sûr de lui" pour l'étape suivante.

1.2 Volatile Kalman Filter

Le **VKF** est une extension du filtre de Kalman conçue pour les environnements où la volatilité n'est pas constante. Sa grande force est d'ajouter une deuxième boucle d'apprentissage : il n'apprend pas seulement la **valeur** des choses, il apprend aussi la **vitesse** à laquelle le monde change.

1.2.1 Mise à jour de la valeur (Premier ordre)

La mise à jour de l'estimation suit la même logique que le filtre de Kalman, mais la volatilité devient dynamique.

L'estimation :

$$m_t = m_{t-1} + k_t(o_t - m_{t-1}) \quad (\text{Eq 10})$$

Le Gain de Kalman dynamique :

$$k_t = \frac{w_{t-1} + v_{t-1}}{w_{t-1} + v_{t-1} + \sigma^2} \quad (\text{Eq 9})$$

- Contrairement au KF classique où la volatilité était constante (v), ici on utilise v_{t-1} , qui est **l'estimation de la volatilité calculée au tour précédent**.
- Si le modèle détecte que le monde s'agit, v augmente, ce qui gonfle le gain k_t : l'algorithme devient instantanément plus réactif.

1.2.2 Mise à jour de la volatilité (Second ordre)

C'est le coeur du VKF. Le modèle observe ses propres erreurs et l'évolution de son incertitude pour ajuster sa perception de la volatilité.

La règle de mise à jour :

$$v_t = v_{t-1} + \lambda \left[\underbrace{(m_t - m_{t-1})^2 + w_{t-1} + w_t - 2w_{t-1,t} - v_{t-1}}_{\text{Surprise observée}} \right] \quad (\text{Eq 13})$$

- v_t : La nouvelle estimation de la volatilité.

- λ : Le **taux d'apprentissage de la volatilité**. Plus il est élevé, plus le modèle réagit vite aux changements de rythme de l'environnement.
- **Le concept de "Surprise"** : Le terme entre crochets mesure l'écart entre le changement réel constaté et ce que la volatilité précédente prédisait.
 - $(m_t - m_{t-1})^2$: Mesure à quel point l'estimation a dû faire un "saut".
 - w_t et $w_{t-1,t}$: Ajustent cette surprise en fonction du niveau de doute du modèle.

Si le saut effectué par le modèle est plus grand que ce qu'il prévoyait (v_{t-1}), il augmente sa volatilité.

1.2.3 Gestion de l'incertitude et de l'autocovariance

Pour que le calcul de la volatilité soit précis, le modèle doit suivre l'évolution de son propre doute.

Incertitude :

$$w_t = (1 - k_t)(w_{t-1} + v_{t-1}) \quad (\text{Eq 11})$$

Autocovariance :

$$w_{t-1,t} = (1 - k_t)w_{t-1} \quad (\text{Eq 12})$$

L'autocovariance ($w_{t-1,t}$) est cruciale : elle mesure la corrélation entre deux états successifs. Elle permet au VKF de distinguer un "bruit" passager d'un véritable changement de tendance dans l'environnement.

Le VKF agit comme un cerveau doté d'un **auto-régulateur de vitesse** :

- **Calme** : Si les observations sont stables, la "surprise" est faible. v_t diminue, le gain k_t baisse. Le modèle devient robuste et ne se laisse pas perturber par de petits bruits.
- **Volatile** : Si une rupture survient, la "surprise" explose. v_t grimpe en flèche, ce qui pousse aussi le gain k_t . Le modèle "oublie" son passé pour apprendre très vite la nouvelle règle.

2 Analyse de la Figure 2 : Comportement du modèle en environnement changeant

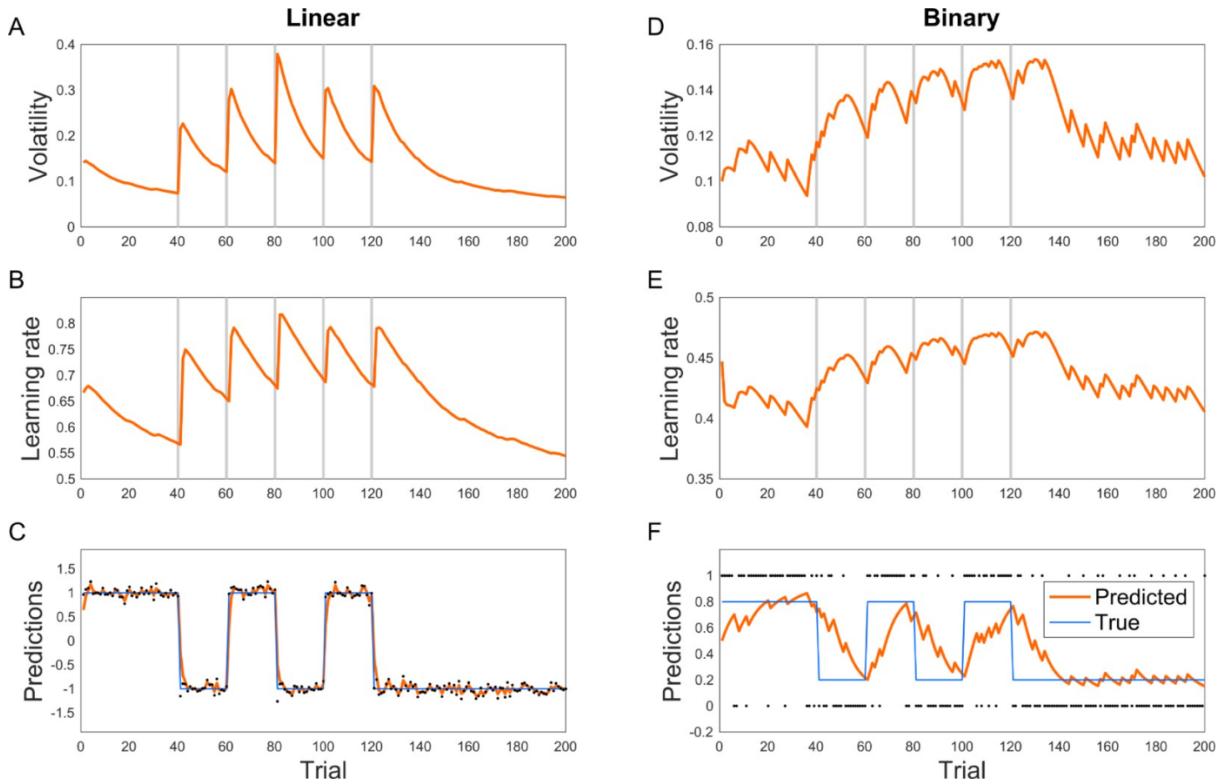


FIGURE 1 – Behavior of the VKF

2.1 Description de l’expérience

Les auteurs simulent deux types de tâches de prédiction sur 200 essais :

- **Le cas Linéaire :** L’observation o_t est une valeur continue . L’état caché x_t bascule brusquement entre +1 et -1. Le bruit d’observation σ^2 est fixe à 0.1.
- **Le cas Binaire :** L’observation o_t est soit 0, soit 1. L’état caché représente ici une probabilité qui bascule de 0.8 à 0.2. Le modèle utilise alors la version "Binary VKF" avec la fonction sigmoïde pour transformer l’état interne en probabilité.

Dans les deux cas, l’environnement alterne entre des phases de stabilité et des moments de rupture, lignes grises sur les graphiques.

Note sur la reproductibilité : Nous avons exécuté le code de simulation à de multiples reprises. Malgré la nature stochastique des bruits de processus et d’observation injectés à chaque itération, les résultats obtenus sont restés systématiquement convergents et identiques aux tendances présentées dans l’article original. Cette stabilité des signaux observés confirme la robustesse du modèle VKF et démontre que les dynamiques présentées en Figure 2 sont des propriétés structurelles de l’algorithme et non le résultat d’un tirage aléatoire spécifique ou d’une sélection arbitraire de données.

2.1.1 Analyse des signaux à travers les équations

L’examen des graphiques permet de valider le comportement mathématique du VKF défini précédemment :

1. **Le pic de Volatilité (v_t) :** On observe qu’à chaque inversion de l’état caché (lignes grises), le signal de volatilité v_t augmente brusquement.

Selon l'**Eq 13**, lorsque l'état change, l'erreur de prédiction ($o_t - m_{t-1}$) devient très grande. Le terme $(m_t - m_{t-1})^2$ dans le calcul de la surprise devient prédominant, ce qui force v_t à croître proportionnellement à la surprise détectée.

2. **L'ajustement du Taux d'Apprentissage (k_t)** : Le graphique du gain suit une courbe presque identique à celle de la volatilité. C'est l'application directe de l'**Eq 9**.
3. **La convergence de la Prédiction (m_t)** : Les figures 2.C et 2.F montrent que le modèle "ratrappé" l'état réel (ligne orange vs pointillés noirs) très rapidement après chaque saut. Grâce à l'**Eq 10**, le nouveau m_t est calculé en donnant un poids prépondérant à la nouvelle erreur. Une fois que m_t a rejoint la nouvelle valeur réelle, l'erreur diminue, la surprise chute, v_t redescend, et le modèle redevient "prudent" pour se protéger du bruit.

2.1.2 Synthèse de la figure

La Figure 2 démontre graphiquement la supériorité conceptuelle du VKF sur un filtre de Kalman classique. Alors qu'un filtre de Kalman standard maintiendrait un taux d'apprentissage k_t constant, le VKF se dote d'une **flexibilité** :

- Il détecte la **rupture** (hausse de v_t).
- Il augmente sa **réactivité** (hausse de k_t).
- Il revient à un état de **stabilité** dès que le monde redevient prévisible.

Cette simulation prouve que le VKF est capable de distinguer le "bruit" : petites fluctuations autour de la moyenne de la "volatilité" : changement de la moyenne elle-même.

2.2 Analyse de la sensibilité aux paramètres du VKF

Pour comprendre la flexibilité du modèle VKF, il est essentiel d'analyser comment ses trois paramètres fondamentaux (λ , v_0 , σ) influencent l'apprentissage de la valeur et de la volatilité. Les simulations suivantes illustrent ces effets sur 200 essais.

2.2.1 Définition des paramètres clés

Le comportement du VKF est piloté par trois leviers :

- λ (**Taux d'apprentissage de la volatilité**) : Il détermine la vitesse à laquelle l'agent met à jour sa croyance sur l'instabilité du monde. C'est le "gain" sur la surprise du second ordre.
- v_0 (**Volatilité initiale**) : Il représente la croyance *a priori* de l'agent sur la vitesse de changement au tout début de l'expérience.
- σ (**Bruit d'observation**) : Il quantifie la part d'erreur que l'agent attribue au hasard (bruit) plutôt qu'à un changement réel de l'état.

2.2.2 Influence de λ : La réactivité au changement

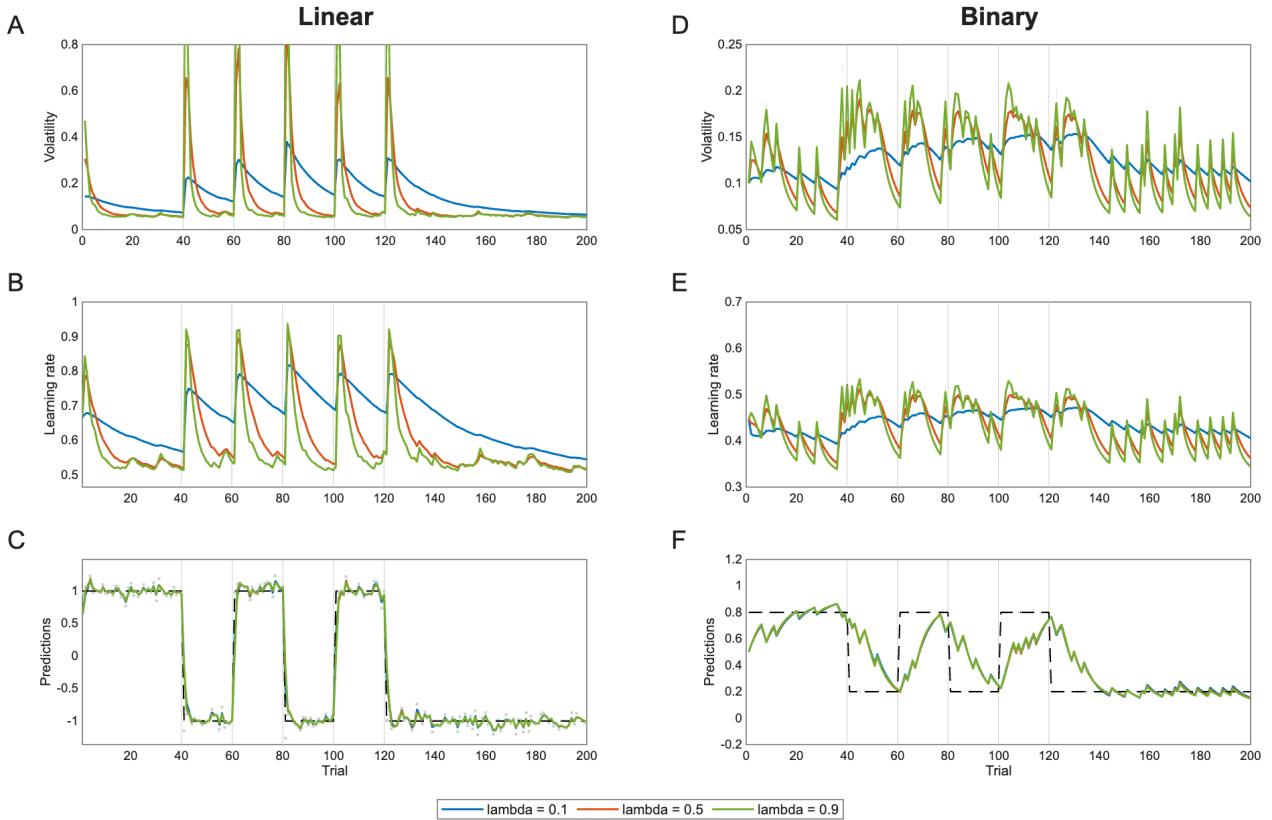


FIGURE 2 – Influence de λ : La réactivité au changement

La figure 2 montre l'effet de la variation de λ (0.1, 0.5, 0.9).

- **Observations :** On remarque qu'avec un λ élevé, les pics de volatilité v_t sont extrêmement hauts et fins lors des inversions. En conséquence, le gain de Kalman k_t atteint des sommets (proches de 1 dans le cas linéaire). À l'inverse, un λ faible lisse la réponse : la volatilité monte moins haut et redescend beaucoup plus lentement.
- **Analyse :** Un λ fort permet une adaptation quasi instantanée aux ruptures, mais peut rendre le modèle instable s'il y a trop de bruit. Un λ faible privilégie la stabilité sur le long terme.
- **Conclusion :** λ contrôle la **vitesse d'adaptation**. Il définit si l'agent est "nervous" et donc a une réaction forte à la surprise ou alors "tempéré" et a évolution lente de la confiance.

2.2.3 Influence de v_0 : L'importance de l'état initial

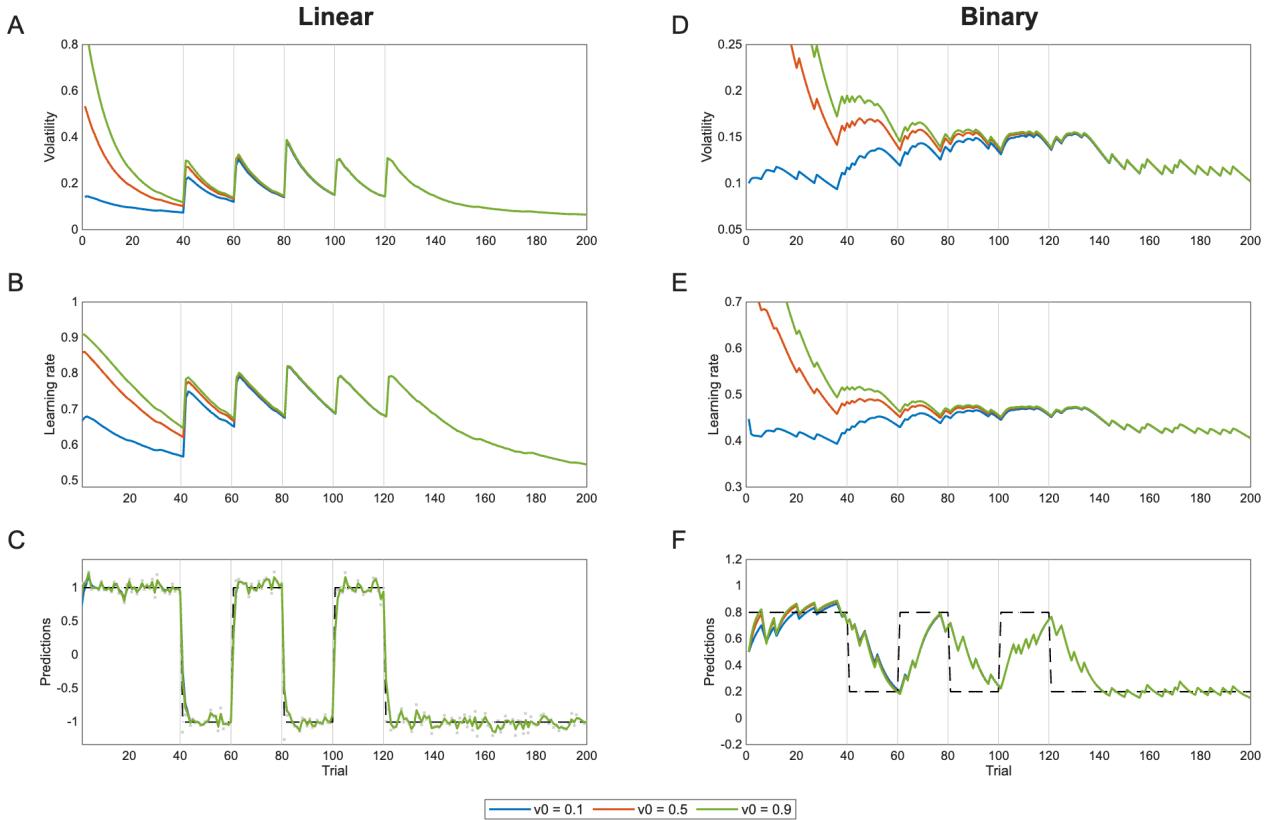


FIGURE 3 – Influence de v_0 : L'importance de l'état initial

La figure 3 présente l'impact du point de départ de la volatilité.

- **Observations :** L'effet est flagrant sur les 40 premiers essais : un v_0 élevé commence avec un taux d'apprentissage très haut, tandis qu'un v_0 faible commence plus bas. Cependant, on constate que toutes les courbes finissent par converger après quelques dizaines d'essais.
- **Analyse :** Puisque le VKF apprend la volatilité de manière récursive (Eq 13), l'influence de la valeur initiale s'estompe à mesure que les observations réelles du monde s'accumulent.
- **Conclusion :** v_0 règle le **biais initial**. Il est crucial pour les premières décisions, mais le modèle est robuste car il finit par apprendre la "vraie" volatilité du système, quel que soit le point de départ.

2.2.4 Influence de σ : Le filtre du bruit d'observation

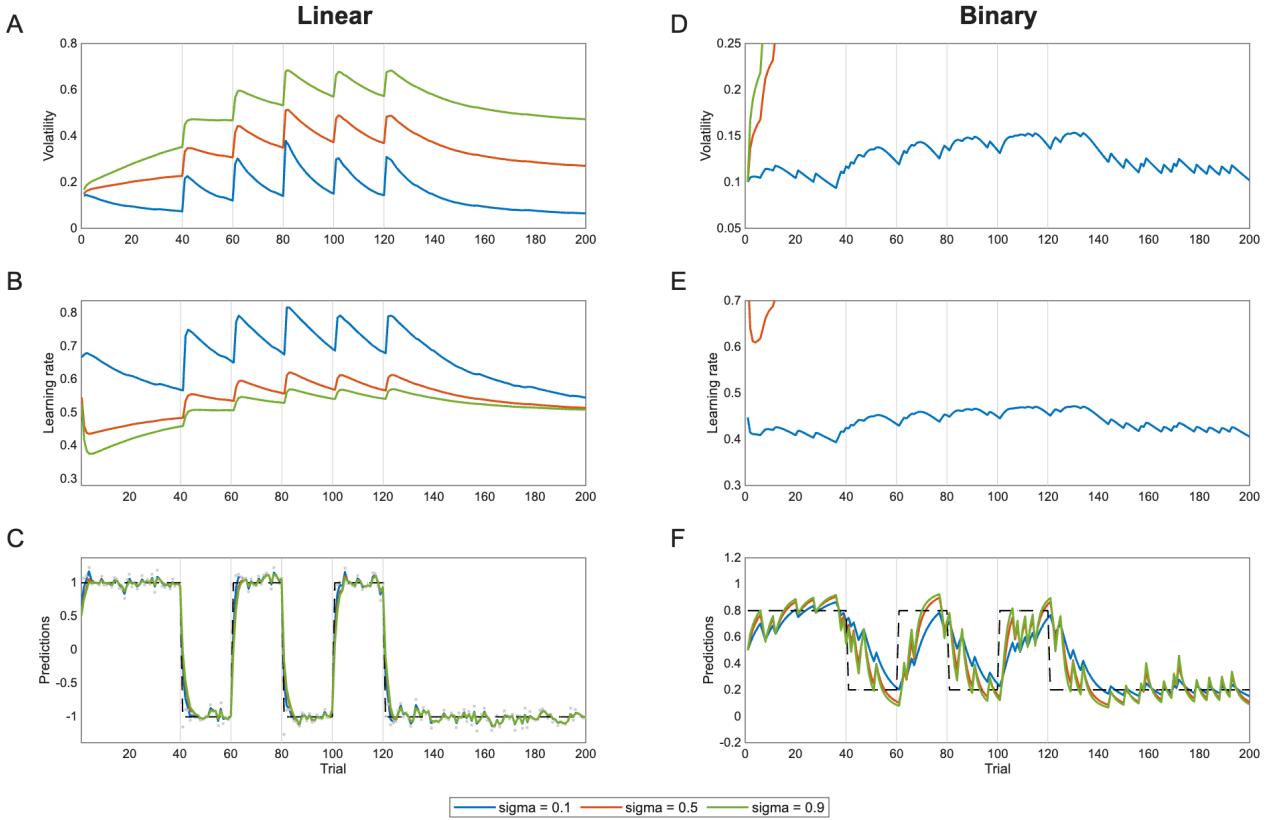


FIGURE 4 – Influence de σ : Le filtre du bruit d'observation

La figure 4 montre l'effet du bruit d'observation supposé σ .

- **Observations :** Plus σ est élevé, plus le gain de Kalman k_t est bas de manière persistante (Fig 2.B). Dans le cas binaire, un σ trop élevé peut même empêcher la volatilité d'être correctement estimée, on peut voir que les courbes peuvent diverger ou rester très plates.
- **Analyse :** Mathématiquement, σ est au dénominateur du calcul de k_t (Eq 9). Si l'agent pense que les mesures sont très bruitées, il réduit son taux d'apprentissage global pour ne pas "apprendre le bruit".
- **Conclusion :** σ agit comme un **amortisseur**. Il régule la confiance accordée à chaque mesure. Un σ bien réglé est essentiel pour distinguer une anomalie passagère (le bruit) d'un changement de règle (la volatilité).

2.3 Influence de l'amplitude du signal sur la détection de la volatilité

L'objectif de cette expérience est de déterminer si l'amplitude d'un changement environnemental influence la capacité du VKF à ajuster ses paramètres d'ordre supérieur, notamment l'estimation de la volatilité.

Hypothèse : Le VKF reposant mathématiquement sur l'erreur de prédiction au carré pour mettre à jour la volatilité (Eq 13), nous supposons qu'un saut de faible amplitude pourrait être confondu avec le bruit d'observation (σ), limitant ainsi la réaction du modèle. À l'inverse, un saut de grande amplitude devrait provoquer une réaction immédiate et massive du gain de Kalman.

Situation : Nous avons testé le modèle avec des paramètres fixes ($\lambda = 0.1, v_0 = 0.1, \sigma = 0.1$) en faisant varier l'écart entre les états cachés :

- **Cas « Large » :** Sauts de forte amplitude (Linéaire : ± 2.5 ; Binaire : probabilités 0.98 vs 0.02).
- **Cas « Small » :** Sauts de faible amplitude (Linéaire : ± 0.3 ; Binaire : probabilités 0.6 vs 0.4).

2.3.1 Observations

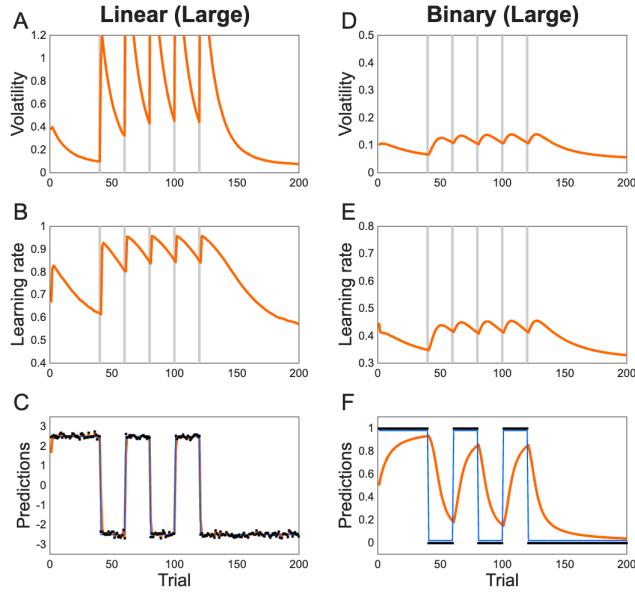


FIGURE 5 – Influence de l'amplitude (Large) du signal sur la détection de la volatilité

Figure 5 : Amplitude Large (Sauts massifs)

- **Linear (A, B, C) :** À chaque changement d'état, la volatilité v_t explose, dépassant la valeur de 1.2. En conséquence directe (Eq 9), le gain de Kalman k_t grimpe jusqu'à 0.95, permettant une mise à jour de la prédiction quasi instantanée. La courbe orange des prédictions se superpose presque parfaitement à la réalité.
- **Binary (D, E, F) :** La réaction est nette et périodique. Bien que les pics soient plus amortis que dans le cas linéaire, la volatilité et le gain augmentent systématiquement à chaque rupture, ce qui permet au modèle de « rattraper » la nouvelle probabilité en moins de 10 essais.

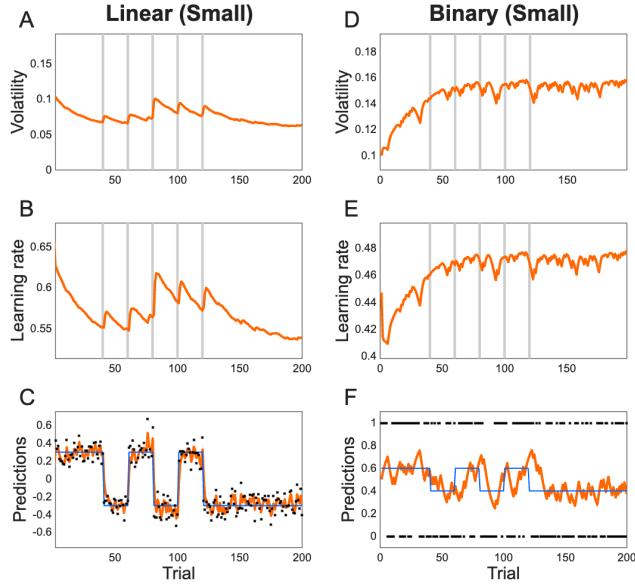


FIGURE 6 – Influence de l'amplitude (Small) du signal sur la détection de la volatilité

Figure 6 : Amplitude Small (Sauts subtils)

- **Linear (A, B, C) :** Les pics de volatilité sont extrêmement faibles (à peine 0.1). Le gain k_t reste bas (oscillant entre 0.55 et 0.6). La prédiction m_t est très bruitée et peine à se stabiliser sur la valeur réelle, car le modèle n'est jamais « certain » qu'un vrai changement a eu lieu.

- **Binary (D, E, F)** : On n'observe aucun pic lors des transitions. Au contraire, la volatilité et le gain augmentent de manière *monotone* et *continue* sur les 200 essais. Le modèle semble être dans un état d'incertitude permanent, interprétant les échecs de prédiction répétés comme une instabilité chronique plutôt que comme des sauts discrets.

2.3.2 Analyse

Cette expérience démontre que la détection de la volatilité par le VKF est strictement dépendante du rapport Signal/Bruit.

1. **La mécanique du saut** : Dans l'Eq 13, le terme $(m_t - m_{t-1})^2$ est le moteur de la hausse de v_t . Si le saut d'amplitude est grand devant le bruit d'observation (σ), ce terme devient prédominant et le modèle identifie immédiatement une rupture environnementale.
2. **Confusion avec le bruit** : Lorsque l'amplitude du changement est faible (proche de $\sigma = 0.1$), l'erreur de prédiction générée par un vrai saut est statistiquement indiscernable de l'erreur générée par le bruit. Le modèle reste alors en mode « prudent », ce qui explique la lenteur de la convergence.
3. **Le cas particulier du Binaire** : Dans le cas binaire à faible amplitude, le modèle ne reçoit jamais de signal assez fort pour déclencher une baisse de la volatilité. Il finit par croire que le monde est intrinsèquement imprévisible, ce qui mène à une dérive de v_t .

Conclusion : Le VKF est un excellent détecteur de ruptures nettes, mais il perd en efficacité lorsque les changements sont subtils. Pour améliorer la détection des petits sauts, il faudrait soit réduire artificiellement σ , soit augmenter le taux d'apprentissage de la volatilité λ , au risque de devenir trop sensible au bruit.

2.4 Influence de la fréquence des changements sur l'estimation de la volatilité

Cette expérience vise à étudier comment la cadence des ruptures environnementales affecte l'état interne du modèle. Nous cherchons à savoir si le VKF est capable de distinguer une période de haute instabilité avec des changements fréquents d'une période de calme entrecoupée de chocs isolés.

Hypothèse : Dans un environnement où les changements sont très rapprochés, la volatilité estimée v_t ne devrait pas avoir le temps de redescendre à sa valeur de base. Cela maintiendrait le modèle dans un état de « vigilance » constante avec un taux d'apprentissage k_t durablement élevé.

Situation : L'expérience se déroule sur 200 essais avec trois phases : une phase stable (0-40), une zone de volatilité (40-160) et un retour au calme (160-200). Nous comparons deux conditions :

- **Condition « Frequent »** : Inversion de l'état tous les 10 essais dans la zone active.
- **Condition « Infrequent »** : Inversion de l'état tous les 60 essais.

2.4.1 Observations

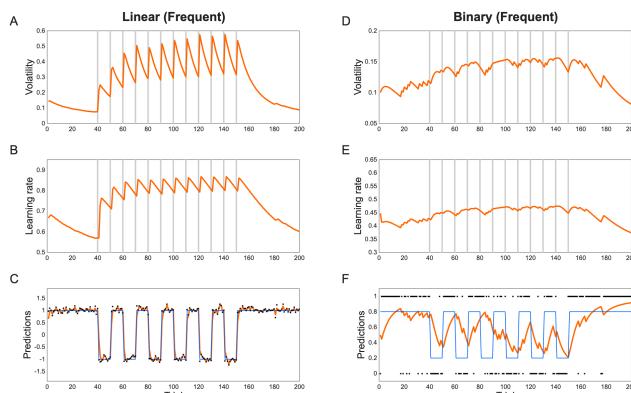


FIGURE 7 – Influence de la fréquence (fort) des changements sur l'estimation de la volatilité

Figure 7 : Changements Fréquents (Haute volatilité)

- **Linear (A, B)** : Dès le début de la zone de changement (essai 40), v_t grimpe selon un motif en « dents de scie ». On observe un effet d’accumulation : chaque nouveau saut survient avant que la volatilité n’ait pu décroître totalement. Le gain k_t se stabilise sur un plateau haut (entre 0.8 et 0.85).
- **Binary (D, E)** : Le signal de volatilité est plus lisse mais suit la même tendance ascendante, se stabilisant autour de 0.15. Le gain k_t reste également élevé (0.45) tout au long de la zone de turbulences.
- **Predictions (C, F)** : Les prédictions sont extrêmement nerveuses et réagissent instantanément à chaque switch, au prix d’une sensibilité accrue au bruit pendant les phases de plateau.

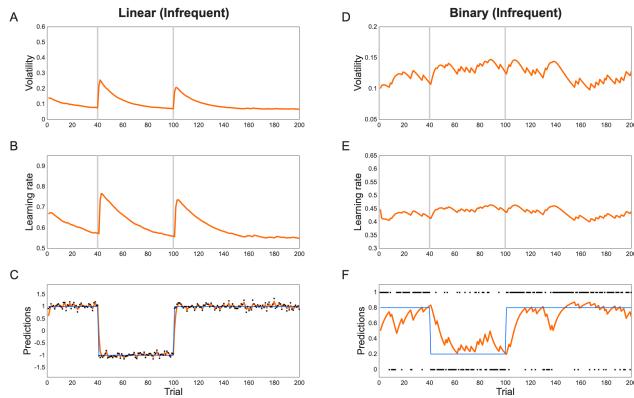


FIGURE 8 – Influence de la fréquence (faible) des changements sur l'estimation de la volatilité

Figure 8 : Changements Rares (Instabilité ponctuelle)

- **Linear (A, B)** : On observe des pics isolés très nets. Après le choc de l’essai 40, la volatilité v_t entame une lente décroissance (Eq 13). À l’essai 100, elle est presque revenue à son niveau initial avant d’être à nouveau stimulée par le second saut.
- **Binary (D, E)** : Le comportement est similaire mais beaucoup plus bruité. Le modèle met plus de temps à « se calmer » après un changement à cause de l’ambiguïté des données binaires.
- **Predictions (C, F)** : Le modèle bénéficie de longues périodes de stabilité où la prédiction est très précise et peu influencée par le bruit, car le gain k_t redescend progressivement vers 0.55.

2.4.2 Analyse

L’analyse de ces graphiques permet de tirer trois conclusions majeures sur la dynamique du VKF :

1. **L’effet de mémoire de la volatilité** : Le paramètre λ agit comme une constante de temps. Si l’intervalle entre deux changements est inférieur au temps de retour à l’équilibre du modèle, la volatilité s’accumule. Le VKF ne traite pas chaque saut de manière isolée mais intègre la « température » globale de l’environnement.
2. **Ajustement automatique du mode d’apprentissage** :
 - En mode Frequent, le VKF reste en mode réactif, privilégiant les nouvelles données (gain élevé) car le passé est jugé peu fiable.
 - En mode Infrequent, le VKF bascule entre un mode exploratoire juste après le saut et un mode conservateur pendant la stabilité, ce qui optimise la précision globale.
3. **Différence de traitement Linéaire/Binaire** : Dans le cas binaire fréquent, le modèle semble saturer plus vite en incertitude. La volatilité v_t peine à redescendre, ce qui montre

que le VKF binaire est naturellement plus prudent et met plus de temps à se convaincre que l'environnement est redevenu stable.

Conclusion : Le VKF démontre ici une excellente capacité d'auto-adaptation. Il identifie correctement non seulement quand un changement survient, mais aussi le rythme de ces changements, ajustant sa fenêtre de confiance en conséquence.

2.5 Influence de l'irrégularité temporelle des changements (Jitter)

L'objectif de cette expérience est de tester la robustesse du VKF face à l'imprévisibilité du moment où le changement survient. Contrairement aux expériences précédentes où les blocs avaient une longueur fixe, nous introduisons ici une variabilité dans la durée des périodes de stabilité.

Hypothèse : Le VKF étant un modèle récursif basé sur la surprise instantanée (Eq 13) et non sur une horloge interne, il devrait être capable de s'adapter à des changements surviennent de manière irrégulière, tant que la durée des blocs laisse au modèle le temps de traiter l'erreur de prédiction.

Situation : Nous avons comparé deux conditions avec des longueurs de blocs variables sur 220 essais :

- **Condition "Jittered"** : Les blocs ont des durées variées mais proches d'une moyenne (entre 12 et 35 essais).
- **Condition "Highly Irregular"** : Un mélange extrême de blocs très courts (5 à 12 essais) et de blocs très longs (jusqu'à 60 essais).

2.5.1 Observations

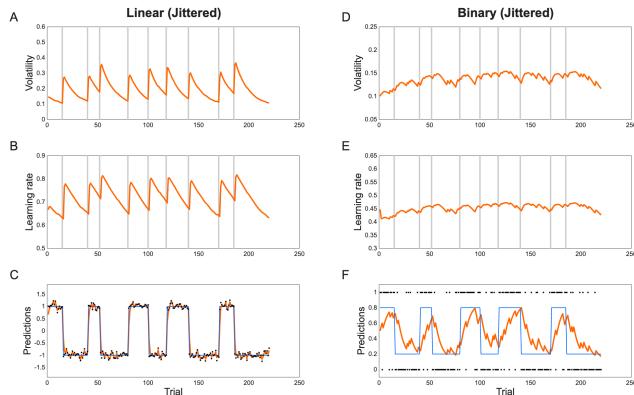


FIGURE 9 – Influence de l'irrégularité temporelle des changements (Jittered)

Figure 9 : Condition Jittered (Variabilité modérée)

- **Linear (A, B, C)** : Le modèle se comporte de manière nominale. On observe des pics de volatilité v_t et de gain k_t de hauteurs similaires à chaque saut, quelle que soit la durée du bloc précédent. Les prédictions (C) s'ajustent avec la même efficacité que dans un rythme régulier.
- **Binary (D, E, F)** : La volatilité v_t reste à un niveau moyen élevé (0.15), car le modèle n'a pas toujours le temps de stabiliser totalement son incertitude avant le saut suivant.

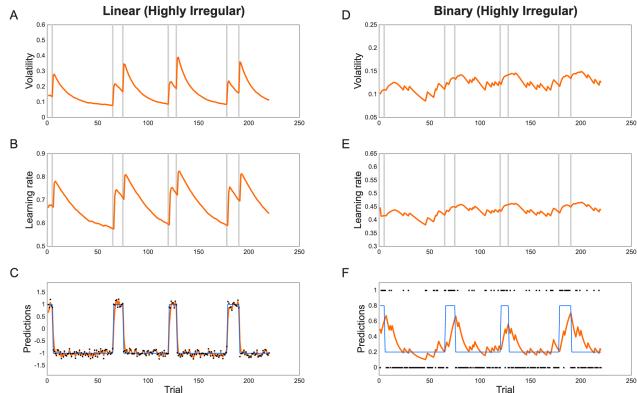


FIGURE 10 – Influence de l'irrégularité temporelle des changements (Highly Irregular)

Figure 10 : Condition Highly Irregular (Variabilité extrême)

- **Linear (A, B)** : Lors des blocs très longs (ex : entre l'essai 10 et 70), la volatilité v_t redescend à son niveau plancher, rendant le modèle très conservateur. Lorsqu'un bloc très court survient juste après (ex : autour de l'essai 180), le modèle commence à peine son ascension de k_t que l'état change déjà à nouveau.
- **Binary (D, E, F)** : L'effet est encore plus marqué. Dans les blocs très courts (5-10 essais), la courbe des prédictions (F) n'a pas le temps d'atteindre la valeur cible (0.8 ou 0.2). Le modèle "hésite" et reste proche de la moyenne 0.5.

2.5.2 Analyse

Cette expérience met en évidence la gestion du temps par le VKF :

1. **Absence de biais temporel** : Le VKF est agnostique au rythme. Contrairement à certains modèles qui pourraient "apprendre" qu'un changement survient tous les X essais, le VKF réagit uniquement à la rupture statistique. C'est une force dans les environnements naturels où les changements sont souvent imprévisibles.
2. **Le coût de la stabilisation** : L'analyse des blocs longs montre que plus le monde est stable, plus le VKF devient "sourd" aux nouvelles informations (baisse de k_t). Cela signifie qu'un changement qui survient après une très longue période de calme nécessite quelques essais supplémentaires pour être "cru" par le modèle.
3. **La limite des blocs courts** : Le VKF possède une inertie intrinsèque liée à λ . Si un environnement change plus vite que la capacité de montée du gain k_t , le modèle échoue à capturer l'état caché. Dans la figure "Highly Irregular", on voit que le modèle est "toujours en retard" sur les séquences rapides.

Conclusion : Le VKF est robuste à l'irrégularité du "jitter", mais sa performance est limitée par un compromis vitesse/précision. Un bloc de stabilité minimal est nécessaire pour que le signal de volatilité puisse piloter efficacement le taux d'apprentissage. Dans un monde trop changeant (blocs < 10 essais), le modèle reste dans un état de doute permanent sans jamais converger.

2.6 Généralisation à des niveaux de changement aléatoires

Jusqu'à présent, nous avons testé le modèle sur des inversions binaires (ex : +1 vers -1). Cette expérience vise à vérifier si le VKF est capable de s'adapter à des changements d'amplitudes variées et imprévisibles, ce qui se rapproche davantage des conditions réelles.

Hypothèse : Le calcul de la volatilité reposant sur le carré de l'erreur de prédiction (Eq 13), le modèle devrait naturellement produire des pics de volatilité dont la hauteur est proportionnelle à la magnitude du saut effectué. Il devrait donc être capable de suivre n'importe quelle valeur sans réglage supplémentaire.

Situation : L'expérience simule 10 blocs de 20 essais.

- **Condition Linear** : À chaque bloc, l'état caché prend une valeur aléatoire entre -2 et $+2$.
- **Condition Binary** : À chaque bloc, la probabilité de l'observation prend une valeur aléatoire entre 0.1 et 0.9 .

2.6.1 Observations

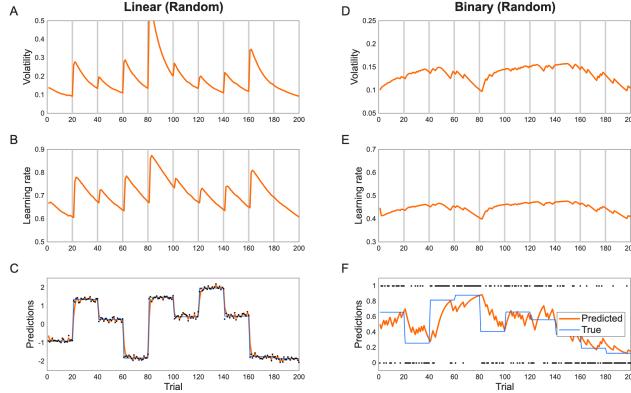


FIGURE 11 – Généralisation à des niveaux de changement aléatoires

Figure 11 : Linear (Random Levels)

- **Volatility (A) et Learning Rate (B)** : On observe que les pics ne sont pas uniformes. Par exemple, le saut majeur vers l'essai 80 passage de -2 à $+1.5$ provoque un pic de volatilité massif (> 0.5), propulsant le gain k_t à près de 0.9 . À l'inverse, un saut plus petit (autour de l'essai 120) génère un pic beaucoup plus modeste.
- **Predictions (C)** : Le modèle suit la « vérité terrain » avec une précision remarquable, s'adaptant instantanément aux grands sauts tout en restant stable lors des petits ajustements.

Figure 11 : Binary (Random Probabilities)

- **Volatility (D) et Learning Rate (E)** : Le signal est plus complexe. On remarque que la volatilité a tendance à être plus basse lorsque la probabilité se rapproche des extrêmes (0.1 ou 0.9) et qu'elle fluctue davantage lorsque la probabilité est proche de 0.5, où l'incertitude est maximale.
- **Predictions (F)** : Le modèle parvient à suivre des probabilités intermédiaires comme 0.4 ou 0.65 sans difficulté majeure, bien que la convergence soit plus lente que dans le cas linéaire à cause du caractère discret 0 ou 1 des observations.

2.6.2 Analyse

Cette expérience confirme la validité de la règle de mise à jour du second ordre du VKF :

1. **Proportionnalité de la réponse** : Le VKF n'est pas un simple détecteur de changement "tout ou rien". Grâce au terme $(m_t - m_{t-1})^2$, il module sa réactivité en fonction de l'importance de la rupture. Plus le monde change radicalement, plus le modèle ouvre sa fenêtre d'apprentissage.
2. **Adaptabilité universelle** : Le modèle ne nécessite pas de connaître à l'avance la plage de valeurs possibles. Il "découvre" la nouvelle moyenne du processus uniquement par le calcul de sa propre surprise.
3. **Gestion de l'incertitude probabiliste** : Dans le cas binaire, le modèle montre qu'il peut apprendre non seulement des règles déterministes, mais aussi des environnements nuancés. La volatilité ne réagit pas seulement aux switchs, mais aussi à la variance intrinsèque des observations.

Conclusion : Le VKF est un modèle robuste et généraliste. Il traite les changements d'états comme un continuum de surprises. Cette expérience démontre que le modèle est parfaitement viable pour modéliser des comportements humains dans des tâches complexes où les récompenses ou les probabilités ne sont pas simplement binaires.

2.7 Étude des limites : Confusion entre bruit et volatilité (Noise Burst)

Dans cette expérience, nous testons la résilience du modèle face à une violation de ses hypothèses fondamentales. Le VKF suppose que le bruit d'observation σ est constant. Nous cherchons ici à observer le comportement du modèle lorsqu'il est confronté à une explosion soudaine du bruit de mesure, alors que l'état réel du monde reste parfaitement stable.

Hypothèse : En l'absence d'un mécanisme de mise à jour pour le paramètre σ , le VKF devrait interpréter une augmentation du bruit d'observation comme une augmentation de la volatilité v_t . En conséquence, il risquerait de "suivre le bruit" (overfitting) au lieu de l'ignorer.

Situation : L'expérience dure 200 essais. L'état caché est fixe (0 pour le linéaire, 0.05 pour le binaire). Entre les essais 75 et 125 délimités par les pointillés rouges, nous injectons une perturbation :

- **Condition Linear** : Le bruit passe d'un écart-type de 0.1 à 1.2.
- **Condition Binary** : On passe d'une probabilité stable à un mode "pile ou face" pur.

2.7.1 Observations

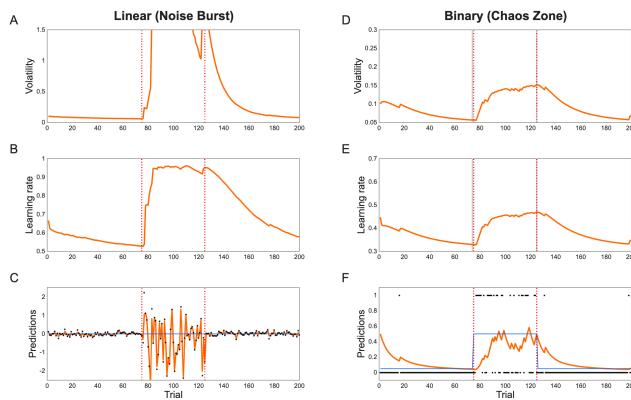


FIGURE 12 – Confusion entre bruit et volatilité

Figure 12 : Linear (Noise Burst)

- **Volatility (A) et Learning Rate (B)** : Dès l'apparition du bruit à l'essai 75, le signal de volatilité explose ($v_t > 1.5$). Le taux d'apprentissage k_t s'élève à 0.95.
- **Predictions (C)** : Le résultat est spectaculaire : le modèle tente de prédire chaque point de bruit. La courbe orange oscille violemment en suivant les mesures aberrantes, alors que la ligne bleue reste à zéro. Le modèle est totalement "trompé" par le bruit.

Figure 12 : Binary (Chaos Zone)

- **Volatility (D) et Learning Rate (E)** : On observe une montée significative de la volatilité durant la zone de chaos. Le modèle perd sa confiance dans sa prédition initiale (0.05).
- **Predictions (F)** : La courbe des prédictions quitte son niveau stable pour osciller autour de 0.5. Le modèle interprète le hasard pur comme une série de changements rapides de probabilités, ce qui dégrade la stabilité de son estimation.

2.7.2 Analyse

Cette expérience met en évidence la principale faiblesse du VKF : la confusion entre incertitude de processus et incertitude de mesure.

- L'erreur de catégorie :** Mathématiquement, le VKF voit une grande erreur de prédiction $(o_t - m_{t-1})^2$. Selon l'Eq 13, sa seule manière d'expliquer cette erreur est d'augmenter v_t (la volatilité). Il n'a aucun moyen de comprendre que c'est le capteur (σ) qui est devenu défaillant.
- L'apprentissage du bruit :** En augmentant v_t , le modèle augmente son gain k_t (Eq 9). Il devient alors extrêmement réactif à des données qui ne contiennent aucune information. C'est un cas typique de sur-apprentissage dynamique.
- Persistante de l'erreur :** On remarque qu'après l'essai 125, le modèle met beaucoup de temps à redescendre. L'incertitude accumulée durant la phase de bruit continue de perturber le modèle bien après le retour au calme.

Conclusion : Le VKF est un modèle puissant mais vulnérable aux variations du bruit d'observation. Dans un environnement réel où la qualité des informations reçues peut varier (ex : capteur dégradé, feedback ambigu), le VKF peut devenir instable. Pour pallier ce défaut, il faudrait une extension du modèle capable d'estimer σ dynamiquement, comme le suggèrent les auteurs dans la discussion de l'article original.

2.8 Comportement face aux données manquantes (Missing Data)

Cette expérience explore la résilience du VKF lorsqu'il est privé d'observations pendant une période prolongée. Nous cherchons à savoir comment le modèle gère son incertitude interne lorsqu'il ne reçoit plus de feedback, et comment il réagit si le monde a changé pendant cette période aveugle.

Hypothèse : En l'absence d'observations, le modèle ne peut pas mettre à jour sa prédiction (m_t). Cependant, son incertitude (w_t) doit continuer de croître car le passage du temps, sans preuve du contraire, augmente la probabilité que l'état caché ait dérivé. À la reprise des données, si un changement a eu lieu, la "surprise" devrait être maximale.

Situation : L'expérience dure 150 essais avec trois phases distinctes :

- **Phase 1 (1-50) :** L'état est stable ($x = 1$).
- **Phase 2 (51-100) : Zone de silence.** Aucune donnée n'est transmise au modèle (observations NaN). Durant cette zone, la réalité bascule de +1 à -1 sans que le modèle ne puisse le voir.
- **Phase 3 (101-150) :** Les observations reprennent, révélant le nouvel état (-1).

2.8.1 Observations

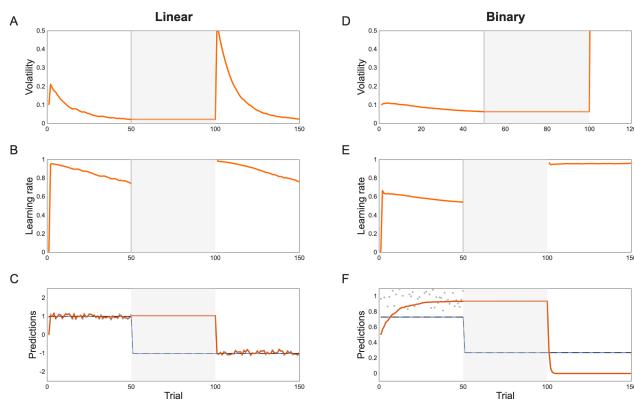


FIGURE 13 – Comportement face aux données manquantes

Figure 13 : Linear & Binary (Missing Data)

- **Predictions (C, F) :** Durant la zone d'ombre grise (51-100), les prédictions m_t restent parfaitement horizontales. Le modèle maintient sa dernière croyance connue. À l'essai 101, dès la première observation, le modèle effectue un saut brutal pour rejoindre la nouvelle réalité.

- **Volatility (A, D)** : La volatilité estimée v_t reste plate pendant l'absence de données car il n'y a pas d'erreur de prédiction pour l'alimenter. Cependant, dès le retour des données à l'essai 101, on observe le pic de volatilité le plus élevé de toutes nos expériences.
- **Learning Rate (B, E)** : Le gain de Kalman sature immédiatement à son maximum dès la reprise.

2.8.2 Analyse

Cette simulation met en lumière la gestion rigoureuse de l'incertitude par le VKF :

1. **L'inertie de la croyance** : Sans nouvelle preuve, le VKF ne "devine" pas le changement, il reste sur sa position. C'est un comportement rationnel : en l'absence de données, la meilleure estimation de l'état actuel reste le dernier état connu.
2. **L'accumulation de l'incertitude** : Bien que v_t soit stable durant le silence, l'incertitude interne w_t augmente mécaniquement à chaque pas de temps (Eq 11). Cela signifie que plus la période de silence est longue, plus le modèle sera prêt à changer d'avis rapidement dès que la première donnée arrivera.
3. **Récupération instantanée** : Le saut vertical à l'essai 101 montre que le VKF ne nécessite pas de phase de "ré-apprentissage" lente. Grâce au couplage entre l'erreur massive constatée au retour et l'incertitude accumulée, le gain de Kalman s'ouvre totalement, permettant une correction en un seul essai.

Conclusion : Le VKF est parfaitement adapté aux flux de données intermittents. Il sait maintenir une croyance stable en l'absence de signal tout en augmentant sa vigilance interne, ce qui lui permet de se synchroniser instantanément avec la réalité dès que le contact est rétabli.

2.9 Analyse des cas extrêmes et limites du modèle

Pour finaliser notre évaluation, nous avons soumis le VKF à trois scénarios atypiques conçus pour tester sa résilience face à des événements imprévus, des dérives lentes et des environnements saturés de bruit.

2.9.1 Scénario 1 : Le "Black Swan" (Outlier isolé)

Ce scénario teste la réaction du modèle face à une donnée aberrante unique au sein d'un environnement ultra-stable.

Situation : L'état est fixe ($x = 1$) avec un bruit très faible. À l'essai 75, une observation isolée tombe à -4 .

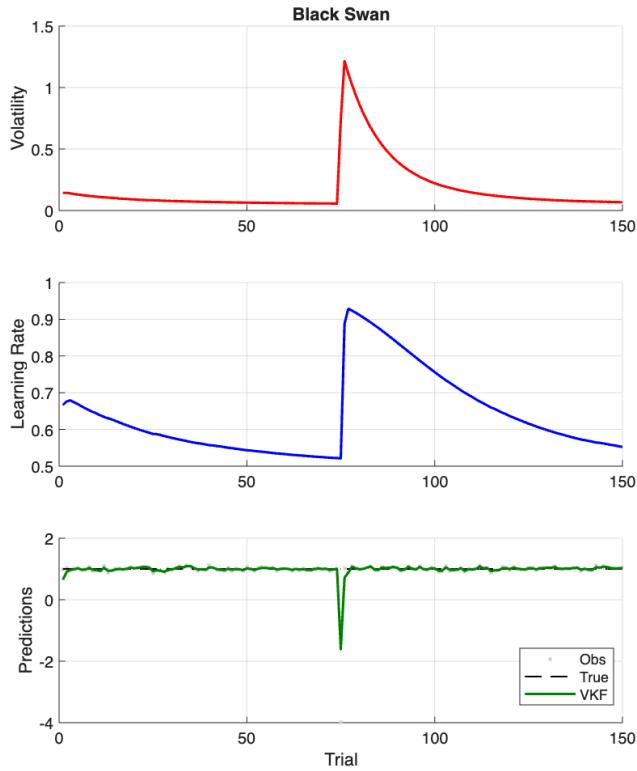


FIGURE 14 – Enter Black Swan

Observations

- **Volatility & Learning Rate :** On observe un pic d'une violence extrême. La volatilité bondit de 0.05 à plus de 1.2 instantanément. Le gain k_t sature à 0.95.
- **Predictions :** Le modèle "panique" et tente de suivre l'outlier (plongeon de la courbe verte). Cependant, dès l'essai suivant, il réalise son erreur et revient très vite à la normale.

Analyse Le VKF est **hypersensible aux outliers**. Puisqu'il n'a pas de notion de "probabilité d'erreur de mesure aberrante", il interprète tout écart massif comme une rupture de la règle mondiale. C'est le prix à payer pour sa grande réactivité : il préfère se tromper sur un outlier plutôt que de rater un vrai changement de régime.

2.9.2 Scénario 2 : "The Ramp" (Dérive linéaire)

Nous testons ici si le modèle interprète une progression lente comme de la volatilité.

Situation : L'état réel augmente linéairement de -1 à $+1$ sur 150 essais.

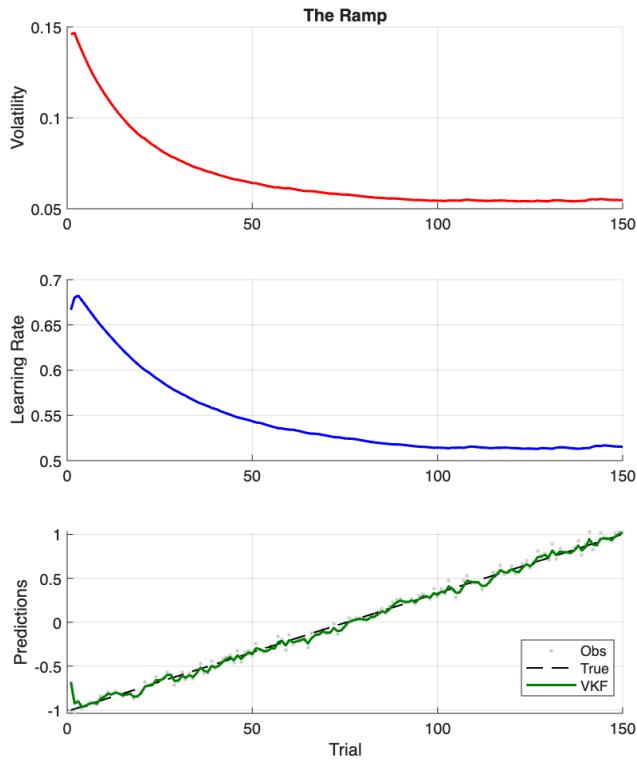


FIGURE 15 – The Ramp

Observations

- **Volatility & Learning Rate :** Contre-intuitivement, la volatilité *décroît* tout au long de la rampe. Le modèle devient de plus en plus "confiant" (baisse de k_t).
- **Predictions :** La courbe verte suit la rampe avec une très grande précision, mais avec un léger retard constant.

Analyse Le VKF est conçu pour les **changements brusques** et non pour les tendances. Comme l'écart entre deux essais successifs est faible et constant, la "surprise" (Eq 13) est minimale. Le modèle conclut donc que le monde est très stable, même s'il est en mouvement permanent. Cela montre que le VKF n'est pas adapté pour modéliser des phénomènes de croissance ou de dérive continue.

2.9.3 Scénario 3 : "Noise Trap" (Signal noyé dans le chaos)

Ce cas simule une situation où un vrai changement survient mais est masqué par un bruit massif. **Situation :** L'état change légèrement de 0 à 0.2 à l'essai 75, mais le bruit d'observation est géant ($\sigma = 0.8$).

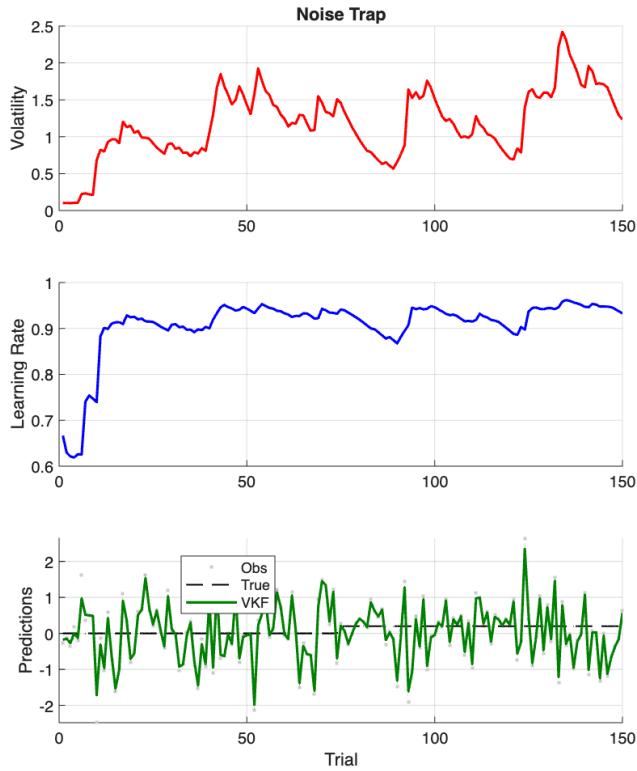


FIGURE 16 – Noise Trap

Observations

- **Volatility & Learning Rate :** Le signal de volatilité est chaotique et culmine à des valeurs très élevées (> 2.0). Le taux d'apprentissage reste bloqué au maximum (> 0.9).
- **Predictions :** Les prédictions sont illisibles. Le modèle "sur-apprend" le bruit en permanence et le petit changement de 0.2 est totalement invisible pour lui.

Analyse C'est le **piège du bruit**. Lorsque le bruit d'observation dépasse largement la capacité de discrimination du modèle (fixée par son paramètre σ), le VKF entre dans une boucle de rétroaction positive : l'erreur crée de la volatilité, qui augmente le gain, qui rend le modèle encore plus sensible au bruit. Le modèle devient alors instable et incapable d'extraire le moindre signal utile.

Conclusion générale des expériences : Le VKF excelle dans les environnements à ruptures nettes et sait s'adapter aux différents rythmes de changement. Ses limites apparaissent face aux données aberrantes isolées qu'il sur-interprète, et face aux bruits massifs qui le font diverger. Ces résultats confirment que le VKF est un modèle de "détection de rupture" très performant, mais qu'il nécessite une connaissance ou une estimation précise du bruit de fond pour rester stable.

3 Analyse de la Figure 3 : Comparaison des modèles binaires (VKF vs HGF)

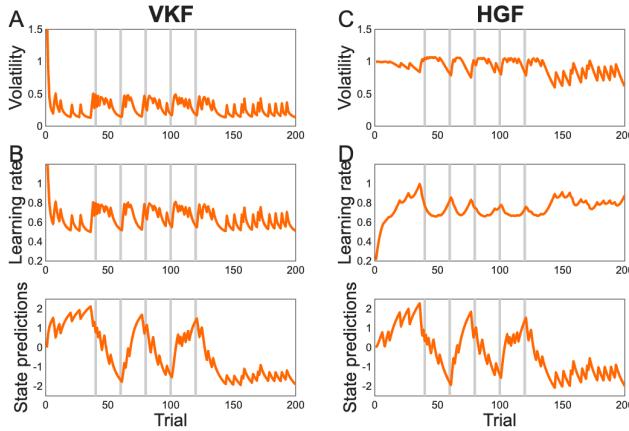


FIGURE 17 – Behavior of the binary VKF and HGF

3.1 Description de l’expérience

Dans cette section, nous quittons le domaine des observations continues pour nous intéresser au cas binaire, représentatif des tâches de choix probabilistes (récompense ou échec). L’observation o_t est ici une variable de Bernoulli 0 ou 1.

L’enjeu majeur réside dans la non-linéarité : pour estimer une probabilité, les modèles travaillent dans un **espace latent** (non borné) dont le résultat est ensuite compressé par une fonction sigmoïde $s(m_t)$ pour correspondre à l’intervalle $[0, 1]$. Cette transformation rend l’inférence exacte mathématiquement intractable. Les auteurs comparent ici le **VKF binaire** fondé sur une approximation par appariement de moments et le **HGF binaire** fondé sur une approximation de Taylor du second ordre.

3.1.1 Analyse des signaux internes

L’examen des graphiques révèle une différence fondamentale dans la gestion de l’incertitude entre les deux algorithmes :

- **Le couplage Volatilité-Apprentissage dans le VKF :** Le VKF binaire conserve la propriété structurelle du cas linéaire. À chaque inversion de la probabilité réelle, l’erreur de prédiction augmente, provoquant un pic immédiat de la volatilité estimée v_t (A), qui entraîne mécaniquement une hausse du gain de Kalman k_t (B). Le modèle "s’ouvre" aux nouvelles informations pour corriger rapidement sa prédiction.
- **Le découplage dans le HGF :** Le comportement du HGF est plus erratique. Le taux d’apprentissage (E) ne suit pas systématiquement les pics de volatilité. Dans le HGF binaire, le gain est paradoxalement influencé par la valeur de la prédiction elle-même : plus le modèle est proche d’une certitude (0 ou 1), plus son gain diminue, même si l’environnement change.

3.1.2 Synthèse de la figure

La Figure 17 démontre que le VKF maintient une corrélation positive systématique entre volatilité et apprentissage, là où le HGF peut présenter une corrélation négative contre-intuitive. Cette stabilité fait du VKF un modèle plus robuste et biologiquement plus plausible pour modéliser le comportement humain sous incertitude.

3.2 Le paradoxe de l'incertitude maximale ($p = 0.5$)

Cette expérience vise à tester la capacité des modèles à distinguer le bruit d'observation intrinsèque, le hasard d'un processus de Bernoulli, d'une réelle volatilité de l'environnement. L'objectif est de vérifier l'hypothèse selon laquelle le VKF est plus robuste face à une entropie maximale stationnaire.

Situation : Nous simulons une séquence de 200 essais où la probabilité de succès est fixée à $p = 0.5$. Dans cette configuration, l'état réel est constant $x = 0$ en espace latent, mais l'incertitude de mesure est maximale car l'issue de chaque essai est purement aléatoire. On cherche à voir si le modèle "panique" face à ce bruit permanent.

3.2.1 Observations

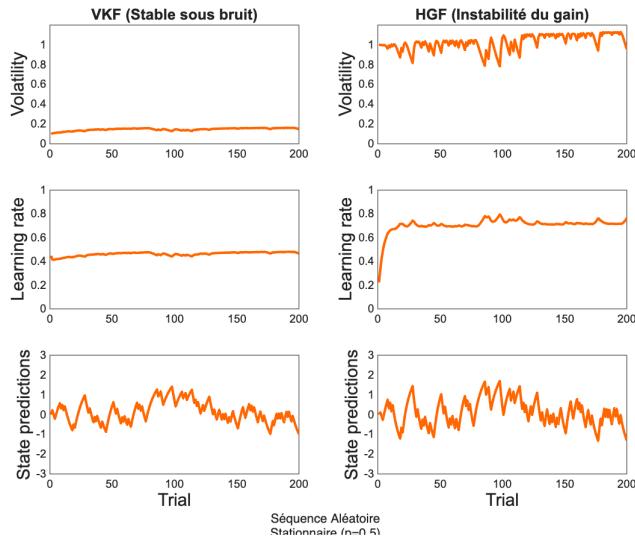


FIGURE 18 – Incertitude maximale

- **Colonne VKF (Stable sous bruit) :** On observe que le signal de volatilité v_t reste extrêmement bas et stable, évoluant lentement entre 0.1 et 0.2. En conséquence, le taux d'apprentissage k_t demeure quasiment plat autour de 0.45. Les prédictions de l'état latent sont lisses et gravitent de manière cohérente autour de la valeur réelle 0.
- **Colonne HGF (Instabilité du gain) :** À l'inverse, le HGF interprète le hasard pur comme une instabilité structurelle. Le signal de volatilité s'envole immédiatement pour saturer près de sa limite haute (1.0) avec une forte variance. Cela propulse le taux d'apprentissage à des niveaux très élevés (environ 0.7), rendant le modèle hypersensible à chaque observation. Les prédictions deviennent alors extrêmement nerveuses et erratiques, le modèle tentant de suivre le "bruit" comme s'il s'agissait d'un signal.

3.2.2 Analyse

Cette expérience met en lumière une propriété fondamentale du VKF : sa capacité à ignorer le bruit de mesure stationnaire.

Mathématiquement, le VKF parvient à comprendre que si les erreurs de prédiction sont fréquentes mais ne s'accumulent pas dans une direction précise, la volatilité n'a pas lieu d'augmenter. Le HGF, en revanche, semble incapable de décorrélérer le hasard de la volatilité. En "sur-apprenant" le bruit, le HGF dégrade la stabilité de son estimation.

Conclusion : Le VKF se révèle bien plus parcimonieux et robuste. Il démontre qu'il n'augmente son taux d'apprentissage que lorsqu'il détecte une rupture statistique nette, là où le HGF sature dès que l'incertitude de Bernoulli augmente.

3.3 Le choc de l'ancrage (Saturation du Sigmoïde)

Cette expérience a pour but d'évaluer la capacité des modèles à se "débloquer" après une très longue période de certitude. En milieu binaire, une probabilité proche de 1 ou 0 sature la fonction sigmoïde, ce qui peut paralyser l'apprentissage. Nous testons l'hypothèse selon laquelle le VKF est plus réactif que le HGF pour sortir d'un état d'ancrage profond.

Situation : Nous simulons une phase d'ancrage très longue de 150 essais avec une probabilité de succès élevée ($p = 0.95$). À l'essai 150, l'environnement bascule brutalement vers une probabilité très faible ($p = 0.05$). On observe la vitesse à laquelle les modèles ajustent leur prédiction latente pour traverser la barre du 0.

3.3.1 Observations

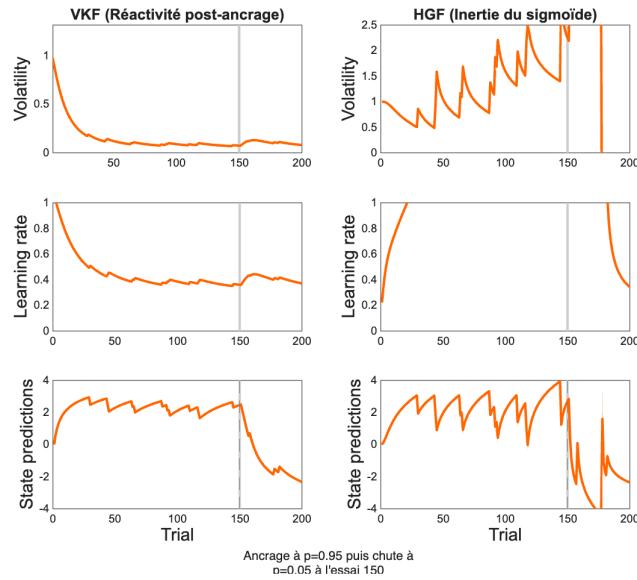


FIGURE 19 – Le choc de l'ancrage

- **Colonne VKF (Réactivité post-ancrage) :** Durant la phase d'ancrage, la volatilité v_t et le taux d'apprentissage k_t diminuent progressivement pour atteindre un niveau plancher, signe que le modèle est "confiant". Dès la rupture à l'essai 150, on observe un rebond immédiat du gain de Kalman (k_t). La courbe des prédictions décroche instantanément et rejoint la nouvelle réalité de manière fluide et rapide.
- **Colonne HGF (Inertie du sigmoïde) :** Le HGF montre un comportement problématique. Durant l'ancrage, sa volatilité est instable et son taux d'apprentissage sature à son maximum (1.0) de façon persistante. Malgré ce gain maximal, la prédiction latente reste "bloquée" en haut après l'essai 150. On observe une inertie notable : le modèle continue de prédire une probabilité haute pendant plusieurs essais avant de chuter brutalement et de manière chaotique.

3.3.2 Analyse

Cette expérience démontre une faiblesse structurelle du HGF binaire : l'inertie liée à la saturation. Dans le HGF, la précision de l'observation est mathématiquement liée à la valeur de la croyance. Quand le modèle est ancré à 0.95, il devient "aveugle" aux changements car il écrase l'erreur de prédiction à travers le sigmoïde.

Le VKF, en revanche, utilise une règle de mise à jour fondée sur l'appariement de moments qui maintient une sensibilité aux erreurs même en zone de saturation. Sa volatilité v_t agit comme un véritable "détecteur de rupture" qui force le gain à remonter dès que les premiers 0 apparaissent, permettant une adaptation quasi-immédiate.

Conclusion : Le VKF est nettement supérieur pour modéliser des agents capables de changer d'avis rapidement après une longue période de certitude, là où le HGF souffre d'un conservatisme algorithmique excessif.

4 Conclusion

Ce rapport a permis d'explorer en profondeur les mécaniques du Volatile Kalman Filter et d'évaluer sa robustesse face à diverses dynamiques environnementales. En étendant le filtre de Kalman classique par l'ajout d'une seconde boucle d'apprentissage dédiée à la volatilité, le VKF propose un compromis élégant entre rigueur statistique et simplicité algorithmique.

Nos différentes simulations ont mis en exergue les propriétés fondamentales du modèle :

- **Une réactivité adaptative :** Le modèle excelle dans la détection de ruptures brutales, ajustant son gain d'apprentissage de manière quasi-instantanée pour intégrer de nouvelles informations.
- **Une gestion rigoureuse de l'incertitude :** L'analyse des données manquantes a démontré la capacité du modèle à accroître sa vigilance interne pendant les périodes de silence, permettant une resynchronisation immédiate dès la reprise des observations.
- **Une supériorité structurelle en milieu binaire :** La confrontation avec le modèle HGF a révélé que le VKF, grâce à son approximation par appariement de moments, évite les phénomènes d'inertie et de saturation rencontrés aux bornes du sigmoïde. Il maintient un couplage constant entre volatilité et apprentissage, garantissant une meilleure résolution des signaux probabilistes.
- **Des limites identifiées :** L'étude des cas extrêmes a révélé une hypersensibilité aux valeurs aberrantes comme dans Black Swan et une difficulté naturelle à modéliser les dérives linéaires comme dans The Ramp, confirmant que le VKF est avant tout un détecteur de changements de régime plutôt qu'un extracteur de tendances.

En conclusion, le VKF s'impose comme une alternative performante et mathématiquement stable aux modèles plus complexes comme le HGF. Sa capacité à réconcilier les théories classiques du conditionnement psychologique (*Pearce-Hall*) avec l'inférence bayésienne en fait un outil de choix pour la modélisation en neurosciences cognitives. Pour de futurs travaux, l'intégration d'une estimation dynamique du bruit d'observation (σ) pourrait pallier sa vulnérabilité actuelle face aux explosions de bruit (Noise Trap) et parfaire sa robustesse dans des environnements encore plus instables.